



ŠTEVILA

1. Nаравна \mathbb{N} (indukcija)
Cela \mathbb{Z} (oditevage)

Racionalna \mathbb{Q} (dejstvoje)

2. Realna \mathbb{R} (absolutna vrednost)

3. Kompleksna \mathbb{C} (karteziano)

1. INDUKCIJA

Princip indukcije: $A \subseteq \mathbb{N}, a \in A, a \in A \Rightarrow a+1 \in A$

$$\downarrow \\ \{a, a+1, a+2, \dots\} \subseteq A$$

Shema uporabe: dokazi, da velja $T(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Baza ind. $T(1)$

$$\downarrow n=1$$

b) Indukcijski korak $T(n) \Rightarrow T(n+1)$

indukcijska predpostavka
 \rightarrow predpostavimo, da trditev za katerikoli $n \in \mathbb{N}$ velja

Primer: dokazi $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

D.I.: $n=1$

$$1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} \\ 1 = 1$$

$$I.K.: 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\frac{2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6} \stackrel{\text{preoblikuješ s ciljem, da dobis ta izraz}}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

V.V. $T(n)$ dokazan $\forall n \in \mathbb{N}$

Recimo, da velja $T(s)$

$T(n) \Rightarrow T(n+3), \forall n \in \mathbb{N}$

ali velja $T(2025)$?

2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$... iracionalna št. ($\sqrt{2}$, π , e ...)

$\forall x \in \mathbb{R}$ ima decimalni zapis

OMEJENOST

Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

zgoruja meja A
 $\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, M \geq a$

Če je A navzgor omejena, vedno obstaja

nejmanjša zgorja meja: **SUPREMUM**

Če je supremum $\in A$, mu rečemo: **MAKSIMUM**

slednja meja A

$\exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A, m \leq a$

Če je A navzdol omejena, vedno obstaja

največja slednja meja: **INFIMUM**

Če je infimum $\in A$, mu rečemo: **MINIMUM**

Primer:

množica: $(0, 1) \cup [0, 5] \cup [6, 7) \cup (8, \infty)$

	sup	1	5	7	/
max	/	5	/	/	
inf	0	0	6	8	
min	/	0	6	/	



six seven

ABSOLUTNA VREDNOST

$x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$|x-y| \dots$ razdalja med x in y

Lastnosti:

- $|x| \geq 0$
- $|xy| = |x| \cdot |y|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$

Primer $|x-1| = |x+3|$

$$\begin{aligned} 1. \quad x+3 &< 0 & 2. \quad x+3 \geq 0 & 3. \quad x-1 > 0 \\ x &< -3 & x \geq -3 & x > 1 \\ -x+1 &= -x-3 & & \\ 1 &= -3 // & & \\ \text{ni rešitve} & & & \end{aligned}$$

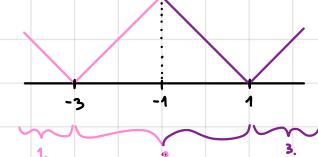
rešitev ustreza pogoju

1. $x=-1$

2. $x \geq -3$

3. $x > 1$

Grafično:



3.

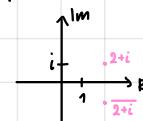
KOMPLEKSNA ŠTEVILA

$$i = \sqrt{-1}$$

$$\mathbb{C} = \{a+bi; a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$z = a+bi \quad a = \operatorname{Re}(z) \quad b = \operatorname{Im}(z)$$

Kompleksna ravnilna



Absolutna vrednost

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2}$$

Lastnosti:

- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

trikotniška neenakost

Konjugirana vrednost

$$\bar{z} = a-bi$$

Lastnosti:

- $\overline{\bar{z}} = z$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Pravila za računanje

- vsota/razlika: kot vektorji
- množenje: $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$
- deljenje: $\frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dots$

$$i^{4n+ost.} = i^{ost.}, \quad \text{ost.} \in \{1, 2, 3\} \wedge n \in \mathbb{N}$$

$$i^4 = i \quad i^{4n+4} = i$$

$$i^2 = -1 \quad i^{4n+2} = -1$$

$$i^3 = -i \quad i^{4n+3} = -i$$

$$i^0 = 1 \quad i^{4n} = 1$$



$$z=1$$

$$\bar{z}=1 \rightsquigarrow z_1=1, z_2=-1$$

$$\bar{z}=1 \rightsquigarrow z_1=1, z_2=? , z_3=?$$

$$\bar{z}=1 \rightsquigarrow z_1=1, z_2=i, z_3=-1, z_4=-i$$

$$\text{Primer: } 2 \cdot \bar{z} = z^2$$

$$2(x-yi) = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\operatorname{Re} \quad \operatorname{Im}$$

$$\text{Im: } -2y = 2xy \quad \text{Re: } 2x = x^2 - y^2$$

$$xy+y=0$$

$$y=0$$

$$y(x+1)=0$$

$$x=-1$$

$$\begin{aligned} 1. \quad & 2x = x^2 - y^2 \\ & y = 0 \\ & x(x-2) = 0 \\ & x_1 = 0, x_2 = 2 \end{aligned}$$

$$2. \quad -2 = 1 - y^2$$

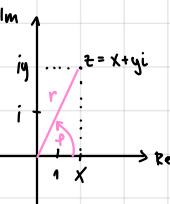
$$y = \pm \sqrt{3}$$

$$\text{REŠITVE: } z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3} \quad (2.)$$

$$z_3 = 0 \quad (4.)$$

$$z_4 = 2 \quad (4.)$$

Kartezični zapis



Polarni zapis

$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$

argument: polarni kot $\varphi \in \mathbb{R}$ ni enotično določen

$|r| = |z| \in [0, \infty)$ je enotično določen

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

(upoštevamo kvadrant!)

Primer: Zapisi v polarni obliko

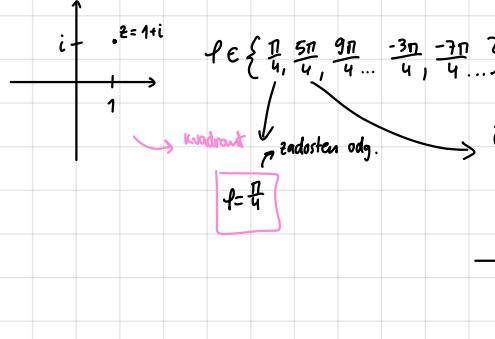
$$z = 1+i$$

$$x = 1 \quad r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$y = 1$$

$$\tan \varphi = \frac{1}{1} = 1$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

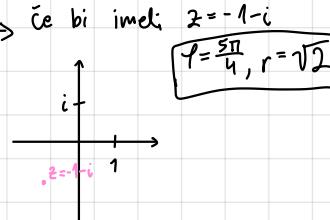
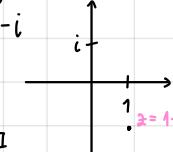


Konjugirano:

$$z = 1-i$$

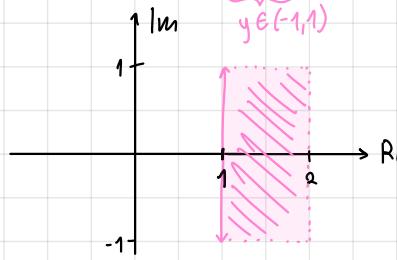
$$r = \sqrt{2}$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}$$

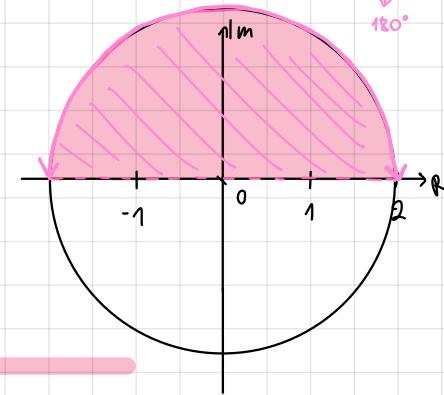


Primer: Nariši naslednjo množico

$$\{x+iy; x \in [1,2], |y| < 1\}$$



$$\{r(\cos \varphi + i \sin \varphi); r \leq 2, \varphi \in (0, \pi)\}$$



Množenje v polarnem zapisu

$$z_j = |z_j| \cdot (\cos \varphi_j + i \sin \varphi_j); j \in \{1, 2\}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot |z_2| \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + i (\cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2)) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

proizvod zmanjši absolutne vrednosti in sesteje kote

Eulerjeva formula

$$e^{ip} = \cos p + i \sin p$$

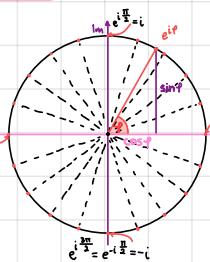
Polarni zapis

$$z = r \cdot e^{ip}$$

$$r_1 \cdot e^{ip_1} \cdot r_2 \cdot e^{ip_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(p_1+p_2)}$$

absolutna vrednost

$$e^{i\pi} = -1$$

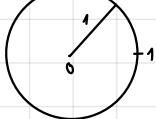


Primer:

$$\{e^{ip}, p \in \mathbb{R}\}$$

središte u (0,0)

polmer je 1



$$\{r \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}, r \in [0, \infty)\}$$

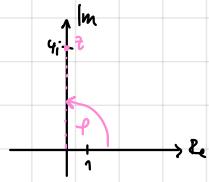
$$z = 4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$x = 0$$

$$y = 4$$

$$r = 4$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$



Lastnosti:

$$1. x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

$$r_1 e^{ip_1} = r_2 e^{ip_2} \Leftrightarrow r_1 = r_2 \wedge (p_1 - p_2) = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ali
 $r_1 = r_2 = 0$

$$2. r \cdot e^{ip} = r \cdot e^{-ip}$$

$$3. (r \cdot e^{ip})^n = r^n \cdot e^{inp}$$

de Moivrejeva formula

$$4. (re^{ip})^{-1} = r^{-1} \cdot e^{-ip} \quad r \neq 0$$

$$5. \frac{r_1 e^{ip_1}}{r_2 e^{ip_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(p_1-p_2)} \quad r_2 \neq 0$$

Primer:

$$z = 1 - i\sqrt{3}$$

napišemo $z, z^2, z^3 \dots$

$$x = 1$$

$$y = -\sqrt{3}$$

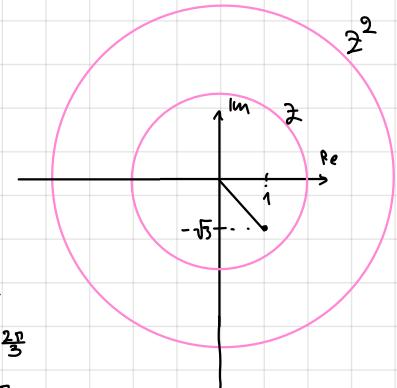
$$r = 2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$z = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$z^2 = 4 \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z^3 = 8 \cdot e^{-i\pi} = -8$$



Geometrija operacija v ravni

preslikava

$$\begin{aligned} z &\mapsto \bar{z} \\ z &\mapsto -z \\ z &\mapsto z+z_0 \\ z &\mapsto z \cdot e^{ip} \\ z &\mapsto z \cdot r \cdot e^{ip} \end{aligned}$$

transformacija v \mathbb{C}

zrcaljenje preko Re (premice)
zrcaljenje preko $z=0$ (točke)
prerek za z_0
rotacija za $+p$
raztag za r , rotacija $+p$

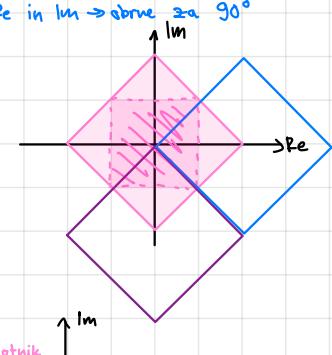
Primer: V kaj se s preslikavo $z \mapsto (z(1+i)-2i)$ menjata Re in Im \Rightarrow obrne za 90°

preslikava:

$$\{x+iy, |x|<1, |y|<1\}$$

\downarrow polarna vrednost
 $|z| \in \sqrt{2}$, kot pa
 $\frac{\pi}{2}$

$$2\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$



Koreni enote

$$\text{Primer: } z^5 = 1 = 1 \cdot e^{i0}$$

$$z = r \cdot e^{ip}$$

$$r^5 \cdot e^{ip} = 1 \cdot e^{i0} \quad 0 = 2\pi = 4\pi$$

$$r^5 = 1 \quad e^{ip} = e^{i0}$$

$$r = 1 \quad ④. 5p = 0 + \frac{\pi}{4} \quad ②. 5p = 2\pi + \frac{\pi}{4} \quad ③. 5p = 4\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$-p = 0 + \frac{\pi}{20} \quad -p = \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{20} \quad -p = \frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{20}$$

$$\text{za toliko se } p \text{ veča}$$

vstavljam iteračno p

$$z_1 = 1 \cdot e^{i0} = 1$$

$$z_2 = 1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{5}} = -i$$

$$z_3 = 1 \cdot e^{i\frac{4\pi}{5}} = -1$$

$$z_4 = 1 \cdot e^{i\frac{6\pi}{5}} = i$$

$$z_5 = 1 \cdot e^{i\frac{8\pi}{5}} = 1$$

$$z_6 = 1 \cdot e^{i\frac{10\pi}{5}} = z_1 = 1$$

se začne ponavljati

Formula za korenjenje

$$n \in \mathbb{N}, z^n = r \cdot e^{ip} \quad k=0, \dots, n-1$$

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\frac{p}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\frac{p+2k\pi}{n})}$$

pravilni n-kotnik

n različnih, razen pri $r=0$

$$\text{Primer: } (z^3 - 2) \cdot (z^2 + i) = 0$$

$$① z^3 = 2$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{0}{3}}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_3 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

popolni Δ

$$② z^2 = -i = 1 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_4 = 1 \cdot e^{i(\frac{\pi}{2})}$$

$$z_5 = 1 \cdot e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi)} = -z_4$$

popolna —

Osnovni izrek algebre

Vsaka enačba

$$a_k \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$$

$$a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0 = 0$$

ima natanko n rešitev

$$p(z) = a_n(z-z_1)^{v_1} \cdot (z-z_2)^{v_2} \cdots (z-z_n)^{v_m}$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_m = r$$

če so $a_k \in \mathbb{R}, \forall k$, potem

ne-realne niti nastopajo v

konjugiranih parih

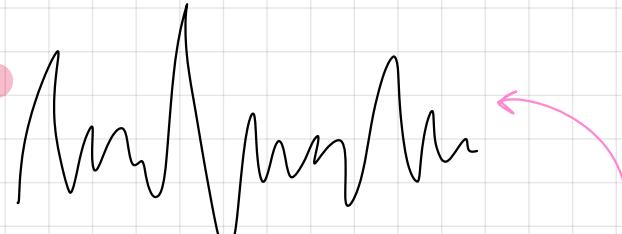
Diskretna Fourierjeva transformacija - DFT

"nek signal" → kako visoko smo pri $\sqrt{X_0^2 + X_1^2 + \dots + X_N^2}$

$(x_0, x_1, \dots, x_N) \rightsquigarrow (y_0, y_1, \dots, y_N)$ zaporedje frekvenc
(zaporedje jakosti)

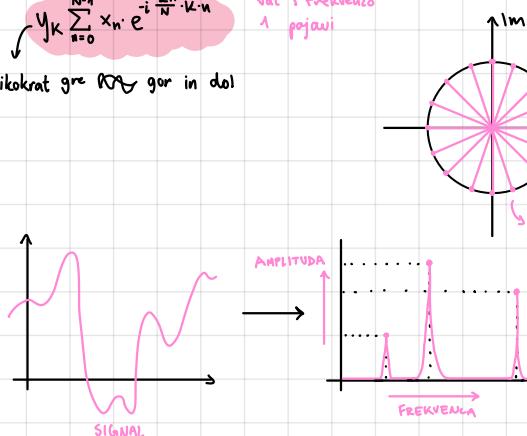
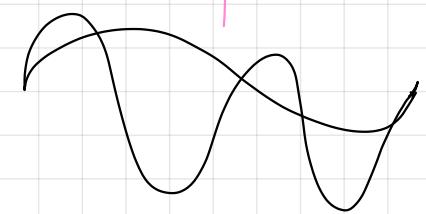
$$y_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j \frac{2\pi}{N} k n}$$

kolikokrat gre x_n gor in dol



velikost vala - abs. vred.

phase - kot



ZAPOREDJJE

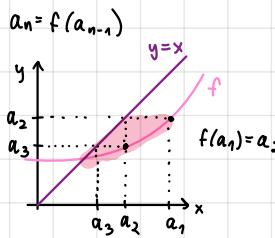
Def: preslikava $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ $n \mapsto a_n$ $(a_n) = (a_1, a_2, \dots)$

Podejanje zaporedja:

• EKSPlicitno: $a_n = f(n)$

• REKURZIVNO: $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2})$ 2-člen
+ začetni člen
 $a_n = f(a_{n-1})$ 1-člen

GRAFIČNI PRIKAZ REKURZIVNEGA ZAP.



Primeri: $a_n = (-1)^n$

• Aritmetično zap.

$$a_n = a_0 + n \cdot d$$

$$a_n = a_0 + n - 1$$

• Geometrijsko zap.

$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

$$a_n = q \cdot a_{n-1}$$

• Fibonaccijevo zap.

$$a_1 = a_2$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

• Collatzova domnevna (1937)

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}; & a_n \text{ sodo} \\ 3a_n + 1; & a_n \text{ liha} \end{cases}$$

Ali se za $\forall a_0 \in \mathbb{N}$ to zap. vrne v 1?

↳ Preverjeno do 2^{31}

Lastnosti zaporedja: $(a_n)_n$ je

• Navzgor omejeno, če obstaja zgornja meja $M \in \mathbb{R}$: $\forall n \in \mathbb{N} \wedge a_n \leq M$
Supremum $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \text{najmanjša zgornja meja}$

• Navzdol omejeno, če obstaja spodnja meja $M \in \mathbb{R}$: $\forall n \in \mathbb{N} \wedge a_n \geq m$
Infimum $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = \text{najvišja spodnja meja}$

• Omejeno, če je navzgor in navzdol omejeno

• Narasčajoče, če $\forall n: a_{n+1} \geq a_n$
stogo narasčajoče, če $\forall n: a_{n+1} > a_n$

• Padajoče, če $\forall n: a_{n+1} \leq a_n$
stogo padajoče, če $\forall n: a_{n+1} < a_n$

• Monoton, če je povsod ali padajoče ali narasčajoče

Primeri:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$1. \frac{n^2 - 1}{n} = n - \frac{1}{n}$$

↓ omejeno, ↑ neomejeno, ↑ strogo

$$2. b_n = \frac{b_{n-1}}{2}$$

$$\begin{array}{ll} 2.1 b_n > 0 & 2.2 b_n < 0 \\ \text{strogo padajoče} & \text{strogo narasčajoče} \\ \inf_n b_n = 0 & \sup_n b_n = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2.3 b_n = 0 & \text{komit. v 0} \\ \text{strogo padajoče, } \inf_n b_n = 0 & \text{strogo narasčajoče, } \sup_n b_n = 0 \end{array}$$

LIMITA ZAPOREDJJA

Def: $a \in \mathbb{R}$ je limita zap. $(a_n)_n$, če

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$$

$$\forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Zaporedje je konvergentno, če ima limito

Zaporedje je divergentno, če nima limite

Zaporedje $(a_n)_n$

• Narasča preko vsake meje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ni konv. zap.

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N}: a_n > M, \forall n \geq N$$

• Pada pod vsako mejo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ni konv. zap.

$$\forall m \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N}: a_n < m, \forall n \geq N$$

Primeri: 1. $a_n = \frac{1}{n^2}$

Dokažimo, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$n^2, \varepsilon > 0$$

Izberešemo $\varepsilon > 0$ po def.

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon / \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n^2$$

$$n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$n > \lceil \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \rceil \in \mathbb{N}$$

$$\lceil x \rceil = \min \{ n \in \mathbb{N}_0; n \geq x \}$$

$$\lfloor x \rfloor = \max \{ n \in \mathbb{N}; n \leq x \}$$

$$2. b_n = (-1)^n$$

Ali je 0 limita?

Izberešemo $\varepsilon > 0$

$$|(-1)^n - 0| < \varepsilon$$

$$1 < \varepsilon$$

Ni okej za $\varepsilon < 1$!

R: NI LIMITA

Pravila za računski limit

Naj bo $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

$$1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

3 V smislu naravnosti in padanja preko vseh mož:

$$\infty + \infty = \infty$$

$$5 \cdot \infty = \infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$-\infty \cdot \infty = -\infty$$

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

MANJKA: 20.-26.10.

Predavanja: Pravila za računanje z limitami, izrek o sendviču, izrek o monotoni konvergenci, e kot limita zaporedja $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Vrste - delne vsote, konvergenca, geometrijska vrsta.

Pravila za računanje vrst

Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni

Tedaj konvergirata:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c a_n$$

Primer.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \dots$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty - \infty ? = 1$$

Dominiranje vrst $a_n, b_n > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dominira } \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \text{ če } a_n \geq b_n, \forall n \Rightarrow S_n^a \geq S_n^b$$

V tem primeru velja:

Če $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ div., potem tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv.

Primer:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin(e^{6x^2} - 8\pi^2))^6}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin(e^{6x^2} - 8\pi^2))^6}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

konvergira

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergira

vezja \rightarrow konv.
mangja \rightarrow div.

Konvergenčni kriterij: $a_n > 0, \forall n$

① Kvocientni kriterij

$$a_n = g^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} g^n \begin{cases} \text{konv. } |g| < 1 \\ \text{div. } |g| > 1 \end{cases}$$

$$g = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \text{ naj obstaja } \lim_{n \rightarrow \infty} D_n \in \mathbb{R}$$

$$D > 1 \Rightarrow \text{vrsta divergira } (\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty)$$

$$D < 1 \Rightarrow \text{vrsta konvergira}$$

$$D = 1 \Rightarrow \neg(\text{div}) \neg$$

Primer: a) za katere $x > 0$ vrsta konv.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n ?$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}$$

$$a_n = n \cdot x^n$$

$$D_n = \frac{(n+1)x^{n+1}}{n \cdot x^n} = \frac{n+1}{n} \cdot x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$$

konv. za $x < 1$

div. za $x > 1$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$a_n = \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

konv za $x > 0$

② Korenski kriterij

$$D_n = \sqrt[n]{a_n}, \text{ naj obstaja } \lim_{n \rightarrow \infty} D_n \in \mathbb{R}$$

$$D > 1 \Rightarrow \text{vrsta divergira } (\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty)$$

$$D < 1 \Rightarrow \text{vrsta konvergira}$$

$$D = 1 \Rightarrow \neg(\text{div}) \neg$$

Primer:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} \right)^n$$

$$a_n = \left(\frac{x}{n} \right)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{x}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

konv. za $x > 0$

③ Leibnitzov kriterij

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ monotono (tj.: } a_{n+1} \leq a_n, \forall n)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ konvergira}$$

Primer:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ div. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ div.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \text{ div.}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots = \infty$$

$$-1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \dots = -\infty$$

! VESTNI RED SEŠT. JE TOHOBEN!

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \text{ konv.}$$

Lastnosti limit funkcij

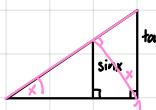
$x, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$; tedaj velja

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Primer:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = /$
3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin \frac{1}{x} = 1$

Dokaz za $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $(x > 0)$



$$\begin{aligned} \sin x &< x < \tan x \\ \frac{1}{\sin x} &> \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x} \\ 1 &> \frac{\sin x}{x} > \cos x \\ \downarrow &\quad \downarrow &\quad \downarrow \\ 1 &> 1 & 1 \end{aligned}$$

sklep

Zveznost funkcije

Funkcija f je zvezna.

$\forall a \in D_f$, če $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

LASTNOSTI ZVEZNOSTI

1. Vse elementarne funkcije so zvezne.
2. Če sta f in g zvezni v a :
 - grafa sta v a neprekinitvi krivulji
 - so zvezne $f + g$, $g(f)$, $\sin(g)$ na a
 - lahko zamjenjamo vrstni red funk. in limite v a
3. f zvezna na a , g zvezna v $f(a)$ $\Rightarrow g \circ f$ zvezna v a
4. Če $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ obstaja, $b \in D_f$, lahko f s predpisom

$$f(b) = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$$
 zvezno razširimo na b
5. Če je f zvezna na intervalu $[a, b]$

MANJKA:

ničle zveznih funk.

slika omejenega zaprt. intervala

Funkcija več spremenljivk

Def: $n \in \mathbb{N}$ funkcija več spremenljivk je predpis

$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

kjer je $D_f \subset \mathbb{R}^n$ definicijsko območje

Graf f je

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f\}$$

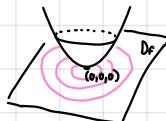
Nivojnica f pri $a \in \mathbb{R}$ je množica

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f; f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a\}$$

Vizualizacija a

$$n=2$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ je zvezna v $a \in D_f$, če

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Elementarne funk. so zvezne na D_f .

Primer: $f(x) = \frac{x}{|x|}$ leva in desna \lim nista enaki

Strategije računanja limit v $(0,0)$

1. Zapišemo f v polarnih koordinatah
2. $x \rightarrow (0,0)$ pomeni $r=0$
3. $\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \varphi)$ mora obstajati in biti neodvisna od φ

Primeri:

$$1. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2} = 2 \cos \varphi \sin \varphi = \sin 2\varphi$$

če je nakaj odvisno od φ potem limite ni

polarne koordinate:
 $x = r \cos \varphi$
 $y = r \sin \varphi$



$$2. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} 2r \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi = \text{neodvisno od } \varphi = 0$$

Odvod $f' = \dot{f} = \frac{df}{dx} f'$

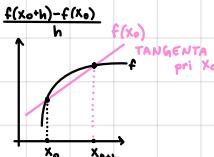
$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}; D_f \subset \mathbb{R}$ v $x_0 \in D_f$ je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

f je odvedljiva v x_0 , če $f'(x_0)$ obstaja

ne-odvedljiva v 0: $\checkmark |x|$

Diferenčni kvocient (naklon sekante):



Pomen $f'(x_0)$:

- naklon tangente pri x_0
- hitrost spremenjanja f v x_0
- f'' predstavlja pospešek

f je zvezno odvedljiva, če obstaja

f' in je zvezna.

Trditev: če je f odvedljiva v x_0 , je zvezna v x_0 .

Druugi odvod

$$f''(x_0) = (f'(x_0))'(x_0)$$

n-ti odvod

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)}(x_0))'(x_0)$$

f je n -krat odvedljiva (v x_0), če

obstajajo $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ (v x_0)

Levi odvod f v x_0

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Desni odvod f v x_0

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Primer: $|x|$ ima levi in desni

odvod v 0, nima pa

odvoda.

Pravila za odvajanje f, g funkciji; $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(\alpha \cdot f + g)' = \alpha \cdot f' + g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$D_{f \circ g} = g^{-1}(D_f) \cap (D_g)$$

Osnovni odvodi

$$(\text{konstanta})' = 0$$

$$(x^n)' =$$

$$(\ln x)' =$$

$$(\log_a x)' =$$

$$(e^x)' =$$

$$(a^x)' =$$

$$(\arcsin x)' =$$

$$(\arctan x)' =$$

$$\log x^k = (\log x) \cdot k$$

$$\text{Izračunava: } (\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \cdot h^{-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

UPORABA ODVODA

L'Hospitalovo pravilo

f, g odvodljivo na (a, b) , $g \neq 0$

Naj za $c \in (a, b)$ velja bodisi

$$1. \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$$

Tedaj velja:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

velja tudi za $c = \pm\infty$

Primeri:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

odvod od $\ln x$
odvod od x
pomeni da je imenovalec hitrejši

npr. zanimala nas kateri stevec ali imenovalec je hitrejši

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100!}{e^x} = 0$$

1. odv. $100 \cdot x^{99}$
2. odv. $100 \cdot 99 \cdot x^{98}$
⋮

Počasnejši

$$O(e^n) \quad O(n^2) \quad O(n) \quad O(\ln n) \quad O(1)$$

↓
najslabši
possible case
pri prag.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100}}{\pi^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100!}{\pi^x \cdot (\ln \pi)^{100}} = 0$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(\pi^x)' = \pi^x \cdot \ln \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \ln x}{x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$$

