

# ¬ ACの相対的無矛盾性証明の Isabelle/ZFによる形式化

---

東北大学 大学院情報科学研究科 住井・松田研究室 M2  
舟根大喜

October 14, 2024

# 概要

## やったこと

¬AC の ZF 上の相対的無矛盾性証明を  
Isabelle/ZF で形式化

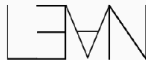
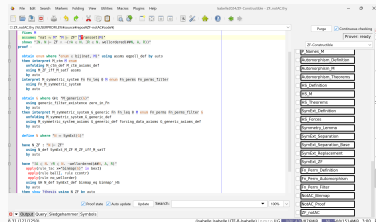
- 定理証明支援系を用いて  
数学の形式化をする試みが行われている
- 集合論の形式化はまだまだ未開拓なので貢献したい

# Isabelle/ZFについて

---

# 定理証明支援系

- 数学的証明の形式化や、ソフトウェアの正しさの証明などに用いられるシステム
- プログラムを書くように定義・証明を記述する
- Isabelle, Lean, Coq, ...



# Isabelle [Paulson 86]

- 実績の例：

seL4 カーネルの形式検証 [Klein et al. 14]

\* 130 万行の証明

- Archive of Formal Proofs



# Isabelle

- 論理体系「Pure」上で定理証明を行う
- 「Pure」上に他の論理体系が構築されている
  - \* Higher-Order Logic
  - \* First-Order Logic
  - \* ...
- Isabelle/ZF ...  
一階述語論理と ZF(C) 公理系のフレームワーク

# Isabelle/ZF における先行研究

- CH の ZFC 上の独立性証明 [Gunther et al. 20,22]
    - \* 強制法の形式化 (13K 行)
    - \* CH の独立性証明 (16K 行) ※ Lean にも形式化がある
  - AC の ZF 上の相対的無矛盾性証明 [Paulson 02]
    - \* 構成可能宇宙を形式化 (12K 行)
- ▶  $\neg$ AC の相対的無矛盾性証明は  
形式化されていなかったもので挑戦

# 本研究における Isabelle/ZF の利点

- 集合論に関する補題・糖衣構文が豊富
- 強制法の形式化 [Gunther et al. 20] が使える
  - \* ZF の c.t.m. の存在を仮定している
    - c.t.m. ... countable transitive model
    - この仮定により証明の形式化にギャップが生じる (後述)

※本研究では相性の良い証明 [Karagila 23] に従う



# 証明概略

---

# 証明概略

ZF の c.t.m.  $M$  から出発し  $ZF + \neg AC$  のモデル  $N$  を構成

- ある poset  $\mathbb{P}$  による generic extension  $M[G]$  の **symmetric extension** と呼ばれる部分モデル  $N \subseteq M[G]$  を構成
- $N$  は ZF を満たすが、整列可能定理を満たさない
  - \*  $N \models$  「単射  $\omega \rightarrow A$  が存在しない無限集合  $A$  が存在」
    - $N$  ではこの  $A$  が整列できない
    - $N$  では  $A$  は Dedekind 有限な無限集合

# generic extension の定義 (1)

## 定義 ( $\mathbb{P}$ -name)

$M$  を ZF の c.t.m.,  $\mathbb{P} \in M$  を poset とする

- $M_{\alpha}^{\mathbb{P}}$  を再帰的に定義する
  - \*  $M_0^{\mathbb{P}} = \emptyset$
  - \*  $M_{\alpha+1}^{\mathbb{P}} = \mathcal{P}^M(M_{\alpha}^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P})$
  - \*  $M_{\alpha}^{\mathbb{P}} = \bigcup_{\beta < \alpha} M_{\beta}^{\mathbb{P}}$  ( $\alpha$  は limit ordinal)
- $M^{\mathbb{P}} = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} M_{\alpha}^{\mathbb{P}}$  とし、 $M^{\mathbb{P}}$  の元を  $\mathbb{P}$ -name という
- $\mathbb{P}$ -name は  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots$  で表す

# generic extension の定義 (2)

## 定義 (generic extension)

- $D \subset \mathbb{P}$  が dense:  $\Leftrightarrow p \in \mathbb{P}$  に対し  $q \leq_{\mathbb{P}} p$  なる  $q \in D$  が存在
- $G \subset \mathbb{P}$  が  $M$ -generic filter であるとは、以下を満たすこと
  - \*  $p \in \mathbb{P}$ ,  $q \in G$  に対し、 $q \leq_{\mathbb{P}} p$  ならば  $p \in G$
  - \*  $p, q \in G$  に対し、 $r \in G$  が存在して  $r \leq_{\mathbb{P}} p, q$
  - \*  $D \subset \mathbb{P}$  に対し、 $D \in M$  かつ dense ならば  $D \cap G \neq \emptyset$
- $\dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$  に対し、 $\dot{x}_G := \{\dot{y}_G \mid \dot{y} \in \text{dom}(\dot{x}), \exists p \in G. (\dot{y}, p) \in \dot{x}\}$
- $M[G] := \{\dot{x}_G \mid \dot{x} \in M^{\mathbb{P}}\}$  を generic extension という

# symmetric extension の定義 (1)

定義 (normal filter / 自己同型の拡張)

$\mathcal{G}$  を  $\mathbb{P}$  の自己同型群とする

■  $\mathcal{G}$  の部分群の族  $\mathcal{F}$  が normal filter であるとは次を満たすこと

\*  $H_1, H_2 \in \mathcal{F}$  に対して  $H_1 \cap H_2 \in \mathcal{F}$

\* super group をとる操作で閉じている

\*  $H \in \mathcal{F}, \pi \in \mathcal{G}$  に対して  $\pi H \pi^{-1} \in \mathcal{F}$

■  $\mathbb{P}$  の自己同型  $\pi$  を次のように  $M^{\mathbb{P}}$  上の自己同型に拡張する

$$\pi \dot{x} := \{(\pi \dot{y}, \pi p) \mid (\dot{y}, p) \in \dot{x}\} \text{ for } \dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$$

# symmetric extension の定義 (2)

定義 (hereditarily symmetric)

$\mathcal{F}$  を  $\mathcal{G}$  の normal filter とする

- $\dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$  が  $\mathcal{F}$ -symmetric  $\Leftrightarrow \{\pi \in \mathcal{G} \mid \pi \dot{x} = \dot{x}\} \in \mathcal{F}$
- $\dot{x}$  が hereditarily  $\mathcal{F}$ -symmetric とは以下を満たすこと
  - \*  $\dot{x}$  は  $\mathcal{F}$ -symmetric
  - \*  $\text{dom}(\dot{x})$  の全ての要素は hereditarily  $\mathcal{F}$ -symmetric
- hereditarily  $\mathcal{F}$ -symmetric な  $\dot{x}$  の集合を  $\text{HS}_{\mathcal{F}}$  とかく

# symmetric extension の定義 (3)

定義 (symmetric extension)

$M$ -generic filter  $G$  に対し、

$\{\dot{x}_G \mid \dot{x} \in \mathbf{HS}_{\mathcal{F}}\}$  を symmetric extension という

- symmetric extension は、ZF のモデルとなる
- $\mathbb{P}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{F}$  をうまく選ぶと  $\neg\text{AC}$  も満たす
  - \* 今回は  $\mathbb{P} = (\omega \times \omega \rightarrow \{0, 1\})$  の有限部分関数全体)

# Isabelle/ZF による形式化

---



# 成果

## 本研究で形式証明した命題

```
theorem ZF_notAC_main_theorem :  
  fixes M  
  assumes "nat  $\approx$  M" "M  $\models$  ZF" "Transset(M)"  
  shows " $\exists N. N \models \text{ZF} \wedge \neg(\forall A \in N. \exists R \in N. \text{wellordered}(\#\#N, A, R))$ "
```

## 意味

$M$  を ZF の c.t.m. とする。このとき、あるモデル  $N$  があって  
 $N$  は ZF を満たすが、整列可能定理を満たさない

# 作業工程

## 以下の工程に分けられる

- symmetric extension の定義
- ZF のモデルであることの証明
- 特定の symmetric extension の構成
- それが  $\neg AC$  を満たすことの証明

# 作業量

約 1 万 5 千行のコード      補題など (3K 行)

- symmetric extension の定義 (3K 行)
- ZF のモデルであることの証明 (5K 行)
- 特定の symmetric extension の構成 (2K 行)
- それが  $\neg AC$  を満たすことの証明 (2K 行)

※ Isabelle/ZF での集合論の形式化の各先行研究と同じくらい

# 苦勞した点 (1) 自明なことの確認が大変

- クラスに「それを表す論理式が存在すること」
- 定義した関数が「本当に関数であること」
  - \* 特に「帰納的に定義された  $M$  内の関数」の場合
    - 仮定と ZF からちゃんと構成できるか？
    - このような関数を定義するための補題が 2 千行以上

## 苦勞した点 (2) 先行研究の強制関係の定義

- よくある for all に対する強制関係の定義

$$p \Vdash \forall x \phi(x, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \Leftrightarrow \forall \dot{x} \in M^{\mathbb{P}} (p \Vdash \phi(\dot{x}, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n))$$

- 先行研究 [Gunther et al. 20] の定義

$$p \Vdash \forall x \phi(x, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \Leftrightarrow \forall x \in \textcolor{red}{M} (p \Vdash \phi(x, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n))$$

※この定義でうまくいくように修正されている

- ▶ 強制関係の帰納法に  $\mathbb{P}$ -name 以外が混入する...

# 解決策 (2)

## 先行研究 [Gunther et al. 20] の $x_G$ の定義

$x \in M$  に対し

$$x_G := \{y_G \mid y \in \mathbf{dom}(x), \exists p \in G. (y, p) \in x\}$$

- $x_G$  が  $M$  上の関数になっている
- $x \in M$  に対し、ある  $\dot{z} \in M^{\mathbb{P}}$  があって  $x_G = \dot{z}_G$ 
  - \* この事実を形式化し帰納法中で  $x$  の代わりに  $\dot{z}$  を使う
  - \* 最終的には解決策 (3) で問題の帰納法自体不要に

# 苦勞した点 (3) ZF のモデルであることの証明

## 命題

$N$  が推移的かつ almost universal なクラスで、 $\Delta_0$ -separation を満たすならば、 $N$  は ZF の内部モデルである

- 参考文献 [Karagila 23] では、symmetric extension が ZF のモデルであることの証明にこの命題を使用
- Isabelle 上で、前提条件は証明できたが「命題自体」が証明できなかった

# 苦勞した点 (3) ZF のモデルであることの証明

命題 (Collection Principle, Jech 「Set Theory」 6.5)

$p$  をパラメータとして

$$\forall X \exists Y (\forall u \in X) [\exists v \phi(u, v, p) \rightarrow (\exists v \in Y) \phi(u, v, p)]$$

- 前頁の命題の証明中、この命題の証明で行き詰った
- symmetric extension が、generic extension で definable なクラスであることが証明できなかった
  - \* 論理式を具体的に構成するのが大変すぎる？



# 解決策 (3)

- $\text{HS}_{\mathcal{F}}$  に相対化した強制関係  $\Vdash_{\text{HS}_{\mathcal{F}}}$  を形式化
  - \* 参考資料 [Karagila 23] に書かれている概念
  - \* 強制関係の定義の量化の動く範囲を  $\text{HS}_{\mathcal{F}}$  に制限
  - \*  $\Vdash_{\text{HS}_{\mathcal{F}}}$  は、symmetric extension に対し、generic extension に対する  $\Vdash$  のように振舞う
- $\Vdash_{\text{HS}_{\mathcal{F}}}$  を用いて ZF のモデルであることを証明
  - \* 強制関係の帰納法が不要になり「苦労した点 (2)」も解決

# 考察

---

# 考察(1) c.t.m. アプローチについて

- 本研究で形式化したのは、  
「ZF の c.t.m. が存在すれば  $ZF + \neg AC$  のモデルが存在する」
  - \* 強制法の形式化 [Gunther et al. 20] を使うため仮定
- 証明したいことは、 $\text{Con}(ZF) \rightarrow \text{Con}(ZF + \neg AC)$  だが、  
ZF の c.t.m. の存在は、 $\text{Con}(ZF)$  から証明できない
  - \* このギャップを埋める部分が形式化できていない
    - 本当は形式化したい

# 形式化できていない部分

以下の形式化ができれば、ZF の c.t.m. の存在の仮定をなくせる

- 「任意の ZF の有限部分  $\Delta$  に対し、ZF の有限部分  $\Gamma$  があって  $\Gamma$  の c.t.m. が存在すれば  $\Delta + \neg AC$  のモデルが存在する」

- \* 今回の形式化を修正すれば可能 (ほぼできている)

- 与えられた ZF の有限部分  $\Gamma$  に対し、 $\Gamma$  の c.t.m. が存在する

- \* ZF モデルの中で ZF のモデルを考える必要がある？

- (労力的に) 形式化が厳しそう...

## 考察(2) メタ/対象レベル

今回、ZF のモデルの中の性質の証明が大変だった

- コード化された論理式を扱う必要があった
- メタレベルで成り立つことを  
もう一度証明しなければいけないのもきつい
- ▶ メタ/対象レベルの証明を同時に書ける or  
他方に変換できるような機能があると嬉しい
- ▶ 今回のテーマに限らず、数学基礎論の形式化には便利そう

# まとめ

## ¬AC の相対無矛盾性証明を Isabelle/ZF で形式化

- ZF の c.t.m. から出発し、  
ZF+¬AC をみたす symmetric extension を構成
- ctm の存在の仮定に関する形式化できていない部分がある
- 参考資料の通りにいかず試行錯誤した部分も
- メタ/対象レベルの形式的証明を「つなげる」機能がほしい

# 参考文献(1)

- K. Kunen, Set Theory An Introduction To Independence Proofs, North-Holland, 1980  
日本語訳: 藤田 博司 訳, 集合論: 独立性証明への案内, 日本評論社, 2008
- T. Jech, Set Theory: The Third Millennium Edition, Springer, 2002
- T. Jech, The Axiom of Choice, Dover Publications, 2008
- A. Karagila, Lecture Notes: Forcing & Symmetric Extensions, 2023

## 参考文献 (2)

- G. Klein et al., seL4: Formal Verification of an OS Kernel, 2014
- LC. Paulson, The Relative Consistency of the Axiom of Choice Mechanized Using Isabelle/ZF, 2003
- E. Gunther et al., Formalization of Forcing in Isabelle/ZF, 2020
- E. Gunther et al., The Independence of the Continuum Hypothesis in Isabelle/ZF, 2022