# Семинар 2

## Уравнение Бернулли

$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}.}$

Если $\alpha = 1$, то это линейное уравнение. Пусть $\alpha \neq 1$. Поделим уравнение на $y^{\alpha}$ (при этом может быть потеряно решение $y = 0$ при $\alpha > 0$):

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + \frac{P(x)}{y^{\alpha-1}} = Q(x).$$

Запишем уравнение в виде

$$-\frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{y^{\alpha-1}}\right)' + \frac{P(x)}{y^{\alpha-1}} = Q(x).$$

Сделаем замену:

$$z(x) = \frac{1}{y^{\alpha-1}(x)}.$$

Получим

$$-\frac{z'}{\alpha - 1} + P(x)z = Q(x),$$

$$z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x)$$

— линейное уравнение относительно функции $z(x)$.

**Пример 1 (Филиппов № 157).** Решить уравнение $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$.

Поделив на $x$ ($x = 0$ не является решением уравнения), получим

$$y' + \frac{2}{x}y = -x^4e^xy^3.$$

Это уравнение Бернулли. Функция $\boxed{y = 0}$ — его решение. Поделим уравнение на $y^3$:

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{y^2} = -x^4e^x.$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y^2}\right)' + \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{y^2} = -x^4e^x.$$

Сделаем замену:

$$\frac{1}{y^2(x)} = z(x).$$

Получим линейное уравнение:

$$-\frac{z'}{2} + \frac{2}{x}z = -x^4e^x,$$

$$z' - \frac{4}{x}z = 2x^4e^x.$$

Дома доделать.

## Уравнение Риккати

$\boxed{y' + P(x)y + Q(x)y^2 = f(x).}$

Пусть известно его ЧР $\bar{y}(x)$. Тогда замена

$$y(x) = \bar{y}(x) + z(x)$$

сводит уравнение Риккати к уравнению Бернулли.
ЧР обычно пытаются подобрать в виде
$\bar{y} = ax + b, \bar{y} = ax^b, \bar{y} = ae^{bx}, \bar{y} = a + b\ln x$ и т. п.
В общем случае уравнение Риккати не интегрируемо в квадратурах, т. е. его решения не выражаются через элементарные функции и их первообразные. Например, уравнение
$y' + y^2 = x$
не интегрируемо в квадратурах.

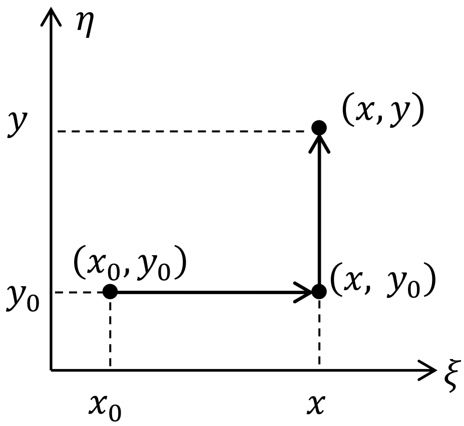
**Пример 2 (Филиппов № 169).** Решить уравнение $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$.
Поделим его на $x$:
$$y' - \left(2 + \frac{1}{x}\right)y + \frac{y^2}{x} = -x. \qquad (1)$$
Это уравнение Риккати. Надо подобрать ЧР. Попробуем найти его в виде $\bar{y} = ax + b$. Подставив $y = \bar{y} = ax + b$ в уравнение (1), получим:
$$a - \left(2 + \frac{1}{x}\right)(ax+b) + \frac{(ax+b)^2}{x} = -x.$$
$$a - 2ax - a - 2b - \frac{b}{x} + a^2x + 2ab + \frac{b^2}{x} = -x.$$
Чтобы уравнение обращалось в тождество, должны совпадать коэффициенты при каждой степени $x$ в левой и правой части уравнения:
при $x^{-1}$: $-b + b^2 = 0$;
при $x^0$: $-2b + 2ab = 0$;
при $x^1$: $-2a + a^2 = -1$.
Например, возьмём $b = 0$, $a = 1$; получим частное решение $\bar{y} = x$.
Тогда, сделав в уравнении Риккати (1) замену $y(x) = x + z(x)$, получим
$$1 + z' - \left(2 + \frac{1}{x}\right)(x+z) + \frac{(x+z)^2}{x} = -x.$$
$$1 + z' - 2x - 1 - 2z - \frac{z}{x} + x + 2z + \frac{z^2}{x} = -x.$$
$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{z^2}{x}$$
— уравнение Бернулли. Дома доделать.

## Уравнение в полных дифференциалах

$\boxed{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.}$
Если $P\,dx + Q\,dy$ — полный дифференциал, то такое уравнение называется уравнением в полных дифференциалах.
Если $P_y$ и $Q_x$ непрерывны, то в односвязной области $\boxed{P_y = Q_x}$ — необходимое и достаточное условие того, что существует функция $\varphi(x,y)$ такая, что $P\,dx + Q\,dy = d\varphi(x,y)$ — полный дифференциал. (Поскольку тогда $\varphi_x = P$, $\varphi_y = Q$, $P_y = \varphi_{xy}$, $Q_x = \varphi_{yx}$ и $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$.)
При выполнении этого условия уравнение принимает вид:
$d\varphi(x,y) = 0$,
откуда получаем
$\varphi(x,y) = C, \qquad C \in \mathbb{R}$.

Методы восстановления функции $\varphi(x, y)$ по её диффереациалу:

1) угадать, например
$x\,dy + y\,dx = d(xy)$,
$\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d\left(\dfrac{x}{y}\right)$,
$\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\dfrac{y}{x}\right)$;
2) через криволинейный интеграл, который не зависит от пути интегрирования:
$$\varphi(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(\xi, \eta)\,d\xi + Q(\xi, \eta)\,d\eta,$$
где $(x_0, y_0)$ — произвольная фиксированная точка.
Чаще всего в качестве контура интегрирования выбирают ломаную:




3) Решить систему УрЧП:
$\begin{cases} \varphi_x(x, y) = P(x, y), \\ \varphi_y(x, y) = Q(x, y). \end{cases}$
Тогда, например, из первого уравнения системы:
$\varphi(x, y) = \int P(x, y)\,dx + C(y)$,
где $C(y)$ — произвольная функция. Подставив полученное выражение во второе уравнение системы, определим $C(y)$.

**Пример 3 (Филиппов № 186).** Решить уравнение $\underbrace{2xy}_{P}\,dx + \underbrace{(x^2 - y^2)}_{Q}\,dy = 0$.

$P_y = 2x$, $Q_x = 2x$, $P_y = Q_x \Rightarrow$ это уравнение в полных дифференциалах.
Выделим полные дифференциалы:
$\underbrace{2xy\,dx + x^2\,dy}_{d(x^2 y)} - \underbrace{y^2\,dy}_{d\left(\frac{y^3}{3}\right)} = 0.$

$d\left(x^2 y - \dfrac{y^3}{3}\right) = 0.$

$x^2 y - \dfrac{y^3}{3} = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

Отсюда можно выразить $x(y)$:

$$\boxed{x = \pm\sqrt{\frac{C}{y} + \frac{y^2}{3}}, \qquad C \in \mathbb{R}.}$$

Но при этом теряется решение $\boxed{y = 0,}$ которое содержится в семействе $x^2 y - \frac{y^3}{3} = C$ при $C = 0$.

*Ответ:* $x = \pm\sqrt{\frac{C}{y} + \frac{y^2}{2}}$, $C \in \mathbb{R}$; $y = 0$.

**Пример 4.** Решить уравнение $\underbrace{y}_{P}\,dx \underbrace{-(2x^2 y + x)}_{Q}\,dy = 0$.

$P_y = 1$, $Q_x = -4xy - 1$, $P_y \neq Q_x \Rightarrow$ это не уравнение в полных дифференциалах. Тем не менее, его можно свести к уравнению в полных дифференциалах. Раскроем скобки:
$y\,dx - 2x^2 y\,dy - x\,dy = 0$.
Если мы поделим уравнение на $x^2$, то появятся полные дифференциалы:
$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2} - 2y\,dy = 0,$$
$$-d\left(\frac{y}{x}\right) - d(y^2) = 0.$$
При делении было потеряно решение $\boxed{x = 0.}$ Далее,
$$d\left(\frac{y}{x} + y^2\right) = 0,$$
$$\frac{y}{x} + y^2 = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$
Отсюда можно выразить $x(y)$:
$$\boxed{x = \frac{y}{C - y^2}, \qquad C \in \mathbb{R},}$$
но при делении могли потеряться решения вида $y = \text{const}$; в самом деле, функция $\boxed{y = 0}$ есть решение исходного ДУ.
*Ответ:* $x = \frac{y}{C - y^2}$, $C \in \mathbb{R}$; $x = 0$; $y = 0$.

## Интегрирующий множитель

Рассмотрим уравнение не в полных дифференциалах:
$$\boxed{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0,}$$
где функции $P_y$, $Q_x$ непрерывны в односвязной области, но $\boxed{P_y \neq Q_x\,.}$
Оказывается, всегда существует функция $\mu(x,y) \not\equiv 0$ — *интегрирующий множитель,* такая что
$\mu P\,dx + \mu Q\,dy = 0$ — уравнение в полных дифференциалах.
Для каждого уравнения существует даже бесконечно много интегрирующих множителей. Но *универсального* способа отыскания интегрирующего множителя нет. Чаще всего его пытаются подобрать в виде
$\mu = x^a y^b$, $\mu = \mu(x)$, $\mu = \mu(y)$ и т. п.

**Пример 5.** Решить уравнение $\underbrace{\left(\frac{x^2}{y}+2x^3-y\right)}_{P}dx+\underbrace{\left(x+2yx^2-\frac{x^3}{y^2}\right)}_{Q}dy=0.$

Уравнение имеет смысл при $y \neq 0$.

$P_y=-\frac{x^2}{y^2}-1$, $Q_x=1+4xy-\frac{3x^2}{y^2}$, $P_y \neq Q_x \Rightarrow$ это не уравнение в полных дифференциалах.

Попробуем подобрать интегрирующий множитель $\mu$. Поскольку после умножения на $\mu$ должно получиться уравнение в полных дифференциалах

$\mu P\,dx+\mu Q\,dy=0,$

то должно выполняться необходимое и достаточное условие того, что $\mu P\,dx+\mu Q\,dy$ — полный дифференциал:

$\boxed{(\mu P)_y=(\mu Q)_x\,.}$

Попробуем искать интегрирующий множитель в виде $\mu=\mu(x)$. Тогда последнее равенство принимает вид

$\mu(x)P_y=\mu'(x)Q+\mu(x)Q_x\,,$

т. е.

$$\mu(x)\left(-\frac{x^2}{y^2}-1\right)=\mu'(x)\left(x+2yx^2-\frac{x^3}{y^2}\right)+\mu(x)\left(1+4xy-\frac{3x^2}{y^2}\right),$$

$$\mu'(x)\cdot x\left(1+2xy-\frac{x^2}{y^2}\right)=\mu(x)\cdot\left(-2-4xy+\frac{2x^2}{y^2}\right).$$

Теперь можно сократить на $1+2xy-\frac{x^2}{y^2}$, и получится уравнение

$\mu'(x)\cdot x=-2\mu(x)$ — это уравнение с разделяющимися переменными, где осталась только переменная $x$.

Значит, действительно, существует интегрирующий множитель вида $\mu=\mu(x)$ (в противном случае переменная $y$ не сократилась бы, и следовало бы искать $\mu$ в другом виде). Найдём его, разделив переменные:

$$\frac{d\mu}{\mu}=-2\frac{dx}{x},$$

$$\mu=\frac{\tilde{C}}{x^2}.$$

Нам нужен какой-то один интегрирующий множитель, поэтому положим $\mu=\frac{1}{x^2}$ (всё равно константу можно сократить после умножения исходного ДУ на $\mu$).

После умножения исходного ДУ на $\mu=\frac{1}{x^2}$ получим уравнение в полных дифференциалах:

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{y}+2x^3-y\right)dx+\frac{1}{x^2}\left(x+2yx^2-\frac{x^3}{y^2}\right)dy=0.$$

При этом теряется решение $\boxed{x=0.}$

Раскроем скобки и выделим полные дифференциалы:

$$\frac{dx}{y}+2x\,dx-\frac{y\,dx}{x^2}+\frac{dy}{x}+2y\,dy-\frac{x\,dy}{y^2}=0.$$

$$\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}+\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}+2x\,dx+2y\,dy=0.$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right)+d\left(\frac{y}{x}\right)+d(x^2)+d(y^2)=0.$$

$$\boxed{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+x^2+y^2=C, \qquad C\in\mathbb{R}.}$$

*Ответ:* $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+x^2+y^2=C,\ C\in\mathbb{R};\ x=0.$

**ДЗ 2.** Филиппов № 151, 156, 167, 186, 189, 192, 195, 203, 206.