$\neg$ ACの相対的無矛盾性証明の Isabelle/ZF による形式化

東北大学大学院情報科学研究科 住井・松田研究室
舟根大喜

October 9, 2024

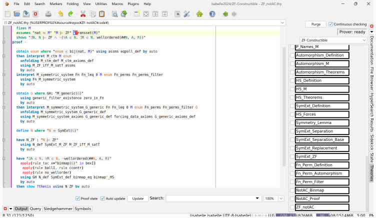
参考文献

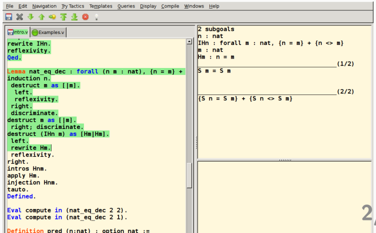
- Kenneth Kunen 著, 藤田 博司 訳 (2008)
  「集合論: 独立性証明への案内」
- Thomas Jech 著 (2002)「Set Theory」
- Thomas Jech 著 (2008)「the Axiom of Choice」
- Asaf Karagila 著 (2023)
  「Lecture Notes: Forcing & Symmetric Extensions」
  (https://karagila.org/files/Forcing-2023.pdf)

Isabelle/ZFについて

定理証明支援系

- 数学的証明の形式化や、ソフトウェアの正しさの証明などに用いられるシステム
- プログラムを書くように定義・証明を記述する





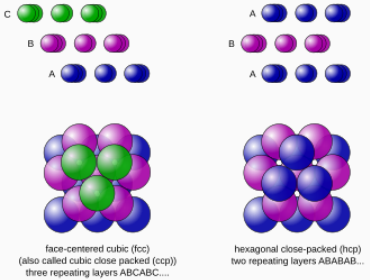
Isabelle

- 定理証明支援系の一つ
- 初版は 1986 年
    - Lawrence Paulson らによる
- 現在も開発・利用が続けられている

Isabelleの実績 (1)

ケプラー予想の形式的証明

- 等しい大きさの球を空間に詰めるとき、どれだけぎっしり詰められるかについての予想
- Thomas Hales と他 21 人による 12 年の共同研究



Isabelle の実績 (2)

seL4 マイクロカーネルの形式検証

- マイクロカーネル…
  OS に必要な最低限の機能を
  提供するプログラム
- 様々な安全性の検証
  - カーネルの設計の正しさ
  - C 言語による実装の正しさ
  - …

Archive of Formal Proofs

- Isabelle での形式化された定理などのアーカイブ
- 証明を Web 上で閲覧可能
- 様々な分野の形式化
  - 数学
  - アルゴリズム
  - …

Isabelle

- 論理体系「Pure」上で定理証明を行う
- 「Pure」上に他の論理体系が構築されている
  - Higher-Order Logic
  - First-Order Logic
  - …

Isabelle/ZF

- Isabelle 上で一階述語論理と ZF(C) 公理系を用いて証明を行うためのフレームワーク

集合論の形式化に関する先行研究

先行研究 (Isabelle/ZF)

- 構成可能集合の形式化
  - Lawrence C. Paulson(2002)
  - AC が ZF 上相対的無矛盾であることの証明
- 強制法の形式化 & CH の ZFC 上の独立性証明
  - Emmanuel Gunther ら (2020,2022)
  - Kunen の強制法の章を形式化
  - c.t.m. の存在を仮定しその上の preorder を用いる

先行研究 (Lean)

- 強制法の形式化 & CH の ZFC 上の独立性証明
  - Jesse Michael Han, Floris van Doorn(2020)
  - flypitch プロジェクト
  - ブール値モデルを用いた証明
- Quine の NF の ZFC 上の相対的無矛盾性証明
  - Sky Wilshaw(2024)

本研究

本研究

やったこと

$\neg$AC が ZF 上相対的無矛盾であることの証明を
Isabelle/ZF で形式化

背景

- コーエンは CH と AC が ZF から独立であることを示した
- CH の独立性は形式化されている
- AC もやりたい

本研究の方針

Isabelle/ZF を用いる

- 強制法の形式化がすでにある
  - Lean3 にもあるが、Lean3 は開発終了
  - 最新版の Lean4 に移植できるかは不明
  - 利用できそうな形式化は Isabelle/ZF にしかない
- 集合論に関する定義・補題・糖衣構文が豊富

本研究の方針

証明の基本方針は Asaf Karagila の講義ノートに従う

- Lecture Notes: Forcing & Symmetric Extensions (2023)
- c.t.m. と preorder を用いた証明
- すでにある強制法の形式化と相性が良い

ギャップ

- 既存のIsabelle/ZFでの強制法の形式化は
  ZFのc.t.m.の存在を仮定したもの
- これを用いるため、
  本研究でもZFのc.t.m.を仮定する
- ZFのc.t.m.の存在は、Con(ZF)から証明できない
- 本当の意味での相対的無矛盾性 $\mathrm{Con(ZF)} \to \mathrm{Con(ZF{+}\neg AC)}$
  の証明とはギャップがある

ギャップ

c.t.m. を用いた議論の背景

ギャップ

- Boolean-valued model など
  別のアプローチをとれなかったのか？
- 強制法の形式化部分で
  作業量が増えてしまうので断念

証明概略

証明概略

ZF の c.t.m.M から出発し、ZF$+\neg$AC のモデルを構成

- ある poset $\mathbb{P}$ による generic extension$M[G]$ について symmetric extension と呼ばれる部分モデル $N \subseteq M[G]$ を構成
- N は ZF を満たすが、整列可能定理を満たさない

symmetric extension の定義 (1)

定義 (自己同型)

$(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ は半順序で、最大元 $1_{\mathbb{P}}$ をもつとする
$\pi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ が自己同型であるとは次を満たすこと

- π は全単射
- $p, q \in \mathbb{P}$ に対して、$p \leq_{\mathbb{P}} q \Leftrightarrow \pi p \leq_{\mathbb{P}} \pi q$

π は以下のように $M^{\mathbb{P}}$ 上の自己同型に拡張される

$$\pi \dot{x} = \{(\pi \dot{y}, \pi p) | (\dot{y}, p) \in \dot{x}\}$$

symmetric extension の定義 (2)

定義 (normal filter)

$\mathcal{G}$ を $\mathbb{P}$ の自己同型群とする
$\mathcal{G}$ の部分群の族 $\mathcal{F}$ が normal filter であるとは次を満たすこと

- $H_1, H_2 \in \mathcal{F}$ に対して $H_1 \cap H_2 \in \mathcal{F}$
- super group をとる操作で閉じている
- $H \in \mathcal{F}, \pi \in \mathcal{G}$ に対して $\pi H \pi^{-1} \in \mathcal{F}$

symmetric extensionの定義(3)

定義 (hereditarily symmetric)

$\mathcal{F}$ を $\mathcal{G}$ の normal filter とする

- $\dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$ が $\mathcal{F}$-symmetric $\Leftrightarrow \{\pi \in \mathcal{G} | \pi\dot{x} = \dot{x}\} \in \mathcal{F}$
- $\dot{x}$ が hereditarily $\mathcal{F}$-symmetric とは以下を満たすこと
  - $\dot{x}$ は $\mathcal{F}$-symmetric
  - $\mathbf{dom}(\dot{x})$ の全ての要素は hereditarily $\mathcal{F}$-symmetric
- hereditarily $\mathcal{F}$-symmetric な $\dot{x}$ の集合を $\mathbf{HS}_{\mathcal{F}}$ とかく

symmetric extension の定義 (4)

定義 (symmetric extension)

$\mathbb{P}$-generic filter G に対し、

$\{\dot{x}_G | \dot{x} \in \mathbf{HS}_{\mathcal{F}}\}$ を symmetric extension という

- symmetric extension は、ZF のモデルとなる

Isabelle/ZFによる形式化

成果

本研究で証明した主定理

```
theorem ZF_notAC_main_theorem :
  fixes M
  assumes "nat ≈ M" "M ⊨ ZF" "Transset(M)"
  shows "∃N. N ⊨ ZF ∧ ¬(∀A ∈ N. ∃R ∈ N. wellordered(##N, A, R))"
```

意味

M を ZF の c.t.m. とする。このとき、ある N があって、

N は ZF を満たすが、整列可能定理を満たさない

作業工程

以下の工程に分けられる

- symmetric extension の定義
- ZF のモデルであることの証明
- 特定の symmetric extension の構成
- それが $\neg$AC を満たすことの証明

作業量

約 1 万 5 千行のコード　　補題など (3 千行)

- symmetric extension の定義 (3 千行)
- ZF のモデルであることの証明 (5 千行)
- 特定の symmetric extension の構成 (2 千行)
- それが $\neg$AC を満たすことの証明 (2 千行)

苦労した点　1. 自明なことの確認

「自明なこと」の確認が非常に大変な場合がある

- 定義した関数が「本当に関数であること」
- クラスに「本当にそれを表す論理式が存在すること」

苦労した点　1. 自明なことの確認

特に、「帰納的に定義された M 内の関数」の場合

- そもそも「M の元であること」の確認も必要
  - 仮定と ZF の公理からちゃんと構成できるか？

- このような関数を定義するための補題が 2 千行以上

先行研究の強制関係の定義

- よくある for all に対する強制関係の定義

$$p \Vdash \forall x \phi(x, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n) \Leftrightarrow \forall \dot{x} \in M^{\mathbb{P}}(p \Vdash \phi(\dot{x}, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n))$$

- 先行研究の定義

$$p \Vdash \forall x \phi(x, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n) \Leftrightarrow \forall x \in M(p \Vdash \phi(x, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n))$$

※この定義でうまくいくように他の部分も修正されている

苦労した点　2. 先行研究の定義

帰納法に $\mathbb{P}$-name でないものが混入する…

- $\mathrm{val}(G, \cdot)$ を M 上の関数として定義している

$$\mathrm{val}(G, x) := \{\mathrm{val}(G, y) | y \in \mathrm{dom}(x), \exists p \in G.(y, p) \in x\}$$

- $x \in M$ に対しある $\dot{z} \in M^{\mathbb{P}}$ があって $\mathrm{val}(x, G) = \mathrm{val}(\dot{z}, G)$
  - この事実を形式化して一度は困難を解決
  - 最終的には別手法で「苦労した点 3.」と同時に解決

苦労した点　3.ZF のモデルであることの証明

symmetric extension が ZF のモデルであることの証明

命題

N が推移的かつ almost universal なクラスで、Δ_0-separation を満たすならば、N は ZF の内部モデルである

- 参考資料ではこの命題を証明に用いている
- 前提条件は証明できたが、「命題自体」が証明できなかった

苦労した点　3.ZFのモデルであることの証明

命題(Collection Principle, Jech「Set Theory」6.5)

p をパラメータとして

$$\forall X \exists Y (\forall u \in X)[\exists v \phi(u,v,p) \to (\exists v \in Y)\phi(u,v,p)]$$

- 具体的にはこの命題の証明で行き詰った
- symmetric extension が、generic extension で definеble なクラスであることが証明できなかった

苦労した点　3.ZF のモデルであることの証明

代替手段

- HS に相対化した強制関係 $\Vdash_{\mathrm{HS}}$ を形式化
  - 参考資料に書かれている概念
  - 強制関係の定義の量化の動く範囲を HS に制限
  - $\Vdash_{\mathrm{HS}}$ は、symmetric extension に対し、generic extension に対する $\Vdash$ のように振舞う
- $\Vdash_{\mathrm{HS}}$ を用いて ZF のモデルであることを証明
  - 強制関係の帰納法が不要になり「苦労した点 2.」も解決

まとめ

まとめ

$\neg$AC の相対的無矛盾性証明を Isabelle/ZF で形式化

- ZF の c.t.m. から出発し、
  ZF+$\neg$AC をみたす symmetric extension を構成
- 厳密な意味での相対的無矛盾性の証明とはギャップがある
- 参考資料の通りにいかず試行錯誤した部分も
- 先行研究の改善点を発見？