2.10.

ŠTEVILA

1. Naravna $\mathbb{N}$ (indukcija)
   Cela $\mathbb{Z}$ (odštevanje)
   Racionalna $\mathbb{Q}$ (deljenje)
2. Realna $\mathbb{R}$ (absolutna vrednost)
3. Kompleksna $\mathbb{C}$ (kartezično)

1.

INDUKCIJA

Princip indukcije: $A \subset \mathbb{N},\ a \in A,\ a \in A \Rightarrow a+1 \in A$

$\Downarrow$

$\{a, a+1, a+2, \dots\} \subseteq A$

Shema uporabe: dokaži, da velja $\underset{\uparrow \text{ trditev}}{T(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Baza ind. $T(1)$ ↘ $n=1$

b) Indukcijski korak $\underbrace{T(n)}_{\text{indukcijska predpostavka}} \Rightarrow T(n+1)$

↳ predpostavimo, da trditev za katerikoli $n \in \mathbb{N}$ velja

Primer: dokaži $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

B.I.: $n=1$

$1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$

$1=1$ ✓

I.K.: $\underbrace{1^2+2^2+\dots+n^2}_{\text{I.P.}}+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$

$\underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2}_{\downarrow} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

preoblikuješ s ciljem, da dobiš ta izraz

$\frac{2n^3+3n^2+n+6n^2+12n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

✓✓ $T(n)$ dokazan $\forall \in \mathbb{N}$

Recimo, da velja $T(5)$

$T(n) \Rightarrow T(n+3),\ \forall n \in \mathbb{N}$

ali velja $T(2025)$?

2.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ... iracionalna št. ($\sqrt{2}, \pi, e$ ...)

$\forall x \in \mathbb{R}$ ima decimalni zapis

OMEJENOST

Naj bo $A \subset \mathbb{R},\ A \neq \{\}$

Množica A je NAVZGOR OMEJENA, če

zgornja meja A

$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ M \geq a$

Če je A navzgor omejena, vedno obstaja najmanjša zgornja meja: SUPREMUM

Če je supremum $\in A$, mu rečemo: MAKSIMUM

Množica A je NAVZDOL OMEJENA, če

spodnja meja A

$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ m \leq a$

Če je A navzdol omejena, vedno obstaja največja spodnja meja: INFIMUM

Če je infimum $\in A$, mu rečemo: MINIMUM

Primer:

množica:	$(0,1)$	$[0,5]$	$[6,7)$	$(8,\infty)$
sup	1	5	7	/
max	/	5	/	/
inf	0	0	6	8
min	/	0	6	/

ABSOLUTNA VREDNOST

$x \in \mathbb{R}$

$|x| = \begin{cases} x;\ x \geq 0 \\ -x,\ x < 0 \end{cases}$

$|x-y|$ ... razdalja med x in y

Lastnosti:
- $|x| \geq 0$
- $|xy| = |x| \cdot |y|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$

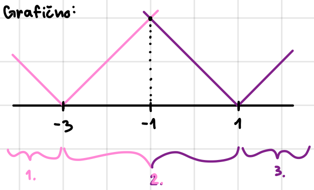
Primer $\underset{2.,3.}{|x-1|} = \underset{1.,2.}{|x+3|}$

1. $x+3<0$
   $x<-3$
   $-x+1=-x-3$
   $1=-3$ //
   ni rešitve

2. $x+3 \geq 0$ $\quad x-1<0$
   $x \geq -3$ $\quad x<1$
   $-3 \leq x < 1$
   $-x+1 = x+3$
   $-2x = 2$
   $\boxed{x=-1}$
   rešitev ustreza pogoju

3. $x-1>0$
   $x>1$
   $x-1=x+3$
   $-1=3$
   ni rešitve

Grafično:



3.

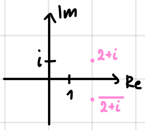
KOMPLEKSNA ŠTEVILA

$i = \sqrt{-1}$

$\mathbb{C} = \{a+bi;\ a,b \in \mathbb{R}\}$

$z = a+bi$ $\quad a = \mathrm{Re}(z)$
$\quad b = \mathrm{Im}(z)$

Kompleksna ravnina



Pravila za računanje
- vsota/razlika: kot vektorji
- množenje: $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$
- deljenje: $\frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{\dots}{1+1} = \dots$

$i^{4n+\text{ost.}} = i^{\text{ost.}}$, ost. $\in \{1,2,3\} \wedge n \in \mathbb{N}$

$i^1 = i$	$i^{4n+1} = i$
$i^2 = -1$	$i^{4n+2} = -1$
$i^3 = -i$	$i^{4n+3} = -i$
$i^4 = 1$	$i^{4n} = 1$

Absolutna vrednost

$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}$

Lastnosti:
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

trikotniška neenakost

Konjugirana vrednost

$\bar{z} = a-bi$

Lastnosti:
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z_1 \cdot z_1} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ $\quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{-(z-\bar{z})i}{2}$ $\quad \frac{1}{i} = -i$

$z = 1$

$z^2 = 1 \rightsquigarrow z_1 = 1,\ z_2 = -1$

$z^3 = 1 \rightsquigarrow z_1 = 1,\ z_2 = ?,\ z_3 = ?$

$z^4 = 1 \rightsquigarrow z_1 = 1,\ z_2 = i,\ z_3 = -1,\ z_4 = -i$

Primer: $2 \cdot \bar{z} = z^2$

$2(\underset{\text{Re}}{x}-\underset{\text{Im}}{yi}) = x^2-y^2+2xyi$

Im: $-2y = 2xy$ \ $:2y$ (IZGUBIMO REŠITVE) \ $:2$

$xy+y = 0$

$y(x+1) = 0$

1. $\boxed{y=0}$
2. $\boxed{x=-1}$

Re: $2x = x^2-y^2$

1. $y=0$: $2x = x^2-0^2$
   $x(x-2) = 0$
   $\boxed{x_1 = 0 \quad x_2 = 2}$

2. $x=-1$: $-2 = 1-y^2$
   $\boxed{y_{1,2} = \pm\sqrt{3}}$

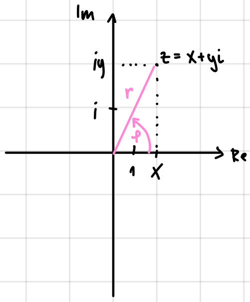
REŠITVE: $z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$ (2.)

$z_3 = 0$ (1)

$z_4 = 2$ (1.)

6.10.

Kartezični zapis



Polarni zapis

$z = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$

argument, polarni kot ← $\varphi \in \mathbb{R}$ ni enolično določen → do $+k2\pi$ natančno, $k\in\mathbb{Z}$ → pri $z=0$ je kot karkoli

$r = |z| \in [0,\infty)$ je enolično določen

$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cdot\cos\varphi \\ y &= r\cdot\sin\varphi \end{aligned}}$

$\tan\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \arctan\frac{y}{x}$

upoštevamo kvadrant!

Primer: Zapiši v polarni obliki

$z = 1+i$

$x = 1$ $\quad r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ ← pitagorov izrek

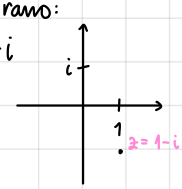
$y = 1$

$\tan\varphi = \frac{1}{1} = 1$

$\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi, k\in\mathbb{Z}$

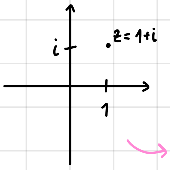
Konjugiramo:

$\bar{z} = 1-i$



$r = \sqrt{2}$

$\varphi = -\frac{\pi}{4}$



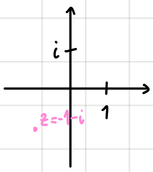
$\varphi \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \ldots \frac{-3\pi}{4}, \frac{-7\pi}{4} \ldots\}$

kvadrant → zadosten odg.

$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{4}}$

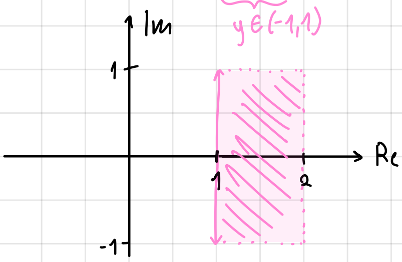
Če bi imeli $z = -1-i$

$\boxed{\varphi = \frac{5\pi}{4}, r = \sqrt{2}}$



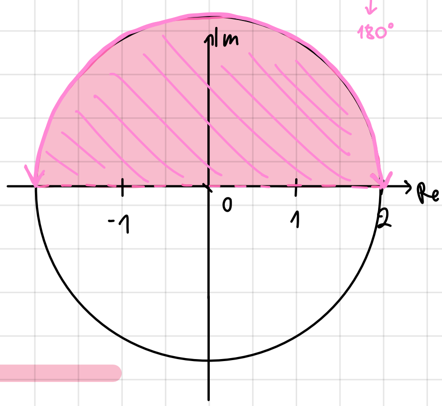
Primer: Nariši naslednjo množico

$\{x+iy;\ x\in[1,2), \underbrace{|y|<1}_{y\in(-1,1)}\}$



$\{r(\cos\varphi + i\sin\varphi), r\le 2, \varphi\in(0,\pi)\}$

π ↓ 180°



Množenje v polarnem zapisu

$z_j = |z_j|\cdot(\cos\varphi_j + \sin\varphi_j);\quad j\in\{1,2\}$

$z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1)\cdot|z_2|\cdot(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2)$

$= |z_1|\cdot|z_2|\,(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + i\,(\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2))$

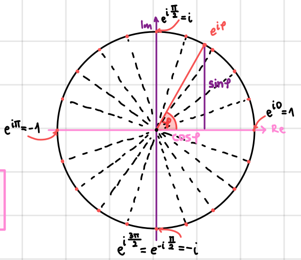
$= |z_1|\cdot|z_2|\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

$\boxed{\text{produkt zmnoži absolutne vrednosti in sešteje kote}}$

Eulerjeva formula

$$e^{i\pi} = -1$$

$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$



Polarni zapis

$z = r \cdot e^{i\varphi}$

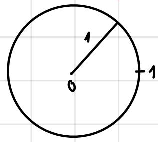
$r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = \boxed{r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}$

absolutna vrednost

Primer: $\{e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}\}$

središče v $(0,0)$

polmer je 1



$\{r \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}, r \in [0,\infty)\}$

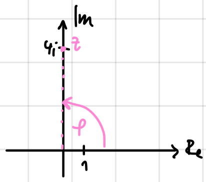
$z = 4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$

$x = 0$

$y = 4$

$r = 4$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$



Lastnosti:

1. $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$

   $r_1 e^{i\varphi_1} = r_2 \cdot e^{i\varphi_2} \Leftrightarrow r_1 = r_2 \wedge (\varphi_1 - \varphi_2) = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

   ALI

   $r_1 = r_2 = 0$

2. $\overline{r \cdot e^{i\varphi}} = r \cdot e^{-i\varphi}$
3. $(r \cdot e^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$ de Moivrerejeva formula
4. $(re^{i\varphi})^{-1} = r^{-1} \cdot e^{-i\varphi}$ $r \neq 0$
5. $\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ $r_2 \neq 0$

Primer:

$z = 1 - i\sqrt{3}$

narišemo $z, z^2, z^3 \ldots$

$x = 1$

$y = -\sqrt{3}$

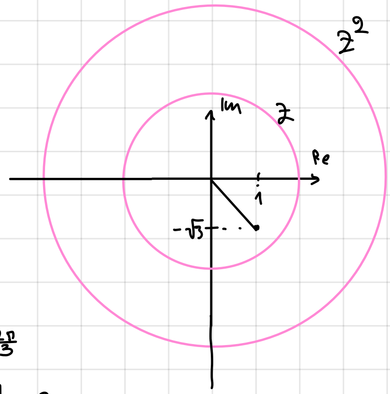
$r = 2 = \sqrt{x^2+y^2}$

$\varphi = \frac{\pi}{3}$

$z = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$z^2 = 4 \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

$z^3 = 8 \, e^{-i\pi} = -8$



Geometrija operacij v ravnini

preslikava	transformacija v $\mathbb{C}$
$z \mapsto \bar{z}$	zrcaljenje preko Re (premice)
$z \mapsto -z$	zrcaljenje preko $z=0$ (točke)
$z \mapsto z + z_0$	premik za z_0
$z \mapsto z \cdot e^{i\varphi}$	rotacija za $+\varphi$
$z \mapsto z \cdot r \cdot e^{i\varphi}$	razteg $x \cdot r$, rotacija $+\varphi$

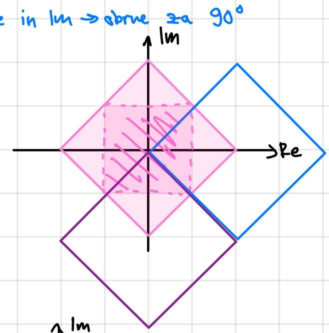
Primer: V kaj se s preslikavo $z \mapsto (z(1+i) - 2i) \cdot i$ preslika:

$\{x+iy, |x|<1, |y|<1\}$

$(1+i)$: polarna vrednost je $\sqrt{2}$, kot pa $\frac{\pi}{2}$

$\cdot i$: menja se Re in Im → obrne za 90°

$z \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$



Koreni enote

Primer: $z^5 = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ $= 1 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$

$z = r \cdot e^{i\varphi}$

$r^5 \cdot e^{i5\varphi} = 1 \cdot e^{i \cdot 0} = e^{i2\pi + \frac{\pi}{4}} = e^{i4\pi + \frac{\pi}{4}}$

$0 = 2\pi = 4\pi$

$r^5 = 1$ $e^{i5\varphi} = e^{i \cdot 0}$

$r = 1$

1. $5\varphi = 0 + \frac{\pi}{4}$; $\boxed{\varphi = 0}$ $+\frac{\pi}{20}$
2. $5\varphi = 2\pi + \frac{\pi}{4}$; $\boxed{\varphi = \frac{2\pi}{5}}$ $+\frac{\pi}{20}$
3. $5\varphi = 4\pi + \frac{\pi}{4}$; $\boxed{\varphi = \frac{4\pi}{5}}$ $+\frac{\pi}{20}$

$+\frac{2\pi}{5}$ $+\frac{2\pi}{5}$

za toliko se φ veča

vstaviš izračunamo φ

$z_1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0} = 1$

$z_2 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{5}}$

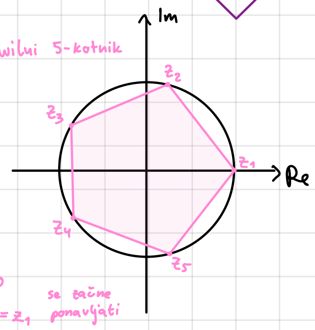
$z_3 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{4\pi}{5}}$

$z_4 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{6\pi}{5}}$

$z_5 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{8\pi}{5}}$

$z_6 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{10\pi}{5}} = 1 \cdot e^{i2\pi} = z_1$ se začne ponavljati

Pravilni 5-kotnik



Formula za korenjenje

$n \in \mathbb{N}$, $z^n = r \cdot e^{i\varphi}$ $k = 0, \ldots, n-1$

$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\frac{\varphi + 2k\pi}{n})}}$

- Pravilni n-kotnik
- n različnih, razen pri $r=0$

Primer: $(z^3 - 2) \cdot (z^2 + i) = 0$

1. $z^3 = 2$ $\boxed{\varphi = 0}$

   $z_1 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{0}{3}}$ → realna rešitev (ena more bit)

   $z_2 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{0+2\pi}{3}}$

   $z_3 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{0+4\pi}{3}}$

   popolni △

2. $z^2 = -i = 1 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2}}$

   $z_4 = 1 \cdot e^{i(\frac{-\pi}{2})}$

   $z_5 = 1 \cdot e^{i(\frac{-\pi}{2} + 2\pi)} = -z_4$

   popolna ⟵

Osnovni izrek algebre

Vsaka enačba $a_k \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$

$\boxed{a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0 = 0}$

ima natanko n rešitev

$\boxed{p(z) = a_n (z - z_1)^{V_1} \cdot (z - z_2)^{V_2} \cdot \ldots \cdot (z - z_n)^{V_m}}$

$V_1 + V_2 + \ldots + V_m = n$

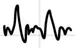
Če so $a_k \in \mathbb{R}, \forall k$, potem

ne-realne ničle nastopajo v

konjugiranih parih

13.10.

Diskretna Fourierjeva transformacija – DFT



"nek signal" → kako visoko smo pri

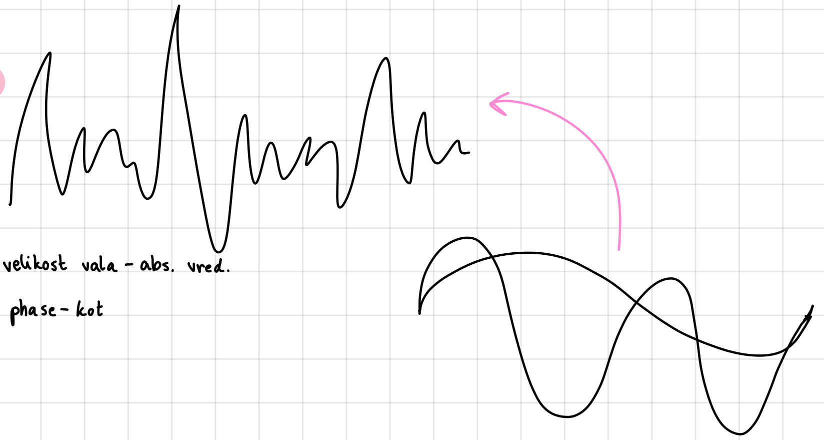
$(x_0, x_1, \dots, x_N) \rightsquigarrow (y_0, y_1, \dots, y_N)$ ← zaporedje frekvenc

Zaporedje jakosti

$$y_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i\frac{2\pi}{N}\cdot k\cdot n}$$

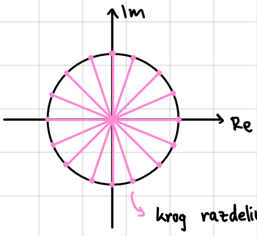
kolikokrat se val s frekvenco 1 pojavi

kolikokrat gre gor in dol

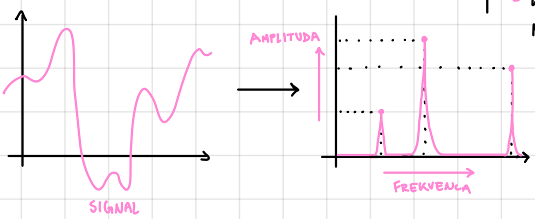


velikost vala – abs. vred.

phase – kot



krog razdelimo na N-delov



ZAPOREDJE

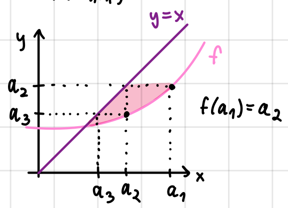
Def: preslikava $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to a_n$ $\quad (a_n) = (a_1, a_2 \dots)$

Podajanje zaporedja:

- EKSPLICITNO: $a_n = f(n)$
- REKURZIVNO: $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2})$ 2-členа + ZAČETNI ČLEN
  $a_n = f(a_{n-1})$ 1-člen

GRAFIČNI PRIKAZ REKURZIVNEGA ZAP.

$a_n = f(a_{n-1})$



Primeri:

$n = 1, 2, 3 \dots$

1. $\frac{n^2-1}{n} = n - \frac{1}{n}$

↓ omejeno, ↑ neomejeno, ↑ strogo

2. $b_n = \frac{b_{n-1}}{2}$

2.1 $b_1 > 0$ strogo padajoče $\inf_n b_n = 0$

2.2 $b_1 < 0$ strogo naraščajoče $\sup_n = 0$

2.3 $b_1 = 0$ konst. v 0 ← OBOJE DRŽI

Primeri: $a_n = (-1)^n$

- **Aritmetično zap.**
  $a_n = a_0 + n \cdot d$
  ali
  $a_n = a_{n-1} + d$
- **Geometrijsko zap.**
  $a_n = a_0 \cdot q^n$
  ali
  $a_n = q \cdot a_{n-1}$
- **Fibonaccijevo zap.**
  $a_1 = 1 = a_2$
  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
- **Collatzova domneva** (1937)
  $$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}; & a_n \text{ sodo} \\ 3\cdot a_n + 1; & a_n \text{ liha} \end{cases}$$
  Ali se za $\forall\, a_0 \in \mathbb{N}$ to zap. vrne v 1?
  ↳ Preverjeno do 2^{71}

Lastnosti zaporedja: $(a_n)_n$ je

- **Navzgor omejeno**, če obstaja zgornja meja $M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} \wedge a_n \leq M$
  Supremum $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ = najmanjša zgornja meja
- **Navzdol omejeno**, če obstaja spodnja meja $m \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} \wedge a_n \geq m$
  Infimum $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ = najvišja spodnja meja
- **Omejeno**, če je navzgor in navzdol omejeno
- **Naraščajoče**, če $\forall_n: a_{n+1} \geq a_n$
  strogo naraščajoče, če $\forall_n\ a_{n+1} > a_n$
- **Padajoče**, če $\forall_n: a_{n+1} \leq a_n$
  strogo padajoče, če $\forall_n\ a_{n+1} < a_n$
- **Monotono**, če je povsod ali padajoče ali naraščajoče

LIMITA ZAPOREDJA

Def: $a \in \mathbb{R}$ je limita zap. $(a_n)_n$, če
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$
$\forall n > N\ |a_n - a| < \varepsilon$

Zaporedje je **konvergentno**, če ima limito

Zaporedje je **divergentno**, če nima limite

Zaporedje $(a_n)_n$

- **Narašča** preko vsake meje $[\lim_{n\to\infty} a_n = \infty]$
  $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}: a_n > M,\ \forall n \geq N$
- **Pada** pod vsako mejo $[\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty]$
  $\forall m \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}: a_n < m,\ \forall n \geq N$

ni konv. zap.

Primeri:

1. $a_n = \frac{1}{n^2}$

Dokažimo, da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$n^2, \varepsilon > 0$

Izberemo $\varepsilon > 0$ po def.

$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \ / \cdot \frac{n^2}{\varepsilon}$

$\frac{1}{\varepsilon} < n^2$

R: $n > \left\lceil \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \right\rceil \in \mathbb{N}$

$x > 0$
$\lceil x \rceil = \min \{ n \in \mathbb{N}_0;\ n \geq x \}$
$\lfloor x \rfloor = \max \{ n \in \mathbb{N};\ n \leq x \}$

2. $b_n = (-1)^n$

Ali je 0 limita?

Izberemo $\varepsilon > 0$

$|(-1)^n - 0| < \varepsilon$

$1 < \varepsilon$

Ni okej za $\varepsilon < 1$!

R: $\boxed{\text{NI LIMITA}}$

Pravila za rač. limit

Naj bo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$

1. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$
3. V smislu naraščanja in padanja preko vseh mej:
   $\infty + \infty = \infty$
   $5 \cdot \infty = \infty$
   $\infty \cdot \infty = \infty$
   $-\infty \cdot \infty = -\infty$
   $\frac{1}{\infty} = 0$
4. $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n}) = 1$
5. $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$
   → $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{a}{n})^n = e^a$
   → $\lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$

Dokaz: $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{a}{n})^n = e^a$; $a>0$ če je konst. prepišeš, sicer računaš limito

$(1+\frac{a}{n})^n = \left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{a}}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a \xrightarrow[n\to\infty]{} e^a$

$e \approx 2{,}7\ldots$

$\frac{1}{e} \approx 0{,}368\ldots$

Primer: 2% letna obr. mera

1. leto: $G \cdot 1{,}02 = G \cdot (1+\frac{2\%}{1})^1$

4x letno: $G \cdot (1+\frac{2\%}{4})^4$

mesečno: $G \cdot (1+\frac{2\%}{12})^{12}$

konstantno: $G \cdot e^{2\%}$

23.10.

Primeri (ne) konvergence:

$$\lim_{n\to\infty} (n^a) = \begin{cases} \infty : a>0 & \text{div.} \\ 1 : a=0 & \text{konv.} \\ 0 : a<0 & \text{konv.} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a^n) = \begin{cases} \infty : a>1 \\ 1 : a=1 \\ 0 : |a|<1 \\ / : a \le -1 \end{cases}$$

$(-1)^n$ – alternirajoče zaporedje (div.)

$[(a_n)_n$ zaporedje: $a_n \neq 0, \forall n]$

$\boxed{\frac{1}{\infty} = 0 = \frac{1}{-\infty}}$

$\lim_{n\to\infty} (a_n) = 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right) = \begin{cases} \infty : a_n > 0 \\ -\infty : a_n < 0 \\ / : \text{ostalo} \end{cases}$ vsi razen končno mnogo členov

$\lim_{n\to\infty} \left(\left|\frac{1}{a_n}\right|\right) = \infty$

STEKALIŠČE LIMITE

Def: a je STEKALIŠČE $(a_n)_n$, če

$\forall \varepsilon > 0 \quad |a - a_n| < \varepsilon$

za neskončno mnogo členov

Izrek: Vsaka LIMITA je STEKALIŠČE.

Primer: $(-1)^n$ nima limite,

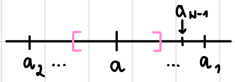
ima pa 2 stekališči $(1, -1)$

$(-(1+\frac{1}{n}))^n$ ima stekališči e in $-e$

Izrek: Vsako KONVEKSNO zap. je omejeno.

Vsako omejeno zap. ima STEKALIŠČE.

Dokaz: $\varepsilon = S$



$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a-S, a+S] \cup \{a_i\}_{i=1}^{N-1}$

IZREK O SENDVIČU (KONVERGENCI)

a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \le b_n \le c_n$

$\lim_{n\to\infty} (a_n) = \lim_{n\to\infty} (c_n) = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (b_n) = a$

Primer: $-\frac{1}{n} \le \frac{\sin(n \cdot e^{3n})}{n} \le \frac{1}{n}$

SKLEP → 0

b) Naraščajoče zap. je konv. natanko tedaj, ko je NAVZGOR omejeno $\lim = \sup$

c) Padajoče zap. je konv. natanko tedaj, ko je NAVZDOL omejeno $\lim = \inf$

Obravnavaj konvergenco:

Primer: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 6}{2}$ I.P.

1. limita: če obstaja $\lim_{n\to\infty} (a_n) = A$:

$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n+6}{2}\right)$

$A = \frac{A+6}{2}$

$A = \frac{A}{2} + 3$

$A = 6$

2. omejenost: $a_n \le 6$ (INDUKCIJA)

B.I. $n=1$ $\quad a_1 \le 6$ ✓

I.K. $n \to n+1$ $\quad a_{n+1} \le 6$ preoblikuješ v I.P.

$\frac{a_n + 6}{2} \le 6$ ali pa izpostaviš a_n

$a_n + 6 \le 12$

$a_n \le 6$ ✓

3. naraščanje: vstaviš a_{n+1}

$a_{n+1} - a_n \ge 0$

$\frac{a_n+6}{2} - a_n \ge 0$

$\frac{a_n + 6 - 2a_n}{2} \ge 0$

$\frac{6 - a_n}{2} \ge 0$

$a_{n+1} \ge 0$

ALI preoblikuješ v I.P

$a_{n+1} \ge a_n$

$a_{n+1} + 6 \ge a_n + 6$

$\frac{a_{n+1}+6}{2} \ge \frac{a_n+6}{2}$

$a_{n+2} \ge a_{n+1}$

Sklep: zaporedje je narašč. (3.), navzgor omejeno (2.), torej je konvergentno z limito 6, ki je edini kandidat (1.)

Hitrosti algoritmov

• Poišči največje število izmed n števil:	n primerjanj	$O(n)$
↳ v urejenem seznamu:	1 "primerjanje"	$O(1)$
• Poišči določeno število v seznamu:	n primerjanj	$O(n)$
↳ v urejenem seznamu:	$\log_2(n)$ primerjanj	$O(\log_2(n))$
• Uredi seznam n števil	1+2+...+n-1 primerjanj	$O(n^2)$

Vrste

Def: **Vrsta** je simbolna vsota $\mathbb{R}$ števil

$a_1+a_2+a_3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

m-ta delna vsota $S_m=a_1+a_2+\ldots+a_m \in \mathbb{R}$

Vrsta **konvergira**, če konvergira $(S_n)_n$.
• V tem primeru je vsota vrste:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n)$$

Vrsta **divergira**, če divergira $(S_n)_n$.

Primer: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)=1$

! Obratno NE velja !

Trditev: Če $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, velja $\lim_{n\to\infty}(a_n)=0$

Harmonična vrsta

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ → divergira

$$\left.\begin{matrix}1+\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\\ \frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{15}\\ \vdots\end{matrix}\right\}\geq\left\{\begin{matrix}1\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}\\ \vdots\end{matrix}\right.\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)>\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)=\infty$$

Geometrijska vrsta

→ $\sum_{n=1}^{\infty}(q^n)=q+q^2+q^3+\ldots=\frac{q}{1-q}$

→ $|q|<1 \Rightarrow$ konvergira, sicer divergira

$S_m=q+q^2+\ldots+q^m \quad \backslash\cdot q$

$q\cdot S_m=q^2+q^3+\ldots+q^m+q^{m+1}$

$S_m(1-q)=q-q^{m+1}$

$S_m=\frac{q-q^{m+1}}{1-q}$

27.10.

Pravila za računanje vrst

Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konvergentni
Tedaj konvergirata:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$
2. $c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}c\,a_n$

Primer:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=$

$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\ldots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\cancel{\infty-\infty}\,?\;=1$

Dominiranje vrst $a_n, b_n>0$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **dominira** $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, če $a_n\geq b_n, \forall n \Rightarrow S_n^a\geq S_n^b$

V tem primeru velja:

Če $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ divergira, potem tudi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ divergira

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergira $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konvergira

Primer:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin(e^{6x^3}-8\pi^2))^6}{2^n}$

$-1<\sin(\;)<1$

$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin(e^{6x^3}-8\pi^2))^6}{2^n}}_{\text{konvergira}}\leq\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\text{konvergira}}$

$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}}_{\text{divergira}}\geq\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}_{\text{divergira}}$

večja → konv.
manjša → div.

Konvergenčni kriteriji

$a_n>0, \forall n$

1. Kvocientni kriterij

$a_n=q^n \quad q=\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad S_n=\frac{q}{1-q}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}q^n\begin{cases}\text{konv.} & |q|<1\\ \text{div.} & |q|>1\end{cases}}$$

$D_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$, naj obstaja $\lim_{n\to\infty}D_n\in\mathbb{R}$ (= D)

• $D>1 \Rightarrow$ vrsta divergira $\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty\right)$

• $D<1 \Rightarrow$ vrsta konvergira

• $D=1 \Rightarrow$ ¯\\(ツ)/¯

Primer:

a) Za katere $x>0$ vrsta konv. $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n$

$a_n=n\cdot x^n$

$D_n=\frac{(n+1)x^{n+1}}{n\cdot x^n}=\frac{n+1}{n}\cdot x\xrightarrow{n\to\infty}x$ $\quad\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\right)$

konv. za $x<1$

div. za $x>1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$a_n=\frac{x^n}{n!}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}=\frac{x}{n+1}\xrightarrow{n\to\infty}0$

konv. za vse $x>0$

2. Korenski kriterij

$D_n=\sqrt[n]{a_n}$, naj obstaja $\lim_{n\to\infty}D_n\in\mathbb{R}$ (= D)

• $D>1 \Rightarrow$ vrsta divergira $\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty\right)$

• $D<1 \Rightarrow$ vrsta konvergira

• $D=1 \Rightarrow$ ¯\\(ツ)/¯

Primer:

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n$

$a_n=\left(\frac{x}{n}\right)^n$

$\sqrt[n]{a_n}=\frac{x}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$

konv. za $x>0$

3. Leibnitzov kriterij

$a_n\searrow^{n\to 0} 0$ **monotono** (tj.: $a_{n+1}\leq a_n, \forall n$)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergira

Primer:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ div. $\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ div.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ div.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots=\infty$

$-1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\ldots=-\infty$

! VRSTNI RED SEŠT. JE POMEMBEN !

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$ konv.

Absolutna konvergenca

$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ in } \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|}_{\text{konvergirata}}$

Pogojna konvergenca

$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}a_n}_{\text{konvergira}} \quad \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|}_{\text{divergira}}$

3.11.

Limita funkcije.

$\lim_{x\to a} f(x) = b$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \neq a$

$|x-a| > \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$

$a-\delta \quad a \quad a+\delta \qquad b-\varepsilon \quad b \quad b+\varepsilon$

Leva limita

$\boxed{\begin{matrix} x \to a^- \\ x \nearrow a \end{matrix}}$

$\lim_{x\to a^-} f(x) = b$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \neq a$

$x \in (a-\delta, a) \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$

$a-\delta \quad a \qquad b-\varepsilon \quad b \quad b+\varepsilon$

Desna limita

$\boxed{\begin{matrix} x \to a^+ \\ x \searrow a \end{matrix}}$

$\lim_{x\to a^+} f(x) = b$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \neq a$

$x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$

$a \quad a+\delta \qquad b-\varepsilon \quad b \quad b+\varepsilon$

Definicije limitnega obnašanja

Trditev:

Limita f v a obstaja natanko takrat ko obstajata ujemajoči se leva in desna limita.

Primer: 1. $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$

2. $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{t\to -\infty} e^{t} = 1 \qquad \lim_{s\to 1} \frac{1}{s} = 1$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \qquad \lim_{t\to \infty} e^{t} = \infty \qquad \lim_{s\to \infty} \frac{1}{s} = 0$

$\lim_{x\nearrow 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

$\frac{1}{1} = 1 \qquad -\infty \qquad 0 \qquad 1+0=1$

$e^{-100} = \frac{1}{e^{100}}, \quad e^{-1000} = \frac{1}{e^{1000}}$ } bliža se 0

Lastnosti limit funkcij

LASTNOSTI SO ISTE KOT PRI ZAPOREDJIH

$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$; tedaj velja

$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$

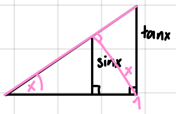
Primer:

1. $\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0} \sin t = 0$

2. $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = /$

3. $\lim_{x\to \frac{2}{\pi}} \sin\frac{1}{x} = 1$

Dokaz za $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\boxed{x>0}$



$\sin x < x < \tan x$

$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x}$

$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

$\downarrow \qquad \Downarrow \qquad \downarrow$

$1 \qquad 1 \qquad 1$

sklep

Zveznost funkcije

Funkcija f je zvezna v $a \in D_f$, če

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

LASTNOSTI ZVEZNOSTI

1. Vse elementarne funkcije so zvezne

2. Če sta f in g zvezni v a:
   - → grafa sta v a neprekinjeni krivulji
   - → so zvezne $f+\delta\cdot g$, $\sin(g)$... v a
   - → lahko zamenjamo vrstni red funk. in limite v a

3. f zvezna v a, g zvezna v f(a) ⇒ $g \circ f$ zvezna v a

4. Če $\lim_{x\to b} f(x)$ obstaja, $b \in D_f$, lahko f s predpisom

   $f(b) = \lim_{x\to b} f(x)$

   zvezno razširimo na b

5. Če je f zvezna na intervalu $[a,b]$
   - → f je omejena
   - → f doseže svoj inf. in sup. (inf. = min., sup. = max)
   - → $\forall y \in [\min f, \max f],\ \exists x \in [a,b],\ f(x) = y$

     $f([a,b]) = [\min f, \max f]$

NIČLE ZVEZNIH FUNKCIJ

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

- Zvito ugibanje (educated guessing)

  Če je f zvezna:

  $f(a)\cdot f(b) \leq 0 \Rightarrow$ f ima ničlo na $[a,b]$

- Bisekcija

1. Naj velja $f(a) < 0 < f(b)$

2. Začetek približka: $a_1 = a$, $b_1 = b$

3. Induktivno računamo približke: $x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$

4. Računamo za:

   $f(x_n) = 0 \Rightarrow$ WE BALL

   $f(x_n) > 0 \Rightarrow \begin{matrix} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = x_{n+1} \end{matrix}$

   $f(x_n) < 0 \Rightarrow \begin{matrix} a_{n+1} = x_{n+1} \\ b_{n+1} = b_n \end{matrix}$

ničla $f = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} x_n$

13.11.

Funkcija več spremenljivk → KOLOKVIJ 2

Def: $n \in \mathbb{N}$ funkcija več spremenljivk je **predpis**

$f: D_f \to \mathbb{R}$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

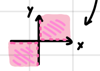
kjer je $D_f \subset \mathbb{R}^n$ **definicijsko območje**

Primeri:

$f_1(x,y) = xy^2 - x \cdot \sin(y^x) - \pi^{\tan y} \cdot x$ $\qquad D_{f_1} = \mathbb{R}^2$

$f_2(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $\qquad D_{f_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq \} =$

$f_3(x,y,z) = \ln(x \cdot y) - z^2$ $\qquad D_{f_3} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \underbrace{(x>0 \wedge y>0) \vee (x<0 \wedge y<0)}_{x \cdot y > 0}\}$



Graf f je

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1};\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f\}$$

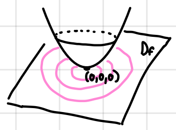
Nivojnice f pri $a \in \mathbb{R}$ je množica

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f;\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a\}$$

Vizualizacija a

$n = 2$

$f(x,y) = x^2 + y^2$



$a \in D_f \subset \mathbb{R}^n$; $L \in \mathbb{R}$ je **Limita** $f: D_f \mapsto \mathbb{R}$,

če $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$:

$d(x,a) < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

evklidska razdalja

$x \in D_f$

$x \neq a$

OZNAKA: $L = \lim_{x \to a} f(x)$

$f: D_f \mapsto \mathbb{R}$ je **zvezna** v $a \in D_f$, če

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Elementarne funk. so zvezne na D_f

Primer: $f(x) = \frac{x}{|x|}$ $\quad$ leva in desna lim $\rightleftarrows$ nista enaki

Strategije računanja limit v (0,0)

1. Zapišemo f v polarnih koordinatah
2. $x \to (0,0)$ pomeni $r = 0$
3. $\lim_{r \to 0} f(r, \varphi)$ mora obstajati in biti neodvisna od φ

Primeri:

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{r \to 0^+} \frac{2r^2 \cos\varphi \sin\varphi}{r^2} = 2\cos\varphi \cdot \sin\varphi = \sin 2\varphi$$

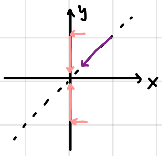
$x \to 0$: 0, $y \to 0$: 0

$x \to y$: 1, $y \to 0$: 1

če je nakaj odvisno od φ potem limite ni

polarne koordinate:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}}$$



2. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r \to 0^+} \frac{2r^3 \cos^2\varphi \sin\varphi}{r^2} = \lim_{r \to 0^+} 2r \cdot \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi =$$

$x \to 0$: 0, $y \to 0$: 0

$x \to y$: $\frac{2y^3}{2y^2}$, $y \to 0$: 0

neodvisno od φ

$= 0$

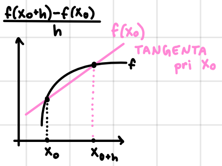
ODVOD

$f' = \dot{f} = \frac{d}{dx} f$

$f: D_f \to \mathbb{R}$; $D_f \subset \mathbb{R}$ v $x_0 \in D_f$ je

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

Diferenčni kvocient (naklon sekante): $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$



Pomen $f'(x_0)$:

- naklon tangente pri x_0
- hitrost spreminjanja f v x_0
- f'' predstavlja pospešek

Zveznost

f je zvezno odvedljiva, če obstaja f' in je zvezna.

Trditev: če je f odvedljiva v x_0, je zvezna v x_0.

Odvedljivost

f je odvedljiva v x_0, če $f'(x_0)$ obstaja

ne-odvedljiva v 0: $|x|$

Drugi odvod

$f''(x_0) = (f')'(x_0)$

n-ti odvod

$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$

f je n-krat odvedljiva (v x_0), če obstajajo $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$ (v x_0)

Levi odvod f v x_0

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Desni odvod f v x_0

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Primer: $|x|$ ima levi in desni odvod v 0, nima pa odvoda

Pravila za odvajanje
f, g funkciji; $\alpha \in \mathbb{R}$

$(\alpha \cdot f + g)' = \alpha \cdot f' + g'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ $\qquad D_{f \circ g} = g^{-1}(D_f) \cap (D_g)$

Osnovni odvodi

$(\text{konstanta})' = 0$	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x} \cdot x'$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \cdot x'$
$(\sin x)' = \cos x \cdot x'$	$(\cos x)' = -\sin x \cdot x'$
$(e^x)' = e^x \cdot x'$	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \cdot x'$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$\log x^k = (\log x) \cdot k$

Izpeljava: $(\ln x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \cdot h^{-1} = \lim_{h \to 0} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \to 0} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$

UPORABA ODVODA

L'Hospitalovo pravilo

f, g odvedljivo na (a,b), $g \neq 0$

Naj za $c \in (a,b)$ velja bodisi

1. $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$
2. $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \infty$

Tedaj velja:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

velja tudi za $c = \pm\infty$

Primeri:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x \cdot \ln x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

odvod od $\ln x$

odvod od x

pomeni da je imenovalec hitrejši

npr. zanima nas kateri (števec ali imenovalec) je hitrejši

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{100}}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{100!}{e^x} = 0$$

1. odv. $100 \cdot x^{99}$

2. odv. $100 \cdot 99 \cdot x^{98}$

$\vdots$

Počasnejši $\qquad$ Hitrejši

$O(e^n) \quad O(n^2) \quad O(n) \quad O(\ln) \quad O(1)$

najslabši possible čas pri prog.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{100}}{\pi^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{100!}{\pi^x \cdot (\ln \pi)^{100}} = 0$$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(\pi^x)' = \pi^x \cdot \ln \pi$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \ln x}{x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} -x = 0$$

20.11.

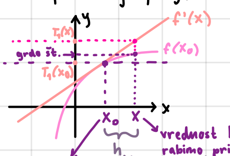
Aproksimacija funkcij

$f: D_f \mapsto \mathbb{R}$, D_f odprto, $x_0 \in D_f$

1. Aproksimacija f s konst.
(Aproksimacija ničtega reda)

$f(x) = x_0$

2. Aproksimacija z linearno funk.
(Aproksimacija prvega reda)



vrednost katere rabimo približek

najbližja "lepa" cifra

h manjši kot je h, boljši je približek

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)\underbrace{(x - x_0)}_{h}$$

$T_1(x_0) = f(x_0)$ & $T_1'(x_0) = f'(x_0)$

3. Aproksimacija s kvadratno funk.
(Aproksimacija drugega reda)

$$T_2(x) = \underbrace{a + b \cdot (x - x_0)}_{T_1} + c(x - x_0)^2$$

$T_2(x_0) = f(x_0)$ $\qquad a = f(x_0)$

$T_2'(x_0) = f'(x_0)$ $\qquad b = f'(x_0)$

$T_2''(x_0) = f''(x_0)$ $\qquad c = \frac{f''(x_0)}{2}$

$T_2' = b + 2c(x - x_0)$

$T_2'' = 2c = f''(x_0)$

4. Aproksimacija s polinomom stopnje n
(Aproksimacija n-reda)

Taylorjev polinom stopnje n

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Zadošča: $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}$$

Ostanek

$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$

Izrek: Naj bo f $(n+1)$-krat odvedljiva. Tedaj je

$$R_n(x) = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

za nek $c \in [x_0, x]$

Taylorjeva vrsta f pri x_0

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Če $R_n(x) \xrightarrow[\infty]{n} 0$, potem $f(x) = T(x)$

Bonus: V notranjosti območja konv. dobljenega preko konv. kriterijev lahko $T(x)$ odvajamo in integriramo po členih

2. $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Primer:

Izračunaj približek $\sin(1)$ s T_5, $x_0 = 0$

$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

$T_1(1) = \frac{120 - 20 + 1}{120} = \frac{101}{120}$

kako natančno?

Nejca vprašaj glede |abs.| pri $R_n(x)$

$$R_n(x) = \frac{|\sin^{(6)}(6)|}{6!}(1-0)^6 \leq \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$$

Primer: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

$(ix)^2 = -x^2$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} = \cos x + i \sin x$$

Primeri: 1. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

$f^{(k)}(x) = e^x \xrightarrow[0]{x_0} 1$

$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k = e^x$

konvergira na $\mathbb{R}$

$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{e^x}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \xrightarrow[\infty]{n} 0$

"trust me bro"

$f(x) = e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$

$$\int e^{x^2} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)} + C$$

Geometrijski pomen odvoda

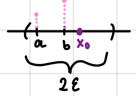
$f: D_f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$

Lokalna lastnost f v x_0:

Če $\exists \varepsilon > 0$; $\forall a,b \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

1. $[a > b \Rightarrow f(a) < f(b)]$ implicira

   f je naraščajoča v x_0



2. Če je f padajoča na $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, je f padajoča v x_0
3. $f(a) \leq f(x_0)$, je x_0 LOKALNI MAX
4. $f(a) \geq f(x_0)$, je x_0 LOKALNI MIN

Naj bo f odvedljiva v x

1. $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ je v x naraščajoča
2. $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ je v x padajoča
3. $f'(x) = 0 \Rightarrow x$ imenujemo STACIONARNA TOČKA

$\to f'$ v x spremeni predznak iz $-$ v $+$, je x lokalni min.

$\to f'$ v x spremeni predznak iz $+$ v $-$, je x lokalni max.

$\to f'$ v x ne spremeni predznaka, je x sedlo.

Izrek: f odvedljiva na $[a,b]$

Globalni ekstremi se pojavijo v stacionarnih točkah ali v mejah a,b.

$f: D_f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$

Lokalna lastnost f v x_0:

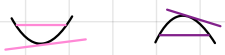
Če $\exists \varepsilon > 0$; na intervalu $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

1. Vsaka tangenta pod / nad grafom,

   $\Updownarrow$

   Vsaka sekanta nad / pod grafom,

   je f v x_0 konveksna / konkavna



Naj bo f 2-krat odvedljiva v x

1. $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ v x konkavna
2. $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ v x konveksna
3. $f''(x) = 0$ in se predznak f'' v x spremeni $\Rightarrow x$ je PREVOJ

   $\cup$

   $\cap$

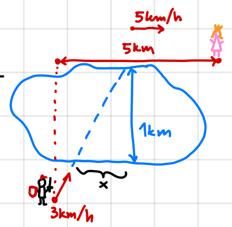
f''	$+$	$-$	0
f'	$\nearrow$	$\searrow$	stac. toč.
f	$\cup$	$\cap$	

Naj bo f 2-krat odvedljiva v x, $f'(x)=0$

1. $f''(x) > 0 \Rightarrow x$ je lokalni min.
2. $f''(x) < 0 \Rightarrow x$ je lokalni max.
3. $f''(x) = 0 \rightsquigarrow$ naj bo n prvo število z $f^{(n)}(x) \neq 0$:
   1. n liho $\Rightarrow$ v x je sedlo
   2. n sodo $\Rightarrow$ a) $f^{(n)}(x) > 0 \Rightarrow x$ je lokalni min.

      b) $f^{(n)}(x) < 0 \Rightarrow x$ je lokalni max.

<u>Primer:</u>



$f: [0,5] \to (0, \infty)$ čas

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{3} + \frac{5-x}{5}$$

$$f'(x) = \frac{1}{6}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{5}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{6}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{5} = 0$$

$$5x = 3\sqrt{1+x^2} \;/^2$$

$$25x^2 = 9 + 9x^2$$

$$16x^2 = 9$$

$$x^2 = \frac{9}{16} \quad \begin{cases} \boxed{x_1 = \frac{3}{4}} \\ x_2 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ ne upoštevamo ker je x razdalja

Potencialni global. min.

$x_1 = \frac{3}{4}$

$x_3 = 0$

$x_4 = 5$

1. vse daš v f in pogledaš kira je najmanjša
2. pogledaš robove fnk. (deluje če je samo 1 stac. točka
3. pogledaš $f''(x)$ na sredini