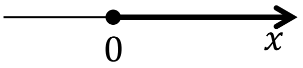
Семинар 18

Уравнение теплопроводности на полупрямой

I. Однородные ГУ.
1. Условие Дирихле.



$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ x > 0,\ t > 0, \\ u|_{x=0} = 0,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ x > 0, \\ |u| < \text{const},\ x \geq 0,\ t \geq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Если функции $\varphi(x)$, $f(x,t)$ непрерывны и ограничены и выполнено условие согласования $\varphi(0) = 0$, то классическое решение $u(x,t)$ существует и единственно при $x > 0$, $t > 0$.
Сведём задачу на полупрямой к задаче на прямой, доопределив функции $f(x,t)$, $\varphi(x)$ при $x < 0$ нечётным образом.
Лемма 1. Если функция $g(x)$ нечётна и определена при $x = 0$, то $g(0) = 0$.
Доказательство: $g(x) \equiv -g(-x) \Rightarrow g(0) = -g(0) \Rightarrow g(0) = 0$.
Поскольку $\varphi(0) = 0$, то функцию $\varphi(x)$ можно продолжить нечётным образом; предположим также, что $f|_{x=0} = 0$, тогда функцию $f(x,t)$ тоже можно продолжить нечётным образом с сохранением непрерывности. Итак, введём функции, определённые при всех $x \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & x \geq 0, \\ -f(-x,t), & x < 0. \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Эти функции являются нечётными по x и непрерывными при $x \in \mathbb{R}$.
Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = a^2 \tilde{u}_{xx} + \tilde{f}(x,t), & x \in \mathbb{R}, & t > 0, \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x), & x \in \mathbb{R}, \\ |\tilde{u}| < \text{const}, & x \in \mathbb{R}, & t \geq 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решение задачи (2) имеет вид (см. прошлый семинар):

$$\tilde{u}(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\, d\xi,$$

где $G(x,\xi,t)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности на прямой:

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}.$$

Выразим функцию $\tilde{u}(x,t)$ через функции $\varphi(x)$ и $f(x,t)$. Рассмотрим интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi = \int_{-\infty}^{0} \tilde{\varphi}(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_{0}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi =$$

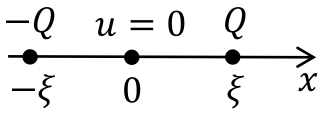
$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} -\varphi(-\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi}_{\text{замена: } -\xi=p} + \int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi =$$

$$= \int_{+\infty}^{0} \varphi(p)G(x,-p,t)\,dp + \int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi =$$

$$= -\int_{0}^{+\infty} \varphi(p)G(x,-p,t)\,dp + \int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi = \int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi)\,\underbrace{[G(x,\xi,t) - G(x,-\xi,t)]}_{G_1(x,\xi,t)}\,d\xi.$$

Функция $\boxed{G_1(x,\xi,t) = G(x,\xi,t) - G(x,-\xi,t)}$ называется функцией Грина задачи Дирихле для уравнения теплопроводности на полупрямой $x > 0$. Она удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} (G_1)_t = a^2(G_1)_{xx}, & x,\xi,t > 0, \\ G_1|_{x=0} = 0, \quad \xi,t > 0, \\ (G_1)_{t=0} = \delta(x-\xi), & x,\xi > 0. \end{cases}$$



Физический смысл: функция $G_1(x,\xi,t)$ описывает температуру в точке x в момент времени t, если при $t = 0$ в точке ξ мгновенно выделилось количество тепла $Q = c\rho$, а в точке $-\xi$ такое же количество тепла поглотилось (при нулевой начальной температуре). Тогда, в силу симметрии, в точке $x = 0$ в любой момент времени будет нулевая температура.

Аналогично преобразуется второй интеграл, и получается формула:

$$\tilde{u}(x,t) = \int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi)G_1(x,\xi,t)\,d\xi + \int_{0}^{t} d\tau \int_{0}^{+\infty} f(\xi,\tau)G_1(x,\xi,t-\tau)\,d\xi. \qquad (3)$$

Поскольку функция $G_1(x,\xi,t)$ нечётна по x:

$$G_1(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}},$$

$$G_1(-x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(-x-\xi)^2}{4a^2t}} - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(-x+\xi)^2}{4a^2t}} = -G_1(x,\xi,t),$$

то и функция $\tilde{u}(x,t)$, в силу формулы (3), нечётна по x. Тогда, в силу леммы 2, $\tilde{u}|_{x=0} = 0$. Условия задачи (2) при $x > 0$ совпадают с условиями задачи (1), поэтому функция $\tilde{u}(x,t)$ совпадает с решением задачи (1) при $x \geq 0$:

$$\boxed{u(x,t) = \tilde{u}(x,t)|_{x\geq 0} = \int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi)G_1(x,\xi,t)\,d\xi + \int_{0}^{t} d\tau \int_{0}^{+\infty} f(\xi,\tau)G_1(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,.} \qquad (4)$$

Замечание: можно показать, что эта формула остаётся в силе при $t > 0$, даже если условия $\varphi(0) = 0$ и $f|_{x=0} = 0$ не выполнены.

Пример 1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на полупрямой:

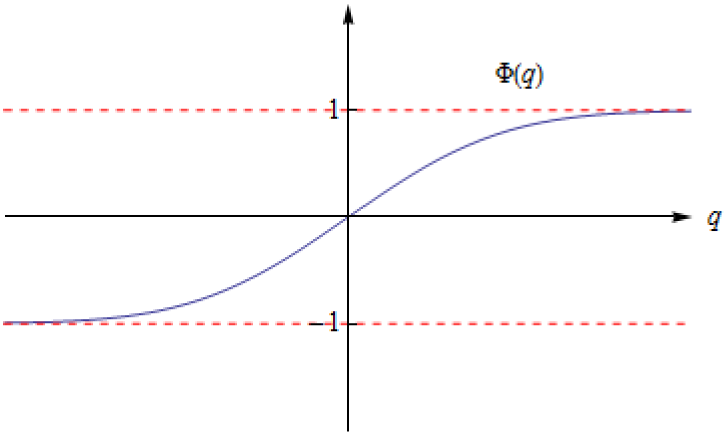
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, & t > 0, \\ u|_{t=0} = 1, & x > 0, \\ |u| < \text{const}, & x \ge 0, \quad t \ge 0. \end{cases}$$

Заметим, что условие согласования начального и граничного условия не выполняется. Тем не менее, воспользовавшись формулой (4), получим:

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} G_1(x,\xi,t)\,d\xi = \int_0^{+\infty} [G(x,\xi,t) - G(x,-\xi,t)]\,d\xi = I_1 - I_2.$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} G(x,\xi,t)\,d\xi = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,d\xi = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,d\underbrace{\left(\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}\right)}_{p} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{-\infty} e^{-p^2}\,dp = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-p^2}\,dp = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-p^2}\,dp}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-p^2}\,dp.$$



Обозначим:

$$\boxed{\Phi(q) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^q e^{-p^2}\,dp}$$

— *функция ошибок.*

Свойства функции ошибок: нечётность $\Phi(-q) \equiv -\Phi(q)$, монотонность, $\lim\limits_{q\to+\infty} \Phi(q) = 1$.

Теперь

$$I_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

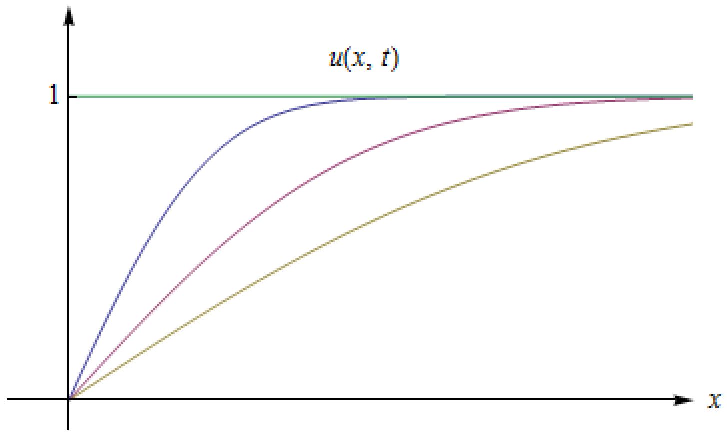
Аналогично:

$$I_2 = \int_0^{+\infty} G(x,-\xi,t)\,d\xi = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}}\,d\xi = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(-x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,d\xi =$$

$$= \int_0^{+\infty} G(-x,\xi,t)\,d\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{-x}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

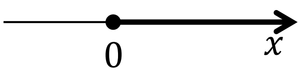
Тогда

$$u(x,t) = I_1 - I_2 = \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$



Из графиков решения при разных t видно, что в начальный момент времени решение имеет разрыв первого рода на границе, а при всех $t > 0$ оно непрерывно. В этом состоит сглаживающее свойство уравнения теплопроводности.

2. Условие Неймана.



$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ x > 0,\ t > 0, \\ u_x|_{x=0} = 0,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ x > 0, \\ |u| < \text{const},\ x \geq 0,\ t \geq 0. \end{cases}$$

Задача решается аналогично, но нужно сделать чётное продолжение функций $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ на всю прямую. Тогда и решение соответствующей задачи на всей прямой $\tilde{u}(x,t)$ также будет чётной функцией.

Лемма 2. Если функция $g(x)$ — чётная и $\exists g'(0)$, то $g'(0) = 0$.

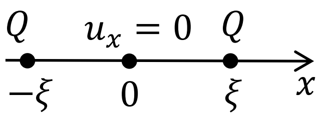
Доказательство: $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{g(-x)-g(0)}{-x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{-x} = -g'(0) \Rightarrow g'(0) = 0$.

В силу леммы 2 чётная функция $\tilde{u}(x,t)$ удовлетворяет условию $\tilde{u}_x|_{x=0} = 0$ и при $x \geq 0$ является решением задачи на полупрямой. Окончательный ответ:

$$\boxed{u(x,t) = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(\xi) G_2(x,\xi,t)\, d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{+\infty} f(\xi,\tau) G_2(x,\xi,t-\tau)\, d\xi\,,}$$

где $\boxed{G_2(x,\xi,t) = G(x,\xi,t) + G(x,-\xi,t)}$ — функция Грина задачи Неймана для уравнения теплопроводности на полупрямой $x > 0$. Она удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} (G_2)_t = a^2 (G_2)_{xx}, \qquad x,\xi,t > 0, \\ (G_2)_x|_{x=0} = 0, \quad \xi,t > 0, \\ (G_1)_{t=0} = \delta(x-\xi), \qquad x,\xi > 0. \end{cases}$$



Физический смысл: функция $G_2(x,\xi,t)$ описывает температуру в точке x в момент времени t, если при $t = 0$ в точках ξ и $-\xi$ мгновенно выделилось количество тепла $Q = c\rho$ (при нулевой начальной температуре). Тогда, в силу симметрии, в точке $x = 0$ в любой момент времени потока тепла не будет.

II. Неоднородные ГУ.

1. Условие Дирихле.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad x > 0, \qquad t > 0, \\ u|_{x=0} = \mu(t), \qquad t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x > 0, \\ |u| < \text{const}, \qquad x \geq 0, \qquad t \geq 0. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде:

$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$,

где $w(x,t)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию $w|_{x=0} = \mu(t)$. Пусть $w(x,t) = \mu(t)$. Предположим, что функция $\mu(t)$ ограничена и имеет непрерывную производную. Тогда для функции $v(x,t)$ получим задачу с однородным ГУ:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t) - \mu'(t), \qquad x > 0, \qquad t > 0, \\ v|_{x=0} = 0, \qquad t > 0, \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - \mu(0), \qquad x > 0. \\ |v| < \mathrm{const}, \qquad x \geq 0, \qquad t \geq 0. \end{cases}$$

2. Условие Неймана.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad x > 0, \qquad t > 0, \\ u_x|_{x=0} = \nu(t), \qquad t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x > 0. \\ |u| < \mathrm{const}, \qquad x \geq 0, \qquad t \geq 0. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде:

$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$,

где $w(x,t)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию $w_x|_{x=0} = \nu(t)$. Пусть $w(x,t) = x\nu(t)$. Предположим, что функция $\nu(t)$ имеет непрерывную производную. Тогда для функции $v(x,t)$ получим задачу с однородным ГУ:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t) - x\nu'(t), \qquad x > 0, \qquad t > 0, \\ v_x|_{x=0} = 0, \qquad t > 0, \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - x\nu(0), \qquad x > 0. \\ |v + x\nu(t)| < \mathrm{const}, \qquad x \geq 0, \qquad t \geq 0. \end{cases}$$

ДЗ18. БК с. 214 № 17–19.