6.10.

Izjava - resničen ali neresničen stavek

Niso izjava: „Zapri vrata!"

Izjave so:

- resnične
- neresnične
- osnovne/enostavne
- sestavljene

Oklepaji

1. $\neg$
2. $\wedge$
3. $\vee$
4. $\Rightarrow$
5. $\Leftrightarrow$
6. od leve proti desni

Vezniki - sestavljajo izjave

Negacija

$\neg A$ "ne A"

A	$\neg A$
0	1
1	0

Konjunkcija

$A \wedge B$ "A in B"

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjunkcija

$A \vee B$ "A ali B"

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implikacija

$A \Rightarrow B$ "Če A, potem B"

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ekvivalenca

$A \Leftrightarrow B$ "A ntk B"

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ntk... natanko tedaj, ko

Izjavni izrazi

- Izjavni konstanti 0 in 1 sta izjavna izraza
- Izrazne spremenljivke p, q, r... so izjavni izrazi
- Če je A izjavni izraz, potem je tudi $\neg A$ izjavni izraz
- Če so $A_1, A_2, \dots, A_n$ izjavni izrazi in je F n-mestni izjavni veznik, potem je $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ izjavni izraz

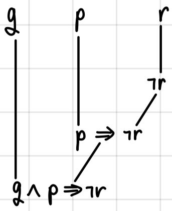
Konstrukcijsko drevo

$q \wedge (p \Rightarrow \neg r)$

Nastopajo:

$q, p, r, \neg r,$

$p \Rightarrow \neg r, \; q \wedge (p \Rightarrow \neg r)$



Resničnostna tabela

p	q	r	$\neg r$	$p \Rightarrow \neg r$	$q \wedge (p \Rightarrow \neg r)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

Tavtologija

Resničen pri vseh naborih

$1, \; p \vee \neg p, \; p \Rightarrow p, \; p \Leftrightarrow p$

(vse drugo je nevtralno)

Protislovje

Neresničen pri vseh naborih

$0, \; \neg(p \Leftrightarrow p), \; \neg p \Leftrightarrow p$

Enakovredni izjavni izrazi

p	q	$q \Rightarrow p$	$\neg p \Rightarrow \neg q$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	1

$q \Rightarrow p \sim \neg p \Rightarrow \neg q$

- $A \sim A$
- Če $A \sim B$, potem $B \sim A$
- Če $A \sim B$ in $B \sim C$, potem $A \sim C$

$A \sim B$ ntk $A \Leftrightarrow B$ tavtologija

Dokaz: $A \sim B$ ... pri vseh naborih

A in B imata "vedno" isto vrednost

$A \Leftrightarrow B$ je "vedno" resničen

$A \Leftrightarrow B$ je tavtologija

ZAKONI IZJAVNEGA RAČUNA

1. Zakon dvojne negacije: $\neg\neg A \sim A$
2. Idempotenca: $A \wedge A \sim A \qquad A \vee A \sim A$
3. Komutativnost: $A \wedge B \sim B \wedge A \qquad A \vee B \sim B \vee A$
   $A \Leftrightarrow B \sim B \Leftrightarrow A$
4. Asociativnost: $(A \wedge B) \wedge C \sim A \wedge (B \wedge C)$
   $(A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$
   $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \sim A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$
   vrstni red ne vpliva
5. Absorpcija: $A \wedge (A \vee B) \sim A \qquad A \vee (A \wedge B) \sim A$
6. Distributivnost: $(A \vee B) \wedge C \sim (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
   $(A \wedge B) \vee C \sim (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
7. de Morganova zakona: $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$
   $\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$
8. Kontrapozicija: $A \Rightarrow B \sim \neg B \Rightarrow \neg A$
9. Lastnosti 0 in 1: $A \Rightarrow A \sim 1 \qquad A \Leftrightarrow A \sim 1$
   $A \vee \neg A \sim 1 \qquad A \wedge \neg A \sim 0$
10. Še lastnosti 0 in 1: $A \wedge 0 \sim 0 \qquad A \vee 0 \sim A$
    $A \wedge 1 \sim A \qquad A \vee 1 \sim 1$
    $A \Rightarrow 0 \sim \neg A \qquad 0 \Rightarrow A \sim 1$
    $A \Rightarrow 1 \sim 1 \qquad 1 \Rightarrow A \sim A$
11. Lastnosti implikacije: $A \Rightarrow B \sim \neg A \vee B$
    $\neg(A \Rightarrow B) \sim A \wedge \neg B$
12. Lastnosti ekvivalence: $A \Leftrightarrow B \sim (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
    $A \Leftrightarrow B \sim (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
    $\neg(A \Leftrightarrow B) \sim \neg A \Leftrightarrow B$

Disjunktivna normalna oblika (DNO)

$A \sim A_{DNO}$

A_{DNO} je disjunkcija osnovnih konjunkcij

Konjunkcija izjavnih sprem. in/ali njihovih neg.

Konjuktivna normalna oblika

$A \sim A_{KNO}$

A_{KNO} je konjunkcija osnovnih disjunkcij

13.10.

Naloga (DNO in KNO)

Poišči izjavni izraz s predpisano resničnostno tabelo:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\downarrow$$

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

$$\downarrow$$

$$((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee r \sim$$
$$((p \vee (q \wedge \neg q)) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee r \sim$$
$$(p \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee r \sim$$

Distributivnost

$$(\overset{0}{\cancel{(p \wedge \neg p)}} \vee (p \wedge \neg q)) \vee r \sim$$

$$(p \wedge \neg q) \vee r \sim$$ dvojna negacija

$$\neg\neg(p \wedge \neg q) \vee r \sim$$ de Morgan

$$\neg(\neg p \vee q) \vee r \overset{11a}{\sim} (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

TRDITEV:

Vsak izjavni izraz ima DNO in
vsak izjavni izraz ima KNO

$p \Rightarrow q$ velja ko

$(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q) \sim \overbrace{\neg p \vee q}^{KNO}$

Za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B, ki vsebuje samo veznike $\neg, \wedge, \vee$

Kako v praksi pokazati, da nabor izjavnih veznikov ni poln?

Težko.

$\{\wedge, \Rightarrow\}$ ni poln nabor

$1 \wedge 1 \sim 1$

$1 \Rightarrow 1 \sim 1$

$((p \wedge q) \Rightarrow p) \wedge ((r \Rightarrow s) \Rightarrow q) \sim 1$

$\{\wedge, \Rightarrow\}$ ni poln, ker ohranja vrednost 1

Polni nabori izjavnih veznikov

Družina izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ je poln nabor izjavnih veznikov, če za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B, ki vsebuje samo veznike iz $\mathcal{N}$

$\{\neg, \wedge, \vee\}$ je poln nabor izjavnih veznikov

Dokaz:

Izberemo poljubni izjavni izraz A.
Obstaja, ker je $\{\neg, \wedge, \vee\}$ poln nabor, izjavni izrazi A', $A' \sim A$ in A' uporablja samo $\{\neg, \wedge, \vee\}$
Dovolj je odstraniti vse konjunkcije

$p \wedge q \sim \neg\neg(p \wedge q) \sim \neg(\neg p \vee \neg q)$

VEZNIKE IZ $\mathcal{N}$ SMO IZPELJALI IZ $\{\vee, \neg\}$

Primer:

$\{\neg, \Rightarrow\}$ in $\{\neg, \vee\}$ $\quad p \vee q \sim \neg(\neg p) \vee q \sim \neg p \Rightarrow q$

EKSKLUZIVNA DISJUNKCIJA $\veebar$

$A \veebar B$ „ali ali"

$A \veebar B$ je resnična ntk je eden od izrazov resničen

A	B	$A \veebar B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$A \veebar B \sim \neg(A \Leftrightarrow B)$

SHEFFERJEV VEZNIK $\uparrow$

$A \uparrow B$

$A \uparrow B$ je neresničen ntk sta oba izraza resnična

A	B	$A \uparrow B$
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0

$A \uparrow B \sim \neg(A \wedge B)$

PIERCE-ŁUKASIEWICZEV VEZNIK $\downarrow$

$A \downarrow B$ „niti A niti B"

$A \downarrow B$ je resničen ntk sta oba izraza neresnična

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$A \downarrow B \sim \neg(A \vee B)$

ZAKONI:

ekskluzivna disjunkcija	$A \veebar B \sim \neg(A \Leftrightarrow B)$
	$A \veebar B \sim B \veebar A$
	$(A \veebar B) \veebar C \sim A \veebar (B \veebar C)$
Shefferjev veznik	$A \uparrow B \sim \neg(A \wedge B)$
	$A \uparrow B \sim B \uparrow A$
Pierceov veznik	$A \downarrow B \sim \neg(A \vee B)$
	$A \downarrow B \sim B \downarrow A$

TRDITEV: Izraz $A_1 \veebar A_2 \veebar A_3 \veebar A_4 \veebar \dots \veebar A_n$ je ne glede na to, kako so postavljeni oklepaji, resničen ntk je liho mnogo členov izmed $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ resničnih.

Dokaz: uporabimo indukcijo

Baza ind: $n = 1$ $\quad A_1$ liho mnogo od enega = ta člen je res

$n = 2$ $\quad A_1 \veebar A_2$ liho mnogo od dveh = natanko eden je res

Ind. korak: $\rightsquigarrow n$ $\quad$ Verjamemo, da je trditev res za vse eksl. disjunkcije z < kot n členi

$$\underbrace{(A_1 \veebar A_2 \veebar A_3 \veebar A_4 \veebar \dots \veebar A_i)}_{B_1} \veebar \underbrace{(A_{i+1} \veebar A_{i+2} \veebar \dots \veebar A_n)}_{B_2}$$

$B_1 \veebar B_2$ je resnično, ko

B_1 res in B_2 lažen

ALI

B_1 lažen in B_2 res

liho mnogo izmed $A_1, \dots, A_i$ je res in sodo mnogo izmed $A_{i+1}, \dots, A_n$ je res

ALI

sodo mnogo izmed $A_1, \dots, A_i$ je res in liho mnogo izmed $A_{i+1}, \dots, A_n$ je res

Uporaba v teoriji:

$(p \veebar q) \veebar r$

$(p \veebar p) \veebar (p \veebar p) \sim 0$

$p \veebar p \veebar p \veebar p \veebar p \sim p$

$p \veebar q \veebar q \veebar p \veebar p \sim p$

$\{\uparrow\}$ in $\{\downarrow\}$ sta polna nabora

$\{\neg, \wedge\}$

$\neg p \sim \neg(p \wedge p) \sim p \uparrow p$

$p \wedge q \sim \neg\neg(p \wedge q) \sim \neg(p \uparrow q)$
$\sim (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$

$p \vee q \sim \neg\neg p \vee \neg\neg q \sim$
$\sim \neg(\neg p \wedge \neg q) \sim \neg p \uparrow \neg q$
$\sim (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$