Семинар 10

Степенные ряды

Степенным рядом переменной t называется функциональный ряд вида

$$S(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(t-t_0)^n=a_0+a_1(t-t_0)+a_2(t-t_0)^2+\cdots,$$

где a_n — коэффициенты степенного ряда — не зависят от t (некоторые числа), t_0 — тоже некоторое число.

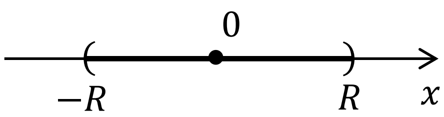
Сделав замену $t-t_0=x$, степенной ряд можно привести к виду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \qquad (*)$$

Здесь коэффициенты a_n не зависят от x. Заметим, что при $x=0$ ряд (*) сходится:

$a_0\cdot 0^0+a_1\cdot 0^1+a_2\cdot 0^2+\cdots=a_0+0+0+\cdots=a_0$.

При этом будем считать (для удобства), что $0^0=1$ (потому что при $x\neq 0$ первый член ряда равен a_0, и желательно, чтобы он был равен a_0 и при $x=0$).



Т. (об области сходимости степенного ряда). $\exists R\geq 0$ (допускается $R=+\infty$) — *радиус сходимости* степенного ряда (*):

1) при $|x|<R$ ряд (*) сходится абсолютно,
2) при $|x|>R$ ряд (*) расходится,
3) при $|x|=R$ ряд (*) может как сходиться, так и расходиться,
4) на любом отрезке $[-r,r]$, где $0<r<R$, ряд (*) сходится равномерно.

Радиус сходимости находится по формуле:

$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ (в *общем* случае) — формула *Коши–Адамара,*

или $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (в том случае, когда этот предел *существует* или равен $+\infty$).

Ряд (*) *внутри* области $|x|<R$ можно почленно интегрировать и дифференцировать сколько угодно раз, при этом радиус сходимости не изменяется.

Т. (Абеля). Если степенной ряд сходится при $x=R$ ($x=-R$), то его сумма непрерывна в точке $x=R$ слева (в точке $x=-R$ справа).

Пример 1 (самостоятельно). Найти область сходимости степенного ряда:

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{2^n}$.

Здесь $a_n=\frac{n^2}{2^n}$,

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 2^{n+1}}{2^n(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=2.$$

Стало быть, при $|x|<2$ ряд сходится, при $|x|>2$ ряд расходится.

Исследуем сходимость ряда при $|x|=2$.

При $x=2$: $\sum_{n=0}^{\infty}n^2$ — расходится, т. к. общий член ряда не стремится к нулю.

При $x=-2$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2$ — то же самое.

Ответ: $|x|<2$.

б) $\sum_{n=0}^{\infty}n^n x^n$.

Здесь $a_n=n^n$,

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} n = +\infty \quad \Rightarrow \quad R = 0.$$

Значит, ряд сходится только при $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Здесь $a_n = \frac{1}{n!}$,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

Значит, ряд сходится $\forall x$.

Ответ: $x \in \mathbb{R}$.

Ряды Тейлора

Надо запомнить разложения основных элементарных функций в степенные ряды (они получаются из формулы Тейлора, точнее, Маклорена, для тех x, для которых последовательность остаточных членов $R_{n+1}(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$):

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \qquad -1 < x \le 1;$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \qquad -1 < x < 1;$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad -1 < x < 1.$$

Вообще, *формально* ряд Тейлора с центром в точке x_0 можно написать для любой бесконечное число раз дифференцируемой функции $f(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Однако надо помнить, что этот ряд может сходиться не при всех x из области определения функции $f(x)$, и даже когда он сходится, он может сходиться не к $f(x)$, а к другой функции: например, ряд Тейлора по степеням x для функции $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \ne 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ — проверить дома.

Функция, которая совпадает со своим рядом Тейлора, называется *аналитической.*

Пример 2 (самостоятельно). Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
Это ряд Тейлора для $\ln(1+x)$ при $x=1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\Bigg|_{x=1}=\ln(1+x)|_{x=1}=\ln 2.$$

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$.

Пример 3 (самостоятельно). Определить область сходимости и найти сумму ряда

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

Сначала определим область сходимости ряда. Здесь $a_n=\frac{1}{n}$,

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

При $x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ — расходится.
При $x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ — сходится (по признаку Лейбница).
Таким образом, область сходимости ряда: $-1\le x<1$.
Сделаем замену: $x=-t$. Тогда

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}=-\ln(1+t)=-\ln(1-x)$$

при $-1<t\le 1$, т. е. при $-1\le x<1$ — на всей области сходимости ряда.
Ответ: $S(x)=-\ln(1-x)$ при $-1\le x<1$.

Пример 4 (самостоятельно). Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$.
Воспользовавшись решением предыдущей задачи, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\Bigg|_{x=\frac{1}{2}}=-\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2.$$

Ответ: $\ln 2$.

Пример 5 (самостоятельно). Определить область сходимости и найти сумму ряда

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

Заметим, что

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots, \qquad x\in\mathbb{R},$$

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=\frac{x^0}{0!}-\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots, \qquad x\in\mathbb{R},$$

т.е. $S(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x$, $x\in\mathbb{R}$.
Ответ: $S(x)=\operatorname{ch}x$ при $x\in\mathbb{R}$.

Пример 6 (самостоятельно). Разложить функцию в ряд по степеням x:

а) $\sin\frac{x^2}{3} = \sin y\big|_{y=\frac{x^2}{3}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}y^{2n-1}}{(2n-1)!}\Big|_{y=\frac{x^2}{3}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{4n-2}}{3^{2n-1}(2n-1)!}$.

Область сходимости ряда: $y\in\mathbb{R}$, т. е. $\frac{x^2}{3}\in\mathbb{R}$, т. е. $x\in\mathbb{R}$.

б) $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-y}\Big|_{y=-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n\big|_{y=-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.

Область сходимости ряда: $|y|<1$, т. е. $|-x^2|<1$, т. е. $|x|<1$.

Обратите внимание, что функция $\frac{1}{1+x^2}$, как и e^x, — бесконечно дифференцируемая на всей вещественной оси. Но почему-то ряд Тейлора с центром в нуле для e^x сходится везде, а для $\frac{1}{1+x^2}$ — только при $|x|<1$ (при остальных x ряд расходится, т. к. общий член не стремится к нулю). Почему так происходит, чем функция $\frac{1}{1+x^2}$ принципиально отличается от e^x, станет ясно из курса ТФКП.

в) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Рассмотрим (см. пункт б)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \qquad |x|<1.$$

Этот степенной ряд можно интегрировать почленно внутри области $|x|<1$. Тогда

$$f(x) = \int\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right)dx + C = \sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n x^{2n}\,dx + C = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C,$$

где C — неизвестная константа. Определим её из условия $f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$. Получим $C = 0$. Таким образом,

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x|<1. \tag{1}$$

Заметим, что ряд сходится и в точках $x=\pm1$ (по признаку Лейбница), поэтому его сумма непрерывна в этих точках (по теореме Абеля):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_{x=\pm1} = \lim_{x\to\pm1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x\to\pm1}\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(\pm1).$$

Значит, формула (1) верна и при $x=\pm1$.

Окончательно,

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x|\le 1.$$

г) (**дополнительный**)

$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ при $|x|<1$.

Полученный ряд можно записать и в другом виде, если сделать замену $n-1=m$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)x^m, \qquad |x|<1.$$

Вместо почленного дифференцирования можно было бы использовать разложение в ряд для $(1+x)^\alpha$.

Пример 7 (дополнительный). Определить область сходимости и найти сумму ряда

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x^2-1)^n.$$

Сделаем замену: $x^2 - 1 = y$. Тогда

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)y^n = \tilde{S}(y).$$

Это степенной ряд по переменной y. Найдём область сходимости ряда. Здесь $a_n = n + 1$ и

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1.$$

При $y = \pm 1$ ряд расходится, т. к. члены ряда не стремятся к нулю.
Таким образом, область сходимости ряда: $|y| < 1$.
Воспользовавшись результатом п. г) примера 6, получим

$$\tilde{S}(y) = \frac{1}{(1-y)^2}, \qquad |y| < 1.$$

Возвращаясь к переменной x, имеем:

$$\tilde{S}(y) = S(x) = \frac{1}{(1-(x^2-1))^2} = \frac{1}{(2-x^2)^2}$$

при $|x^2 - 1| < 1$, т. е. $-1 < x^2 - 1 < 1$, т. е. $0 < x^2 < 2$, т. е. $0 < |x| < \sqrt{2}$.
Ответ: $S(x) = \frac{1}{(2-x^2)^2}$ при $0 < |x| < \sqrt{2}$.

Пример 8 (Демидович № 2891, дополнительный). Написать первые три отличные от нуля члена разложения в ряд Тейлора по степеням x для функции $f(x) = \operatorname{tg} x$.
Заметим, что функция $f(x)$ — нечётная, поэтому ненулевые коэффициенты будут только при нечётных степенях x, следовательно, нам необходимо выписать три первых члена с нечётными степенями x.
Запишем разложение в ряд Тейлора:

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{0} + f'(0)x + \underbrace{\frac{f''(0)}{2!}}_{0}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \underbrace{\frac{f^{IV}(0)}{4!}}_{0}x^4 + \frac{f^{V}(0)}{5!}x^5 + \cdots$$

Найдём производные необходимых порядков:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x},$$

$$f'''(x) = \frac{2\cos x}{\cos^3 x} + \frac{6\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{6(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x} = -\frac{4}{\cos^2 x} + \frac{6}{\cos^4 x},$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{8\sin x}{\cos^3 x} + \frac{24\sin x}{\cos^5 x},$$

$$f^{V}(x) = -\frac{8\cos x}{\cos^3 x} - \frac{24\sin^2 x}{\cos^4 x} + \frac{24\cos x}{\cos^5 x} + \frac{120\sin^2 x}{\cos^6 x} =$$

$$= -\frac{8}{\cos^2 x} - \frac{24\,(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x} + \frac{24}{\cos^4 x} + \frac{120\,(1-\cos^2 x)}{\cos^6 x} = \frac{16}{\cos^2 x} - \frac{120}{\cos^4 x} + \frac{120}{\cos^6 x},$$

Тогда, если функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ разложима в ряд Тейлора по степеням x (при каких x это возможно, мы выясним в курсе ТФКП), то получаем:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$$

Пример 9 (дополнительный). Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Воспользуемся результатом п. в) примера 6:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2m+1}\Bigg|_{x=1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

ДЗ 10. Демидович 1997 г. (2003 г.) № 2814, 2816, 2828, 2833, 2834, 2870, 2882, 2906, 2907, 2909, 2911, 2912.