$\neg$ AC の相対的無矛盾性証明の Isabelle/ZF による形式化

東北大学 大学院情報科学研究科 住井・松田研究室 M2
舟根大喜

October 14, 2024

概要

やったこと

$\neg$AC の ZF 上の相対的無矛盾性証明を
Isabelle/ZF で形式化

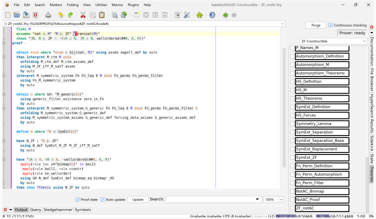
- 定理証明支援系を用いて
  数学の形式化をする試みが行われている

- 集合論の形式化はまだまだ未開拓なので貢献したい

Isabelle/ZF について

定理証明支援系

- 数学的証明の形式化や、ソフトウェアの正しさの証明などに用いられるシステム
- プログラムを書くように定義・証明を記述する
- Isabelle,Lean,Coq, . . .



Isabelle [Paulson 86]

- 実績の例：
  seL4 カーネルの形式検証 [Klein et al. 14]
  - 130万行の証明
- Archive of Formal Proofs

Isabelle

- 論理体系「Pure」上で定理証明を行う
- 「Pure」上に他の論理体系が構築されている
  - Higher-Order Logic
  - First-Order Logic
  - …
- Isabelle/ZF …
  一階述語論理と ZF(C) 公理系のフレームワーク

Isabelle/ZF における先行研究

- CH の ZFC 上の独立性証明 [Gunther et al. 20,22]
  - 強制法の形式化 (13K 行)
  - CH の独立性証明 (16K 行) ※ Lean にも形式化がある
- AC の ZF 上の相対的無矛盾性証明 [Paulson 02]
  - 構成可能宇宙を形式化 (12K 行)

▶ ¬AC の相対的無矛盾性証明は
形式化されていなかったので挑戦

本研究における Isabelle/ZF の利点

- 集合論に関する補題・糖衣構文が豊富
- 強制法の形式化 [Gunther et al. 20] が使える
  - ZF の c.t.m. の存在を仮定している
    - c.t.m. ⋯ countable transitive model
    - この仮定により証明の形式化に
ギャップが生じる (後述)

※本研究では相性の良い証明 [Karagila 23] に従う

証明概略

証明概略

ZF の c.t.m. M から出発し ZF+¬AC のモデル N を構成

- ある poset $\mathbb{P}$ による generic extension $M[G]$ の
  symmetric extension と呼ばれる
  部分モデル $N \subseteq M[G]$ を構成
- N は ZF を満たすが、整列可能定理を満たさない
  - $N \models$「単射 $\omega \to A$ が存在しない無限集合 A が存在」
    - N ではこの A が整列できない
    - N では A は Dedekind 有限な無限集合

generic extension の定義 (1)

定義 ($\mathbb{P}$-name)

M を ZF の c.t.m., $\mathbb{P} \in M$ を poset とする

- $M_\alpha^{\mathbb{P}}$ を再帰的に定義する
  - $M_0^{\mathbb{P}} = \emptyset$
  - $M_{\alpha+1}^{\mathbb{P}} = \mathcal{P}^M(M_\alpha^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P})$
  - $M_\alpha^{\mathbb{P}} = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta^{\mathbb{P}}$ (α は limit ordinal)
- $M^{\mathbb{P}} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} M_\alpha^{\mathbb{P}}$ とし、$M^{\mathbb{P}}$ の元を $\mathbb{P}$-name という
- $\mathbb{P}$-name は $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ldots$ で表す

generic extension の定義 (2)

定義 (generic extension)

- $D \subset \mathbb{P}$ が dense:$\Leftrightarrow$ $p \in \mathbb{P}$ に対し $q \leq_{\mathbb{P}} p$ なる $q \in D$ が存在
- $G \subset \mathbb{P}$ が M-generic filter であるとは、以下を満たすこと
  - $p \in \mathbb{P}$, $q \in G$ に対し、$q \leq_{\mathbb{P}} p$ ならば $p \in G$
  - $p, q \in G$ に対し、$r \in G$ が存在して $r \leq_{\mathbb{P}} p, q$
  - $D \subset \mathbb{P}$ に対し、$D \in M$ かつ dense ならば $D \cap G \neq \emptyset$
- $\dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$ に対し、$\dot{x}_G := \{\dot{y}_G \mid \dot{y} \in \mathbf{dom}(\dot{x}), \exists p \in G.(\dot{y}, p) \in \dot{x}\}$
- $M[G] := \{\dot{x}_G \mid \dot{x} \in M^{\mathbb{P}}\}$ を generic extension という

symmetric extension の定義(1)

定義(normal filter / 自己同型の拡張)

$\mathcal{G}$ を $\mathbb{P}$ の自己同型群とする

- $\mathcal{G}$ の部分群の族 $\mathcal{F}$ が normal filter であるとは次を満たすこと
  - $H_1, H_2 \in \mathcal{F}$ に対して $H_1 \cap H_2 \in \mathcal{F}$
  - super group をとる操作で閉じている
  - $H \in \mathcal{F}, \pi \in \mathcal{G}$ に対して $\pi H \pi^{-1} \in \mathcal{F}$
- $\mathbb{P}$ の自己同型 π を次のように $M^{\mathbb{P}}$ 上の自己同型に拡張する

$$\pi\dot{x} := \{(\pi\dot{y}, \pi p) | (\dot{y}, p) \in \dot{x}\} \text{ for } \dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$$

symmetric extension の定義 (2)

定義 (hereditarily symmetric)

$\mathcal{F}$ を $\mathcal{G}$ の normal filter とする

- $\dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$ が $\mathcal{F}$-symmetric $\Leftrightarrow \{\pi \in \mathcal{G} | \pi\dot{x} = \dot{x}\} \in \mathcal{F}$
- $\dot{x}$ が hereditarily $\mathcal{F}$-symmetric とは以下を満たすこと
  - $\dot{x}$ は $\mathcal{F}$-symmetric
  - $\mathbf{dom}(\dot{x})$ の全ての要素は hereditarily $\mathcal{F}$-symmetric
- hereditarily $\mathcal{F}$-symmetric な $\dot{x}$ の集合を $\mathbf{HS}_{\mathcal{F}}$ とかく

symmetric extension の定義 (3)

定義 (symmetric extension)

M-generic filter G に対し、

$\{\dot{x}_G | \dot{x} \in \mathbf{HS}_{\mathcal{F}}\}$ を symmetric extension という

- symmetric extension は、ZF のモデルとなる
- $\mathbb{P}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ をうまく選ぶと ¬AC も満たす
    - 今回は $\mathbb{P} = (\omega \times \omega \to \{0, 1\}$ の有限部分関数全体)

Isabelle/ZFによる形式化

成果

本研究で形式証明した命題

```
theorem ZF_notAC_main_theorem :
  fixes M
  assumes "nat ≈ M" "M ⊨ ZF" "Transset(M)"
  shows "∃N. N ⊨ ZF ∧ ¬(∀A ∈ N. ∃R ∈ N. wellordered(##N, A, R))"
```

意味

M を ZF の c.t.m. とする。このとき、あるモデル N があって

N は ZF を満たすが、整列可能定理を満たさない

作業工程

以下の工程に分けられる

- symmetric extension の定義
- ZF のモデルであることの証明
- 特定の symmetric extension の構成
- それが $\neg$AC を満たすことの証明

作業量

約1万5千行のコード　　補題など (3K 行)

- symmetric extension の定義 (3K 行)
- ZF のモデルであることの証明 (5K 行)
- 特定の symmetric extension の構成 (2K 行)
- それが ¬AC を満たすことの証明 (2K 行)

※ Isabelle/ZF での集合論の形式化の各先行研究と同じくらい

苦労した点 (1)　自明なことの確認が大変

- クラスに「それを表す論理式が存在すること」
- 定義した関数が「本当に関数であること」
  - 特に「帰納的に定義された M 内の関数」の場合
    - 仮定と ZF からちゃんと構成できるか？
    - このような関数を定義するための補題が 2 千行以上

苦労した点 (2) 先行研究の強制関係の定義

- よくある for all に対する強制関係の定義

$$p \Vdash \forall x \phi(x, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n) \Leftrightarrow \forall \dot{x} \in M^{\mathbb{P}} (p \Vdash \phi(\dot{x}, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n))$$

- 先行研究 [Gunther et al. 20] の定義

$$p \Vdash \forall x \phi(x, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n) \Leftrightarrow \forall x \in \color{red}{M} (p \Vdash \phi(x, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n))$$

※この定義でうまくいくように修正されている

▶ 強制関係の帰納法に $\mathbb{P}$-name 以外が混入する...

解決策 (2)

先行研究 [Gunther et al. 20] の x_G の定義

$x \in M$ に対し

$$x_G := \{y_G \mid y \in \mathbf{dom}(x), \exists p \in G.(y,p) \in x\}$$

- x_G が M 上の関数になっている
- $x \in M$ に対し、ある $\dot{z} \in M^{\mathbb{P}}$ があって $x_G = \dot{z}_G$
  - * この事実を形式化し帰納法中で x の代わりに $\dot{z}$ を使う
  - * 最終的には解決策 (3) で問題の帰納法自体不要に

苦労した点 (3) ZF のモデルであることの証明

命題

N が推移的かつ almost universal なクラスで、Δ_0-separation を満たすならば、N は ZF の内部モデルである

- 参考文献 [Karagila 23] では、symmetric extension が ZF のモデルであることの証明にこの命題を使用
- Isabelle 上で、前提条件は証明できたが「命題自体」が証明できなかった

苦労した点(3) ZF のモデルであることの証明

命題(Collection Principle, Jech「Set Theory」6.5)

p をパラメータとして

$$\forall X \exists Y (\forall u \in X)[\exists v \phi(u,v,p) \to (\exists v \in Y)\phi(u,v,p)]$$

- 前頁の命題の証明中、この命題の証明で行き詰った
- symmetric extension が、generic extension で definable なクラスであることが証明できなかった
  - 論理式を具体的に構成するのが大変すぎる？

解決策 (3)

- $\mathbf{HS}_{\mathcal{F}}$ に相対化した強制関係 $\Vdash_{\mathbf{HS}_{\mathcal{F}}}$ を形式化
  - 参考資料 [Karagila 23] に書かれている概念
  - 強制関係の定義の量化の動く範囲を $\mathbf{HS}_{\mathcal{F}}$ に制限
  - $\Vdash_{\mathbf{HS}_{\mathcal{F}}}$ は、symmetric extension に対し、generic extension に対する $\Vdash$ のように振舞う
- $\Vdash_{\mathbf{HS}_{\mathcal{F}}}$ を用いて ZF のモデルであることを証明
  - 強制関係の帰納法が不要になり「苦労した点 (2)」も解決

考察

考察 (1) c.t.m. アプローチについて

- 本研究で形式化したのは、
「ZF の c.t.m. が存在すれば ZF+¬AC のモデルが存在する」
    - 強制法の形式化 [Gunther et al. 20] を使うため仮定

- 証明したいことは、Con(ZF)→Con(ZF+¬AC) だが、
ZF の c.t.m. の存在は、Con(ZF) から証明できない
    - このギャップを埋める部分が形式化できていない
        - 本当は形式化したい

形式化できていない部分

以下の形式化ができれば、ZF の c.t.m. の存在の仮定をなくせる

- 「任意の ZF の有限部分 Δ に対し、ZF の有限部分 Γ があって Γ の c.t.m. が存在すれば $\Delta + \neg$AC のモデルが存在する」
    - 今回の形式化を修正すれば可能 (ほぼできている)
- 与えられた ZF の有限部分 Γ に対し、Γ の c.t.m. が存在する
    - ZF モデルの中で ZF のモデルを考える必要がある？
        - (労力的に) 形式化が厳しそう...

考察(2) メタ/対象レベル

今回、ZF のモデルの中の性質の証明が大変だった

- コード化された論理式を扱う必要があった
- メタレベルで成り立つことを
  もう一度証明しなければいけないのもきつい

▶ メタ/対象レベルの証明を同時に書ける or 他方に変換できるような機能があると嬉しい

▶ 今回のテーマに限らず、数学基礎論の形式化には便利そう

まとめ

$\neg$AC の相対無矛盾性証明を Isabelle/ZF で形式化

- ZF の c.t.m. から出発し、
  ZF+$\neg$AC をみたす symmetric extension を構成
- ctm の存在の仮定に関する形式化できていない部分がある
- 参考資料の通りにいかず試行錯誤した部分も
- メタ/対象レベルの形式的証明を「つなげる」機能がほしい

参考文献 (1)

- K. Kunen, Set Theory An Introduction To Independence Proofs, North-Holland, 1980
  日本語訳: 藤田 博司 訳, 集合論: 独立性証明への案内, 日本評論社, 2008
- T. Jech, Set Theory: The Third Millennium Edition, Springer, 2002
- T. Jech, The Axiom of Choice, Dover Publications, 2008
- A. Karagila, Lecture Notes: Forcing & Symmetric Extensions, 2023

参考文献(2)

- G. Klein et al., seL4: Formal Verification of an OS Kernel, 2014
- LC. Paulson, The Relative Consistency of the Axiom of Choice Mechanized Using Isabelle/ZF, 2003
- E. Gunther et al., Formalization of Forcing in Isabelle/ZF, 2020
- E. Gunther et al., The Independence of the Continuum Hypothesis in Isabelle/ZF, 2022