ŠTEVILA

1. Naravna $\mathbb{N}$ (indukcija)
   Cela $\mathbb{Z}$ (odštevanje)
   Racionalna $\mathbb{Q}$ (deljenje)
2. Realna $\mathbb{R}$ (absolutna vrednost)
3. Kompleksna $\mathbb{C}$ (kartezično)

1.

INDUKCIJA

Princip indukcije: $A \subset \mathbb{N}, a \in A, a \in A \Rightarrow a+1 \in A$
$$\Downarrow$$
$$\{a, a+1, a+2, \dots\} \subseteq A$$

Shema uporabe: dokaži, da velja $T(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (trditev)

a) Baza ind. $T(1)$ ($n=1$)

b) Indukcijski korak $T(n) \Rightarrow T(n+1)$

indukcijska predpostavka → predpostavimo, da trditev za katerikoli $n \in \mathbb{N}$ velja

Primer: dokaži $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

B.I.: $n=1$

$1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$

$1 = 1$ ✓

I.K.: $\underbrace{1^2+2^2+\dots+n^2}_{\text{I.P.}}+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

preoblikuješ s ciljem, da dobiš ta izraz

$\frac{2n^3+3n^2+n+6n^2+12n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

✓✓ $T(n)$ dokazan $\forall \in \mathbb{N}$

Recimo, da velja $T(5)$

$T(n) \Rightarrow T(n+3)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

ali velja $T(2025)$?

2.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ … iracionalna št. ($\sqrt{2}, \pi, e \dots$)

$\forall x \in \mathbb{R}$ ima decimalni zapis

OMEJENOST

Naj bo $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \{\}$

Množica A je NAVZGOR OMEJENA, če

zgornja meja A

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, M \geq a$

Če je A navzgor omejena, vedno obstaja najmanjša zgornja meja: SUPREMUM

Če je supremum $\in A$, mu rečemo: MAKSIMUM

Množica A je NAVZDOL OMEJENA, če

spodnja meja A

$\exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A, m \leq a$

Če je A navzdol omejena, vedno obstaja največja spodnja meja: INFIMUM

Če je infimum $\in A$, mu rečemo: MINIMUM

Primer:

množica:	$(0,1)$	$[0,5]$	$[6,7)$	$(8,\infty)$
sup	1	5	7	/
max	/	5	/	/
inf	0	0	6	8
min	/	0	6	/

ABSOLUTNA VREDNOST

$x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

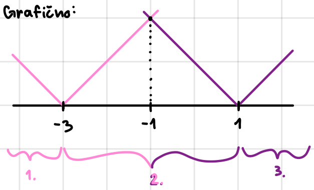
$|x-y|$ … razdalja med x in y

Lastnosti:
- $|x| \geq 0$
- $|xy| = |x| \cdot |y|$
- $|x+y| \leq |x|+|y|$

Primer $|x-1| = |x+3|$

1. $x+3<0$
   $x<-3$
   $-x+1=-x-3$
   $1=-3$ //
   ni rešitve
2. $x+3 \geq 0$, $x-1<0$
   $x \geq -3$, $x<1$
   $-3 \leq x < 1$
   $-x+1 = x+3$
   $-2x = 2$
   $\boxed{x=-1}$
   rešitev ustreza pogoju
3. $x-1 \geq 0$
   $x>1$
   $x-1 = x+3$
   $-1 = 3$
   ni rešitve

Grafično:



3.

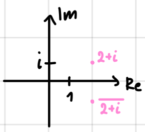
KOMPLEKSNA ŠTEVILA

$i = \sqrt{-1}$

$\mathbb{C} = \{a+bi;\ a,b \in \mathbb{R}\}$

$z = a+bi$ $\quad a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$

Kompleksna ravnina



Pravila za računanje
- vsota/razlika: kot vektorji
- množenje: $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$
- deljenje: $\frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{\dots}{1+1} = \dots$

$i^{4n+\text{ost.}} = i^{\text{ost.}}$, ost. $\in \{1,2,3\} \land n \in \mathbb{N}$

$i^1 = i$	$i^{4n+1} = i$
$i^2 = -1$	$i^{4n+2} = -1$
$i^3 = -i$	$i^{4n+3} = -i$
$i^4 = 1$	$i^{4n} = 1$

Absolutna vrednost

$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2+(\operatorname{Im}(z))^2}$

Lastnosti:
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

trikotniška neenakost

Konjugirana vrednost

$\bar{z} = a-bi$

Lastnosti:
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$
- $\overline{z_1+z_2} = \bar{z_1}+\bar{z_2}$
- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ $\quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{-(z-\bar{z})i}{2}$ $\quad \frac{1}{i} = -i$

$z = 1$

$z^2 = 1 \rightsquigarrow z_1 = 1, z_2 = -1$

$z^3 = 1 \rightsquigarrow z_1 = 1, z_2 = ?, z_3 = ?$

$z^4 = 1 \rightsquigarrow z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1, z_4 = -i$

Primer: $2 \cdot \bar{z} = z^2$

$2(\underbrace{x}_{\text{Re}}-\underbrace{yi}_{\text{Im}}) = x^2-y^2+2xyi$

Im: $-2y = 2xy \ \backslash : 2y$ (IZGUBIMO REŠITVE) $\backslash : 2$

$xy+y = 0$

$y(x+1) = 0$

1. $\boxed{y=0}$
2. $\boxed{x=-1}$

Re: $2x = x^2-y^2$

1. $y=0$: $2x = x^2-0^2$
   $x(x-2) = 0$
   $\boxed{x_1 = 0 \quad x_2 = 2}$
2. $x=-1$: $-2 = 1-y^2$
   $\boxed{y_{1,2} = \pm\sqrt{3}}$

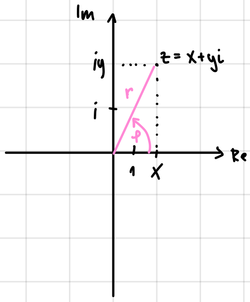
REŠITVE: $z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$ (2.)

$z_3 = 0$ (1.)

$z_4 = 2$ (1.)

6.10.

Kartezični zapis



Polarni zapis

$z = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$

argument, polarni kot — $\varphi \in \mathbb{R}$ ni enolično določen → do $+k2\pi$ natančno, $k \in \mathbb{Z}$; → pri $z=0$ je kot karkoli

$r = |z| \in [0,\infty)$ je enolično določen

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cdot\cos\varphi \\ y &= r\cdot\sin\varphi \end{aligned}}$$

$\tan\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \arctan\frac{y}{x}$

upoštevamo kvadrant!

Primer: Zapiši v polarni obliki

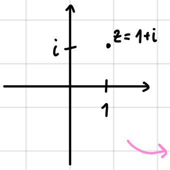
$z = 1+i$

$x = 1$ $\quad r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ (pitagorov izrek)

$y = 1$

$\tan\varphi = \frac{1}{1} = 1$

$\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



kvadrant

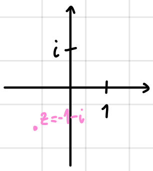
$\varphi \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \dots \frac{-3\pi}{4}, \frac{-7\pi}{4} \dots\}$

zadosten odg.

$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{4}}$

Če bi imeli $z = -1-i$

$\boxed{\varphi = \frac{5\pi}{4}, r = \sqrt{2}}$

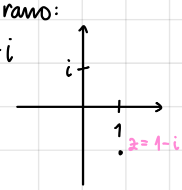


Konjugiramo:

$\bar{z} = 1-i$

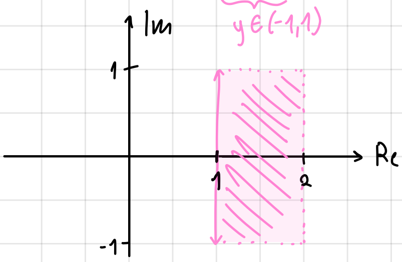
$r = \sqrt{2}$

$\varphi = -\frac{\pi}{4}$



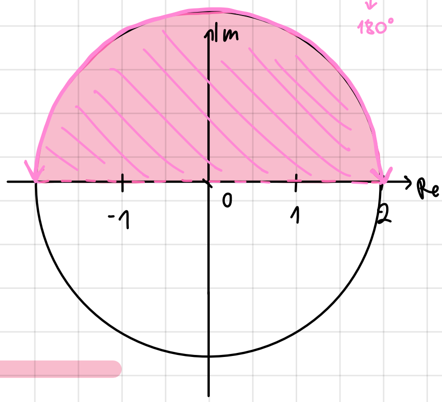
Primer: Nariši naslednjo množico

$\{x+iy;\ x \in [1,2), \underbrace{|y|<1}_{y \in (-1,1)}\}$



$\{r(\cos\varphi + i\sin\varphi), r \le 2, \varphi \in (0,\pi)\}$

180°



Množenje v polarnem zapisu

$z_j = |z_j|\cdot(\cos\varphi_j + \sin\varphi_j);\quad j \in \{1,2\}$

$z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1)\cdot|z_2|\cdot(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2)$

$= |z_1|\cdot|z_2|\,(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + i\,(\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2))$

$= |z_1|\cdot|z_2|\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

> produkt zmnoži absolutne vrednosti in sešteje kote

Eulerjeva formula

$e^{i\pi} = -1$

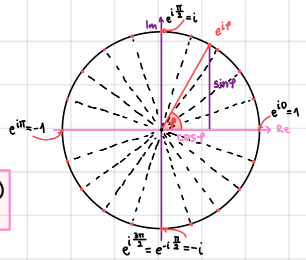
$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$

Polarni zapis

$z = r \cdot e^{i\varphi}$

$r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = \boxed{r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}$

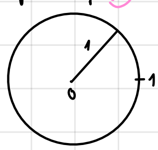
absolutna vrednost



Primer: $\{e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}\}$

središče v $(0,0)$

polmer je 1



$\{r \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}, r \in [0,\infty)\}$

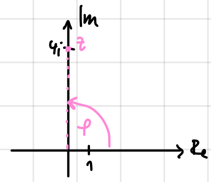
$z = 4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$

$x = 0$

$y = 4$

$r = 4$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$



Primer:

$z = 1 - i\sqrt{3}$

narišemo $z, z^2, z^3 \ldots$

$x = 1$

$y = -\sqrt{3}$

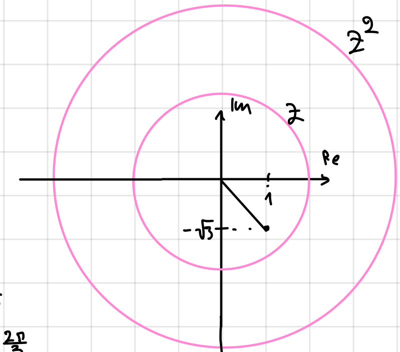
$r = 2 = \sqrt{x^2+y^2}$

$\varphi = \frac{\pi}{3}$

$z = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$z^2 = 4 \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

$z^3 = 8\ e^{-i\pi} = -8$



Lastnosti:

1. $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$

   $r_1 e^{i\varphi_1} = r_2 \cdot e^{i\varphi_2} \Leftrightarrow r_1 = r_2 \wedge (\varphi_1 - \varphi_2) = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

   ALI

   $r_1 = r_2 = 0$

2. $\overline{r \cdot e^{i\varphi}} = r \cdot e^{-i\varphi}$
3. $(r \cdot e^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$ de Moivrerejeva formula
4. $(re^{i\varphi})^{-1} = r^{-1} \cdot e^{-i\varphi}$ $r \neq 0$
5. $\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ $r_2 \neq 0$

Geometrija operacij v ravnini

preslikava	transformacija v $\mathbb{C}$
$z \mapsto \bar{z}$	zrcaljenje preko Re (premice)
$z \mapsto -z$	zrcaljenje preko $z=0$ (točke)
$z \mapsto z + z_0$	premik za z_0
$z \mapsto z \cdot e^{i\varphi}$	rotacija za $+\varphi$
$z \mapsto z \cdot r \cdot e^{i\varphi}$	raztег $x \cdot r$, rotacija $+\varphi$

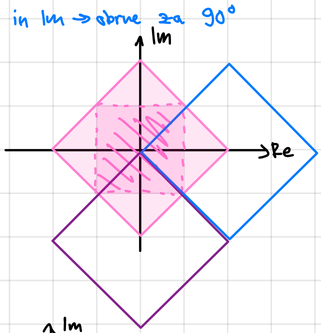
Primer: V kaj se s preslikavo $z \mapsto (z(1+i) - 2i) \cdot i$ preslika:

$\{x+iy, |x|<1, |y|<1\}$

menja se Re in Im → obrne za 90°

polarna vrednost je $\sqrt{2}$, kot pa $\frac{\pi}{2}$

$z \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$



Koreni enote

Primer: $z^5 = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ $= 1 \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$

$z = r \cdot e^{i\varphi}$

$r^5 \cdot e^{i5\varphi} = 1 \cdot e^{i\cdot 0} = e^{i2\pi + \frac{\pi}{4}} = e^{i4\pi + \frac{\pi}{4}}$

$0 = 2\pi = 4\pi$

$e^{i5\varphi} = e^{i\cdot 0}$

$r^5 = 1$

$r = 1$

1. $5\varphi = 0 + \frac{\pi}{4}$, $\boxed{\varphi = 0}$ $+\frac{\pi}{20}$
2. $5\varphi = 2\pi + \frac{\pi}{4}$, $\boxed{\varphi = \frac{2\pi}{5}}$ $+\frac{\pi}{20}$
3. $5\varphi = 4\pi + \frac{\pi}{4}$, $\boxed{\varphi = \frac{4\pi}{5}}$ $+\frac{\pi}{20}$

$+\frac{2\pi}{5}$ $+\frac{2\pi}{5}$

za toliko se φ veča

vstaviš izračunamo φ

$z_1 = 1 \cdot e^{i\cdot 0} = 1$

$z_2 = 1 \cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{5}}$

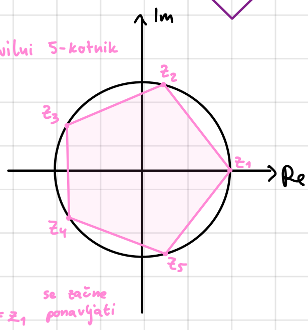
$z_3 = 1 \cdot e^{i\cdot\frac{4\pi}{5}}$

$z_4 = 1 \cdot e^{i\cdot\frac{6\pi}{5}}$

$z_5 = 1 \cdot e^{i\cdot\frac{8\pi}{5}}$

$z_6 = 1 \cdot e^{i\cdot\frac{10\pi}{5}} = 1 \cdot e^{i2\pi} = z_1$ se začne ponavljati

Pravilni 5-kotnik



Formula za korenjenje

$n \in \mathbb{N}$, $z^n = r \cdot e^{i\varphi}$ $k = 0, \ldots, n-1$

$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\frac{\varphi + 2k\pi}{n})}}$

- Pravilni n-kotnik
- n različnih, razen pri $r=0$

Primer: $(z^3 - 2) \cdot (z^2 + i) = 0$

1. $z^3 = 2$ $\boxed{\varphi = 0}$

   $z_1 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{0}{3}}$ realna rešitev (ena more bit)

   $z_2 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{0+2\pi}{3}}$

   $z_3 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{0+4\pi}{3}}$

   popolni △

2. $z^2 = -i = 1 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2}}$

   $z_4 = 1 \cdot e^{i(\frac{-\pi}{2})}$

   $z_5 = 1 \cdot e^{i(\frac{-\pi}{2} + 2\pi)} = -z_4$

   popolna ——

Osnovni izrek algebre

Vsaka enačba $a_k \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$

$\boxed{a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0 = 0}$

ima natanko n rešitev

$\boxed{p(z) = a_n (z - z_1)^{\nu_1} \cdot (z - z_2)^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot (z - z_n)^{\nu_m}}$

$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m = n$

Če so $a_k \in \mathbb{R}, \forall k$, potem ne-realne ničle nastopajo v konjugiranih parih

13.10.

Diskretna Fourierjeva transformacija – DFT

"nek signal" → kako visoko smo pri

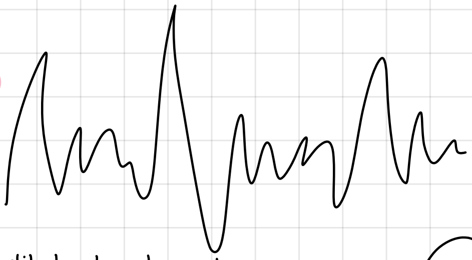
$(x_0, x_1, \dots, x_N) \rightsquigarrow (y_0, y_1, \dots, y_N)$ ← zaporedje frekvenc

zaporedje jakosti

kolikokrat se val s frekvenco 1 pojavi

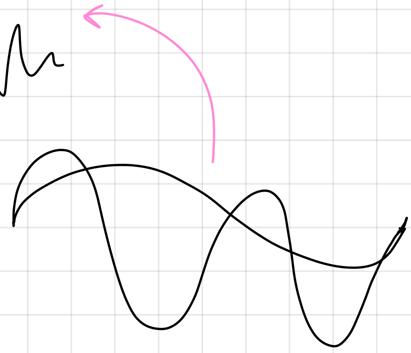
$$y_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i\frac{2\pi}{N}\cdot k \cdot n}$$

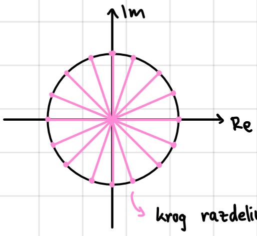
kolikokrat gre gor in dol



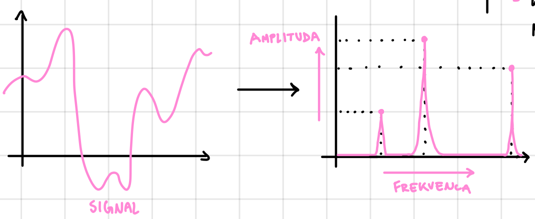
velikost vala – abs. vred.

phase – kot





krog razdelimo na N-delov



ZAPOREDJE

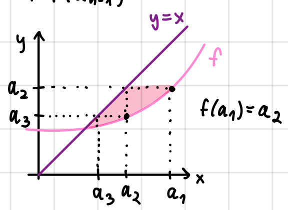
Def: preslikava $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to a_n$ $\quad (a_n) = (a_1, a_2 \dots)$

Podajanje zaporedja:

- EKSPLICITNO: $a_n = f(n)$
- REKURZIVNO: $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2})$ 2-členа
  + ZAČETNI ČLEN
  $a_n = f(a_{n-1})$ 1-člen

GRAFIČNI PRIKAZ REKURZIVNEGA ZAP.

$a_n = f(a_{n-1})$



Primeri:

$n = 1, 2, 3 \dots$

1. $\frac{n^2-1}{n} = n - \frac{1}{n}$

↓ omejeno, ↑ neomejeno, ↑ strogo

2. $b_n = \frac{b_{n-1}}{2}$

2.1 $b_1 > 0$ strogo padajoče $\inf_n b_n = 0$

2.2 $b_1 < 0$ strogo naraščajoče $\sup_n = 0$

2.3 $b_1 = 0$ konst. v 0 OBOJE DRŽI

Primeri: $a_n = (-1)^n$

- **Aritmetično zap.**
  $a_n = a_0 + n \cdot d$
  ali
  $a_n = a_{n-1} + d$
- **Geometrijsko zap.**
  $a_n = a_0 \cdot q^n$
  ali
  $a_n = q \cdot a_{n-1}$
- **Fibonaccijevo zap.**
  $a_1 = 1 = a_2$
  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
- **Collatzova domneva** (1937)
  $$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}; & a_n \text{ sodo} \\ 3 \cdot a_n + 1; & a_n \text{ liho} \end{cases}$$
  Ali se za $\forall a_0 \in \mathbb{N}$ to zap. vrne v 1?
  ↳ Preverjeno do 2^{71}

Lastnosti zaporedja: $(a_n)_n$ je

- **Navzgor omejena**, če obstaja zgornja meja $M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} \wedge a_n \leq M$
  Supremum $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ = najmanjša zgornja meja
- **Navzdol omejeno**, če obstaja spodnja meja $m \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} \wedge a_n \geq m$
  Infimum $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$ = najvišja spodnja meja
- **Omejeno**, če je navzgor in navzdol omejeno
- **Naraščajoče**, če $\forall n: a_{n+1} \geq a_n$
  strogo naraščajoče, če $\forall n \ a_{n+1} > a_n$
- **Padajoče**, če $\forall n: a_{n+1} \leq a_n$
  strogo padajoče, če $\forall n \ a_{n+1} < a_n$
- **Monotono**, če je povsod ali padajoče ali naraščajoče

LIMITA ZAPOREDJA

Def: $a \in \mathbb{R}$ je limita zap. $(a_n)_n$, če

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$

$\forall n > N \ |a_n - a| < \varepsilon$

Zaporedje je **konvergentno**, če ima limito

Zaporedje je **divergentno**, če nima limite

Zaporedje $(a_n)_n$

- **Narašča** preko vsake meje $[\lim_{n\to\infty} a_n = \infty]$
  $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N}: a_n > M, \ \forall n \geq N$
- **Pada** pod vsako mejo $[\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty]$
  $\forall m \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N}: a_n < m, \ \forall n \geq N$

ni konv. zap.

Primeri:

1. $a_n = \frac{1}{n^2}$

Dokažimo, da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$n^2, \varepsilon > 0$

Izberemo $\varepsilon > 0$ po def.

$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \ / \cdot \frac{n^2}{\varepsilon}$

$\frac{1}{\varepsilon} < n^2$

R: $n > \lceil \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \rceil \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\begin{array}{c} x > 0 \\ \lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{N}_0;\ n \geq x\} \\ \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N};\ n \leq x\} \end{array}}$$

2. $b_n = (-1)^n$

Ali je 0 limita?

Izberemo $\varepsilon > 0$

$|(-1)^n - 0| < \varepsilon$

$1 < \varepsilon$

Ni okej za $\varepsilon < 1$!

R: $\boxed{\text{NI LIMITA}}$

Pravila za rač. limit

Naj bo $a = \lim_{n \to \infty} a_n$, $b = \lim_{n \to \infty} b_n$

1. $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n$
2. $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n$
3. V smislu naraščanja in padanja preko vseh mej:

$$\infty + \infty = \infty$$
$$5 \cdot \infty = \infty$$
$$\infty \cdot \infty = \infty$$
$$-\infty \cdot \infty = -\infty$$
$$\frac{1}{\infty} = 0$$

MANJKA: 20.-26.10.

Predavanja: Pravila za računanje z limitami, izrek o sendviču, izrek o monotoni konvergenci, e kot limita zaporedja $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Vrste - delne vsote, konvergenca, geometrijska vrsta.

27.10.

Pravila za računanje vrst

Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni

Tedaj konvergirata:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$c\cdot\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n$$

Primer:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} =$

$= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \cancel{\infty - \infty}\,? = 1$

Dominiranje vrst $a_n, b_n > 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dominira $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, če $a_n \geq b_n, \forall n \Rightarrow S_n^a \geq S_n^b$

V tem primeru velja:

Če $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ div., potem tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv.

Primer:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin(e^{6x^3} - 8\pi^2))^6}{2^n}$

$-1 < \sin(\ ) < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin(e^{6x^3} - 8\pi^2))^6}{2^n} \leq \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\text{konvergira}}$$

$\Downarrow$ konvergira

večja → konv.

manjša → div.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n} \geq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}_{\text{divergira}}$$

$\downarrow$ divergira

Konvergenčni kriteriji: $a_n > 0, \forall n$

① kvocientni kriterij

$a_n = q^n$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} q^n \begin{cases} \text{konv.} & |q|<1 \\ \text{div.} & |q|>1 \end{cases}}$$

$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, naj obstaja $\overset{=:D}{\lim_{n\to\infty} D_n} \in \mathbb{R}$

$D > 1 \Rightarrow$ vrsta divergira $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty\right)$

$D < 1 \Rightarrow$ vrsta konvergira

$D = 1 \Rightarrow$ ¯\(ツ)/¯

Primer: a) Za katere $x>0$ vrsta konv. $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^n$?

$a_n = n\cdot x^n$

$$D_n = \frac{(n+1)x^{n+1}}{n\cdot x^n} = \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}}\cdot x \xrightarrow{n\to\infty} x$$

konv. za $x<1$

div. za $x>1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$a_n = \frac{x^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

konv. za vse $x>0$

② Korenski kriterij

$D_n = \sqrt[n]{a_n}$, naj obstaja $\overset{=:D}{\lim_{n\to\infty} D_n} \in \mathbb{R}$

$D > 1 \Rightarrow$ vrsta divergira $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty\right)$

$D < 1 \Rightarrow$ vrsta konvergira

$D = 1 \Rightarrow$ ¯\(ツ)/¯

Primer:

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n$

$a_n = \left(\frac{x}{n}\right)^n$

$\sqrt[n]{a_n} = \frac{x}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

konv. za $x>0$

③ Leibnitzov kriterij

$a_n \overset{n\to\infty}{\searrow} 0$ monotono (tj.: $a_{n+1} \leq a_n, \forall n$)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergira

Primer:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ div. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ div.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ div.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\dots = \infty$

$-1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\dots = -\infty$

! VRSTNI RED SEŠT. JE POMEMBEN!

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$ konv.

3.11.

Limita funkcije.

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

$x \neq a$

Leva limita

2. $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = b$ ALI $x \to a^-$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

$x \in (a-\delta, a) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

Desna limita

3. $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = b$ ALI $x \to a^+$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

$x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0$

$x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m, m \in \mathbb{R}$

$x < m \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

6. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

$\forall N > 0 \quad \exists \delta > 0$

$x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) > N$

7. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$

8. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$

9. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\forall N \quad \exists M$

$x > M \Rightarrow f(x) > N$

10. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

11. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

12. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Trditev:

Limita f v a obstaja natanko takrat ko obstajata ujemajoči se leva in desna limita.

Primer: 1. $f(x) - \operatorname{sgn}(x)$

2. $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \qquad \lim\limits_{t \to \infty} e^{-t} = 1 \qquad \lim\limits_{s \to 1} \dfrac{1}{s} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty \qquad \lim\limits_{t \to \infty} e^{t} = \infty \qquad \lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{1}{s} = 0$

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

$\frac{1}{1} = 1$

$-\infty$

0

$1+0=1$

$$\left.\begin{array}{l} e^{-100} = \dfrac{1}{e^{100}} \\ e^{-1000} = \dfrac{1}{e^{1000}} \end{array}\right\} \to \text{bliža se } 0$$

Lastnosti limit funkcij

LASTNOSTI SO ISTE KOT PRI ZAPOREDJIH

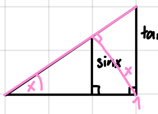
$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$; tedaj velja

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$$

<u>Primer:</u>

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{t\to 0} \sin t = 0$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = /$
3. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{\pi}} \sin\frac{1}{x} = 1$

Dokaz za $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\boxed{x>0}$



$\sin x < x < \tan x$

$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x}$

$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

$\downarrow \quad \Downarrow \quad \downarrow$

$1 \quad 1 \quad 1$

sklep

Zveznost funkcije

Funkcija f je zvezna

v $a \in D_f$, če $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

LASTNOSTI ZVEZNOSTI

1. Vse elementarne funkcije so zvezne
2. Če sta f in g zvezni v a:
   - → grafa sta v a neprekinjeni krivulji
   - → so zvezne $f+\lambda\cdot g$, $\sin(g)$ v a
   - → lahko zamenjamo vrstni red funk. in limite v a
3. f zvezna v a, g zvezna v $f(a)$ $\Rightarrow$ $g\circ f$ zvezna v a
4. Če $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ obstaja, $b \in D_f$, lahko f s predpisom

   $$f(b) = \lim_{x\to b} f(x)$$

   zvezno razširimo na b
5. Če je f zvezna na intervalu $[a,b]$

MANJKA: ničle zveznih funk.
slika omejenga zaprt. intervala

13.11.

Funkcija več spremenljivk

Def: $n \in \mathbb{N}$ funkcija več spremenljivk je **predpis**

$f: D_f \to \mathbb{R}$

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

kjer je $D_f \subset \mathbb{R}^n$ **definicijsko območje**

Graf f je

$\{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f\}$

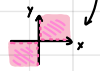
Primeri:

$f_1(x,y) = xy^2 - x \cdot \sin(y^x) - \pi^{\tan y} \cdot x$ $\quad D_{f_1} = \mathbb{R}^2$

$f_2(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $\quad D_{f_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq\} =$

$f_3(x,y,z) = \ln(x \cdot y) - z^2$ $\quad D_{f_3} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \underbrace{(x>0 \wedge y>0) \vee (x<0 \wedge y<0)}_{x \cdot y > 0}\}$

ni z osi, ker je z lahko karkoli



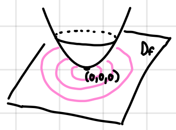
Nivojnice f pri $a \in \mathbb{R}$ je množica

$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f; f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a\}$

Vizualizacija a

$n = 2$

$f(x,y) = x^2 + y^2$



$a \in D_f \subset \mathbb{R}^n$; $L \in \mathbb{R}$ je **Limita** $f: D_f \mapsto \mathbb{R}$,

če $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$:

$d(x,a) < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

evklidska razdalja

$x \in D_f$

$x \neq a$

OZNAKA:

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

$f: D_f \mapsto \mathbb{R}$ je **zvezna** v $a \in D_f$, če

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Elementarne funk. so zvezne na D_f

Primer: $f(x) = \frac{x}{|x|}$ $\quad$ leva in desna lim $\overleftarrow{\quad} \overrightarrow{\quad}$ nista enaki

Strategije računanja limit v $(0,0)$

1. Zapišemo f v polarnih koordinatah
2. $x \to (0,0)$ pomeni $r = 0$
3. $\lim_{r \to 0} f(r, \varphi)$ mora obstajati in biti neodvisna od φ

Primeri:

1. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \boxed{\frac{2xy}{x^2+y^2}} = \lim_{r \to 0^+} \frac{2r^2 \cos\varphi \sin\varphi}{r^2} = 2\cos\varphi \cdot \sin\varphi = \sin 2\varphi$

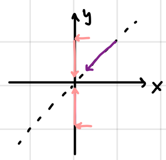
$x \to 0$: 0, $y \to 0$: 0

$x \to y$: 1, $y \to 0$: 1

če je nakaj odvisno od φ potem limite ni

polarne koordinate:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}}$$



2. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \boxed{\frac{2x^2y}{x^2+y^2}} = \lim_{r \to 0^+} \frac{2r^3 \cos^2\varphi \sin\varphi}{r^2} = \lim_{r \to 0^+} 2r \cdot \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi =$

$x \to 0$: 0, $y \to 0$: 0

$x \to y$: $\frac{2y^3}{2y^2}$, $y \to 0$: 0

neodvisno od φ

$= 0$

Odvod $\quad f' = \dot{f} = \frac{d}{dx} f$

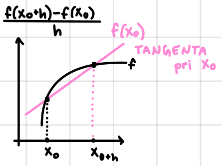
$f: D_f \to \mathbb{R}$; $D_f \subset \mathbb{R}$ v $x_0 \in D_f$ je

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

f je odvedljiva v x_0, če $f'(x_0)$ obstaja

ne-odvedljiva v 0:  $|x|$

Diferenčni kvocient (naklon sekante): $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$



Pomen $f'(x_0)$:

- naklon tangente pri x_0
- hitrost spreminjanja f v x_0
- f'' predstavlja pospešek

f je zvezno odvedljiva, če obstaja f' in je zvezna.

Trditev: če je f odvedljiva v x_0, je zvezna v x_0.

Drugi odvod

$f''(x_0) = (f')'(x_0)$

n-ti odvod

$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$

f je n-krat odvedljiva (v x_0), če obstajajo $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ (v x_0)

Levi odvod f v x_0

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Desni odvod f v x_0

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Primer: $|x|$ ima levi in desni odvod v 0, nima pa odvoda

Pravila za odvajanje

f, g funkciji; $\alpha \in \mathbb{R}$

$(\alpha \cdot f + g)' = \alpha \cdot f' + g'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ $\quad D_{f \circ g} = g^{-1}(D_f) \cap (D_g)$

Osnovni odvodi

$(\text{konstanta})' = 0$	$(x^n)' =$
$(\ln x)' =$	$(\log_a x)' =$
$(\sin x)' =$	$(\cos x)' =$
$(e^x)' =$	$(a^x)' =$
$(\arcsin x)' =$	$(\arctan x)' =$

$\log x^k = (\log x) \cdot k$

Izpeljava: $(\ln x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \cdot h^{-1} = \lim_{h \to 0} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \to 0} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$

UPORABA ODVODA

L'Hospitalovo pravilo

f, g odvedljivo na (a, b), $g \neq 0$

Naj za $c \in (a, b)$ velja bodisi

1. $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$
2. $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \infty$

Tedaj velja:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

velja tudi za $c = \pm\infty$

Primeri:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x \cdot \ln x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

odvod od $\ln x$

odvod od x

$\Rightarrow$ pomeni da je imenovalec hitrejši

npr. zanima nas kateri (števec ali imenovalec) je hitrejši

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{100}}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{100!}{e^x} = 0$$

1. odv. $100 \cdot x^{99}$
2. odv. $100 \cdot 99 \cdot x^{98}$

$\vdots$

Počasnejši $\qquad$ Hitrejši

$O(e^n) \quad O(n^2) \quad O(n) \quad O(\ln) \quad O(1)$

najslabši possible čas pri prog.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{100}}{\pi^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{100!}{\pi^x \cdot (\ln \pi)^{100}} = 0$$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(\pi^x)' = \pi^x \cdot \ln \pi$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \ln x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} -x = 0$$