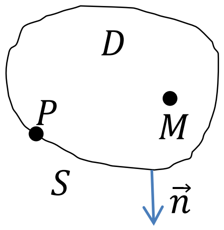
Семинар 15

Начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности в ограниченной области с однородными ГУ



$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f(M,t),\ M \in D,\ t > 0, & \text{(ДУ)} \\ \left.\left(\alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\right|_S = 0,\ P \in S,\ t \geq 0, & \text{(ГУ)} \\ u|_{t=0} = \varphi(M),\ M \in D. & \text{(НУ)} \end{cases}$$

Здесь $a = \text{const} > 0$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, $\alpha \cdot \beta \geq 0$.

Требуется найти $u(M,t)$ при $M \in \overline{D}$, $t \geq 0$.

Если все функции — достаточно гладкие, то классическое решение существует и единственно.

Рассмотрим вспомогательную задачу Ш.–Л.:

$$\begin{cases} \Delta v(M) + \lambda v(M) = 0, \qquad M \in D, \\ \left.\left(\alpha \dfrac{\partial v}{\partial n} + \beta v\right)\right|_S = 0. \end{cases}$$

Пусть $\{v_n(M)\}$ — полная ортогональная система СФ этой задачи Ш.–Л., а $\{\lambda_n\}$ — соответствующие СЗ. Разложим функции $\varphi(M)$ и $f(M,t)$ в ряд Фурье по $\{v_n(M)\}$:

$$\varphi(M) = \sum_n \varphi_n v_n(M)\,, \qquad \varphi_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_D \varphi(M) v_n(M)\, dV,$$

$$f(M,t) = \sum_n f_n(t) v_n(M)\,, \qquad f_n(t) = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_D f(M,t) v_n(M)\, dV.$$

Решение начально–краевой задачи для уравнения теплопроводности также будем искать в виде ряда Фурье по $\{v_n(M)\}$:

$$u(M,t) = \sum_n T_n(t) v_n(M) \tag{1}$$

с неизвестными коэффициентами $T_n(t)$.

Тогда однородное ГУ автоматически выполняется.

Подставим ряды Фурье в ДУ и НУ:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_n T_n'(t) v_n(M) = a^2 \sum_n T_n(t) \underbrace{\Delta v_n(M)}_{-\lambda_n v_n(M)} + \sum_n f_n(t) v_n(M)\,, \\ \displaystyle\sum_n T_n(0) v_n(M) = \sum_n \varphi_n v_n(M)\,. \end{cases}$$

Приравняв соответствующие коэффициенты при $v_n(M)$, получим:

$$\begin{cases} T_n'(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(0) = \varphi_n. \end{cases} \tag{2}$$

Это задача Коши для ОДУ первого порядка. Её решение можно записать в виде (дома проверить):

$$T_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n a^2 t} + \int_0^t \underbrace{e^{-\lambda_n a^2 (t-\tau)}}_{\text{функция Коши}} f_n(\tau)\, d\tau.$$

Замечание 1: данное представление решения задачи Коши (2) справедливо и в случае $\lambda_n = 0$.

Замечание 2: на практике иногда удобнее решать задачу Коши (2) непосредственно, не используя представление решения через функцию Коши.
Найденные $T_n(t)$ подставим в ряд (1) и получим решение исходной начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Пример 1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке:
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + t\cos\dfrac{3\pi x}{2l}, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0, \\ u_x|_{x=0} = 0, \qquad u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = \cos\dfrac{\pi x}{2l}. \end{cases}$$
Сначала найдём СЗ и СФ соответствующей задачи Ш.–Л.:
$$\begin{cases} v''(x) + \lambda v(x) = 0, \qquad 0 < x < l, \\ v'(0) = 0, \qquad v(l) = 0. \end{cases}$$
Отсюда:
$$\lambda_n = \left[\frac{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)}{l}\right]^2, \qquad v_n(x) = \cos\frac{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)}{l}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$
Разложим функции $\varphi(x) = \cos\frac{\pi x}{2l}$ и $f(x,t) = t\cos\frac{3\pi x}{2l}$ в ряд Фурье по $\{v_n(x)\}$:
$$\varphi(x) = \cos\frac{\pi x}{2l} = v_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n v_n(x) \;\Rightarrow\; \varphi_n = \delta_{n1};$$
$$f(x,t) = t\cos\frac{3\pi x}{2l} = t v_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) v_n(x) \;\Rightarrow\; f_n(t) = t\delta_{n2}.$$
Теперь будем искать решение исходной начально-краевой задачи в виде ряда:
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) v_n(x).$$
ГУ выполнены автоматически. После подстановки рядов в ДУ и НУ и приравнивания коэффициентов при соответствующих СФ, получим следующую задачу Коши:
$$\begin{cases} T_n'(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = t\delta_{n2}, \\ T_n(0) = \delta_{n1}. \end{cases}$$
Мы не будем использовать представление решения через функцию Коши, а решим задачу непосредственно.
При $n \neq 1, 2$ эта задача Коши однородна:
$$\begin{cases} T_n'(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = 0, \\ T_n(0) = 0. \end{cases}$$
В силу единственности решения задачи Коши для ОДУ она имеет только тривиальное решение: $T_n(t) = 0$.
Теперь рассмотрим задачу для $n = 1$:
$$\begin{cases} T_1'(t) + a^2\lambda_1 T_1(t) = 0, \\ T_1(0) = 1. \end{cases}$$
ОР ДУ имеет вид $T_1(t) = Ae^{-a^2\lambda_1 t}$, причём из НУ $A = 1$. Таким образом,
$T_1(t) = e^{-a^2\lambda_1 t}$.
Рассмотрим задачу для $n = 2$:

$$\begin{cases} T_2'(t) + a^2\lambda_2 T_2(t) = t, \\ T_1(0) = 0. \end{cases}$$

ОР ДУ ищем в виде:

$$T_2(t) = \underbrace{Be^{-a^2\lambda_2 t}}_{\substack{\text{общее решение}\\ \text{однородного}\\ \text{уравнения}}} + \underbrace{\tilde{T}_2(t)}_{\substack{\text{частное решение}\\ \text{неоднородного}\\ \text{уравнения}}},$$

где $\tilde{T}_2(t)$ надо искать в виде

$\tilde{T}_2(t) = Ct + D,$

поскольку в правой части ДУ стоит многочлен первой степени по t.

Подставив $\tilde{T}_2(t)$ в ДУ, получим:

$C + a^2\lambda_2 Ct + a^2\lambda_2 D = t.$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t:

$a^2\lambda_2 C = 1, \qquad C + a^2\lambda_2 D = 0.$

Отсюда:

$$C = \frac{1}{a^2\lambda_2}, \qquad D = -\frac{1}{a^4\lambda_2^2}.$$

Тогда

$$\tilde{T}_2(t) = \frac{t}{a^2\lambda_2} - \frac{1}{a^4\lambda_2^2},$$

и

$$T_2(t) = Be^{-a^2\lambda_2 t} + \frac{t}{a^2\lambda_2} - \frac{1}{a^4\lambda_2^2}.$$

Коэффициент B определяем из НУ:

$$T_2(0) = B - \frac{1}{a^4\lambda_2^2} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; B = \frac{1}{a^4\lambda_2^2}.$$

Таким образом,

$$T_2(t) = \frac{e^{-a^2\lambda_2 t}}{a^4\lambda_2^2} + \frac{t}{a^2\lambda_2} - \frac{1}{a^4\lambda_2^2}.$$

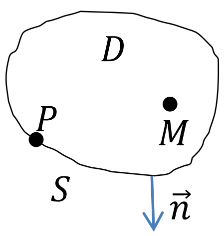
Теперь подставим найденные $T_n(t)$ в ряд для решения начально-краевой задачи:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) v_n(x) = T_1(t)v_1(x) + T_2(t)v_2(x) =$$

$$= e^{-a^2\lambda_1 t}\cos\frac{\pi x}{2l} + \left(\frac{e^{-a^2\lambda_2 t}}{a^4\lambda_2^2} + \frac{t}{a^2\lambda_2} - \frac{1}{a^4\lambda_2^2}\right)\cos\frac{3\pi x}{2l},$$

где $\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2$, $\lambda_2 = \left(\frac{3\pi}{2l}\right)^2$.

Начально-краевые задачи для уравнения колебаний в ограниченной области с однородными ГУ



$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \,\Delta\, u + f(M,t),\; M \in D,\; t > 0, & \text{(ДУ)} \\ \left(\alpha\dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_S = 0,\; P \in S,\; t \ge 0, & \text{(ГУ)} \\ u|_{t=0} = \varphi(M),\; M \in D, & \text{(НУ)} \\ u_t|_{t=0} = \psi(M),\; M \in D. & \text{(НУ)} \end{cases}$$

Задача решается аналогично, но для $T_n(t)$ получается задача Коши:

$$\begin{cases} T_n''(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(0) = \varphi_n, \\ T_n'(0) = \psi_n, \end{cases}$$

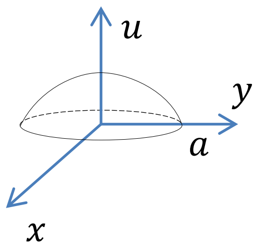
где φ_n, ψ_n, $f_n(t)$, $T_n(t)$ — коэффициенты разложения функций $\varphi(M)$, $\psi(M)$, $f(M,t)$, $u(M,t)$ в ряд Фурье по СФ соответствующей задачи Ш.–Л.

Решение этой задачи Коши имеет вид (дома проверить):

$$T_n(t) = \begin{cases} \varphi_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t + \dfrac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}}\sin a\sqrt{\lambda_n}t + \displaystyle\int_0^t \dfrac{\sin a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)}{a\sqrt{\lambda_n}} f_n(\tau)\,d\tau\,, & \lambda_n > 0, \\ \varphi_n + \psi_n t + \displaystyle\int_0^t (t-\tau) f_n(\tau)\,d\tau\,, & \lambda_n = 0. \end{cases}$$

Замечание: на практике иногда удобнее решать задачу Коши непосредственно, не используя представление решения через функцию Коши.

Пример 2 (задача о вынужденных колебаниях круглой мембраны). Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний в единичном круге:



$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + J_0(\chi r)\sin\sigma t\,, & 0 \le r < 1, \quad t > 0, \\ u|_{r=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

где $\sigma > 0$, χ — первый положительный корень уравнения $J_0(\chi) = 0$.

Эта задача описывает малые поперечные колебания упругой мембраны с краями, закреплёнными на единичной окружности, под действием периодической внешней силы.

Сначала найдём СЗ и СФ соответствующей задачи Ш.–Л. в круге:

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v = 0, & 0 \le r < 1, \\ v|_{r=1} = 0. \end{cases}$$

Как мы знаем (см. семинар 6), СФ имеют вид:

$$v_{\pm nk}(r,\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\Phi_{\pm n}(\varphi),$$

где

$\Phi_0(\varphi) = 1, \qquad \Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi\,, \qquad \Phi_{-n}(\varphi) = \sin n\varphi\,, \qquad n = 1, 2, \ldots,$

$\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $J_n\big(\sqrt{\lambda}\big) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$

Заметим, что по условию задачи $\sqrt{\lambda_1^{(0)}} = \chi$.

Разложим функцию $J_0(\chi r)\sin\sigma t$ в ряд Фурье по СФ $v_{\pm nk}(r,\varphi)$:

$$J_0(\chi r)\sin\sigma t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_{nk}(t)v_{nk}(r,\varphi).$$

Заметим, что $J_0(\chi r) = v_{01}(r,\varphi)$, поэтому

$f_{nk}(t) = \delta_{n0}\delta_{k1}\sin\sigma t.$

Теперь будем искать решение исходной начально-краевой задачи в виде ряда:

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty} T_{nk}(t)v_{nk}(r,\varphi).$$

ГУ выполнены автоматически. Подставив ряд в ДУ и НУ и приравняв соответствующие коэффициенты при v_{nk}получим задачу Коши:

$$\begin{cases} T''_{nk}(t) + a^2\lambda_k^{(n)} T_{nk}(t) = f_{nk}(t) = \delta_{n0}\delta_{k1}\sin\sigma t\,, \\ T_{nk}(0) = \varphi_{nk} = 0, \\ T'_{nk}(0) = \psi_{nk} = 0. \end{cases}$$

В силу единственности решения задачи Коши $T_{nk}(t) \equiv 0$ при $(n,k) \neq (0,1)$. Для $T_{01}(t)$ имеем задачу:

$$\begin{cases} T''_{01}(t) + a^2\lambda_1^{(0)} T_{01}(t) = f_{01}(t) = \sin\sigma t\,, \\ T_{01}(0) = 0, \\ T'_{01}(0) = 0. \end{cases}$$

Воспользуемся представлением решения через функцию Коши:

$$T_{01}(t) = \int_0^t K_{01}(t-\tau) f_{01}(\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{\sin a\sqrt{\lambda_1^{(0)}}(t-\tau)}{a\sqrt{\lambda_1^{(0)}}} \sin\sigma\tau\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{a\chi}\int_0^t \sin a\chi(t-\tau)\sin\sigma\tau\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2a\chi}\int_0^t \{\cos[a\chi t - (a\chi+\sigma)\tau] - \cos[a\chi t + (\sigma - a\chi)\tau]\}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2a\chi}\left\{-\frac{\sin[a\chi t - (a\chi+\sigma)\tau]}{a\chi+\sigma} - \frac{\sin[a\chi t + (\sigma - a\chi)\tau]}{\sigma - a\chi}\right\}\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} =$$

$$= \frac{1}{2a\chi}\left(\frac{\sin\sigma t + \sin a\chi t}{a\chi+\sigma} - \frac{\sin\sigma t - \sin a\chi t}{\sigma - a\chi}\right) = \frac{\sigma\sin a\chi t - a\chi\sin\sigma t}{a\chi(\sigma^2 - a^2\chi^2)}.$$

Тогда решение начально-краевой задачи имеет вид:

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty} T_{nk}(t) v_{nk}(r,\varphi) = T_{01}(t) v_{01}(r,\varphi) =$$

$$= \underbrace{\frac{\sigma}{a\chi(\sigma^2 - a^2\chi^2)} J_0(\chi r)\sin a\chi t}_{\text{колебания с собственной частотой } a\chi} - \underbrace{\frac{a\chi}{a\chi(\sigma^2 - a^2\chi^2)} J_0(\chi r)\sin\sigma t}_{\text{колебания с вынужденной частотой } \sigma}\,.$$

Отсюда видно, что решение — стоячая волна.

Данный ответ не подходит для случая, когда вынужденная частота совпадает с собственной: $\sigma = a\chi$. В этом случае посчитаем интеграл отдельно:

$$T_{01}(t) = \frac{1}{2a\chi}\int_0^t \{\cos[a\chi t - (a\chi+\sigma)\tau] - \cos[a\chi t + (\sigma - a\chi)\tau]\}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\sigma}\int_0^t (\cos\sigma(t-2\tau) - \cos\sigma t)\,d\tau = \frac{1}{2\sigma}\left(-\frac{\sin\sigma(t-2\tau)}{2\sigma} - \tau\cos\sigma t\right)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} =$$

$$= \frac{1}{2\sigma}\left(\frac{\sin\sigma t}{\sigma} - t\cos\sigma t\right).$$

Тогда

$$u(r,\varphi,t) = T_{01}(t) v_{01}(r,\varphi) = \frac{J_0(\chi r)}{2\sigma}\left(\frac{\sin \sigma t}{\sigma} - t\cos \sigma t\right).$$

Видно, что в этом случае амплитуда колебаний неограниченно возрастает — резонанс.

ДЗ 15. БК с. 212 № 4, 7; с. 283–285 № 4, 8, 9, 11.