# ŠTEVILA

1. Naravna $\mathbb{N}$ (indukcija)
   Cela $\mathbb{Z}$ (odštevanje)
   Racionalna $\mathbb{Q}$ (deljenje)
2. Realna $\mathbb{R}$ (absolutna vrednost)
3. Kompleksna $\mathbb{C}$ (kartezično)

**1.**

## INDUKCIJA

Princip indukcije: $A \subset \mathbb{N}, a \in A,\ a \in A \Rightarrow a+1 \in A$

$\Downarrow$

$\{a, a+1, a+2, \ldots\} \subseteq A$

Shema uporabe: dokaži, da velja $T(n), \forall n \in \mathbb{N}$
trditev

a) Baza ind. $T(1)$
$n=1$

b) Indukcijski korak $T(n) \Rightarrow T(n+1)$

indukcijska predpostavka
→ predpostavimo, da trditev za katerikoli $n \in \mathbb{N}$ velja

Primer: dokaži $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

B.I.: $n=1$

$1 = \frac{1(1+1)(2+3)}{6}$

$1=1$ ✓

I.K.: $\underbrace{1^2+2^2+\ldots+n^2}_{\text{I.P.}}+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

preoblikuješ s ciljem, da dobiš ta izraz

$\frac{2n^3+3n^2+n+6n^2+12n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

✓✓ $T(n)$ dokazan $\forall \in \mathbb{N}$

Recimo, da velja $T(s)$

$T(n) \Rightarrow T(n+3), \forall n \in \mathbb{N}$

ali velja $T(2025)$?

**2.**

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ... iracionalna št. $(\sqrt{2}, \pi, e \ldots)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ ima decimalni zapis

## OMEJENOST

Naj bo $A \subset \mathbb{R}, A \neq \{\}$

Množica $A$ je **NAVZGOR OMEJENA**, če
zgornja meja $A$
$\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A,\ M \geq a$

Če je $A$ navzgor omejena, vedno obstaja najmanjša zgornja meja: **SUPREMUM**

Če je supremum $\in A$, mu rečemo: **MAKSIMUM**

Množica $A$ je **NAVZDOL OMEJENA**, če
spodnja meja $A$
$\exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A,\ m \leq a$

Če je $A$ navzdol omejena, vedno obstaja največja spodnja meja: **INFIMUM**

Če je infimum $\in A$, mu rečemo: **MINIMUM**


Primer:

| množica: | $(0,1)$ | $[0,5]$ | $[6,7)$ | $(8,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| sup | 1 | 5 | 7 | / |
| max | / | 5 | / | / |
| inf | 0 | 0 | 6 | 8 |
| min | / | 0 | 6 | / |

## ABSOLUTNA VREDNOST

$x \in \mathbb{R}$

$|x| = \begin{cases} x;\ x \geq 0 \\ -x,\ x < 0 \end{cases}$

$|x-y|$ ... razdalja med $x$ in $y$

Lastnosti:
- $|x| \geq 0$
- $|xy| = |x| \cdot |y|$
- $|x+y| \leq |x|+|y|$

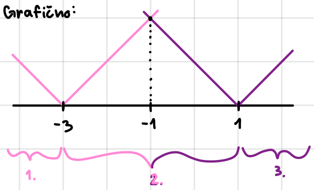
Primer $\underset{2.,3.}{|x-1|} = \underset{1.,2.}{|x+3|}$

1. $x+3<0$
   $x<-3$
   $-x+1=-x-3$
   $1=-3$ //
   ni rešitve

2. $x+3 \geq 0$ $\quad$ $x-1<0$
   $x \geq -3$ $\quad$ $x<1$
   $-3 \leq x < 1$
   $-x+1=x+3$
   $-2x=2$
   $\boxed{x=-1}$
   rešitev ustreza pogoju

3. $x-1>0$
   $x>1$
   $x-1=x+3$
   $-1=3$
   ni rešitve

Grafično:




**3.**

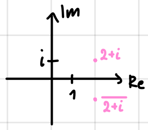
## KOMPLEKSNA ŠTEVILA

$i = \sqrt{1}$

$\mathbb{C} = \{a+bi;\ a,b \in \mathbb{R}\}$

$z = a+bi$ $\quad$ $a = Re(z)$
$b = Im(z)$

### Kompleksna ravnina




### Pravila za računanje

- vsota/razlika: kot vektorji
- množenje: $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$
- deljenje: $\frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{\ldots}{1+1} = \ldots$

$i^{4n+ost.} = i^{ost.}$, $ost. \in \{1,2,3\} \wedge n \in \mathbb{N}$

| | |
|---|---|
| $i^1 = i$ | $i^{4n+1} = i$ |
| $i^2 = -1$ | $i^{4n+2} = -1$ |
| $i^3 = -i$ | $i^{4n+3} = -i$ |
| $i^4 = 1$ | $i^{4n} = 1$ |

### Absolutna vrednost

$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(Re(z))^2+(Im(z))^2}$

Lastnosti:
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z_1 \cdot z_1| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

trikotniška neenakost

### Konjugirana vrednost

$\bar{z} = a-bi$

Lastnosti:
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z_1 \cdot z_1} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$
- $\overline{z_1+z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$
- $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ $\quad$ $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{-(z-\bar{z})i}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{i} = -i$

$z=1$

$z^2=1 \rightsquigarrow z_1=1,\ z_2=-1$

$z^3=1 \rightsquigarrow z_1=1,\ z_2=?,\ z_3=?$

$z^4=1 \rightsquigarrow z_1=1,\ z_2=i,\ z_3=-1,\ z_4=-i$

Primer: $2 \cdot \bar{z} = z^2$

$2(\underset{Re}{x}-\underset{Im}{yi}) = x^2-y^2+2xyi$

Im: $-2y = 2xy \ \backslash : \cancel{2y}$ $\backslash : 2$
IZGUBIMO REŠITVE

$xy+y=0$

$y(x+1)=0$

1. $\boxed{y=0}$
2. $\boxed{x=-1}$

Re: $2x = x^2-y^2$

1. $y=0$
   $2x = x^2-0^2$
   $x(x-2)=0$
   $\boxed{x_1=0 \quad x_2=2}$

2. $x=-1$
   $-2=1-y^2$
   $\boxed{y_{1,2}=\pm\sqrt{3}}$

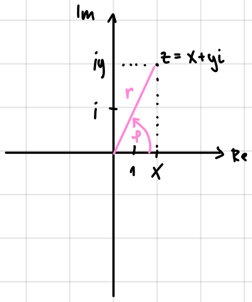
REŠITVE: $z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$ (2.)

$z_3 = 0$ (1)

$z_4 = 2$ (1.)

6.10.

## Kartezični zapis




## Polarni zapis

$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

argument, polarni kot — $\varphi \in \mathbb{R}$ ni enolično določen → do $+k2\pi$ natančno, $k \in \mathbb{Z}$ → pri $z=0$ je kot karkoli

$r = |z| \in [0,\infty)$ je enolično določen

$\boxed{\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi \\ y &= r \cdot \sin\varphi \end{aligned}}$

$\tan\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \arctan\frac{y}{x}$

upoštevamo kvadrant!

**Primer:** Zapiši v polarni obliki

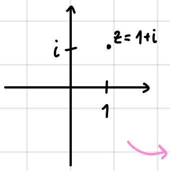
$z = 1+i$

$x = 1$ $\quad r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ (pitagorov izrek)

$y = 1$

$\tan\varphi = \frac{1}{1} = 1$

$\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



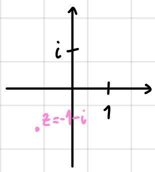

$\varphi \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \ldots \frac{-3\pi}{4}, \frac{-7\pi}{4} \ldots\right\}$

kvadrant → zadosten odg.

$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{4}}$

Če bi imeli $z = -1-i$

$\boxed{\varphi = \frac{5\pi}{4}, r = \sqrt{2}}$

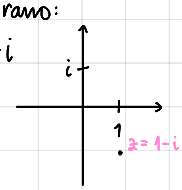



Konjugiramo:

$\bar{z} = 1-i$

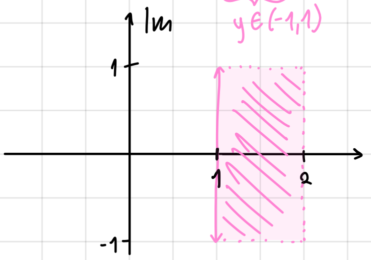
$r = \sqrt{2}$

$\varphi = -\frac{\pi}{4}$

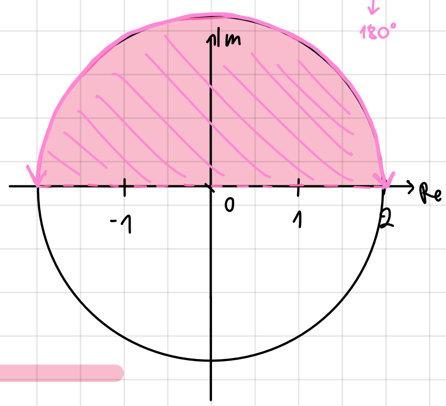



**Primer:** Nariši naslednjo množico

$\{x+iy;\ x \in [1,2),\ \underbrace{|y|<1}_{y \in (-1,1)}\}$




$\{r(\cos\varphi + i\sin\varphi), r \leq 2, \varphi \in (0,\pi)\}$ ($\pi$ → 180°)




## Množenje v polarnem zapisu

$z_j = |z_j| \cdot (\cos\varphi_j + \sin\varphi_j);\quad j \in \{1,2\}$

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1) \cdot |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2)$

$= |z_1| \cdot |z_2| \left(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i\left(\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2\right)\right)$

$= |z_1| \cdot |z_2| \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$

> produkt zmnoži absolutne vrednosti in sešteje kote

## Eulerjeva formula

$$e^{i\pi} = -1$$

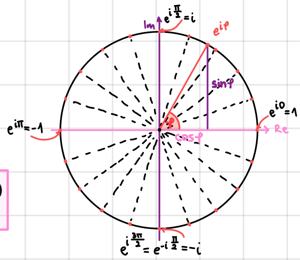
$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

Polarni zapis

$z = r \cdot e^{i\varphi}$

$r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = \boxed{r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}$

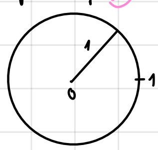
↳ absolutna vrednost




**Primer:** $\{e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}\}$

Središče v $(0,0)$

polmer je 1




$\{r \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}, r \in [0, \infty)\}$

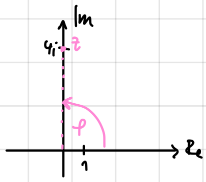

$z = 4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$

$x = 0$

$y = 4$

$r = 4$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$




**Primer:**

$z = 1 - i\sqrt{3}$

narišemo $z, z^2, z^3 \ldots$

$x = 1$

$y = -\sqrt{3}$

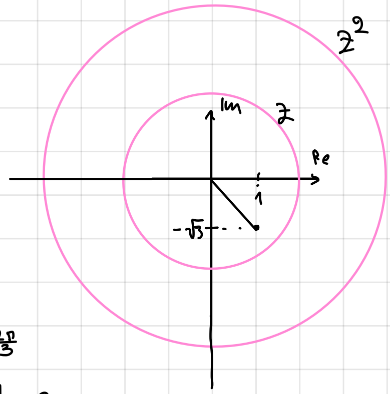
$r = 2 = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = \frac{\pi}{3}$

$z = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$z^2 = 4 \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

$z^3 = 8 \, e^{-i\pi} = -8$




Lastnosti:

1. $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$

   $r_1 e^{i\varphi_1} = r_2 \cdot e^{i\varphi_2} \iff r_1 = r_2 \wedge (\varphi_1 - \varphi_2) = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

   ALI

   $r_1 = r_2 = 0$

2. $\overline{r \cdot e^{i\varphi}} = r \cdot e^{-i\varphi}$

3. $(r \cdot e^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$ de Moivrerejeva formula

4. $(re^{i\varphi})^{-1} = r^{-1} \cdot e^{-i\varphi}$ $r \neq 0$

5. $\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ $r_2 \neq 0$

## Geometrija operacij v ravnini

| preslikava | transformacija v $\mathbb{C}$ |
|---|---|
| $z \mapsto \bar{z}$ | zrcaljenje preko Re (premice) |
| $z \mapsto -z$ | zrcaljenje preko $z=0$ (točke) |
| $z \mapsto z + z_0$ | premik za $z_0$ |
| $z \mapsto z \cdot e^{i\varphi}$ | rotacija za $+\varphi$ |
| $z \mapsto z \cdot r \cdot e^{i\varphi}$ | razteg $x \cdot r$, rotacija $+\varphi$ |

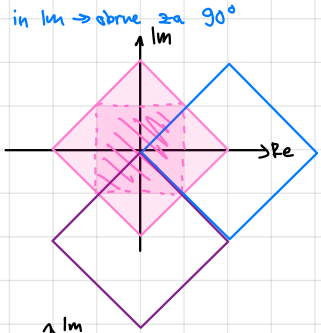
**Primer:** V kaj se s preslikavo $z \mapsto (z(1+i) - 2i) \cdot i$ preslika:

$\{x + iy, |x| < 1, |y| < 1\}$

↳ menja se Re in Im → obrne za 90°

↳ polarna vrednost je $\sqrt{2}$, kot pa $\frac{\pi}{2}$

$z \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$




## Koreni enote

**Primer:**

$z^5 = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ $= 1 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$

$z = r \cdot e^{i\varphi}$

$0 = 2\pi = 4\pi$

$r^5 \cdot e^{i5\varphi} = 1 \cdot e^{i \cdot 0} = e^{i2\pi + \frac{\pi}{4}} = e^{i4\pi + \frac{\pi}{4}}$

$e^{i5\varphi} = e^{i \cdot 0}$

$r^5 = 1$

$r = 1$

1. $5\varphi = 0 + \frac{\pi}{4}$ → $\boxed{\varphi = 0}$ $+\frac{\pi}{20}$

2. $5\varphi = 2\pi + \frac{\pi}{4}$ → $\boxed{\varphi = \frac{2\pi}{5}}$ $+\frac{\pi}{20}$

3. $5\varphi = 4\pi + \frac{\pi}{4}$ → $\boxed{\varphi = \frac{4\pi}{5}}$ $+\frac{\pi}{20}$

$+\frac{2\pi}{5}$ $+\frac{2\pi}{5}$

za toliko se $\varphi$ veča

vstaviš izračunamo $\varphi$

$z_1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0} = 1$

$z_2 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{5}}$

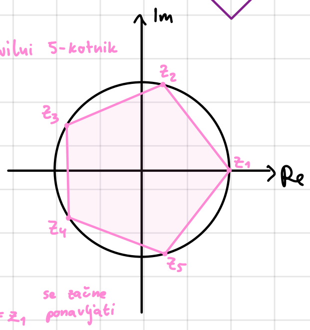
$z_3 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{4\pi}{5}}$

$z_4 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{6\pi}{5}}$

$z_5 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{8\pi}{5}}$

$z_6 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{10\pi}{5}} = 1 \cdot e^{i2\pi} = z_1$ se začne ponavljati

Pravilni 5-kotnik




## Formula za korenjenje

$n \in \mathbb{N}$, $z^n = r \cdot e^{i\varphi}$ $k = 0, \ldots, n-1$

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\frac{\varphi + 2k\pi}{n})}}$$

- Pravilni n-kotnik
- n različnih, razen pri $r = 0$

**Primer:** $(z^3 - 2) \cdot (z^2 + i) = 0$

1. $z^3 = 2$ $\boxed{\varphi = 0}$

   $z_1 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{0}{3}}$ → realna rešitev (ena more bit)

   $z_2 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{0+2\pi}{3}}$

   $z_3 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{0+4\pi}{3}}$

   popolni △

2. $z^2 = -i = 1 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2}}$

   $z_4 = 1 \cdot e^{i(\frac{-\pi}{2})}$

   $z_5 = 1 \cdot e^{i(\frac{-\pi}{2} + 2\pi)} = -z_4$

   popolna ——

## Osnovni izrek algebre

Vsaka enačba $a_k \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$

$$\boxed{a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0 = 0}$$

ima natanko n rešitev

$$\boxed{p(z) = a_n (z - z_1)^{V_1} \cdot (z - z_2)^{V_2} \cdot \ldots \cdot (z - z_n)^{V_m}}$$

$V_1 + V_2 + \ldots + V_m = n$

Če so $a_k \in \mathbb{R}, \forall k$, potem ne-realne ničle nastopajo v konjugiranih parih

13.10.

## Diskretna Fourierjeva transformacija – DFT

"nek signal" → kako visoko smo pri

$(x_0, x_1, \dots, x_N) \rightsquigarrow (y_0, y_1, \dots, y_N)$ ← zaporedje frekvenc

zaporedje jakosti

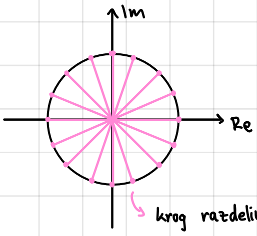
kolikokrat se val s frekvenco 1 pojavi

$$y_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n}$$

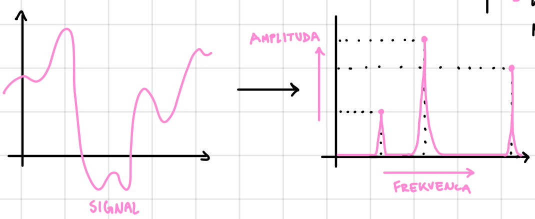
kolikokrat gre gor in dol

velikost vala – abs. vred.

phase – kot




krog razdelimo na N-delov




## ZAPOREDJE

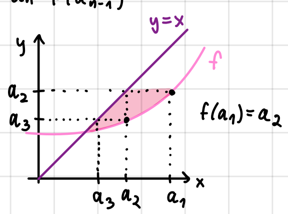
Def: preslikava $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to a_n$ $\quad (a_n) = (a_1, a_2 \dots)$

Podajanje zaporedja:

- EKSPLICITNO: $a_n = f(n)$
- REKURZIVNO: $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2})$ 2-člena + ZAČETNI ČLEN
  $a_n = f(a_{n-1})$ 1-člen

GRAFIČNI PRIKAZ REKURZIVNEGA ZAP.

$a_n = f(a_{n-1})$




Primeri: $a_n = (-1)^n$

- Aritmetično zap.: $a_n = a_0 + n \cdot d$ ali $a_n = a_{n-1} + d$
- Geometrijsko zap.: $a_n = a_0 \cdot q^n$ ali $a_n = q \cdot a_{n-1}$
- Fibonaccijevo zap.: $a_1 = 1 = a_2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
- Collatzova domneva (1937)

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}; & a_n \text{ sodo} \\ 3 \cdot a_n + 1; & a_n \text{ liho} \end{cases}$$

Ali se za $\forall\, a_0 \in \mathbb{N}$ to zap. vrne v 1?
↳ Preverjeno do $2^{71}$

**Lastnosti zaporedja: $(a_n)_n$ je**

- Navzgor omejeno, če obstaja zgornja meja $M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} \wedge a_n \leq M$
  Supremum $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ = najmanjša zgornja meja
- Navzdol omejeno, če obstaja spodnja meja $m \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} \wedge a_n \geq m$
  Infimum $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$ = najvišja spodnja meja
- Omejeno, če je navzgor in navzdol omejeno
- Naraščajoče, če $\forall_n: a_{n+1} \geq a_n$
  strogo naraščajoče, če $\forall_n\ a_{n+1} > a_n$
- Padajoče, če $\forall_n: a_{n+1} \leq a_n$
  strogo padajoče, če $\forall_n\ a_{n+1} < a_n$
- Monotono, če je povsod ali padajoče ali naraščajoče

Primeri:

$n = 1, 2, 3 \dots$

1. $\frac{n^2 - 1}{n} = n - \frac{1}{n}$
   ↓ omejeno, ↑ neomejeno, ↑ strogo

2. $b_n = \frac{b_{n-1}}{2}$
   - 2.1 $b_1 > 0$ strogo padajoče $\inf_n b_n = 0$
   - 2.2 $b_1 < 0$ strogo naraščajoče $\sup_n = 0$
   - 2.3 $b_1 = 0$ konst. v 0 OBOJE DRŽI

## LIMITA ZAPOREDJA

Def: $a \in \mathbb{R}$ je limita zap. $(a_n)_n$, če
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$
$\forall n > N\ |a_n - a| < \varepsilon$

Zaporedje je konvergentno, če ima limito

Zaporedje je divergentno, če nima limite

Primeri:

1. $a_n = \frac{1}{n^2}$
   Dokažimo, da je $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$
   $n^2, \varepsilon > 0$
   Izberemo $\varepsilon > 0$ po def.
   $\frac{1}{n^2} < \varepsilon \ / \cdot \frac{n^2}{\varepsilon}$
   $\frac{1}{\varepsilon} < n^2$
   R: $n > \left\lceil \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \right\rceil \in \mathbb{N}$

   $x > 0$
   $\lceil x \rceil = \min \{ n \in \mathbb{N}_0;\ n \geq x \}$
   $\lfloor x \rfloor = \max \{ n \in \mathbb{N};\ n \leq x \}$

2. $b_n = (-1)^n$
   Ali je 0 limita?
   Izberemo $\varepsilon > 0$
   $|(-1)^n - 0| < \varepsilon$
   $1 < \varepsilon$
   Ni okej za $\varepsilon < 1$!
   R: $\boxed{\text{NI LIMITA}}$

### Zaporedje $(a_n)_n$

- Narašča preko vsake meje $[\lim_{n \to \infty} a_n = \infty]$ ni konv. zap.
  $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}: a_n > M,\ \forall n \geq N$
- Pada pod vsako mejo $[\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty]$
  $\forall m \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}: a_n < m,\ \forall n \geq N$

## Pravila za rač. limit

Naj bo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$

1. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$
3. V smislu naraščanja in padanja preko vseh mej:
   - $\infty + \infty = \infty$
   - $5 \cdot \infty = \infty$
   - $\infty \cdot \infty = \infty$
   - $-\infty \cdot \infty = -\infty$
   - $\frac{1}{\infty} = 0$
4. $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n}) = 1$
5. $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$
   - $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{a}{n})^n = e^a$
   - $\lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$

Dokaz. $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{a}{n})^n = e^a$ ; $a>0$

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{a}}\right)^{\frac{n}{a}}}_{e}\Bigg)^a \xrightarrow[\infty]{n} e^a$$

če je konst. prepišeš, sicer računaš limito

$e \approx 2{,}7\ldots$

$\frac{1}{e} \approx 0{,}368\ldots$

**Primer:** 2% letna obr. mera

1. leto: $G \cdot 1{,}02 = G \cdot (1+\frac{2\%}{1})^1$

4x letno: $G \cdot (1+\frac{2\%}{4})^4$

mesečno: $G \cdot (1+\frac{2\%}{12})^{12}$

konstantno: $G \cdot e^{2\%}$

23.10.

## Primeri (ne) konvergence:

$$\lim_{n\to\infty} (n^a) = \begin{cases} \infty : & a>0 \\ 1 : & a=0 \\ 0 : & a<0 \end{cases}$$

div. ($a>0$); konv. ($a=0$, $a<0$)

$$\lim_{n\to\infty} (a^n) = \begin{cases} \infty : & a>1 \\ 1 : & a=1 \\ 0 : & |a|<1 \\ / : & a \leq -1 \end{cases}$$

$(-1)^n$ – alternirajoče zaporedje (div.)

$\boxed{\frac{1}{\infty} = 0 = \frac{1}{-\infty}}$

$[(a_n)_n$ zaporedje: $a_n \neq 0, \forall n]$

$\lim_{n\to\infty} (a_n) = 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right) = \begin{cases} \infty : & a_n > 0 \\ -\infty : & a_n < 0 \\ / : & \text{ostalo} \end{cases}$

vsi razen končno mnogo členov

$\lim_{n\to\infty} \left(\left|\frac{1}{a_n}\right|\right) = \infty$

### STEKALIŠČE LIMITE

Def: $a$ je STEKALIŠČE $(a_n)_n$, če

$\forall \varepsilon > 0 \quad |a - a_n| < \varepsilon$

za neskončno mnogo členov

Izrek: Vsaka LIMITA je STEKALIŠČE.

Primer: $(-1)^n$ nima limite,

ima pa 2 stekališči

$\Downarrow$

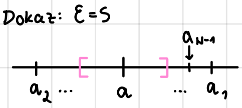
$(1, -1)$

$(-(1+\frac{1}{n}))^n$ ima stekališči $e$ in $-e$

Izrek: Vsako KONVEKSNO zap. je omejeno.

Vsako omejeno zap. ima STEKALIŠČE.

Dokaz: $\varepsilon = \delta$




$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a-\delta, a+\delta] \cup \{a_i\}_{i=1}^{N-1}$

### IZREK O SENDVIČU (KONVERGENCI)

a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq b_n \leq c_n$

$\lim_{n\to\infty} (a_n) = \lim_{n\to\infty} (c_n) = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (b_n) = a$

Primer: $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n \cdot e^{3n})}{n} \leq \frac{1}{n}$

SKLEP $\rightarrow 0$

b) Naraščujoče zap. je konv. natanko tedaj, ko je NAVZGOR omejeno $\quad$ lim = sup.

c) Padajoče zap. je konv. natanko tedaj, ko je NAVZDOL omejeno $\quad$ lim = inf.

### Obravnavaj konvergenco:

Primer: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n+6}{2}$ I.P.

1. limita: če obstaja $\lim_{n\to\infty} (a_n) = A$:

$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n+6}{2}\right)$

$A = \frac{A+6}{2}$

$A = \frac{A}{2} + 3$

$A = 6$

2. omejenost: $a_n \leq 6$ (INDUKCIJA)

B.I. $\quad n=1 \quad a_1 \leq 6$ ✓

I.K. $\quad n \to n+1 \quad a_{n+1} \leq 6$

$\frac{a_n+6}{2} \leq 6$

$a_n + 6 \leq 12$

$a_n \leq 6$ ✓

preoblikuješ v I.P.

ali pa izpostaviš $a_n$

3. naraščanje:

vstaviš $a_{n+1}$

$a_{n+1} - a_n \geq 0$

$\frac{a_n+6}{2} - a_n \geq 0$

$\frac{a_n+6-2a_n}{2} \geq 0$

$\frac{6-a_n}{2} \geq 0$

$a_{n+1} \geq 0$

ALI

preoblikuješ v I.P

$a_{n+1} \geq a_n$

$a_{n+1} + 6 \geq a_n + 6$

$\frac{a_{n+1}+6}{2} \geq \frac{a_n+6}{2}$

$a_{n+2} \geq a_{n+1}$

**Sklep:** zaporedje je narašč. (3.), navzgor omejeno (2.), torej je konvergentno z limito 6, ki je edini kandidat (1.)

### Hitrosti algoritmov

| | | |
|---|---|---|
| • Poišči največje število izmed n števil: | n primerjanj | $O(n)$ |
| ↳ v urejenem seznamu: | 1 "primerjanje" | $O(1)$ |
| • Poišči določeno število v seznamu: | n primerjanj | $O(n)$ |
| ↳ v urejenem seznamu: | $\log_2(n)$ primerjanj | $O(\log_2(n))$ |
| • Uredi seznam n števil | $1+2+\ldots+n-1$ primerjanj | $O(n^2)$ |

# Vrste

Def: **Vrsta** je simbolna vsota $\mathbb{R}$ števil

$a_1+a_2+a_3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

m-ta delna vsota $S_m=a_1+a_2+\ldots+a_m \in \mathbb{R}$

Vrsta **konvergira**, če konvergira $(S_n)_n$.
• V tem primeru je vsota vrste:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n)$$

Vrsta **divergira**, če divergira $(S_n)_n$.

Primer: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)=1$

! Obratno NE velja !

Trditev: Če $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, velja $\lim_{n\to\infty}(a_n)=0$

## Harmonična vrsta

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ → divergira

$$\left.\begin{matrix}1+\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\\ \frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{15}\\ \vdots\end{matrix}\right\}\geq\left\{\begin{matrix}1\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}\\ \vdots\end{matrix}\right.\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)>\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)=\infty$$

## Geometrijska vrsta

→ $\sum_{n=1}^{\infty}(q^n)=q+q^2+q^3+\ldots=\frac{q}{1-q}$

→ $|q|<1\Rightarrow$ konvergira, sicer divergira

$S_m=q+q^2+\ldots+q^m \quad \backslash\cdot q$

$q\cdot S_m=q^2+q^3+\ldots+q^m+q^{m+1}$

$S_m(1-q)=q-q^{m+1}$

$S_m=\frac{q-q^{m+1}}{1-q}$

27.10.

## Pravila za računanje vrst

Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konvergentni
Tedaj konvergirata:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$
2. $c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}c\,a_n$

Primer.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=$

$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\ldots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\cancel{\infty-\infty}?=1$

## Dominiranje vrst $a_n,b_n>0$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **dominira** $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, če $a_n\geq b_n,\forall n\Rightarrow S_n^a\geq S_n^b$

V tem primeru velja:

Če $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ divergira, potem tudi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ divergira

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergira $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konvergira

Primer:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin(e^{6x^3}-8\pi^2))^6}{2^n}$

$-1<\sin(\;)<1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin(e^{6x^3}-8\pi^2))^6}{2^n}\leq\frac{1}{2^n}$

konvergira ← konvergira

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

divergira ← divergira

večja → konv.

manjša → div.

# Konvergenčni kriteriji

$a_n>0,\forall n$

### 1. Kvocientni kriterij

$a_n=q^n \qquad q=\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}q^n\begin{cases}\text{konv.} & |q|<1\\ \text{div.} & |q|>1\end{cases}}$$

$D_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$, naj obstaja $\lim_{n\to\infty}D_n\in\mathbb{R}$ :D

$D>1\Rightarrow$ vrsta divergira $\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty\right)$

$D<1\Rightarrow$ vrsta konvergira

$D=1\Rightarrow$ ¯_(ツ)_/¯

Primer:

a) Za katere $x>0$ vrsta konv. $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n$

$a_n=n\cdot x^n$

$D_n=\frac{(n+1)x^{n+1}}{n\cdot x^n}=\underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}}\cdot x\xrightarrow{n\to\infty}x$

konv. za $x<1$

div. za $x>1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$a_n=\frac{x^n}{n!}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}=\frac{x}{n+1}\xrightarrow{n\to\infty}0$

konv. za vse $x>0$

### 2. Korenski kriterij

$D_n=\sqrt[n]{a_n}$, naj obstaja $\lim_{n\to\infty}D_n\in\mathbb{R}$ :D

$D>1\Rightarrow$ vrsta divergira $\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty\right)$

$D<1\Rightarrow$ vrsta konvergira

$D=1\Rightarrow$ ¯_(ツ)_/¯

Primer:

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n$

$a_n=\left(\frac{x}{n}\right)^n$

$\sqrt[n]{a_n}=\frac{x}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$

konv. za $x>0$

### 3. Leibnitzov kriterij

$a_n\overset{n\to 0}{\searrow}0$ **monotono** (tj.: $a_{n+1}\leq a_n,\forall n$)

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergira

Primer:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ div. $\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ div.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ div.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots=\infty$

$-1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\ldots=-\infty$

! VRSTNI RED SEŠT. JE POMEMBEN !

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$ konv.

3.11.

# Limita funkcije.

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$

$x \neq a$

$a-\delta \quad a \quad a+\delta \qquad b-\varepsilon \quad b \quad b+\varepsilon$

**Leva limita**

2. $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = b$ ali $x \to a^-$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

$x \in (a-\delta, a) \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$

**Desna limita**

3. $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = b$ ali $x \to a^+$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

$x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0$

$x > M \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m, m \in \mathbb{R}$

$x < m \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$

6. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

$\forall N > 0 \quad \exists \delta > 0$

$x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) > N$

7. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$

8. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$

9. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\forall N \quad \exists M$

$x > M \Rightarrow f(x) > N$

10. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

11. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

12. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

**Trditev:**

Limita f v a obstaja natanko takrat ko obstajata ujemajoči se leva in desna limita.

**Primer:** 1. $f(x) - \mathrm{sgn}(x)$

2. $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim\limits_{t \to \infty} e^{-t} = 1 \qquad \lim\limits_{s \to 1} \frac{1}{s} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \qquad \lim\limits_{t \to \infty} e^{t} = \infty \qquad \lim\limits_{s \to \infty} \frac{1}{s} = 0$

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

$\frac{1}{1} = 1$

$-\infty$

$0$

$1+0=1$

$e^{-100} = \frac{1}{e^{100}}$

$e^{-1000} = \frac{1}{e^{1000}}$

$\rightarrow$ bliža se 0

## Lastnosti limit funkcij

LASTNOSTI SO ISTE KOT PRI ZAPOREDJIH

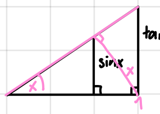
$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$; tedaj velja

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$$

**Primer:**

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{t\to 0} \sin t = 0$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = /$
3. $\lim\limits_{x\to\frac{2}{\pi}} \sin\frac{1}{x} = 1$

Dokaz za $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ $\boxed{x>0}$




$\sin x < x < \tan x$

$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x}$

$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

$\downarrow \quad \Downarrow \quad \downarrow$

$1 \quad 1 \quad 1$

sklep

## Zveznost funkcije

Funkcija $f$ je zvezna

v $a \in D_f$, če $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

### LASTNOSTI ZVEZNOSTI

1. Vse elementarne funkcije so zvezne
2. Če sta $f$ in $g$ zvezni v $a$:
   - → grafa sta v $a$ neprekinjeni krivulji
   - → so zvezne $f+\beta\cdot g$, $\sin(g)$ v $a$
   - → lahko zamenjamo vrstni red funk. in limite v $a$
3. $f$ zvezna v $a$, $g$ zvezna v $f(a)$ $\Rightarrow$ $g\circ f$ zvezna v $a$
4. Če $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ obstaja, $b \in D_f$, lahko $f$ s predpisom

   $$f(b) = \lim_{x\to b} f(x)$$

   zvezno razširimo na $b$
5. Če je $f$ zvezna na intervalu $[a,b]$

**MANJKA:** ničle zveznih funk.
slika omejenega zaprt. intervala

13.11.

# Funkcija več spremenljivk

**Def:** $n \in \mathbb{N}$ funkcija več spremenljivk je predpis

$f: D_f \to \mathbb{R}$

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

kjer je $D_f \subset \mathbb{R}^n$ definicijsko območje

Graf $f$ je

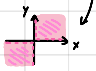
$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f\}$$

**Primeri:**

$f_1(x,y) = xy^2 - x \cdot \sin(y^x) - \pi^{\tan y} \cdot x$ $\qquad D_{f_1} = \mathbb{R}^2$

$f_2(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $\qquad D_{f_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq \} =$

$f_3(x,y,z) = \ln(x \cdot y) - z^2$ $\qquad D_{f_3} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \underbrace{(x>0 \wedge y>0) \vee (x<0 \wedge y<0)}_{x \cdot y > 0}\}$



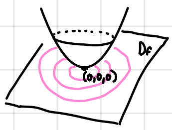

Nivojnice $f$ pri $a \in \mathbb{R}$ je množica

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f; f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a\}$$

Vizualizacija a

$n = 2$

$f(x,y) = x^2 + y^2$




$a \in D_f \subset \mathbb{R}^n$; $L \in \mathbb{R}$ je **Limita** $f: D_f \mapsto \mathbb{R}$,

če $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$:

$d(x,a) < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

evklidska razdalja

$x \in D_f$

$x \neq a$

**OZNAKA:** $L = \lim_{x \to a} f(x)$

$f: D_f \mapsto \mathbb{R}$ je zvezna v $a \in D_f$, če

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Elementarne funk. so zvezne na $D_f$

**Primer:** $f(x) = \frac{x}{|x|}$ leva in desna lim nista enaki

Strategije računanja limit v (0,0)

1. Zapišemo $f$ v polarnih koordinatah
2. $x \to (0,0)$ pomeni $r = 0$
3. $\lim_{r \to 0} f(r, \varphi)$ mora obstajati in biti neodvisna od $\varphi$

**Primeri:**

1. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{r \to 0^+} \frac{2r^2 \cos\varphi \sin\varphi}{r^2} = 2\cos\varphi \cdot \sin\varphi = \sin 2\varphi$

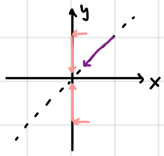
$x \to 0$: $0$, $y \to 0$: $0$

$x \to y$: $1$, $y \to 0$: $1$

če je nakaj odvisno od $\varphi$ potem limite ni

polarne koordinate:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}}$$




2. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{r \to 0^+} \frac{2r^3 \cos^2\varphi \sin\varphi}{r^2} = \lim_{r \to 0^+} 2r \cdot \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi =$

$x \to 0$: $0$, $y \to 0$: $0$

$x \to y$: $\frac{2y^3}{2y^2}$, $y \to 0$: $0$

neodvisno od $\varphi$

$= 0$

# ODVOD

$f' = \dot{f} = \frac{d}{dx} f$

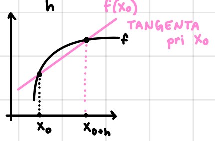
$f: D_f \to \mathbb{R}$; $D_f \subset \mathbb{R}$ v $x_0 \in D_f$ je

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$f$ je odvedljiva v $x_0$, če $f'(x_0)$ obstaja

ne-odvedljiva v 0:  $|x|$

Diferenčni kvocient (naklon sekante): $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$




Pomen $f'(x_0)$:

- naklon tangente pri $x_0$
- hitrost spreminjanja $f$ v $x_0$
- $f''$ predstavlja pospešek

$f$ je zvezno odvedljiva, če obstaja $f'$ in je zvezna.

Trditev: če je $f$ odvedljiva v $x_0$, je zvezna v $x_0$.

Drugi odvod

$f''(x_0) = (f')'(x_0)$

n-ti odvod

$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$

$f$ je n-krat odvedljiva (v $x_0$), če obstajajo $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ (v $x_0$)

Levi odvod $f$ v $x_0$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Desni odvod $f$ v $x_0$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

**Primer:** $|x|$ ima levi in desni odvod v 0, nima pa odvoda

## Pravila za odvajanje

$f, g$ funkciji; $\alpha \in \mathbb{R}$

$(\alpha \cdot f + g)' = \alpha \cdot f' + g'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ $\quad D_{f \circ g} = g^{-1}(D_f) \cap (D_g)$

## Osnovni odvodi

| | |
|---|---|
| $(\text{konstanta})' = 0$ | $(x^n)' =$ |
| $(\ln x)' =$ | $(\log_a x)' =$ |
| $(\sin x)' =$ | $(\cos x)' =$ |
| $(e^x)' =$ | $(a^x)' =$ |
| $(\arcsin x)' =$ | $(\arctan x)' =$ |

$\log x^k = (\log x) \cdot k$

Izpeljava: $(\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \cdot h^{-1} = \lim_{h\to 0} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0} \ln\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$

# UPORABA ODVODA

## L'Hospitalovo pravilo

$f, g$ odvedljivo na $(a,b)$, $g \neq 0$

Naj za $c \in (a,b)$ velja bodisi

1. $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$
2. $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \infty$

Tedaj velja:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

velja tudi za $c = \pm\infty$

Primeri:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot \ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

odvod od $\ln x$

odvod od $x$

pomeni da je imenovalec hitrejši

npr. zanima nas kateri (števec ali imenovalec) je hitrejši

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{100}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{100!}{e^x} = 0$$

1. odv. $100 \cdot x^{99}$

2. odv. $100 \cdot 99 \cdot x^{98}$

$\vdots$

Počasnejši $\quad$ Hitrejši

$O(e^n) \quad O(n^2) \quad O(n) \quad O(\ln) \quad O(1)$

najslabši possible čas pri prog.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{100}}{\pi^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{100!}{\pi^x \cdot (\ln\pi)^{100}} = 0$$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(\pi^x)' = \pi^x \cdot \ln\pi$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \ln x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

# Kolokvij 2

20.11.

## Aproksimacija funkcij

$f: D_f \mapsto \mathbb{R}$, $D_f$ odprto, $x_0 \in D_f$

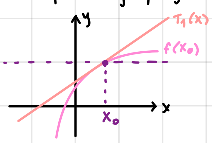
### 1. Aproksimacija f s konst.

(Aproksimacija ničtega reda)

$f(x) = x_0$

### 2. Aproksimacija z linearno funk.

(Aproksimacija prvega reda)




$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$T_1(x_0) = f(x_0)$ & $T_1'(x_0) = f'(x_0)$

### 3. Aproksimacija s kvadratno funk.

(Aproksimacija drugega reda)

$$T_2(x) = \underbrace{a + b \cdot (x - x_0)}_{T_1} + c\,(x - x_0)^2$$

$T_2(x_0) = f(x_0)$ $\quad a = f(x_0)$

$T_2'(x_0) = f'(x_0)$ $\quad b = f'(x_0)$

$T_2''(x_0) = f''(x_0)$ $\quad c = \frac{f''(x_0)}{2}$

$T_2' = b + 2c(x - x_0)$

$T_2'' = 2c = f''(x_0)$

### 4. Aproksimacija s polinomom stopnje n

(Aproksimacija n-reda)

Taylorjev polinom stopnje n

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Zadošča: $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}$$

Ostanek

$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$

Izrek: Naj bo $f$ $(n+1)$-krat odvedljiva. Tedaj je

$$R_n(x) = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

za nek $c \in [x_0, x]$

Taylorjeva vrsta $f$ pri $x_0$

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Če $R_n(x) \xrightarrow[\infty]{n} 0$, potem $f(x) = T(x)$

Bonus: V notranjosti območja konv. dobljenega preko konv. kriterijev lahko $T(x)$ odvajamo in integriramo po členih

2. $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Primer:

Izračunaj približek $\sin(1)$ s $T_5$, $x_0 = 0$

$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

$T_5(1) = \frac{120 - 20 + 1}{120} = \frac{101}{120}$

kako natančno?

Vejica vprašaj glede labs.l pri $R_n(x)$

$R_n(x) = \frac{|\sin^{(6)}(c)|}{6!}(1-0)^6 \leq \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$

Primeri: 1. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

$f^{(k)}(x) = e^x \xrightarrow[0]{x_0} 1$

$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k = e^x$

$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{e^x}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \xrightarrow[\infty]{n} 0$

"trust me bro"

konvergira na $\mathbb{R}$

$f(x) = e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$

$$\int e^{x^2} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)} + C$$

Primer: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$(ix)^2 = -x^2$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} = \cos x + i\sin x$$

# Geometrijski pomen odvoda

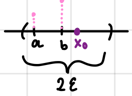
$f: D_f \to \mathbb{R},\ x_0 \in D_f$

Lokalna lastnost $f$ v $x_0$:

Če $\exists \varepsilon > 0$; $\forall a,b \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

1. $[a > b \Rightarrow f(a) < f(b)]$ implicira

   $f$ je naraščajoča v $x_0$




2. Če je $f$ padajoča na $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, je $f$ padajoča v $x_0$
3. $f(a) \leq f(x_0)$, je $x_0$ LOKALNI MAX
4. $f(a) \geq f(x_0)$, je $x_0$ LOKALNI MIN

Naj bo $f$ odvedljiva v $x$

1. $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ je v $x$ naraščajoča
2. $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ je v $x$ padajoča
3. $f'(x) = 0 \Rightarrow x$ imenujemo STACIONARNA TOČKA
   - $\to f'$ v $x$ spremeni predznak iz $-$ v $+$, je $x$ lokalni min.
   - $\to f'$ v $x$ spremeni predznak iz $+$ v $-$, je $x$ lokalni max.
   - $\to f'$ v $x$ ne spremeni predznaka, je $x$ sedlo.

Izrek: $f$ odvedljiva na $[a,b]$

Globalni ekstremi se pojavijo v stacionarnih točkah ali v mejah $a, b$.

$f: D_f \to \mathbb{R},\ x_0 \in D_f$

Lokalna lastnost $f$ v $x_0$:

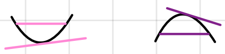
Če $\exists \varepsilon > 0$; na intervalu $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

1. Vsaka tangenta pod / nad grafom,

   $\Updownarrow$

   Vsaka sekanta nad / pod grafom,

   je $f$ v $x_0$ konveksna / konkavna



Naj bo $f$ 2-krat odvedljiva v $x$

1. $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ v $x$ konkavna
2. $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ v $x$ konveksna
3. $f''(x) = 0$ in se predznak $f''$ v $x$ spremeni $\Rightarrow x$ je PREVOJ

$\cup$

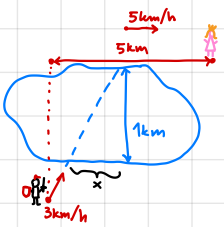
$\cap$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f''$ | $+$ | $-$ | $0$ |
| $f'$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | stac. toč. |
| $f$ | $\cup$ | $\cap$ | |

Naj bo $f$ 2-krat odvedljiva v $x$, $f'(x) = 0$

1. $f''(x) > 0 \Rightarrow x$ je lokalni min.
2. $f''(x) < 0 \Rightarrow x$ je lokalni max.
3. $f''(x) = 0 \rightsquigarrow$ naj bo $n$ prvo število z $f^{(n)}(x) \neq 0$:
   1. $n$ liho $\Rightarrow$ v $x$ je sedlo
   2. $n$ sodo $\Rightarrow$ a) $f^{(n)}(x) > 0 \Rightarrow x$ je lokalni min.
      b) $f^{(n)}(x) < 0 \Rightarrow x$ je lokalni max.

**Primer:**




$f: [0,5] \to (0, \infty)$ čas

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{3} + \frac{5-x}{5}$$

$$f'(x) = \frac{1}{6}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{5}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{6}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{5} = 0$$

$$5x = 3\sqrt{1+x^2} \ /^2$$

$$25x^2 = 9 + 9x^2$$

$$16x^2 = 9$$

$$x^2 = \frac{9}{16} \quad \begin{cases} \boxed{x_1 = \frac{3}{4}} \\ x_2 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$x_2$: ne upoštevamo ker je x razdalja

Potencialni global. min.

$x_1 = \frac{3}{4}$

$x_3 = 0$

$x_4 = 5$

1. vse daš v $f$ in pogledaš kira je najmanjša
2. pogledaš robove fnk. (delnje če je sam 1 stac. točka)
3. pogledaš $f''(x)$ na sredini