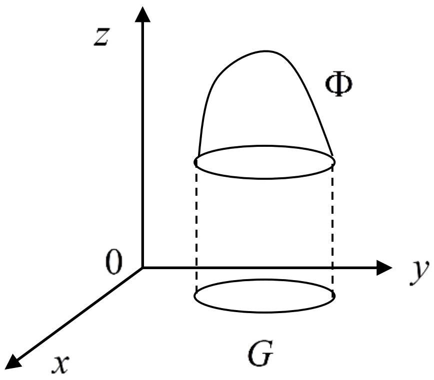
Семинар 1

Поверхностные интегралы 1 рода (повторение)

Поверхностный интеграл 1-го рода:

$\iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)\,dS$, где Φ — поверхность, dS — элемент площади поверхности (площадь бесконечно малого участка поверхности).

Для вычисления поверхностных интегралов их сводят к двойным интегралам.



Поверхность Φ может быть задана различными способами:

1) явно: $z = z(x,y)$, где $(x,y) \in G$. Поверхность Φ однозначно проецируется на область G в плоскости Oxy.

Тогда

$dS = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}\,dxdy$ — площадь участка поверхности, соответствующего бесконечно малым приращениям координат dx, dy.

Значит,

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{G} f\big(x,y,z(x,y)\big)\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}\,dx\,dy.$$

Поверхностный интеграл сведён к двойному интегралу по области G.

2) параметрически: $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases}$ где $(u,v) \in g$, причём отображение $g \to \Phi$ взаимно однозначно. В векторном виде: $\vec{r} = \{x,y,z\} = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\} = \vec{r}(u,v)$ — радиус-вектор точки на поверхности Φ.

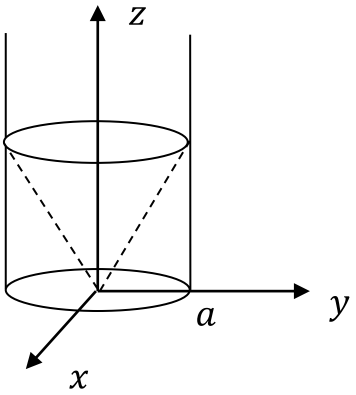
Тогда

$dS = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,du\,dv = \sqrt{|\vec{r}_u|^2 \cdot |\vec{r}_v|^2 - (\vec{r}_u, \vec{r}_v)^2}\,du\,dv$ — площадь участка поверхности, соответствующего бесконечно малым приращениям параметров du, dv.

Значит,

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{g} f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\sqrt{|\vec{r}_u|^2 \cdot |\vec{r}_v|^2 - (\vec{r}_u, \vec{r}_v)^2}\,du\,dv.$$

Поверхностный интеграл сведён к двойному интегралу по области g.



Пример 1. Вычислить $I = \iint\limits_{\Phi} (xy + yz + zx)\,dS$, где Φ — часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанная цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$.

I способ. Поверхность Φ задана явно уравнением $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и однозначно проецируется на круг G: $x^2 + y^2 \le a^2$. Тогда

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$dS = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}\,dx\,dy = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1}\,dx\,dy = \sqrt{2}\,dx\,dy,$$

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \left(xy + y\sqrt{x^2 + y^2} + x\sqrt{x^2 + y^2}\right)\sqrt{2}\,dx\,dy.$$

Для вычисления этого двойного интеграла можно перейти к полярным координатам:
$x = r\cos\varphi$, $\quad y = r\sin\varphi$, $\quad 0 \le r \le a$, $\quad 0 \le \varphi < 2\pi$,
тогда

$$I = \sqrt{2}\int_0^a r^3\,dr\int_0^{2\pi} (\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi)\,d\varphi = 0.$$

II способ. Перейдём к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Уравнение конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в цилиндрических координатах принимает вид $z = r$. Значит, в качестве параметров можно взять r, φ. Параметрические уравнения поверхности Φ:

$$\begin{cases} x = x(r,\varphi) = r\cos\varphi, \\ y = y(r,\varphi) = r\sin\varphi, \\ z = z(r,\varphi) = r. \end{cases}$$

Какова область изменения параметров r, φ? Уравнение цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$ в цилиндрических координатах принимает вид $r = a$, поэтому на поверхности Φ выполняется $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi < 2\pi$, т. е. область g изменения параметров r, φ представляет собой прямоугольник.

Записав параметрические уравнения поверхности Φ в векторном виде:
$\vec{r} = \{x, y, z\} = \{r\cos\varphi, r\sin\varphi, r\}$,
получим

$$\vec{r}_r = \{\cos\varphi, \sin\varphi, 1\}, \qquad \vec{r}_\varphi = \{-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0\},$$

$$|\vec{r}_r|^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 1 = 2, \qquad \left|\vec{r}_\varphi\right|^2 = r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi = r^2, \qquad \left(\vec{r}_r, \vec{r}_\varphi\right) = 0,$$

$$dS = \sqrt{|\vec{r}_r|^2 \cdot \left|\vec{r}_\varphi\right|^2 - \left(\vec{r}_r, \vec{r}_\varphi\right)^2}\,dr\,d\varphi = \sqrt{2r^2}\,dr\,d\varphi = \sqrt{2}r\,dr\,d\varphi.$$

Тогда

$$I = \iint_g (r^2 \cos\varphi \sin\varphi + r^2 \sin\varphi + r^2 \cos\varphi)\sqrt{2} r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^a r^3\, dr \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin 2\varphi}{2} + \sin\varphi + \cos\varphi\right) d\varphi = 0.$$

Ответ: $I = 0$.

Поверхностные интегралы 2-го рода (повторение)

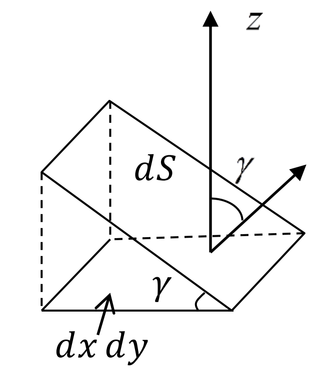
Рассмотрим двустороннюю поверхность Φ, на которой выбрана одна из двух сторон и задано непрерывное поле единичных нормалей $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, где α, β, γ — углы между нормалью $\vec{n}$ и осями Ox, Oy, Oz. Тогда общий поверхностный интеграл 2-го рода:

$$\iint_\Phi P(x,y,z)\, dy\, dz + Q(x,y,z)\, dx\, dz + R(x,y,z)\, dx\, dy = \iint_\Phi (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS =$$

$$= \iint_\Phi \left(\vec{A}, \vec{n}\right) dS$$

— *поток* вектора $\vec{A} = \{P, Q, R\}$ через поверхность Φ в направлении нормали $\vec{n}$. Таким образом, если выбрано определённое поле единичных нормалей $\vec{n}$, т. е. выбрана определённая сторона поверхности, то поверхностный интеграл 2-го рода сводится к поверхностному интегралу 1-го рода вида $\iint_\Phi f\, dS$, где $f = \left(\vec{A}, \vec{n}\right)$. Значит, вычислять его можно как поверхностный интеграл 1-го рода.

Также поверхностный интеграл 2-го рода можно свести непосредственно к двойным интегралам следующим образом. Для примера, рассмотрим слагаемое $\iint_\Phi R\cos\gamma\, dS$. Из рисунка видно, что



$$dS \cos\gamma = \begin{cases} dx\, dy, & \text{если } \gamma \text{ — острый}, \\ -\, dx\, dy, & \text{если } \gamma \text{ — тупой}. \end{cases}$$

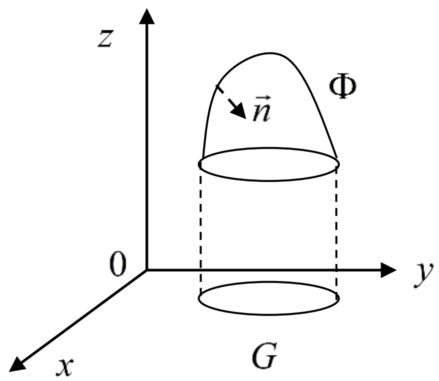
(γ — это угол между нормалью $\vec{n}$ и положительным направлением оси Oz.)

Если поверхность Φ однозначно проецируется на ласть G в плоскости Oxy, т. е. имеет уравнение $z = z(x, y)$, то $\vec{N} = \{z_x, z_y, -1\}$ — нижняя нормаль (составляет тупой угол с осью Oz), и

$$\iint_\Phi R(x,y,z)\cos\gamma\, dS = -\iint_G R(x, y, z(x,y))\, dx\, dy$$ — интеграл по нижней стороне поверхности Φ.

Для верхней стороны поверхности: нормаль $\vec{N} = \{-z_x, -z_y, 1\}$ составляет острый угол с осью Oz, и

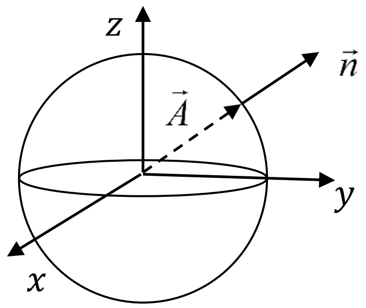
$$\iint_\Phi R(x,y,z)\cos\gamma\, dS = \iint_G R(x, y, z(x,y))\, dx\, dy$$ — интеграл по верхней стороне поверхности Φ.



Таким образом, формула перехода от интеграла по поверхности Ф к двойному интегралу по плоской области G, на которую однозначно проецируется Ф, имеет вид:

$$\boxed{\iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)\,dx\,dy = \begin{cases} \iint\limits_{G} R(x,y,z(x,y))\,dx\,dy & \text{по верхней стороне Ф,} \\ -\iint\limits_{G} R\big(x,y,z(x,y)\big)\,dx\,dy & \text{по нижней стороне Ф.} \end{cases}}$$

Аналогично для остальных слагаемых в поверхностном интеграле 2-го рода. Если поверхность проецируется на координатные плоскости неоднозначно, то её нужно разбить на части, проецирующиеся однозначно.



Пример 2 (МАВЗ гл. XIV № 16а). Вычислить $I = \iint\limits_{\Phi} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$ по внешней стороне сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

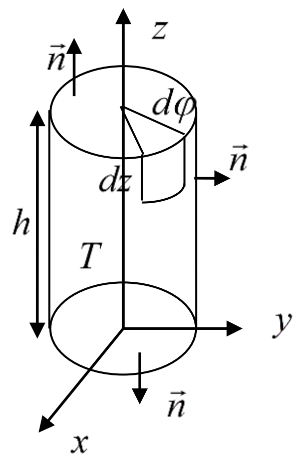
Запишем интеграл в виде:

$I = \iint\limits_{\Phi} \left(\vec{A},\vec{n}\right) dS$, где $\vec{A} = \{x, y, z\}$, $\vec{n}$ — единичная внешняя нормаль.

Заметим, что $\vec{A} = \vec{r}$ — радиус-вектор, который направлен так же, как и внешняя нормаль, поэтому $\left(\vec{A},\vec{n}\right) = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cdot \cos 0 = \left|\vec{A}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a$ на сфере Φ, и

$$I = \iint\limits_{\Phi} a\,dS = a \iint\limits_{\Phi} dS = a \cdot 4\pi a^2 = 4\pi a^3.$$

Ответ: $I = 4\pi a^3$.



Пример 3 (МАВЗ гл. XIV № 17г). Вычислить поток вектора $\vec{A} = \{yz, xz, xy\}$ через внешнюю сторону границы области

$T:\ x^2 + y^2 \le a^2,\ 0 \le z \le h$.

Требуется вычислить

$$\Pi = \iint\limits_{\Phi} \left(\vec{A},\vec{n}\right) dS = \underbrace{\iint\limits_{\Phi_{бок}} \left(\vec{A},\vec{n}\right) dS}_{\Pi_{бок}} + \underbrace{\iint\limits_{\Phi_{низ}} \left(\vec{A},\vec{n}\right) dS}_{\Pi_{низ}} + \underbrace{\iint\limits_{\Phi_{верх}} \left(\vec{A},\vec{n}\right) dS}_{\Pi_{верх}}.$$

1) $\Phi_{бок}$: $x^2 + y^2 = a^2$, $\vec{N} = \{x, y, 0\}$, $\left|\vec{N}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = a$,

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|} = \left\{\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, 0\right\},$$

$$\Pi_{бок} = \iint\limits_{\Phi_{бок}} \left(\frac{xyz}{a} + \frac{xyz}{a}\right) dS = \frac{2}{a} \iint\limits_{\Phi_{бок}} xyz\,dS.$$

Перейдём к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

где $r = a$; φ, z — параметры, они изменяются в прямоугольнике $g:\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le h$.

Элемент площади dS боковой поверхности цилиндра можно получить по общей формуле $dS = \sqrt{|\vec{r}_z|^2 \cdot |\vec{r}_\varphi|^2 - (\vec{r}_z, \vec{r}_\varphi)^2}\, dz\, d\varphi$, где $\vec{r}(\varphi, z) = \{a\cos\varphi\,, a\sin\varphi\,, z\}$ (сделайте это!), или из геометрических соображений. Участок поверхности, соответствующий приращениям параметров $d\varphi,\ dz$, в первом приближении представляет собой прямоугольник со сторонами $a\,d\varphi$ и dz, поэтому $dS = a\,d\varphi dz$. Таким образом,

$$\Pi_{бок} = \frac{2}{a}\iint_g a^2 \cos\varphi \sin\varphi z \cdot a\,d\varphi dz = a^2\int_0^h z\,dz\int_0^{2\pi}\sin 2\varphi\, d\varphi = a^2\int_0^h z\,dz\left(\frac{-\cos 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

2) $\Phi_{верх}$: $\vec{n} = \{0,0,1\}$, $\Pi_{верх} = \iint\limits_{\Phi_{верх}} xy\,dS = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} xy\,dx\,dy$, т. к. $dS\cos\gamma = dx\,dy$ и $\gamma = 0$.

Перейдём к полярным координатам:

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,, \qquad 0 \le r \le a, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi, \qquad \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r,$$

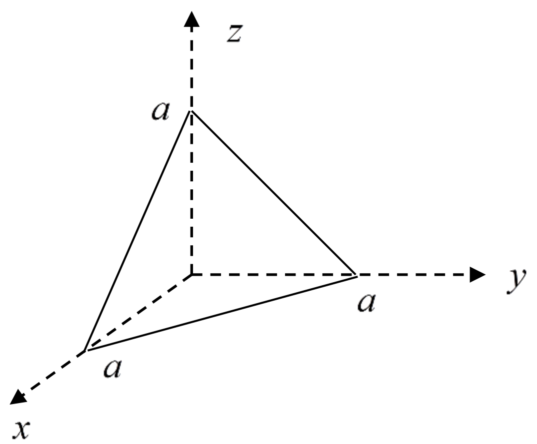
тогда

$$\Pi_{\text{верх}} = \int_0^a r^3\,dr\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^a r^3\,dr\int_0^{2\pi}\sin 2\varphi\,d\varphi = 0.$$

3) Аналогично $\Pi_{ниж} = 0$.

$\Pi = 0 + 0 + 0 = 0$.

Ответ: $\Pi = 0$.



Пример 4 (МАВЗ гл. XIV № 17ж). Вычислить поток вектора $\vec{A} = \{y, z, x\}$ через внешнюю сторону пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = a$ $(a > 0)$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

1) задняя сторона $x = 0$: $\vec{n} = \{-1,0,0\}$, $(\vec{A}, \vec{n}) = -y$,

$$\Pi_1 = \iint\limits_{\Phi_1}(\vec{A},\vec{n})dS = \iint\limits_{\Phi_1} -y\,dS = \iint\limits_{G_1} -y\,dy\,dz = -\int_0^a dz\int_0^{a-z} y\,dy =$$

$$= -\int_0^a dz\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{a-z} = -\frac{1}{2}\int_0^a (a-z)^2\,dz = \frac{1}{2}\left(\frac{(a-z)^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = -\frac{a^3}{6}.$$

2) левая сторона $y = 0$: $\vec{n} = \{0,-1,0\}$, $(\vec{A},\vec{n}) = -z$,

$$\Pi_2 = \iint\limits_{\Phi_2}(\vec{A},\vec{n})dS = \iint\limits_{\Phi_2} -z\,dS = \iint\limits_{G_2} -z\,dx\,dz = -\frac{a^3}{6}.$$

3) нижняя сторона $z = 0$: $\Pi_3 = -\dfrac{a^3}{6}$.

4) передняя сторона (наклонная): $x + y + z = a$, $\vec{N} = \{1,1,1\}$, $\vec{n} = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$,

$$(\vec{A},\vec{n}) = \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\Pi_4 = \iint\limits_{\Phi_4} \left(\vec{A}, \vec{n}\right) dS = \frac{a}{\sqrt{3}} \iint\limits_{\Phi_4} dS .$$

$dS \cos\gamma = dxdy$, где $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\Pi_4 = \frac{a}{\sqrt{3}} \iint\limits_{G_4} \sqrt{3}\, dx\, dy = a \iint\limits_{G_4} dx\, dy = a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{2} .$$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = -\frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{6} + \frac{a^3}{2} = 0 .$$

Ответ: $\Pi = 0$.

ДЗ 1. МАВЗ гл. XIV № 3(д), 4(б), 8(в), 11, 16(г), 17(з).
Читать теорию и отвечать на контрольные вопросы: МАВЗ гл. XIV § 5.