Семинар 12

Теперь решим задачу (II) в цилиндре (см. пред. семинар).

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0, \qquad 0 \le r < a, \qquad 0 < z < h, \\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi, z), \\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=h} = 0. \end{cases} \tag{II}$$

Сначала найдём ЧР уравнения Лапласа $\Delta u_2 = 0$ в цилиндре вида

$u_2(r, \varphi, z) = v(r, \varphi) Z(z) \not\equiv 0$,

удовлетворяющие однородным ГУ $\left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=h} = 0$. Подставим $u_2(r, \varphi, z)$ в уравнение Лапласа и разделим переменные:

$$\frac{\Delta_{r\varphi}\, v(r, \varphi)}{v(r, \varphi)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda.$$

С учётом ГУ $\left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=h} = 0$, для функции $Z(z)$ получим задачу Ш.–Л. на отрезке:

$$\begin{cases} Z''(z) + \lambda Z(z) = 0, \qquad 0 < z < h, \\ Z'(0) = 0, \qquad Z'(h) = 0. \end{cases}$$

Её СЗ и СФ:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{h}\right)^2, \qquad Z_k(z) = \cos\frac{\pi k z}{h}, \qquad \|Z_k\|^2 = \frac{h}{2}(1 + \delta_{k0}), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Далее, для функции $v(r, \varphi)$ имеем ДУ:

$\Delta_{r\varphi}\, v(r, \varphi) - \lambda_k v(r, \varphi) = 0$.

Будем искать $v(r, \varphi)$ в виде

$v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0$.

Тогда, поскольку $\Delta_{r\varphi}\, v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}$, получим:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)\Phi(\varphi) + \frac{R(r)}{r^2}\Phi''(\varphi) - \lambda_k R(r)\Phi(\varphi) = 0.$$

Разделим переменные, умножив уравнение на $\frac{r^2}{R(r)\Phi(\varphi)}$:

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)}{R(r)} - \lambda_k r^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \mu.$$

Теперь для функции $\Phi(\varphi)$ получим задачу Ш.–Л.:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) \equiv \Phi(\varphi). \end{cases}$$

Её СЗ и СФ:

$$\mu_n = n^2, \qquad \Phi_0 = 1, \qquad \Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi\,, \qquad \Phi_{-n}(\varphi) = \sin n\varphi\,, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\left\|\Phi_{\pm n}\right\|^2 = \pi(1 + \delta_{n0}).$$

Теперь для функции $R(r)$ имеем ДУ:

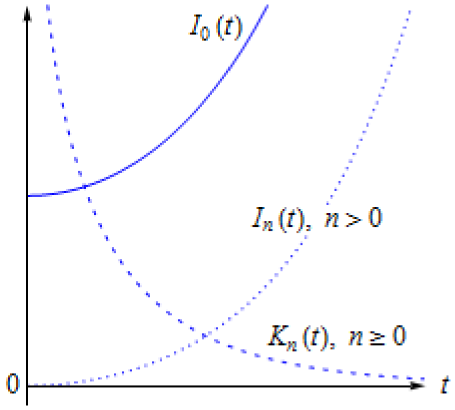
$$r^2 R''_{nk}(r) + rR'_{nk}(r) - (\lambda_k r^2 + n^2)R_{nk}(r) = 0, \qquad 0 \le r < a.$$

(Здесь без ограничения общности можно считать, что $n \ge 0$.)

ОР данного ДУ имеет вид:

$$R_{nk}(r) = \begin{cases} A + B\ln r \ \text{ при } \lambda_0 = 0, & \text{т.е. } k = 0, \quad \text{и } n = 0, \\ Ar^n + Br^{-n} \ \text{ при } \lambda_0 = 0, & \text{т.е. } k = 0, \quad \text{и } n > 0, \\ AI_n\left(\sqrt{\lambda_k}r\right) + BK_n\left(\sqrt{\lambda_k}r\right) \ \text{ при } \lambda_k > 0, & n \geq 0, \end{cases}$$

где I_n — функция Инфельда n-го порядка, K_n — функция Макдональда n-го порядка (цилиндрические функции *чисто мнимого аргумента*).



Функции Инфельда $I_n(t)$ ограничены при $t \to 0+0$, а при $t \to +\infty$ они $\sim \frac{e^t}{\sqrt{t}}$.

Функции Макдональда $K_n(t)$ неограничены при $t \to 0+0$, а при $t \to +\infty$ они $\sim \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$.

Тогда из условия ограниченности решения при $r = 0$ получим, что (с точностью до постоянного множителя):

$$R_{nk}(r) = \begin{cases} 1 \ \text{ при } \lambda_0 = 0, & \text{т.е. } k = 0, \quad \text{и } n = 0, \\ r^n \ \text{ при } \lambda_0 = 0, & \text{т.е. } k = 0, \quad \text{и } n > 0, \\ I_n\left(\sqrt{\lambda_k}r\right) \ \text{ при } \lambda_k > 0, & n \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, нами получены ЧР уравнения Лапласа в цилиндре

$u_2^{(\pm nk)}(r,\varphi,z) = R_{nk}(r)\Phi_{\pm n}(\varphi)Z_k(z)$,

удовлетворяющие однородным ГУ $\left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=h} = 0$.

Решение краевой задачи (II) ищем в виде ряда по *всем* найденным ЧР:

$$u_2(r,\varphi,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk}R_{|n|k}(r)\Phi_n(\varphi)Z_k(z).$$

Подставим в неоднородное ГУ $\left.\frac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi,z)$:

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=a} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk}R'_{|n|k}(a)\Phi_n(\varphi)Z_k(z) = f(\varphi,z).$$

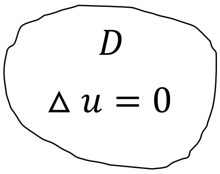
Остаётся разложить функцию $f(\varphi,z)$ в ряд Фурье по ортогональной системе функций $\Phi_n(\varphi)Z_k(z)$ и приравнять соответствующие коэффициенты:

$$f(\varphi,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{\infty} C_{nk}\Phi_n(\varphi)Z_k(z),$$

$$C_{nk} = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2\|Z_k\|^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz\, f(\varphi,z)\Phi_n(\varphi)Z_k(z).$$

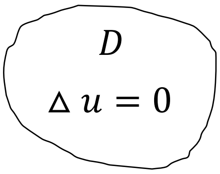
Коэффициенты A_{nk} выражаются через C_{nk}.

Примеры краевых задач, которые можно решить точно в произвольных областях



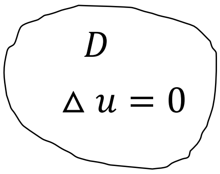
$u|_S = 0$

$\boxed{u \equiv 0}$



$\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$

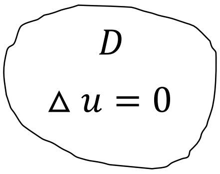
$\boxed{u \equiv \text{const}}$



$\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right|_S = 0,$

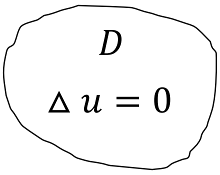
$h(P) \geq 0, \qquad h \not\equiv 0$

$\boxed{u \equiv 0}$



$u|_S = 1$

$\boxed{u \equiv 1}$



$u|_S = xy$

$\boxed{u \equiv xy}$

Фундаментальное решение уравнения Лапласа

О. Регулярная обобщённая функция $G(M, M_0)$ называется *фундаментальным решением* уравнения Лапласа в области D, если

$$\Delta_M\, G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \qquad M, M_0 \in D. \tag{1}$$

Индекс M в операторе Лапласа Δ_M означает, что все производные в операторе Лапласа берутся по координатам точки M, при фиксированной точке M_0.

Здесь $\delta(M, M_0)$ — *дельта-функция:* обобщённая функция, действующая на основные функции $\varphi(M)$ по правилу:

$$\big(\delta(M, M_0), \varphi(M)\big) = \int\limits_D \delta(M, M_0)\varphi(M)\, dV_M = \varphi(M_0), \qquad M_0 \in D.$$

В трёхмерном случае дельта-функцию можно представить в виде произведения трёх одномерных дельта-функций: если точки M, M_0 имеют координаты $M(x, y, z)$, $M(x_0, y_0, z_0)$, то

$\delta(M, M_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$.

В двумерном случае: $M(x, y)$, $M_0(x_0, y_0)$, и

$\delta(M, M_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$.

Таким образом, фундаментальное решение $G(M, M_0)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta_M\, G(M, M_0) = 0$ при $M \neq M_0$, а при $M = M_0$ имеет особенность.

Явный вид фундаментального решения уравнения Лапласа:

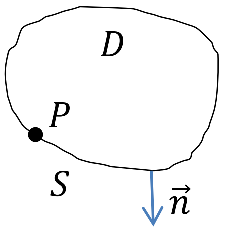
$$\boxed{G(M, M_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{R_{MM_0}} + v(M) & \text{в двумерном случае,} \\ \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{1}{R_{MM_0}} + v(M) & \text{в трёхмерном случае,} \end{cases}}$$

где $\Delta\, v(M) = 0,\ M \in D,$

R_{MM_0} — расстояние между точками M и M_0.

Мы видим, что фундаментальное решение $G(M, M_0)$ определено с точностью до произвольного решения $v(M)$ однородного уравнения Лапласа в области D.

Функция Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа



Рассмотрим ограниченную область D с границей S. Запишем *вторую формулу Грина* в области D для двух функций — $u(M)$ и $v(M)$:

$$\boxed{\int\limits_D (v \bigtriangleup u - u \bigtriangleup v)\, dV = \int\limits_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS.}$$

Положим теперь в этой формуле $v(M) = G(M, M_0)$, где $G(M, M_0)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, $M_0 \in D$ — фиксированная точка. Учитывая, что

$\bigtriangleup v(M) = \bigtriangleup_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0)$,

$$-\int\limits_D u \bigtriangleup v\, dV = \int\limits_D u(M)\delta(M, M_0)\, dV_M = u(M_0),$$

получим *третью формулу Грина:*

$$\boxed{u(M_0) = -\int\limits_D G(M, M_0) \bigtriangleup u(M)\, dV_M + \int\limits_S \left(G(P, M_0) \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial G(P, M_0)}{\partial n_P} \right) dS_P, M_0 \in D.}$$

(Здесь все интегралы берутся при фиксированной точке M_0.)

Пусть $u(M)$ — решение задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \bigtriangleup u(M) = F(M), & M \in D, \\ u|_S = f(P). \end{cases}$$

(Неоднородное уравнение Лапласа также называют *уравнением Пуассона*; в частности, может быть $F(M) \equiv 0$.)

Потребуем, чтобы $G|_{M \in S} = 0$ (заметим, что фундаментальное решение $G(M, M_0)$ определено с точностью до произвольного решения $v(M)$ уравнения Лапласа, что позволяет наложить на него дополнительное условие). Тогда по третьей формуле Грина:

$$\boxed{u(M_0) = -\int\limits_D G(M, M_0) F(M)\, dV_M - \int\limits_S f(P) \frac{\partial G(P, M_0)}{\partial n_P} dS_P, \qquad M_0 \in D.}$$

Таким образом, если известна функция $G(M, M_0)$ в области $\overline{D}$, то можно получить решение задачи Дирихле $u(M_0)$ в любой точке M_0 области D для любых входных данных $F(M)$, $f(P)$.

О. Функция $G(M, M_0)$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} \bigtriangleup_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), & M, M_0 \in D, \\ G|_{M \in S} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

называется *функцией Грина* внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D.

Физический смысл: функция Грина задачи Дирихле в трёхмерном случае представляет собой потенциал точечного заряда, расположенного в точке M_0 внутри заземлённой поверхности S. В двумерном случае это потенциал тонкой заряженной нити, расположенной внутри заземлённой цилиндрической поверхности.

Поскольку

$$G(M, M_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{R_{MM_0}} + v(M) \ \text{ в двумерном случае,} \\ \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{1}{R_{MM_0}} + v(M) \ \text{ в трёхмерном случае,} \end{cases}$$

то $\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_0}}$ $\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_0}}\right)$ — потенциал точечного заряда (заряженной нити), а $v(M)$ — потенциал наведённых на поверхности S зарядов.

ДЗ 12. БК с. 118 № 8, 9(в), 10(а), 11(в), с. 119 № 12(б), 13.