Семинар 8

Функциональные последовательности

Рассмотрим последовательность функций: $\{f_n(x)\}$, где $x \in X$. При каждом $x \in X$ это числовая последовательность. Она может иметь предел, который будет зависеть от x.

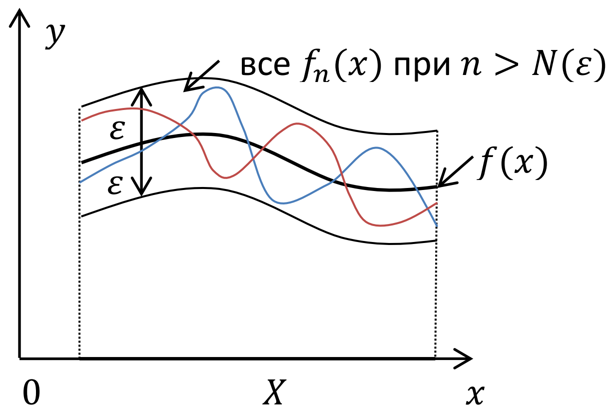
О. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится *поточечно* на множестве X к функции $f(x)$, если она сходится к ней в каждой точке этого множества:

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ \ \forall x \in X,$

т. е. $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon, x)\colon \forall n > N \ \ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$

О. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится *равномерно* на множестве X к функции $f(x)$ ($f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X), если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)\colon \forall n > N, \forall x \in X \ \ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$



равномерная сходимость

Отличие от поточечной сходимости в том, что при равномерной сходимости число N не зависит от x, т. е. все функции $f_n(x)$ при $n > N(\varepsilon)$ лежат в некотором ε-коридоре на всём множестве X.

Если нет равномерной сходимости, то загнать все функции $f_n(x)$, начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$, в один и тот же ε-коридор сразу на всём множестве X нельзя.

Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $f(x)$ на множестве X, то она сходится к функции $f(x)$ поточечно на множестве X. Обратное неверно.

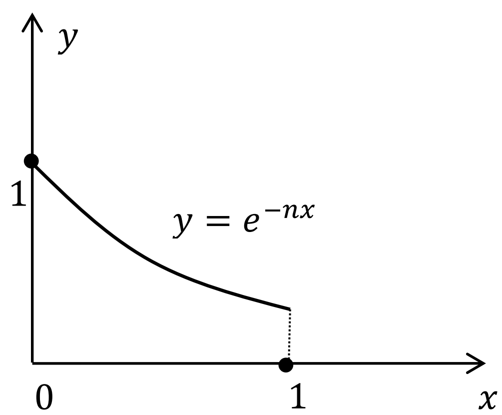
Т. Если все функции $f_n(x)$ непрерывны (по x) на X и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X, то и функция $f(x)$ непрерывна на X.

Непосредственно из определения равномерной сходимости следует

Практический критерий равномерной сходимости функциональной последовательности.

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $X \ \Leftrightarrow \ \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, где $\varepsilon_n = \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$.

Замечание. Обратите внимание на порядок действий: надо сначала взять супремум по x, а затем перейти к пределу при $n \to \infty$.



Пример 1. Исследовать на равномерную сходимость: $f_n(x) = e^{-nx}$, $x \in (0,1)$.

1) Найдём предел последовательности:

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-nx} = 0,\ x \in (0,1).$

2) Найдём ε_n:

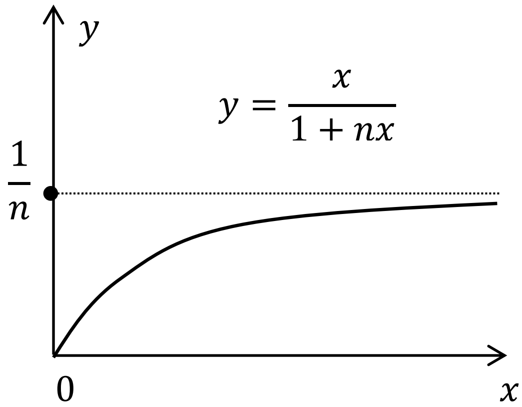
$\varepsilon_n = \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in(0,1)} |e^{-nx} - 0| = 1.$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 1 \Rightarrow$ нет равномерной сходимости.

Ответ: сходится к $f(x) = 0$ неравномерно.

Пример 2. Исследовать на равномерную сходимость: $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$, $x \geq 0$.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{1+nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{n}+x} = x,\ x \geq 0.$$



$$\varepsilon_n = \sup_{x\geq 0}\left|\frac{nx^2}{1+nx} - x\right| = \sup_{x\geq 0}\left|\frac{\cancel{nx^2} - x - \cancel{nx^2}}{1+nx}\right| = \sup_{x\geq 0}\frac{x}{1+nx}.$$

Пусть $g(x) = \frac{x}{1+nx}$.

Построим график функции $g(x)$ при $x \geq 0$:

$$g'(x) = \frac{1 + \cancel{nx} - \cancel{xn}}{(1+nx)^2} > 0, \qquad g(0) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+nx} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+n} = \frac{1}{n}.$$

Т. е. функция $g(x)$ монотонно возрастает от значения $g(0) = 0$ до $\frac{1}{n}$ на бесконечности. Тогда из графика видно, что $\varepsilon_n = \sup_{x\geq 0}\frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n}$.

$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0 \Rightarrow$ равномерная сходимость.

Ответ: сходится к $f(x) = x$ равномерно.

О. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится *в среднем* к функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если $\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0$.

поточечная сходимость $\Leftarrow$ равномерная сходимость $\Rightarrow$ сходимость в среднем

Последовательность может сходиться в среднем на $[a, b]$, но не сходиться ни в одной точке отрезка (см. пример у Ильина, Позняка). Также последовательность может сходиться поточечно на $[a, b]$, но не сходиться в среднем на $[a, b]$ (см. следующий пример).

Пример 3 (дополнительный). Исследовать поточечную сходимость и сходимость в среднем последовательности $f_n(x) = nx^n \cdot \sqrt{1-x}$ к $f(x) = 0$ на $[0, 1]$.

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nx^n \cdot \sqrt{1-x} = 0 = f(x),\ x \in [0, 1] \Rightarrow$ есть поточечная сходимость.

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = \int_0^1 n^2 x^{2n}(1-x)\,dx = n^2\int_0^1 (x^{2n} - x^{2n+1})\,dx =$$

$$= n^2\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right)\Bigg|_0^1 = n^2\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{n^2}{(2n+1)(2n+2)}.$$

$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow$ нет сходимости в среднем.

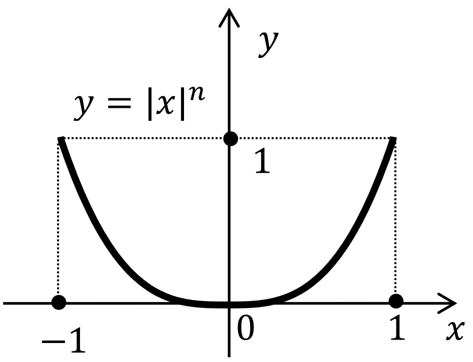
Ответ: сходится поточечно, но не в среднем.

Замечание: полученный результат доказывает, что $f_n(x) = nx^n \cdot \sqrt{1-x}$ сходится к $f(x) = 0$ *неравномерно* на $[0, 1]$ (иначе из равномерной сходимости следовала бы сходимость в среднем).

Функциональные ряды

Рассмотрим ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, где $x \in X$ — параметр. При каждом $x \in X$ это числовой ряд.
О. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно* на множестве X, если последовательность его частичных сумм сходится равномерно на множестве X, т. е. $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$ на X.
Необходимое условие равномерной сходимости. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X, то $a_n(x) \rightrightarrows 0$ на X.

Пример 4 (Демидович № 2767 б). Исследовать на равномерную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$.

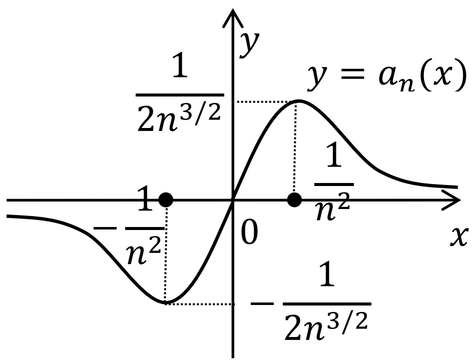


В каждой точке $x \in (-1, 1)$ ряд сходится (геом. прогрессия).
Проверим необходимое условие равномерной сходимости ряда: $a_n(x) \rightrightarrows 0$ на $(-1, 1)$.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0, x \in (-1, 1)$.
$\varepsilon_n = \sup\limits_{x\in(-1,1)} |a_n(x) - 0| = \sup\limits_{x\in(-1,1)} |x^n| = \sup\limits_{x\in(-1,1)} |x|^n = 1.$
$\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 1 \Rightarrow a_n(x)$ сходится к 0 неравномерно.
Тогда необходимое условие равномерной сходимости ряда не выполнено, значит, он сходится неравномерно.
Ответ: сходится неравномерно.

Признак Вейерштрасса. Если $|a_n(x)| \le c_n\ \forall x \in X$ и мажорантный *числовой* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на X.
Замечание: числа c_n не должны зависеть от x, т. е. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ — обязательно *числовой* ряд, а не функциональный.
Замечание: поскольку признак Вейерштрасса даёт абсолютную сходимость, не получится его применить для условно сходящегося ряда. Для условно сходящихся рядов есть признак Дирихле (см. далее).

Пример 5. Исследовать на равномерную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}x}{1+n^4x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
Чтобы применить признак Вейерштрасса, надо замажорировать наш ряд каким-нибудь сходящимся числовым рядом. Рассмотрим $a_n(x) = \frac{\sqrt{n}x}{1+n^4x^2}$. Исследуем поведение этой функции на всей числовой оси.

$$a_n'(x) = \frac{\sqrt{n}(1+n^4x^2) - \sqrt{n}x \cdot 2n^4x}{(1+n^4x^2)^2} = \frac{\sqrt{n}(1-n^4x^2)}{(1+n^4x^2)^2}.$$



$a_n'(x) = 0$ при $x = \pm\frac{1}{n^2}$.
$a_n\left(\pm\frac{1}{n^2}\right) = \pm\frac{1}{2n^{3/2}}.$
Кроме того, $a_n(0) = 0$, $a_n(x) \to 0$ при $x \to \infty$, $a_n(x)$ — нечётная функция, $a_n(x) > 0$ при $x > 0$, $a_n(x) < 0$ при $x < 0$. Построим график $a_n(x)$. Из него видно, что

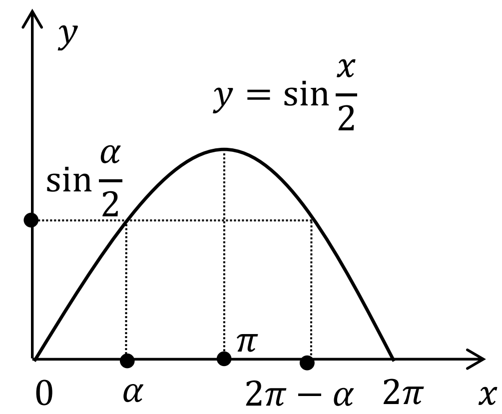
$|a_n(x)| \le \underbrace{\frac{1}{2n^{3/2}}}_{c_n} \; \forall x \in \mathbb{R}.$

Мажорантный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$ сходится, поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{R}$ (по признаку Вейерштрасса).
Ответ: сходится равномерно.

Признак Дирихле. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$. Пусть
1) $\exists C$: $|\sum_{n=1}^{N} a_n(x)| \le C \; \forall N, \forall x \in X$,
2) $\{b_n(x)\}$ — *монотонная* последовательность (по n) при каждом фиксированном $x \in X$ и $b_n(x) \rightrightarrows 0$ на X.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на X.
Замечание 1: число C не должно зависеть ни от N, ни от x.
Замечание 2: не стоит применять признак Дирихле для абсолютно сходящегося ряда. В этом случае более удобен признак Вейерштрасса.

Пример 6. Исследовать на равномерную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n+x}}$, $x \in (\alpha, 2\pi - \alpha)$, где α — фиксированный параметр, $0 < \alpha < \pi$.



Признак Вейерштрасса тут не поможет, т. к. мажорантный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+\alpha}}$ будет расходиться.
Будем использовать признак Дирихле.
Пусть $a_n(x) = \sin nx$, $b_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+x}}$.

1) $|\sum_{n=1}^{N} a_n(x)| = |\sum_{n=1}^{N} \sin nx| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} < \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad \forall N$, $\forall x \in (\alpha, 2\pi - \alpha)$,
т. к. $\sin\frac{x}{2} > \sin\frac{\alpha}{2}$ при $x \in (\alpha, 2\pi - \alpha)$.

2) $b_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+x}}$ монотонно убывает по n при каждом фиксированном $x \in (\alpha, 2\pi - \alpha)$.
Докажем, что $b_n(x) \rightrightarrows 0$ на $(\alpha, 2\pi - \alpha)$.
Во-первых, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+x}} = 0 \; \forall x$. Далее,
$$\varepsilon_n = \sup_{x\in(\alpha,2\pi-\alpha)} |b_n(x) - 0| = \sup_{x\in(\alpha,2\pi-\alpha)} \frac{1}{\sqrt{n+x}} = \frac{1}{\sqrt{n+\alpha}}.$$
Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \Rightarrow b_n(x) \rightrightarrows 0$ на $(\alpha, 2\pi - \alpha)$.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на $(\alpha, 2\pi - \alpha)$ (по признаку Дирихле).
Ответ: сходится равномерно.

ДЗ 8. Исследовать на равномерную сходимость на $[0, 1]$:
1) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$,
2) $f_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x^2}$,
3) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$.

Исследовать поточечную сходимость и сходимость в среднем последовательности $f_n(x) = x^n \cdot \sqrt{1-x}$ к $f(x) = 0$ на $[0, 1]$.

Демидович 1997 г. (2003 г.) № 2768.1 (2768 б), 2774 (а,в,ж,к), 2775а, 2779.

Дополнительный материал

О. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ *равномерно ограничена* на множестве X, если
$\exists C\colon |f_n(x)| \le C \ \forall n, \forall x \in X.$
Замечание: число C не должно зависеть ни от n, ни от x.
Например: $f_n(x) = x^n$ равномерно ограничена на $[0,1]$: $|x^n| \le 1 \ \forall n, \forall x \in [0,1]$; не является равномерно ограниченной на $[1,2]$.
Признак Абеля. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$. Пусть

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X,
2) $\{b_n(x)\}$ — *монотонная* последовательность (по n) при каждом фиксированном $x \in X$ и последовательность $\{b_n(x)\}$ равномерно ограничена на X.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на X.
О. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ *равностепенно непрерывна* на множестве X, если
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \forall x', x'' \in X, |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon \ \forall n.$
Например: $f_n(x) = \frac{x}{n}$ равностепенно непрерывна на $[0,1]$. Если взять $\delta = \varepsilon$, то
$|f_n(x') - f_n(x'')| = \left|\frac{x'}{n} - \frac{x''}{n}\right| = \left|\frac{x'-x''}{n}\right| < \frac{\delta}{n} = \frac{\varepsilon}{n} \le \varepsilon \ \forall n.$
$f_n(x) = nx$ не является равностепенно непрерывной на $[0,1]$:
$|f_n(x') - f_n(x'')| = |n(x' - x'')|$, при $x' \ne x''$ всегда можно подобрать n, такое что $|n(x' - x'')| > \varepsilon$.
Т. (Арцела). Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на отрезке $[a,b]$, то из неё можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке $[a,b]$.
Замечание: теорема также справедлива, если заменить отрезок $[a,b]$ на произвольное замкнутое ограниченное множество.