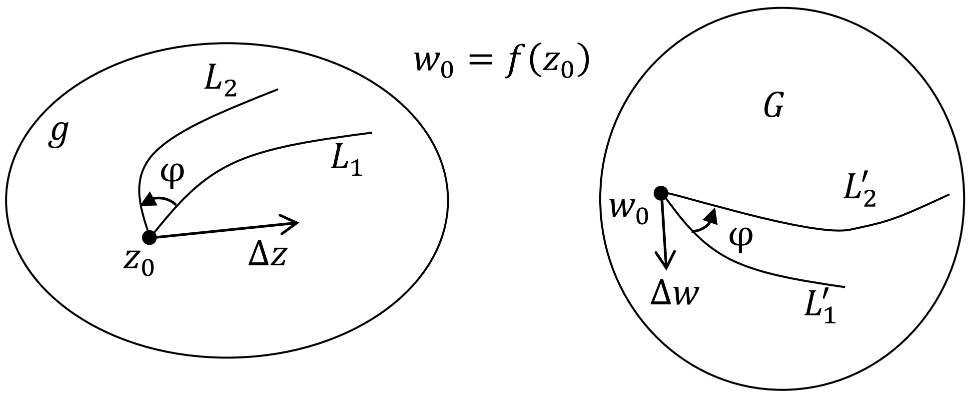
Семинар 27

Конформные отображения



О. Взаимно-однозначное отображение области g комплексной плоскости на область G комплексной плоскости
$w = f(z), \quad z \in g, w \in G,$
называется *конформным* в точке $z_0 \in g$, если оно обладает в этой точке свойствами *постоянства растяжений* и *сохранения углов*.

Постоянство растяжений означает, что в точке $z_0 \in g$
$\exists \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = k \neq 0$ (конечный предел),
т. е. длина бесконечно малых векторов Δz, выходящих из точки z_0, при отображении $w = f(z)$ увеличивается в k раз, независимо от направления Δz. Легко заметить, что
$k = |f'(z_0)|$.

Сохранение углов означает, что угол между любыми двумя гладкими кривыми, проходящими через точку $z_0 \in g$ (угол между кривыми определяется как угол между касательными к кривым в точке z_0), равен углу между образами этих кривых в точке $w_0 = f(z_0)$ по величине и направлению.

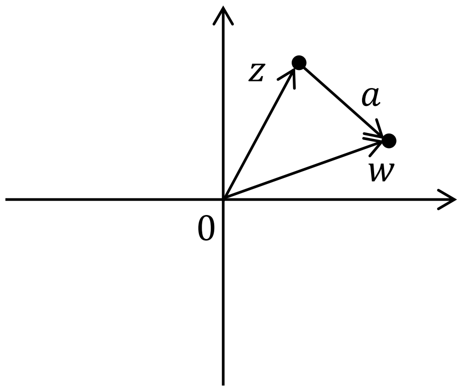
Это значит, что все бесконечно малые векторы Δz, выходящие из точки z_0, при отображении $w = f(z)$ поворачиваются на одинаковый угол α. Можно показать, что
$\alpha = \arg f'(z_0)$.

Т. Отображение $w = f(z)$ конформно в точке $z_0 \Leftrightarrow f(z)$ — однозначная, аналитическая в точке z_0 функция и $\boxed{f'(z_0) \neq 0.}$

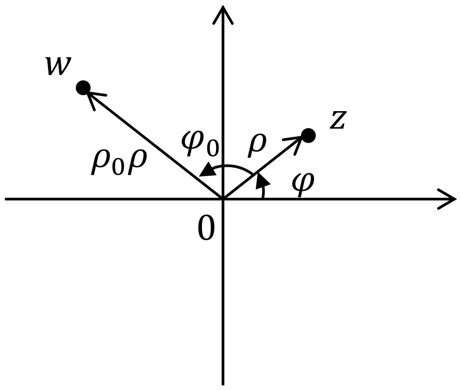
Конформные отображения используются для решения дифференциальных уравнений в частных производных (таких как уравнение Лапласа) в сложных областях. Это целая большая наука, мы познакомимся с ней в нашем курсе только в первом приближении (это полезно для понимания ТФКП вообще).

Простейшие конформные отображения

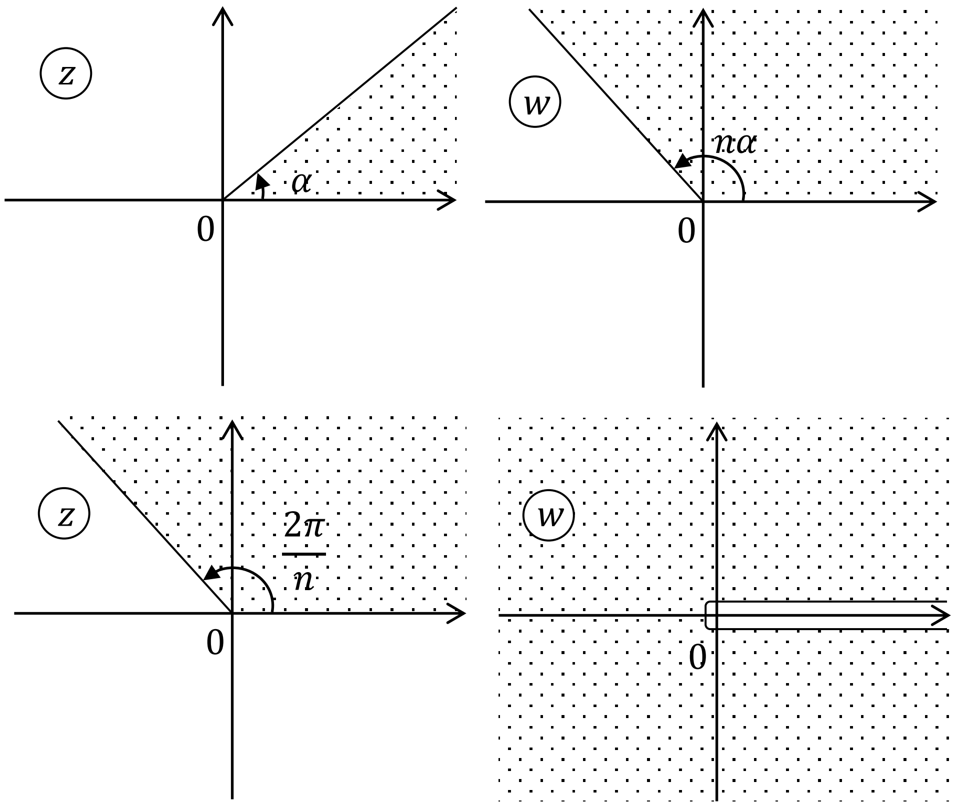
$w = z + a$,
где $a \in \mathbb{C}$ — фиксированное число.
Это сдвиг на вектор a.



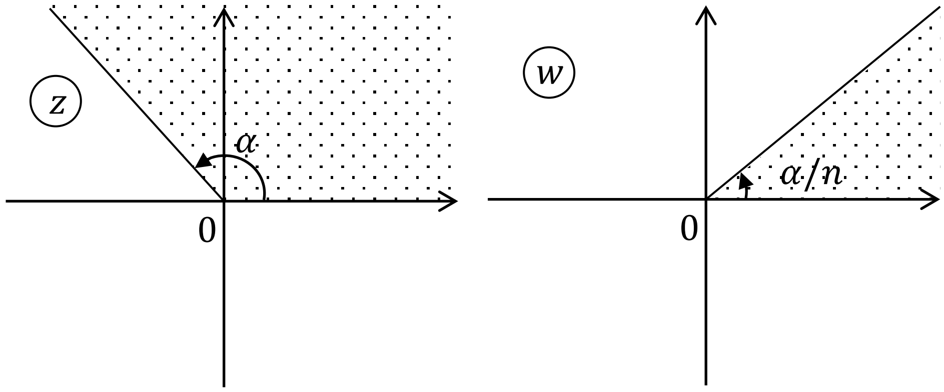
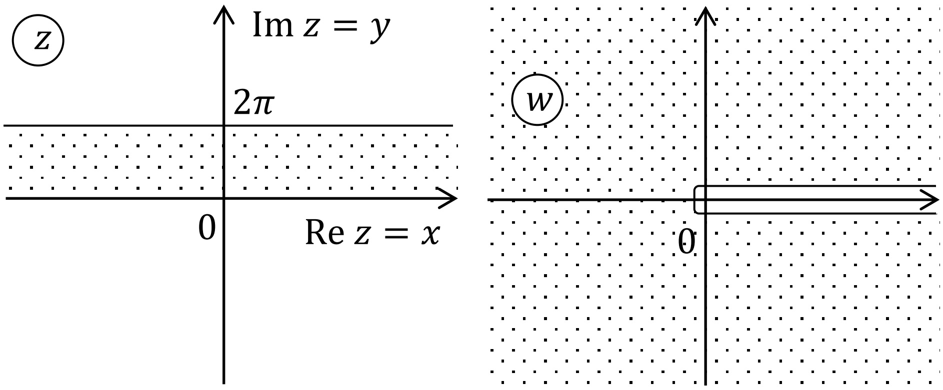
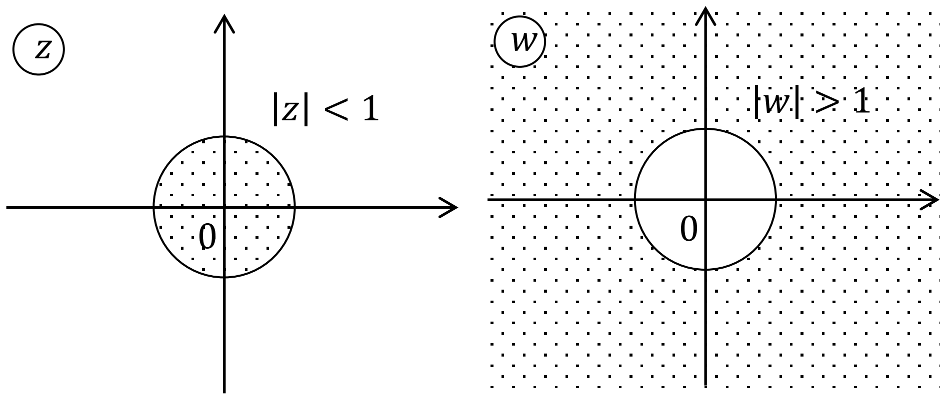
$w = az$,
где $a \in \mathbb{C}$ — фиксированное число.
Если $z = \rho e^{i\varphi}$, $a = \rho_0 e^{i\varphi_0}$, то
$w = \rho_0 \rho e^{i(\varphi+\varphi_0)}$, т. е. при таком преобразовании все точки комплексной плоскости удаляются от начала координат в ρ_0 раз и поворачиваются на угол φ_0 относительно начала координат (растяжение с поворотом).



$w = z^n$, где $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Если $z = \rho e^{i\varphi}$, то
$w = \rho^n e^{in\varphi}$. При возведении в степень n модуль числа возводится в n-ю степень, а аргумент увеличивается в n раз.
Сектор $\begin{cases} 0 < |z| < +\infty, \\ 0 < \arg z < \alpha \end{cases}$ на плоскости z переходит в сектор $\begin{cases} 0 < |w| < +\infty, \\ 0 < \arg w < n\alpha \end{cases}$ на плоскости w.
При этом сектор с углом раствора $\frac{2\pi}{n}$ переходит в комплексную плоскость с разрезом вдоль положительной части вещественной оси.



Если же взять $\alpha > \frac{2\pi}{n}$, то сектор $0 < \arg z < \alpha$ будет отображаться на всю комплексную плоскость, но не взаимно-однозначно.
Отображение, задаваемое функцией z^n, при $n > 1$ будет конформным в каждой точке комплексной плоскости, кроме точки $z = 0$, в которой $(z^n)' = nz^{n-1} = 0$. Как видно из рисунков, в этой точке не выполняется, в частности, свойство сохранения углов.

$w = \sqrt[n]{z}$, где $n \in \mathbb{N}$, — главная ветвь: $w = \sqrt[n]{\lvert z\rvert}e^{\frac{i\arg z}{n}}$. Обратное отображение по отношению к предыдущему.	
$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Отображает полосу $\begin{cases}-\infty < x < +\infty,\\ 0 < y < 2\pi\end{cases}$ на плоскость с разрезом $\begin{cases}0 < \lvert w\rvert = e^x < +\infty,\\ 0 < \arg w = y < 2\pi.\end{cases}$ Функция $z = \ln w$ осуществляет обратное отображение.	
$w = \frac{1}{z}$. Отображает внутренность единичного круга $\lvert z\rvert < 1$ на внешность единичного круга $\lvert w\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert} > 1$, и наоборот.	

Дробно-линейное отображение:

$w = \frac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ — фиксированные числа.

В невырожденном случае, когда $a \neq 0$, $c \neq 0$, дробно-линейная функция приводится к виду:

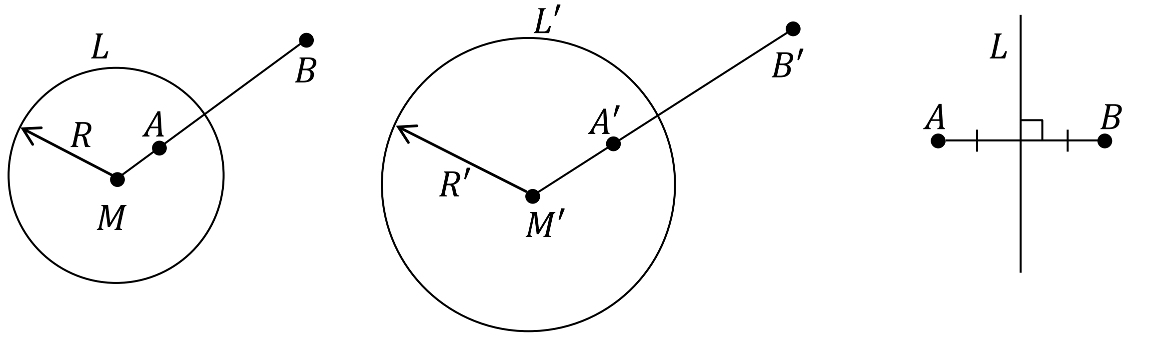
$$w = \frac{a}{c} \cdot \frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} = \lambda \frac{z - \alpha}{z - \beta},$$

где $\lambda = \frac{a}{c} \neq 0$, $\alpha = -\frac{b}{a}$, $\beta = -\frac{d}{c}$.

Три неизвестных параметра λ, α, β однозначно определяются, если задать отображение трёх различных точек: $z_1 \to w_1$, $z_2 \to w_2$, $z_3 \to w_3$.

Дробно-линейная функция переводит окружности и прямые (как частный случай окружностей с бесконечным радиусом) в окружности и прямые. При этом, в частности, окружность может переходить в прямую, и наоборот.

При дробно-линейном отображении сохраняется симметрия точек относительно окружностей и прямых.

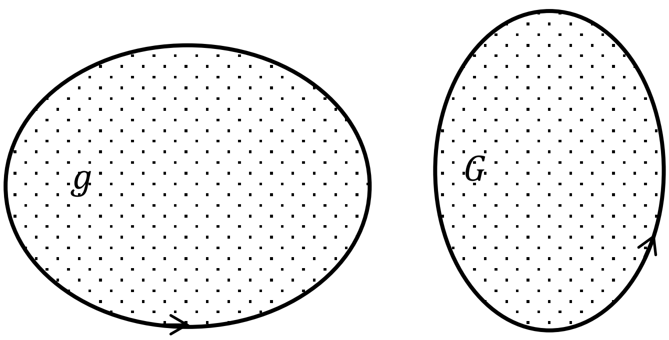


Точки A и B на плоскости называются *симметричными относительно окружности* L радиуса R с центром в точке M, если эти точки лежат на одной прямой, проходящей через центр окружности, и $MA \cdot MB = R^2$.

При дробно-линейном отображении образы этих точек A' и B' будут симметричны относительно новой окружности L', в которую отобразится окружность L:

$M'A' \cdot M'B' = (R')^2$.

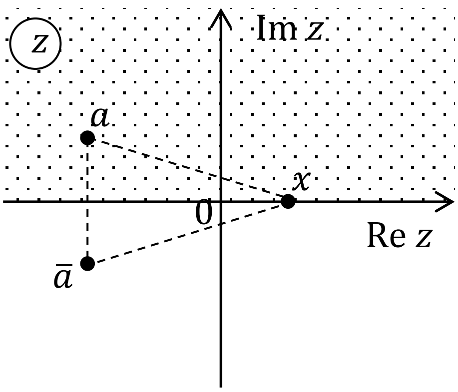
Симметрия точек A и B *относительно прямой* означает, что точки лежат на одном перпендикуляре на одинаковом расстоянии от прямой по разные стороны от неё.

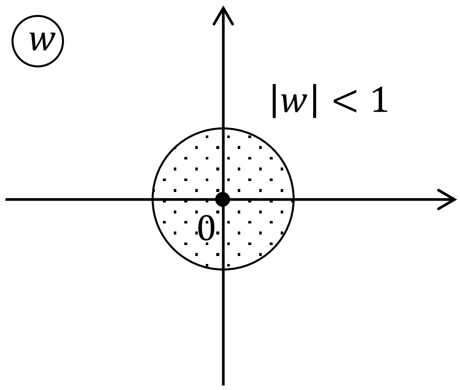


Т. (принцип соответствия границ). Если аналитическая функция $w = f(z)$ конформно отображает область g в область G, то граница области g при этом отображается в границу области G с сохранением направления обхода.

Т (Римана). Любую односвязную область на комплексной плоскости, граница которой состоит более чем из одной точки, можно конформно отобразить на любую другую одно-

связную область комплексной плоскости, граница которой состоит более чем из одной точки.
Напомним, что односвязной областью называется область, у которой граница является связным множеством.
Теорема Римана утверждает существование конформного отображения, но не говорит, как его построить в явном виде. Основная задача теории конформных отображений состоит в том, чтобы найти функцию, конформно отображающую одну заданную область на другую заданную область.





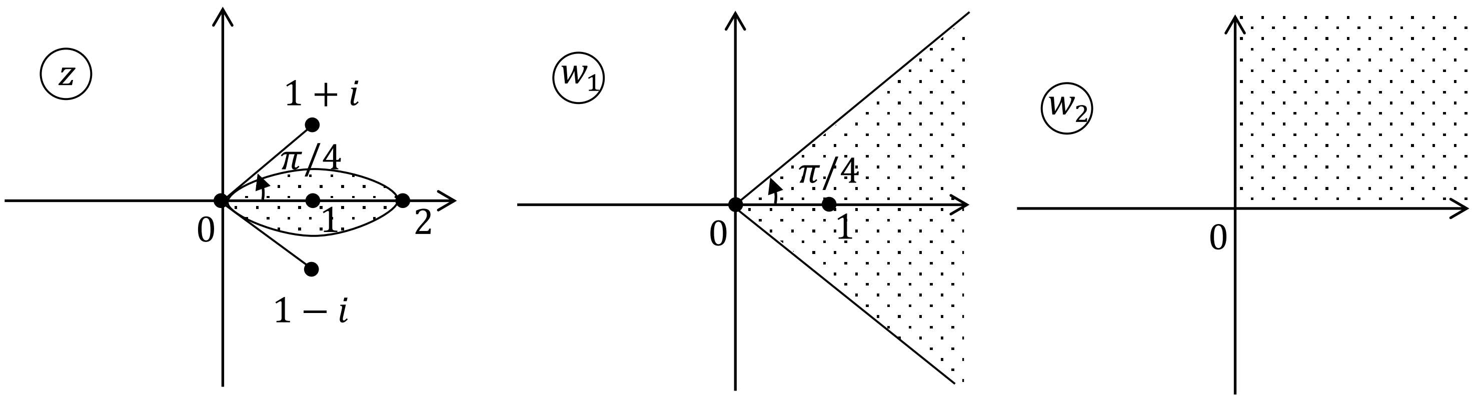
Пример 1. Найти дробно-линейную функцию $f(z)$, которая конформно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на внутренность единичного круга $|w| < 1$, причём заданная точка a $(\operatorname{Im} a > 0)$ переходит в точку 0.

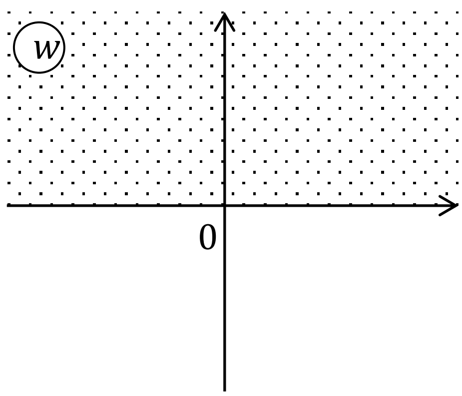
Будем искать дробно-линейное отображение вида
$$w = f(z) = \lambda \frac{z - \alpha}{z - \beta}.$$
Из условия $f(a) = 0$ определяем $\alpha = a$.
Из принципа соответствия границ получаем, что вещественная ось $\operatorname{Im} z = 0$ переходит в единичную окружность $|w| = 1$. Тогда точка $\bar{a}$, симметричная точке a относительно вещественной оси, перейдёт в точку w_0, симметричную точке 0 относительно единичной окружности (поскольку точка a переходит в точку 0). Тогда $0 \cdot |w_0| = 1$, откуда $w_0 = \infty$. Т. е.
$$f(\bar{a}) = \lambda \frac{\bar{a} - a}{\bar{a} - \beta} = \infty,$$
откуда $\beta = \bar{a}$.
Следовательно, искомое отображение имеет вид $f(z) = \lambda \frac{z-a}{z-\bar{a}}$.
Теперь учтём, что произвольная точка $x \in \mathbb{R}$ вещественной оси отображается на единичную окружность $|w| = 1$:
$$\left|\lambda \frac{x - a}{x - \bar{a}}\right| = 1.$$
$$|\lambda| \frac{|x - a|}{|x - \bar{a}|} = 1.$$
Из рисунка видно, что $|x - a| = |x - \bar{a}|$, т. к. это расстояние от точки x до точек a и $\bar{a}$. Тогда $|\lambda| = 1$, откуда $\lambda = e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.
Получается дробно-линейное отображение вида
$$w = e^{i\varphi} \frac{z - a}{z - \bar{a}}, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$
Здесь φ — произвольное вещественное число. В самом деле, умножение на $e^{i\varphi}$ означает поворот на угол φ на комплексной плоскости, а единичный круг при любом таком повороте переходит сам в себя.

Ответ: $w = e^{i\varphi}\frac{z-a}{z-\bar{a}}$, где $\varphi \in \mathbb{R}$.

Более сложные задачи конформных отображений решаются в несколько действий. Т. е. сначала исходная область отображается в промежуточную с помощью какой-нибудь простой функции, затем, возможно, в другую промежуточную область, и т. д., пока не получится конечная область. Суперпозиция конформных отображений также будет являться конформным отображением. Такие задачи напоминают известную игру со словами, когда из одного заданного слова надо получить другое заданное слово за конечное число шагов, каждый раз меняя ровно одну букву (при этом промежуточные слова тоже должны быть осмысленными). Например, превратить «муху» в «слона», или «козу» в «волка» (коза-поза-пола-полк-волк). Кстати, автору конспекта и его коллеге так и не удалось превратить «матан» в «ботана» без использования специальной терминологии.

Пример 2. Конформно отобразить лунку $\begin{cases} |z-1+i| < \sqrt{2}, \\ |z-1-i| < \sqrt{2} \end{cases}$ на верхнюю полуплоскость.





1. Граница лунки состоит из двух дуг окружностей, которые образуют углы $\frac{\pi}{4}$ с вещественной осью. «Распрямим» эти дуги с помощью дробно-линейного преобразования

$$w_1 = \lambda\frac{z-\alpha}{z-\beta}.$$

Мы хотим, чтобы окружности перешли в прямые. Тогда потребуем, чтобы точка 0 перешла сама в себя, а точка 2 — в бесконечность. Тогда получим

$$w_1 = \lambda\frac{z-0}{z-2}.$$

Дополнительно потребуем, чтобы вещественная ось перешла сама в себя. При дробно-линейном отображении $w_1 = \lambda\frac{z}{z-2}$ она должна перейти в прямую, проходящую через точки 0 и ∞ (т. к. изначально она проходила через точки 0 и 2). Но таких прямых бесконечно много. Потребуем ещё, чтобы точка 1 перешла сама в себя, это позволит выделить единственную прямую. Тогда вещественная ось перейдёт сама в себя и $\lambda\frac{1}{1-2} = 1$, откуда $\lambda = -1$.

Итак, дробно-линейное отображение $\boxed{w_1 = \frac{z}{2-z}}$ переводит лунку в сектор, причём в силу свойства сохранения углов в точке 0 границы сектора будут составлять угол $\frac{\pi}{4}$ с положительной частью вещественной оси.

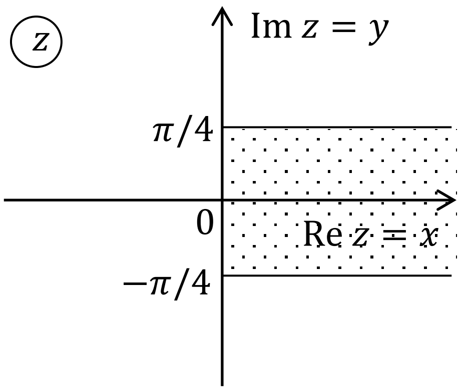
2. Теперь повернём сектор $-\frac{\pi}{4} < \arg w_1 < \frac{\pi}{4}$ на угол $\frac{\pi}{4}$: $\boxed{w_2 = e^{\frac{i\pi}{4}} w_1 = e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{z}{2-z}.}$

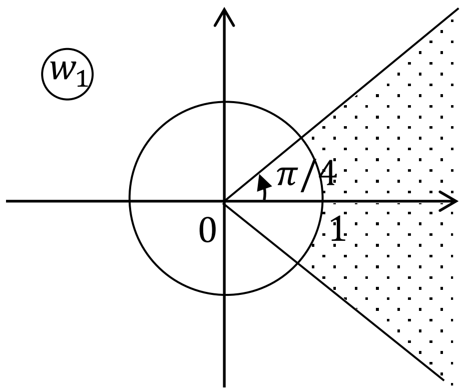
3. И развернём сектор $0 < \arg w_2 < \frac{\pi}{2}$ на верхнюю полуплоскость с помощью преобразования, удваивающего аргумент: $w = w_2^2 = e^{\frac{i\pi}{2}} \left(\frac{z}{2-z}\right)^2 = i\left(\frac{z}{2-z}\right)^2$.

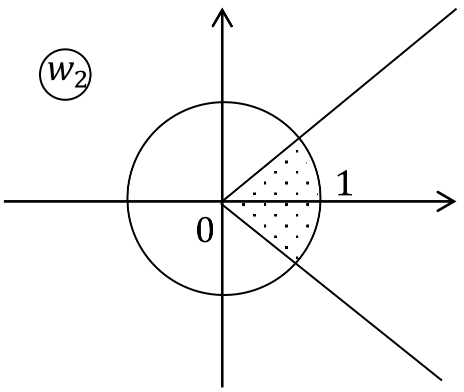
Ответ: $w = i\left(\frac{z}{2-z}\right)^2$.

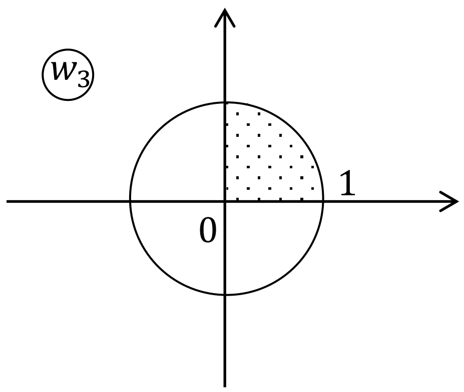
Отметим, что полученное конформное отображение не единственно, существуют и другие решения задачи.

Пример 3. Конформно отобразить полуполосу $\begin{cases} -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$ на верхнюю полуплоскость.









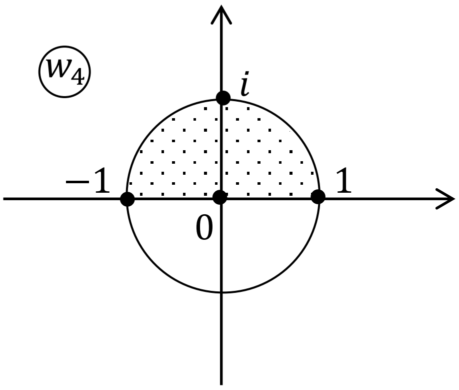
1. $w_1 = e^z = e^x e^{iy}$,
$1 < |w_1| < +\infty$,
$-\frac{\pi}{4} < \arg w_1 < \frac{\pi}{4}$.

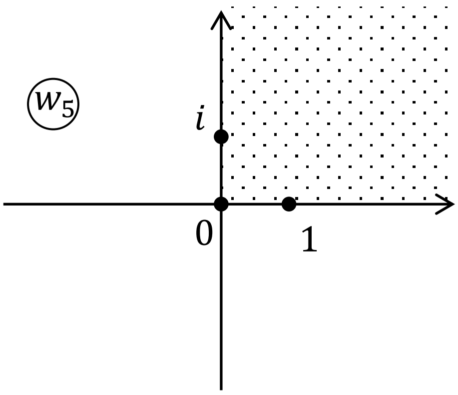
2. $w_2 = \frac{1}{w_1} =$
$= \frac{1}{|w_1|} e^{-i \arg w_1} = e^{-z}$,
$0 < |w_2| < 1$,
$-\frac{\pi}{4} < \arg w_2 < \frac{\pi}{4}$.

3. $w_3 = e^{\frac{i\pi}{4}} w_2 = e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-z}$.

4. $w_4 = w_3^2 =$
$= |w_3|^2 e^{i2 \arg w_3} =$
$= e^{\frac{i\pi}{2}} e^{-2z} = ie^{-2z}$.

5. Будем искать дробно-линейное отображение верхней полуокружности на первую четверть:
$$w_5 = \lambda \frac{w_4 - \alpha}{w_4 - \beta}.$$
Потребуем, чтобы



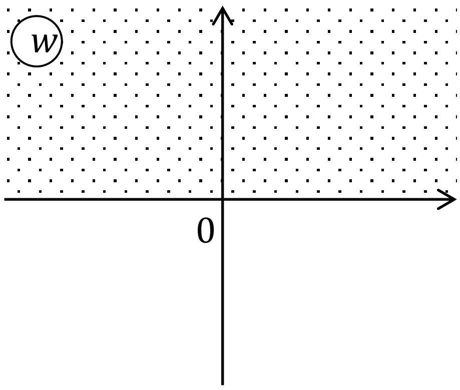


$-1 \to 0, \quad 1 \to \infty, \quad i \to i,$ т. е. чтобы верхняя полуокружность перешла в положительную часть мнимой оси.

Тогда $\alpha = -1, \quad \beta = 1, \quad \lambda = -1$: $w_5 = -\frac{w_4+1}{w_4-1}$.

При этом в силу свойства сохранения углов вещественная ось перейдёт в вещественную ось. Это видно и из того, что $0 \to 1$.

Теперь $w_5 = -\frac{ie^{-2z}+1}{ie^{-2z}-1}$.



6. $w = w_5^2 = \left(\frac{ie^{-2z}+1}{ie^{-2z}-1}\right)^2$.

Ответ: $w = \left(\frac{ie^{-2z}+1}{ie^{-2z}-1}\right)^2$.

ДЗ 27. КРАМ гл. IV задачи для самостоятельного решения № 3.1, 3.3, 3.4, 3.7, 4.2, 5.1, 5.4, 7.1, 8.4, 10.7.