Семинар 19

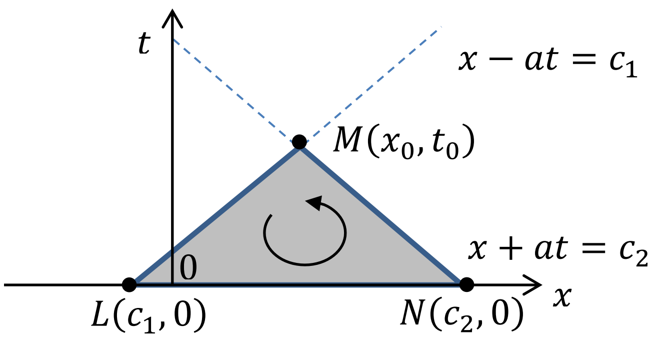
Уравнение колебаний на прямой

Рассмотрим начальную задачу для уравнения колебаний на прямой:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Заметим, что условие на бесконечности для выделения единственного решения ставить не надо, т.к. решение и так будет единственным (это будет показано далее).

В предположении, что классическое решение существует, получим его методом *интегрирования по фазовой плоскости* (можно его получить и другим способом, например, через преобразование Фурье, как для уравнения теплопроводности, см. семинар 17).



На фазовой плоскости Oxt возьмём произвольную точку $M(x_0, t_0)$, где $t_0 > 0$. Проведём через неё две прямые (характеристики уравнения колебаний): $x - at = c_1$ и $x + at = c_2$. Очевидно, что $c_1 = x_0 - at_0$ и $c_2 = x_0 + at_0$. Эти прямые пересекают ось Ox в точках $L(c_1, 0)$ и $N(c_2, 0)$, соответственно. Проинтегрируем уравнение колебаний по *фазовому треугольнику* MLN:

$$\iint\limits_{\triangle MLN} (u_{tt} - a^2 u_{xx})\, dx\, dt = \iint\limits_{\triangle MLN} f(x,t)\, dx\, dt.$$

Теперь преобразуем интегралы таким образом, чтобы выразить значение функции u в точке M через известные функции f, φ, ψ.

Для этого используем формулу Грина:

$$\oint\limits_C P\, dx + Q\, dt = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t}\right) dx\, dt,$$

где G — область на плоскости Oxt, ограниченная замкнутым контуром C, обходимом в положительном направлении.

Применим эту формулу к фазовому треугольнику MLN, положив $P = -u_t$ и $Q = -a^2 u_x$:

$$\iint\limits_{\triangle MLN} (u_{tt} - a^2 u_{xx})\, dx\, dt = \oint\limits_{MLN} (-u_t\, dx - a^2 u_x\, dt) =$$

$$= \int\limits_{ML} \left(-u_t \underbrace{dx}_{a\,dt} - a^2 u_x \underbrace{dt}_{\frac{dx}{a}}\right) + \int\limits_{LN} \left(-\underbrace{u_t}_{\psi(x)}\, dx - a^2 u_x \underbrace{dt}_{0}\right) + \int\limits_{NM} \left(-u_t \underbrace{dx}_{-a\,dt} - a^2 u_x \underbrace{dt}_{-\frac{dx}{a}}\right) =$$

$$= -a \int\limits_{ML} \underbrace{(u_t\, dt + u_x\, dx)}_{du} + a \int\limits_{NM} \underbrace{(u_t\, dt + u_x\, dx)}_{du} - \int\limits_{c_1}^{c_2} \psi(x)\, dx =$$

$$= -a[u(L) - u(M)] + a[u(M) - u(N)] - \int\limits_{c_1}^{c_2} \psi(x)\,dx =$$

$$= 2au(M) - a\,\underbrace{u(L)}_{\varphi(c_1)} - a\,\underbrace{u(N)}_{\varphi(c_2)} - \int\limits_{c_1}^{c_2} \psi(x)\,dx.$$

(Здесь мы учли, что на прямой ML выполняется равенство $dx = a\,dt$, а на прямой NM — равенство $dx = -a\,dt$.)

Теперь:

$$2au(M) - a\varphi(c_1) - a\varphi(c_2) - \int\limits_{c_1}^{c_2} \psi(x)\,dx = \iint\limits_{\triangle MLN} f(x,t)\,dx\,dt = \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{c_1+at}^{c_2-at} f(x,t)\,dx,$$

откуда

$$u(M) = u(x_0, t_0) =$$

$$= \frac{\varphi(x_0 - at_0) + \varphi(x_0 + at_0)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x_0-at_0}^{x_0+at_0} \psi(x)\,dx + \frac{1}{2a} \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{x_0-at_0+at}^{x_0+at_0-at} f(x,t)\,dx.$$

Если переобозначить x на ξ, t на τ и x_0 на x, y_0 на y, то

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a} \int\limits_0^{t} d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,.} \qquad (1)$$

Эта формула даёт классическое решение начальной задачи для уравнения теплопроводности на прямой. В частном случае $f \equiv 0$ она называется *формулой Даламбера*. Поскольку любое классическое решение начальной задачи для уравнения теплопроводности на прямой представляется этой формулой, оно единственно.

Уравнение колебаний на полупрямой

1. Условие Дирихле.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения колебаний на полупрямой $x > 0$ с однородным условием Дирихле:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad x > 0, \qquad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \qquad t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \geq 0, \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \qquad x \geq 0. \end{cases}$$

Так же, как и для уравнения теплопроводности на полупрямой (см. семинар 18), сделаем нечётное продолжение функций f, φ, ψ на всю прямую:

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), \qquad x \geq 0, \\ -f(-x,t), \qquad x < 0; \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), \qquad x \geq 0, \\ -\varphi(-x), \qquad x < 0; \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), \qquad x \geq 0, \\ -\psi(-x), \qquad x < 0. \end{cases}$$

Решение соответствующей задачи на всей прямой даётся формулой (1):

$$\tilde{u}(x,t)=\frac{\tilde{\varphi}(x-at)+\tilde{\varphi}(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\tilde{f}(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Отсюда видно, что функция $\tilde{u}(x,t)$ удовлетворяет однородному условию Дирихле при $x=0$. Стало быть, решение задачи на полупрямой $u(x,t)$ совпадает с решением задачи на прямой $\tilde{u}(x,t)$ при $x\geq 0$:

$u(x,t)=\tilde{u}(x,t)|_{x\geq 0}$.

Выразим его через исходные функции f,φ,ψ.

Заметим, что $\tilde{\varphi}(x+at)=\varphi(x+at)$, поскольку $x+at\geq 0$. Далее,

$$\tilde{\varphi}(x-at)=\left\{\begin{array}{ll}\varphi(x-at), & x-at\geq 0,\\ -\varphi(at-x), & x-at<0,\end{array}\right\}=\operatorname{sgn}(x-at)\,\varphi(|x-at|),$$

$$\int\limits_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}(\xi)\,d\xi=\left\{\begin{array}{ll}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi\,, & x-at\geq 0,\\ \underbrace{\displaystyle\int\limits_{x-at}^{at-x}\tilde{\psi}(\xi)\,d\xi}_{0}+\displaystyle\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi\,, & x-at<0,\end{array}\right\}=\int\limits_{|x-at|}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi.$$

Аналогично,

$$\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\tilde{f}(\xi,\tau)\,d\xi=\int\limits_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Окончательно получим:

$u(x,t)=$

$$=\frac{\varphi(x+at)+\operatorname{sgn}(x-at)\,\varphi(|x-at|)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{|x-at|}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Эта формула даёт решение начально-краевой задачи для уравнения колебаний на полупрямой $x>0$ с однородным условием Дирихле.

Замечание. Задача с неоднородным условием Дирихле $u|_{x=0}=\mu(t)$ сводится к задаче с однородным условием Дирихле $v|_{x=0}=0$ с помощью замены

$u(x,t)=v(x,t)+\mu(t)$.

2. Условие Неймана.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения колебаний на полупрямой $x>0$ с однородным условием Неймана:

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & x>0, \quad t>0,\\ u_x|_{x=0}=0, & t>0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x), & x\geq 0,\\ u_t|_{t=0}=\psi(x), & x\geq 0.\end{cases}$$

В этом случае с помощью чётного продолжения получим (дома получить):

$u(x,t) =$

$$= \frac{\varphi(x+at)+\varphi(|x-at|)}{2} + \frac{1}{2a}\left[\int\limits_0^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi - \operatorname{sgn}(x-at)\int\limits_0^{|x-at|} \psi(\xi)\,d\xi\right] +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\left[\int\limits_0^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi - \operatorname{sgn}\big(x-a(t-\tau)\big)\int\limits_0^{|x-a(t-\tau)|} f(\xi,\tau)\,d\xi\right].$$

Замечание. Задача с неоднородным условием Неймана $u_x|_{x=0} = \nu(t)$ сводится к задаче с однородным условием Неймана $v_x|_{x=0} = 0$ с помощью замены
$u(x,t) = v(x,t) + x\nu(t)$.

Метод распространяющихся волн (однородное уравнение колебаний)

Для однородного уравнения колебаний на прямой $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ можно получить его общее решение.
Сделав замену переменных $\xi = x - at$, $\eta = x + at$, мы приведём уравнение колебаний к каноническому виду:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x\frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \xi_t\frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_t\frac{\partial}{\partial \eta} = a\left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}\right),$$

откуда

$$a^2u_{xx} - u_{tt} = a^2\left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^2\right]u = 4a^2\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}u = 4a^2u_{\xi\eta}.$$

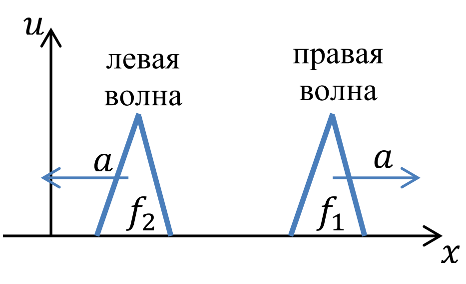
Из уравнения колебаний получим:
$u_{\xi\eta} = 0.$
Это и есть канонический вид уравнения колебаний.
Проинтегрируем полученное уравнение:
$u_\xi = \tilde f_1(\xi),$

$$u = \underbrace{\int \tilde f_1(\xi)\,d\xi}_{f_1(\xi)} + f_2(\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Возвращаясь к переменным x, t, получаем общее решение однородного уравнения колебаний на прямой в виде:

$$\boxed{u(x,t) = f_1(x-at) + f_2(x+at),} \tag{2}$$

где f_1 и f_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Видно, что общее решение представляет собой суперпозицию правой и левой бегущих волн, распространяющихся со скоростью a по прямой Ox.

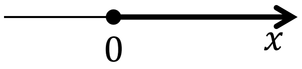


Таким образом, уравнение колебаний описывает распространение возмущений с конечной скоростью (со скоростью a), в отличие от уравнения теплопроводности, где скорость распространения бесконечна (см. парадокс бесконечной теплопроводности, семинар 17).
Значит, мы можем искать решение однородного уравнения колебаний на прямой в виде (2), а функции f_1 и f_2 определять из НУ. В результате придём к формуле Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi.$$

Аналогично можно поступать и при решении уравнения колебаний на полупрямой и на отрезке, но при этом необходимо учитывать отражение волн от границы области. Однако в задачах на полупрямой с однородными НУ отражения от границы не будет, потому что нет левой волны, поэтому решать их методом распространяющихся волн наиболее просто, что демонстрируют следующие примеры.

Пример 1. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний на полупрямой:



$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = \mu(t), & t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, & x \geq 0, \\ u_t|_{t=0} = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

В данном случае единственный источник колебаний расположен на левой границе области, поэтому будет только правая волна:

$u(x,t) = f_1(x-at)$.

Функцию f_1 определим из ГУ и НУ:

$$\begin{cases} u|_{x=0} = f_1(-at) = \mu(t), & t > 0, \\ u|_{t=0} = f_1(x) = 0, & x \geq 0, \\ u_t|_{t=0} = -af_1'(x) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

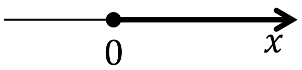
Отсюда имеем:

$$f_1(p) = \begin{cases} 0, & p \geq 0, \\ \mu\left(-\frac{p}{a}\right), & p < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$u(x,t) = f_1(x-at) = \begin{cases} 0, & x \geq at, \\ \mu\left(t - \frac{x}{a}\right), & x < at. \end{cases}$$

Пример 2. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний на полупрямой:



$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0, \\ u_x|_{x=0} = \nu(t), & t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, & x \geq 0, \\ u_t|_{t=0} = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

В этом случае решение также будет являться правой волной:

$u(x,t) = f_1(x-at)$.

Функцию f_1 определим из ГУ и НУ:

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} = f_1'(-at) = \nu(t), & t > 0, \\ u|_{t=0} = f_1(x) = 0, & x \geq 0, \\ u_t|_{t=0} = -af_1'(x) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $f_1(p) = 0$ при $p \geq 0$, а при $p < 0$:

$$f_1'(p) = \nu\left(-\frac{p}{a}\right).$$

Тогда, при $p < 0$:

$$f_1(p) = \int_0^p \nu\underbrace{\left(-\frac{q}{a}\right)}_{\tau} dq = -a\int_0^{-\frac{p}{a}} \nu(\tau)\,d\tau.$$

Окончательно имеем:

$$f_1(p) = \begin{cases} 0, & p \geq 0, \\ -a\displaystyle\int_0^{-\frac{p}{a}} \nu(\tau)\,d\tau\,, & p < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$u(x,t) = f_1(x-at) = \begin{cases} 0, & x \geq at, \\ -a\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}} \nu(\tau)\,d\tau\,, & x < at. \end{cases}$$

ДЗ19. БК с. 285–286 № 14–19.