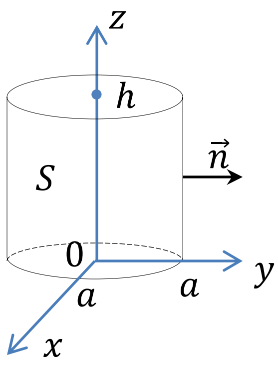
Семинар 11

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах

$$\Delta u = \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}}_{\Delta_{r\varphi} u} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Пример 1 (в цилиндре).



$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ 0 \le r < a, \ 0 < z < h, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi, z), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = f_1(r,\varphi), \ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} = f_2(r,\varphi). \end{cases} \qquad (0)$$

Это внутренняя задача Неймана для уравнения Лапласа. Будем считать, что условие её разрешимости

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$$

(интеграл берётся по *полной* поверхности цилиндра) выполнено.
Ищем решение задачи (0) в виде:
$u(r,\varphi,z) = u_1(r,\varphi,z) + u_2(r,\varphi,z),$
где

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, \qquad 0 \le r < a, \qquad 0 < z < h, \\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=0} = f_1(r,\varphi), \qquad \left.\frac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=h} = f_2(r,\varphi). \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0, \qquad 0 \le r < a, \qquad 0 < z < h, \\ \left.\frac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi, z), \\ \left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=h} = 0. \end{cases} \qquad (\mathrm{II})$$

Пусть каждая из этих двух задач также разрешима (иначе данный способ решения неприменим):

$$\iint\limits_S \frac{\partial u_1}{\partial n} dS = 0, \qquad \iint\limits_S \frac{\partial u_2}{\partial n} dS = 0.$$

Рассмотрим задачу (I).
Запишем уравнение Лапласа для функции $u_1(r,\varphi,z)$ в виде:

$$\Delta u_1 = \Delta_{r\varphi} u_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0.$$

Сначала найдём ЧР уравнения Лапласа в цилиндре вида
$u_1(r,\varphi,z) = v(r,\varphi)Z(z) \not\equiv 0,$
удовлетворяющие однородным ГУ $\left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=a} = 0.$
Подставим $u_1(r,\varphi,z)$ в уравнение Лапласа:

$\Delta_{r\varphi}\, v(r,\varphi)\cdot Z(z) + v(r,\varphi)Z''(z) = 0.$

Разделим переменные, поделив уравнение на $v(r,\varphi)Z(z)$:

$$\frac{\Delta_{r\varphi}\, v(r,\varphi)}{v(r,\varphi)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda.$$

С учётом ГУ $\left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$ для функции $v(r,\varphi)$ получим задачу Ш.–Л. в круге:

$$\begin{cases} \Delta_{r\varphi}\, v(r,\varphi) + \lambda v(r,\varphi) = 0, & 0 \le r < a, \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

Её СЗ и СФ (см. семинар 6):

$\lambda_0^{(0)} = 0;$

$\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $J_n'\big(\sqrt{\lambda}a\big) = 0$, $k = 1, 2, \ldots;$

$v_{00}(r,\varphi) = 1,$

$$v_{\pm nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_{\pm n}(\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\,r\right)\Phi_{\pm n}(\varphi),$$

$\Phi_0(\varphi) = 1, \qquad \Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi, \qquad \Phi_{-n}(\varphi) = \sin n\varphi, \qquad n = 1, 2, \ldots;$

$$\left\|v_{\pm nk}\right\|^2 = \|R_{nk}\|^2\left\|\Phi_{\pm n}\right\|^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)J_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\,a\right)\pi(1+\delta_{n0}), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$\|v_{00}\|^2 = \pi a^2.$

Теперь для функции $Z(z)$ имеем ДУ:

$Z_{nk}''(z) - \lambda_k^{(n)} Z_{nk}(z) = 0.$

Учитывая вид ГУ по z (условия Неймана при $z = 0$ и $z = h$), удобно взять ОР ДУ в следующем виде:

$$Z_{nk}(z) = \begin{cases} A_{00} + B_{00}z \ \text{ при } \lambda_0^{(0)} = 0, & \text{т.е. } n = k = 0, \\ A_{nk}\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}z + B_{nk}\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}(z-h) \ \text{ при } \lambda_k^{(n)} > 0, & \text{т.е. } k > 0. \end{cases}$$

Таким образом, мы получили ЧР уравнения Лапласа в цилиндре

$u_1^{(\pm nk)}(r,\varphi,z) = v_{\pm nk}(r,\varphi)Z_{nk}(z),$

удовлетворяющие ГУ $\left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=a} = 0.$

Теперь будем искать решение краевой задачи (I) в виде суммы всех найденных ЧР:

$$u_1(r,\varphi,z) = \sum_{n,k} v_{\pm nk}(r,\varphi)Z_{nk}(z) =$$

$$= A_{00} + B_{00}z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_{nk}\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}z + B_{nk}\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}(z-h)\right]v_{nk}(r,\varphi).$$

Подставим в неоднородные ГУ $\left.\frac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=0} = f_1(r,\varphi)$, $\left.\frac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=h} = f_2(r,\varphi)$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = B_{00} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}\left[A_{nk}\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}z + B_{nk}\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}(z-h)\right]v_{nk}(r,\varphi),$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=0} = B_{00} - \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}B_{nk}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}h\right)v_{nk}(r,\varphi) = f_1(r,\varphi), & (1)\\ \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=h} = B_{00} + \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}A_{nk}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}h\right)v_{nk}(r,\varphi) = f_2(r,\varphi). & (2)\end{cases}$$

Теперь надо разложить функции $f_1(r,\varphi)$, $f_2(r,\varphi)$ в ряды Фурье по СФ задачи Ш.–Л. в круге $v_{nk}(r,\varphi)$ и приравнять соответствующие коэффициенты. Коэффициент A_{00} остаётся произвольным.

Рассмотрим конкретные примеры.

Пусть $f_2(r,\varphi) = 0$. Тогда из уравнения (2) получим

$B_{00} = 0, \qquad A_{nk} = 0, \qquad n = 0, \pm 1, \dots, \qquad k = 1, 2, \dots$

Для функции $f_1(r,\varphi)$ рассмотрим два случая.

а) $f_1(r,\varphi) = J_2(\chi r)\cos 2\varphi$,

где $\chi = \sqrt{\lambda_1^{(2)}}$, а $\lambda_1^{(2)}$ — первый положительный корень уравнения $J_2'\left(\sqrt{\lambda}a\right) = 0$.

Разложим функцию $f_1(r,\varphi)$ в ряд Фурье по $v_{nk}(r,\varphi)$:

$$f_1(r,\varphi) = J_2(\chi r)\cos 2\varphi = J_2\left(\sqrt{\lambda_1^{(2)}}r\right)\cos 2\varphi = J_2\left(\sqrt{\lambda_1^{(2)}}r\right)\Phi_2(\varphi) = v_{21}(r,\varphi).$$

Т.е. разложение содержит только один член: с $n = 2$, $k = 1$.

Тогда из уравнения (1)

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=0} = \underbrace{B_{00}}_{=0} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}B_{nk}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}h\right)v_{nk}(r,\varphi) = v_{21}(r,\varphi)$$

получим, что

$$-\sqrt{\lambda_1^{(2)}}B_{21}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_1^{(2)}}h\right) = 1,$$

т.е.

$$B_{21} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^{(2)}}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_1^{(2)}}h\right)} = -\frac{1}{\chi\,\mathrm{sh}(\chi h)},$$

а все остальные коэффициенты $B_{nk} = 0$.

В этом случае решение краевой задачи (I) имеет вид:

$$u_1(r,\varphi,z) = A_{00} + B_{21}v_{21}(r,\varphi)\,\mathrm{ch}\left[\sqrt{\lambda_1^{(2)}}(z-h)\right] =$$

$$= -\frac{J_2(\chi r) cos\ 2\varphi\,\mathrm{ch}[\chi(z-h)]}{\chi\,\mathrm{sh}(\chi h)} + \mathrm{const}.$$

б) $f_1(r,\varphi) = r\sin\varphi$.

Надо разложить функцию в ряд Фурье по $v_{nk}(r,\varphi)$:

$$f_1(r,\varphi) = r\sin\varphi = C_{00}v_{00}(r,\varphi) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}C_{nk}\,v_{nk}(r,\varphi) =$$

$$= C_{00} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}C_{nk}\,J_{|n|}\left(\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}r\right)\Phi_n(\varphi).$$

Поскольку $r\sin\varphi = r\Phi_{-1}(\varphi)$, разложение будет содержать только члены с $n = -1$:

$$f_1(r,\varphi) = r\sin\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-1k} v_{-1k}(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-1k} J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)\sin\varphi,$$

т.е.

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-1k} J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right).$$

Таким образом, осталось разложить функцию r в ряд Фурье по функциям $J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right) = R_{1k}(r)$, образующим ортогональную (с весом r) систему на отрезке $[0,a]$:

$$C_{-1k} = \frac{1}{\left\|J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)\right\|^2}\int_0^a r J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)\cdot r\,dr,$$

где

$$\left\|J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)\right\|^2 = \int_0^a r J_1^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)dr = \|R_{1k}\|^2 = \frac{a^2}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda_k^{(1)}a^2}\right)J_1^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a\right).$$

Для вычисления оставшегося интеграла удобно использовать формулу:

$$\boxed{\frac{d}{dt}[t^\nu Z_\nu(t)] = t^\nu Z_{\nu-1}(t),}$$

где в качестве $Z_\nu(t)$ может стоять функция Бесселя $J_\nu(t)$ или функция на $N_\nu(t)$.

(В частности, если положить $\nu = 0$, получим: $J_0'(t) = J_{-1}(t) = -J_1(t)$, поскольку $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$ для целых n.)

Тогда, сделав замену $t = \sqrt{\lambda_k^{(1)}}r$, получим:

$$\int_0^a r^2 J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)dr = \frac{1}{\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}\right)^3}\int_0^{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a} t^2 J_1(t)\,dt = \frac{1}{\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}\right)^3}\int_0^{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a} \frac{d}{dt}[t^2 J_2(t)]\,dt =$$

$$= \left.\frac{t^2 J_2(t)}{\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}\right)^3}\right|_0^{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a} = \frac{a^2}{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}}J_2\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a\right).$$

Таким образом,

$$C_{-1k} = \frac{1}{\left\|J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)\right\|^2}\int_0^a r^2 J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)dr = \frac{2J_2\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a\right)}{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}\left(1-\frac{1}{\lambda_k^{(1)}a^2}\right)J_1^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a\right)},$$

и

$$f_1(r,\varphi) = r\sin\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-1k} J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)\sin\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-1k} v_{-1k}(r,\varphi).$$

Подставим данное разложение в уравнение (1):

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=0} = \underbrace{B_{00}}_{=0} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}} B_{nk}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_k^{(|n|)}}h\right) v_{nk}(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-1k} v_{-1k}(r,\varphi).$$

Отсюда все $B_{nk} = 0$, кроме B_{-1k}, и

$$-\sqrt{\lambda_k^{(1)}} B_{-1k}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}h\right) = C_{-1k},$$

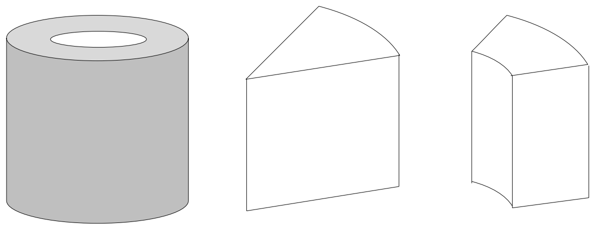
$$B_{-1k} = -\frac{C_{-1k}}{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}h\right)} = -\frac{2J_2\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a\right)}{\left(\lambda_k^{(1)} - \frac{1}{a^2}\right)\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}h\right) J_1^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a\right)}.$$

Тогда решение краевой задачи (I) в этом случае имеет вид:

$$u_1(r,\varphi,z) = A_{00} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{-1k}\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_k^{(1)}}(z-h)\, v_{-1k}(r,\varphi) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2J_2\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a\right)}{\left(\lambda_k^{(1)} - \frac{1}{a^2}\right)\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}h\right) J_1^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}a\right)}\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_k^{(1)}}(z-h)\, J_1\left(\sqrt{\lambda_k^{(1)}}r\right)\sin\varphi +$$

$$+\ \mathrm{const}.$$



Аналогично решаются краевые задачи, подобные задаче (I), в частях цилиндра: цилиндрическом слое (тороиде прямоугольного сечения), секторе цилиндра, секторе тороида прямоугольного сечения.

Задачу (II) мы рассмотрим на следующем семинаре.

ДЗ 11.

Решить краевую задачу в цилиндрическом секторе:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \qquad 0 \le r < 1, \qquad 0 < \varphi < \pi, \qquad 0 < z < \pi, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\pi} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \\ u|_{z=0} = J_{\frac{1}{2}}(\chi r)\cos\dfrac{\varphi}{2}, \qquad u|_{z=\pi} = 0, \end{cases}$$

где χ — первый положительный корень уравнения $J_{\frac{1}{2}}'(\chi) = 0$.

БК с. 118 № 9(б), 10 (г), 11 (а), с. 119 № 12(а,в).