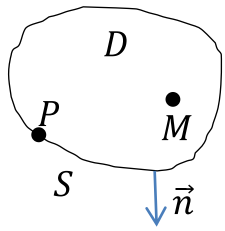
Семинар 16

Начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний в ограниченной области с неоднородными ГУ



Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с неоднородным ГУ:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f(M,t), \qquad M \in D, \qquad t > 0, \\ \left.\left(\alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\right|_S = \mu(P,t), \qquad P \in S, \qquad t \ge 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(M), \qquad M \in D. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде

$u(M,t) = v(M,t) + w(M,t)$,

где $w(M,t)$ — некоторая достаточно гладкая (дифференцируемая нужное число раз, чтобы её можно было подставить в уравнение теплопроводности, ГУ и НУ) функция, удовлетворяющая неоднородному ГУ:

$$\left.\left(\alpha \frac{\partial w}{\partial n} + \beta w\right)\right|_S = \mu(P,t).$$

Т.е. мы должны каким-то образом подобрать эту функцию $w(M,t)$. Будем считать, что она нам известна. Тогда подставим функцию $u = v + w$ в исходную начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} v_t + w_t = a^2 \Delta v + a^2 \Delta w + f(M,t), \qquad M \in D, \qquad t > 0, \\ \left.\left(\alpha \dfrac{\partial v}{\partial n} + \beta v\right)\right|_S + \left.\left(\alpha \dfrac{\partial w}{\partial n} + \beta w\right)\right|_S = \mu(P,t), \qquad P \in S, \qquad t \ge 0, \\ v|_{t=0} + w|_{t=0} = \varphi(M), \qquad M \in D. \end{cases}$$

Теперь для функции $v(M,t)$ получается начально-краевая задача с однородным ГУ, рассмотренная на прошлом семинаре:

$$\begin{cases} v_t = a^2 \Delta v + \tilde{f}(M,t), \qquad M \in D, \qquad t > 0, \\ \left.\left(\alpha \dfrac{\partial v}{\partial n} + \beta v\right)\right|_S = 0, \qquad P \in S, \qquad t \ge 0, \\ v|_{t=0} = \tilde{\varphi}(M), \qquad M \in D, \end{cases}$$

где $\tilde{f}(M,t) = f(M,t) - w_t + a^2 \Delta w$, $\tilde{\varphi}(M) = \varphi(M) - w|_{t=0}$ — известные функции.

Чаще всего удобно брать в качестве функции $w(M,t)$ решение соответствующей краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \qquad M \in D, \\ \left.\left(\alpha \dfrac{\partial w}{\partial n} + \beta w\right)\right|_S = \mu(P,t). \end{cases}$$

Внимание! У задачи Неймана может не быть решения! В этом случае нужно искать функцию $w(M,t)$ другим способом.

Аналогично можно решать начально-краевые задачи для уравнения колебаний с неоднородными ГУ.

Пример 1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в единичном круге:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ u|_{r=1} = t \sin 4\varphi, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде:

$$u(r, \varphi, t) = v(r, \varphi, t) + w(r, \varphi, t),$$

где $w(r, \varphi, t)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию:

$$w|_{r=1} = t \sin 4\varphi.$$

Как говорилось выше, удобно брать в качестве функции w решение соответствующей краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \qquad 0 \le r < 1, \\ w|_{r=1} = t \sin 4\varphi. \end{cases}$$

Решение уравнения Лапласа в круге имеет вид (см. семинар 4):

$$w(r, \varphi, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Подстановка в ГУ даёт:

$$w|_{r=1} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = t \sin 4\varphi,$$

откуда $B_4 = t$, а все остальные коэффициенты A_n и B_n равны нулю.

Таким образом,

$$w(r, \varphi, t) = t r^4 \sin 4\varphi.$$

Значит, функцию $u(r, \varphi, t)$ мы будем искать в виде:

$$u(r, \varphi, t) = v(r, \varphi, t) + t r^4 \sin 4\varphi.$$

Подставив это выражение в исходную начально-краевую задачу, получим:

$$\begin{cases} v_t + r^4 \sin 4\varphi = \Delta v, \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ v|_{r=1} + t \sin 4\varphi = t \sin 4\varphi, \\ v|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} v_t = \Delta v - r^4 \sin 4\varphi, \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ v|_{r=1} = 0, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Получилась задача с однородным ГУ, решение которой надо искать в виде разложения по СФ соответствующей задачи Ш.–Л. Дома доделать!

Пример 2. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0, \\ u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=l} = l, \\ u|_{t=0} = x. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

где $w(x, t)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условиям:

$$w_x|_{x=0} = 1, \quad w|_{x=l} = l.$$

Проще всего найти w в виде линейной по x функции (для которой $w_{xx} = 0$):

$w = Ax + B,$
а коэффициенты A, B определить из ГУ:
$w_x|_{x=0} = A = 1, \quad w|_{x=l} = Al + B = l,$
откуда $A = 1$, $B = 0$, и
$w(x,t) = x.$
Итак, функцию $u(x,t)$ мы ищем в виде:
$u(x,t) = v(x,t) + x.$
После подстановки в исходную задачу получим:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v_x|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

А эта задача однородна и имеет тривиальное решение: $v \equiv 0$. Таким образом, решение исходной начально-краевой задачи:
$u(x,t) = x.$

Пример 3. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний в единичном круге:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \triangle u, & 0 \le r < 1, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = 1, \\ u|_{t=0} = \dfrac{r^2}{2}, \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде:
$u(r,\varphi,t) = v(r,\varphi,t) + w(r,\varphi,t),$
где $w(r,\varphi,t)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=1} = 1.$$

Как говорилось выше, удобно брать в качестве функции w решение соответствующей краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \triangle w = 0, & 0 \le r < 1, \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=1} = 1. \end{cases}$$

Это задача Неймана, причём условие её разрешимости не выполняется:

$$\int\limits_S \frac{\partial w}{\partial n} dl = \int\limits_0^{2\pi} \left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=1} d\varphi = 2\pi \ne 0.$$

Значит, функцию w нельзя найти как решение краевой задачи для уравнения Лапласа.
Попробуем её угадать. Итак, надо подобрать функцию $w(r,\varphi,t)$, удовлетворяющую условию

$$\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=1} = 1.$$

Поскольку в правой части ГУ не фигурирует ни φ, ни t, то и функцию w можно искать не зависящую от φ и t. Например, функция $w = r$ будет удовлетворять ГУ. Тогда решение исходной начально-краевой задачи будем искать в виде:
$u(r,\varphi,t) = v(r,\varphi,t) + r.$
Подставив её в условия задачи, получим:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \vartriangle v + a^2 \vartriangle r, \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \\ v|_{t=0} + r = \dfrac{r^2}{2}, \\ v_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Вычислим $\vartriangle r$:

$$\vartriangle r = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dr}{dr}\right) = \frac{1}{r}.$$

Таким образом, для функции v имеем задачу:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \vartriangle v + \dfrac{a^2}{r}, \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \\ v|_{t=0} = \dfrac{r^2}{2} - r, \\ v_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Из попытки найти классическое решение такой краевой задачи ничего хорошего не выйдет, поскольку функция $\frac{a^2}{r}$, стоящая в правой части, разрывна, неограничена в круге. Так получилось потому, что мы выбрали функцию $w = r$, которая не является достаточно гладкой (дважды непрерывно дифферецируемой в круге), поскольку её лапласиан $\vartriangle w = \frac{1}{r}$ неограничен при $r \to 0$!

Т.е. $w = r$ *не подходит.*

Попробуем подобрать более гладкую функцию, удовлетворяющую условию

$$\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=1} = 1.$$

Возьмём $w = \frac{r^2}{2}$ (тем более, что и в начальном условии есть такая функция). Тогда

$$\vartriangle w = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{2}\right)\right) = 2$$

— непрерывен в круге. Теперь ищем функцию $u(r,\varphi,t)$ в виде:

$$u(r,\varphi,t) = v(r,\varphi,t) + \frac{r^2}{2}.$$

Тогда для функции $v(r,\varphi,t)$ получаем задачу:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \vartriangle v + 2a^2, \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \\ v|_{t=0} = 0, \\ v_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

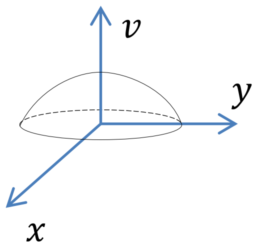
Классическое решение такой задачи существует и может быть найдено в виде разложения по СФ задачи Ш.–Л. в круге с условием Неймана (дома найти).

Но можно и угадать решение сразу. Заметим, что в правой части НУ и в неоднородности $2a^2$ в ДУ не фигурируют переменные r, φ, а ГУ имеет вид $\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=1} = 0$, а всё это наводит на мысль, что и решение можно искать не зависящим от r, φ. Если предположить, что $v = v(t)$, то ГУ выполнено автоматически, и остаются условия:

$$\begin{cases} v''(t) = 2a^2, \\ v(0) = 0, \\ v'(0) = 0. \end{cases}$$

Проинтегрировав ДУ с учётом НУ, получим:

$$v = a^2 t^2.$$



Также мы могли бы угадать решение исходя из его физического смысла. Уравнение колебаний в круге описывает поперечные колебания круглой упругой мембраны. Однородное условие Неймана означает, что края не закреплены. Однородные НУ означают, что в начальный момент мембрана покоится в положении равновесия. Функция $2a^2$ в правой части означает, что к мембране приложена постоянная внешняя сила, направленная перпендикулярно плоскости мембраны и распределённая равномерно по ней с плотностью $2a^2$ на единицу массы. Тогда очевидно, что мембрана будет двигаться равноускоренно, не деформируясь, т.е. закон движения $v = a^2 t^2$.

Таким образом, решение исходной начально-краевой задачи имеет вид:

$$u(r, \varphi, t) = a^2 t^2 + \frac{r^2}{2}.$$

ДЗ 16. БК с. 212–213 № 3, 6, 8, 11; с. 284 № 7, 10.