6.11.

## Izjava - resničen ali neresničen stavek

Niso izjava: „Zapri vrata!"

Izjave so:

- resnične • osnovne/enostavne
- neresnične • sestavljene

### Oklepaji

1. $\neg$
2. $\wedge$
3. $\vee$
4. $\Rightarrow$
5. $\Leftrightarrow$
6. od leve proti desni

## Vezniki - sestavljajo izjave

### Negacija

$\neg A$ "ne A"

| $A$ | $\neg A$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

### Konjunkcija

$A \vee B$ "A in B"

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

### Disjunkcija

$A \vee B$ "A ali B"

| $A$ | $B$ | $A \quad B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

### Implikacija

$A \Rightarrow B$ "Če A, potem B"

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

### Ekvivalenca

$A \Leftrightarrow B$ "A ntk B"

| $A$ | $B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

ntk... natanko tedaj, ko

## Izjavni izrazi

- Izjavni konstanti 0 in 1 sta izjavna izraza
- Izrazne spremenljivke $p, q, r$... so izjavni izrazi
- Če je $A$ izjavni izraz, potem je tudi $\neg A$ izjavni izraz
- Če so $A_1, A_2, \ldots, A_n$ izjavni izrazi in je $F$ $n$-mestni izjavni veznik, potem je $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ izjavni izraz

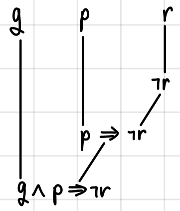
## Konstrukcijsko drevo

$q \wedge (p \Rightarrow \neg r)$

Nastopajo:

$q, p, r, \neg r,$

$p \Rightarrow \neg r,\ q \wedge (p \Rightarrow \neg r)$




## Resničnostna tabela

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg r$ | $p \Rightarrow \neg r$ | $q \wedge (p \Rightarrow \neg r)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

## Tavtologija

Resničen pri vseh naborih

$1,\ p \vee \neg p,\ p \Rightarrow p,\ p \Leftrightarrow p$

(vse drugo je nevtralno)

## Protislovje

Neresničen pri vseh naborih

$0,\ \neg(p \Leftrightarrow p),\ \neg p \Leftrightarrow p$

## Enakovredni izjavni izrazi

| $p$ | $q$ | $q \Rightarrow p$ | $\neg p \Rightarrow \neg q$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$q \Rightarrow p \sim \neg p \Rightarrow \neg q$

- $A \sim A$
- Če $A \sim B$, potem $B \sim A$
- Če $A \sim B$ in $B \sim C$, potem $A \sim C$

$A \sim B$ ntk $A \Leftrightarrow B$ tavtologija

<u>Dokaz:</u> $A \sim B$ ... pri vseh naborih

$A$ in $B$ imata "vedno" isto vrednost

$A \Leftrightarrow B$ je "vedno" resničen

$A \Leftrightarrow B$ je tavtologija

## ZAKONI IZJAVNEGA RAČUNA

1. Zakon dvojne negacije: $\neg\neg A \sim A$
2. Idempotenca: $A \wedge A \sim A \quad A \vee A \sim A$
3. Komutativnost: $A \wedge B \sim B \wedge A \quad A \vee B \sim B \vee A$; $A \Leftrightarrow B \sim B \Leftrightarrow A$
4. Asociativnost: $(A \wedge B) \wedge C \sim A \wedge (B \wedge C)$; $(A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$; $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \sim A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$ — vrstni red ne vpliva
5. Absorpcija: $A \wedge (A \vee B) \sim A \quad A \vee (A \wedge B) \sim A$
6. Distributivnost: $(A \vee B) \wedge C \sim (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$; $(A \wedge B) \vee C \sim (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
7. de Morganova zakona: $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$; $\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$
8. Kontrapozicija: $A \Rightarrow B \sim \neg B \Rightarrow \neg A$
9. Lastnosti 0 in 1: $A \Rightarrow A \sim 1 \quad A \Leftrightarrow A \sim 1$; $A \vee \neg A \sim 1 \quad A \wedge \neg A \sim 0$
10. Še lastnosti 0 in 1: $A \wedge 0 \sim 0 \quad A \vee 0 \sim A$; $A \wedge 1 \sim A \quad A \vee 1 \sim 1$; $A \Rightarrow 0 \sim \neg A \quad 0 \Rightarrow A \sim 1$; $A \Rightarrow 1 \sim 1 \quad 1 \Rightarrow A \sim A$
11. Lastnosti implikacije: $A \Rightarrow B \sim \neg A \vee B$; $\neg(A \Rightarrow B) \sim A \wedge \neg B$
12. Lastnosti ekvivalence: $A \Leftrightarrow B \sim (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$; $A \Leftrightarrow B \sim (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$; $\neg(A \Leftrightarrow B) \sim \neg A \Leftrightarrow B$

## Disjunktivna normalna oblika (DNO)

$A \sim A_{DNO}$

$A_{DNO}$ je disjunkcija osnovnih konjunkcij

Konjunkcija izjavnih sprem. in/ali njihovih neg.

## Konjuktivna normalna oblika

$A \sim A_{KNO}$

$A_{KNO}$ je konjunkcija osnovnih disjunkcij

13.11.

## Naloga (DNO in KNO)

Poišči izjavni izraz s predpisano resničnostno tabelo:

| $p$ | $q$ | $r$ | $A$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\downarrow$$

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{aligned}
&((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee r \sim \\
&((p \vee (q \wedge \neg q)) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee r \sim \\
&(p \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee r \sim
\end{aligned}\right\} \text{Distributivnost}$$

$$((\overset{0}{\cancel{p \wedge \neg p}}) \vee (p \wedge \neg q)) \vee r \sim$$

$(p \wedge \neg q) \vee r \sim$ dvojna negacija

$\neg\neg(p \wedge \neg q) \vee r \sim$ de Morgan

$$\neg(\neg p \vee q) \vee r \overset{11a}{\sim} (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

## TRDITEV:

Vsak izjavni izraz ima DNO in
vsak izjavni izraz ima KNO

$p \Rightarrow q$ velja ko

$(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q) \sim \overbrace{\neg p \vee q}^{KNO}$

Za vsak izjavni izraz $A$ obstaja enakovreden izjavni izraz $B$, ki vsebuje samo veznike $\neg, \wedge, \vee$

---

Kako v praksi pokazati, da nabor izjavnih veznikov ni poln?

Težko.

$\{\wedge, \Rightarrow\}$ ni poln nabor

$1 \wedge 1 \sim 1$

$1 \Rightarrow 1 \sim 1$

$((\overset{1}{p} \wedge \overset{1}{q}) \Rightarrow \overset{1}{p}) \wedge ((\overset{1}{r} \Rightarrow \overset{1}{s}) \Rightarrow \overset{1}{q}) \sim 1$

$\{\wedge, \Rightarrow\}$ ni poln, ker ohranja vrednost $1$

## Polni nabori izjavnih veznikov

Družina izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ je poln nabor izjavnih veznikov, če za vsak izjavni izraz $A$ obstaja enakovreden izjavni izraz $B$, ki vsebuje samo veznike iz $\mathcal{N}$

$\{\neg, \wedge, \vee\}$ je poln nabor izjavnih veznikov

**Dokaz:**

Izberemo poljuben izjavni izraz $A$.
Obstaja, ker je $\{\neg, \wedge, \vee\}$ poln nabor, izjavni izrazi $A'$, $A' \sim A$ in $A'$ uporablja samo $\{\neg, \wedge, \vee\}$
Dovolj je odstraniti vse konjunkcije

$p \wedge q \sim \neg\neg(p \wedge q) \sim \neg(\neg p \vee \neg q)$

VEZNIKE IZ $\mathcal{N}$ SMO IZPELJALI IZ $\{\vee, \neg\}$

**Primer:**

$\{\neg, \Rightarrow\}$ in $\{\neg, \vee\}$ $\quad p \vee q \sim \neg(\neg p) \vee q \sim \neg p \Rightarrow q$

## EKSKLUZIVNA DISJUNKCIJA $\veebar$

$A \veebar B$ „ali ali"

$A \veebar B$ je resničen ntk je eden od izrazov resničen

| A | B | $A \veebar B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

$A \veebar B \sim \neg(A \Leftrightarrow B)$

## SHEFFERJEV VEZNIK $\uparrow$

$A \uparrow B$

$A \uparrow B$ je neresničen ntk sta oba izraza resnična

| A | B | $A \uparrow B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

$A \uparrow B \sim \neg(A \wedge B)$

## PIERCE-ŁUKASIEWICZEV VEZNIK $\downarrow$

$A \downarrow B$ „niti A niti B"

$A \downarrow B$ je resničen ntk sta oba izraza neresnična

| A | B | $A \downarrow B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

$A \downarrow B \sim \neg(A \vee B)$

## ZAKONI:

| | |
|---|---|
| ekskluzivna disjunkcija | $A \veebar B \sim \neg(A \Leftrightarrow B)$ |
| | $A \veebar B \sim B \veebar A$ |
| | $(A \veebar B) \veebar C \sim A \veebar (B \veebar C)$ |
| Shefferjev veznik | $A \uparrow B \sim \neg(A \wedge B)$ |
| | $A \uparrow B \sim B \uparrow A$ |
| Pierceov veznik | $A \downarrow B \sim \neg(A \vee B)$ |
| | $A \downarrow B \sim B \downarrow A$ |

Uporaba v teoriji: $\quad \{\uparrow\}$ in $\{\downarrow\}$ sta polna nabora

$(p \veebar q) \veebar r$

$(p \veebar p) \veebar (p \veebar p) \sim 0$

$p \veebar p \veebar p \veebar p \veebar p \sim p$

$p \veebar q \veebar q \veebar p \veebar p \sim p$

$\{\neg, \wedge\}$

$\neg p \sim \neg(p \wedge p) \sim p \uparrow p$

$p \wedge q \sim \neg\neg(p \wedge q) \sim \neg(p \uparrow q)$

$\sim (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$

$p \vee q \sim \neg\neg p \vee \neg\neg q \sim$

$\sim \neg(\neg p \wedge \neg q) \sim \neg p \uparrow \neg q$

$\sim (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

## TRDITEV:

Izraz $A_1 \veebar A_2 \veebar A_3 \veebar A_4 \veebar \ldots \veebar A_n$ je ne glede na to, kako so postavljeni oklepaji, resničen ntk je liho mnogo členov izmed $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ resničnih.

**Dokaz:** uporabimo indukcijo

Baza ind: $n = 1$ $\quad A_1$ $\quad$ liho mnogo od enega = ta člen je res

$n = 2$ $\quad A_1 \veebar A_2$ $\quad$ liho mnogo od dveh = natanko eden je res

Ind. korak: $\rightsquigarrow n$ $\quad$ Verjamemo, da je trditev res za vse eksl. disjunkcije z $<$ kot $n$ členi

$$\underbrace{(A_1 \veebar A_2 \veebar A_3 \veebar A_4 \veebar \ldots \veebar A_i)}_{B_1} \veebar \underbrace{(A_{i+1} \veebar A_{i+2} \veebar \ldots \veebar A_n)}_{B_2}$$

$B_1 \veebar B_2$ je resnično, ko

$B_1$ res in $B_2$ lažen

ALI

$B_1$ lažen in $B_2$ res

liho mnogo izmed $A_1, \ldots, A_i$ je res in sodo mnogo izmed $A_{i+1}, \ldots, A_n$ je res

ALI

sodo mnogo izmed $A_1, \ldots, A_i$ je res in liho mnogo izmed $A_{i+1}, \ldots, A_n$ je res