Семинар 9

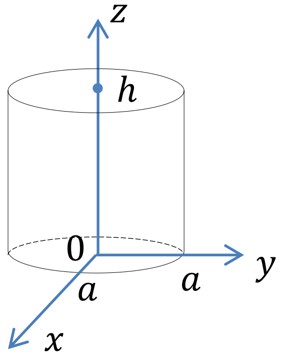
Задачи Ш.–Л. для оператора Лапласа в цилиндрических координатах

В цилиндрических координатах (r, φ, z) оператор Лапласа имеет вид (дома получить!):

$$\Delta u = \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}}_{\Delta_{r\varphi} u} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta_{r\varphi} u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

где $\Delta_{r\varphi} u$ — оператор Лапласа в полярных координатах.

Пример 1 (в цилиндре). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.:



$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \ 0 \le r < a, \ 0 < z < h, \\ u|_{r=a} = 0, \ u|_{z=0} = 0, \ u|_{z=h} = 0. \end{cases}$$

Будем искать СФ в виде:

$u(r, \varphi, z) = v(r, \varphi) Z(z) \not\equiv 0.$

Подставив это выражение в ДУ $\Delta u + \lambda u = 0$, получим:

$\Delta_{r\varphi} v(r, \varphi) \cdot Z(z) + v(r, \varphi) Z''(z) + \lambda v(r, \varphi) Z(z) = 0.$

Разделим переменные, поделив уравнение на $v(r, \varphi) Z(z)$:

$$\frac{\Delta_{r\varphi} v(r, \varphi)}{v(r, \varphi)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} - \lambda = -\nu.$$

С учётом ГУ $u|_{r=a} = 0$ для функции $v(r, \varphi)$ имеем задачу Ш.–Л.:

$$\begin{cases} \Delta_{r\varphi} v(r, \varphi) + \nu v(r, \varphi) = 0, \qquad 0 \le r < a, \\ v|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

Это задача Ш.–Л. в круге с условием Дирихле (см. семинар 6). Она имеет следующие СФ и СЗ:

$$v_{\pm nk}(r, \varphi) = J_n\left(\sqrt{\nu_k^{(n)}} r\right) \Phi_{\pm n}(\varphi),$$

где $\nu_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $J_n\left(\sqrt{\nu_k^{(n)}} a\right) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$\Phi_0(\varphi) = 1, \qquad \Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi, \qquad \Phi_{-n}(\varphi) = \sin n\varphi, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\|v_{\pm nk}\|^2 = \frac{a^2}{2} J_n'^2\left(\sqrt{\nu_k^{(n)}} a\right) \pi (1 + \delta_{n0}).$$

Теперь для функции $Z''(z)$ получим:

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \nu_k^{(n)} - \lambda = -\mu, \qquad \lambda = \nu_k^{(n)} + \mu.$$

С учётом ГУ $u|_{z=0} = 0, \ u|_{z=h} = 0$, имеем задачу Ш.–Л. на отрезке:

$$\begin{cases} Z''(z) + \mu Z(z) = 0, \qquad 0 < z < h, \\ Z(0) = 0, \qquad Z(h) = 0. \end{cases}$$

Её СЗ и СФ:

$$\mu_m = \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2, \qquad Z_m(z) = \sin\frac{\pi m z}{h}, \qquad \|Z_m\|^2 = \frac{h}{2}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Теперь СЗ исходной задачи Ш.–Л. в цилиндре имеют вид

$\lambda_{nkm} = \nu_k^{(n)} + \mu_m,$

а СФ —

$u_{\pm nkm}(r, \varphi, z) = v_{\pm nk}(r, \varphi) Z_m(z),$

$$\|u_{\pm nkm}\|^2 = \int_0^h dz \int_0^a r\,dr \int_0^{2\pi} u_{\pm nkm}^2(r,\varphi,z)\,d\varphi = \underbrace{\int_0^h Z_m^2(z)dz}_{\|Z_m\|^2} \underbrace{\int_0^a r\,dr \int_0^{2\pi} v_{\pm nk}^2(r,\varphi)\,d\varphi}_{\|v_{\pm nk}\|^2} =$$

$$= \|v_{\pm nk}\|^2 \cdot \|Z_m\|^2.$$

Можно показать, что найденные СФ образуют полную ортогональную систему в цилиндре, поэтому других ЛНЗ СФ нет.

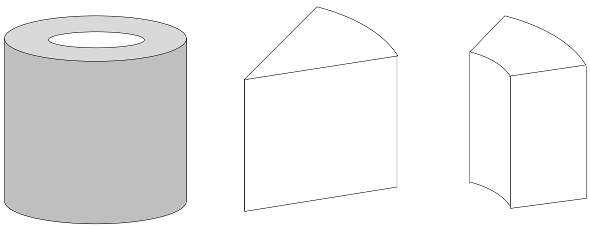
Ответ: $\lambda_{nkm} = \nu_k^{(n)} + \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2$, где $\nu_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $J_n\left(\sqrt{\nu_k^{(n)}}a\right) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$u_{\pm nkm}(r,\varphi,z) = J_n\left(\sqrt{\nu_k^{(n)}}r\right)\Phi_{\pm n}(\varphi)\sin\frac{\pi m z}{h},$$

$$\Phi_0(\varphi) = 1, \qquad \Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi, \qquad \Phi_{-n}(\varphi) = \sin n\varphi, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\|u_{\pm nkm}\|^2 = \frac{\pi a^2 h}{4}(1 + \delta_{n0}){J_n'}^2\left(\sqrt{\nu_k^{(n)}}a\right), \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Аналогично решаются задачи Ш.–Л. в частях цилиндра: цилиндрическом слое (тороиде прямоугольного сечения), секторе цилиндра, секторе тороида прямоугольного сечения.

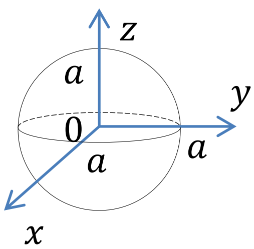


Задачи Ш.–Л. для оператора Лапласа в сферических координатах

Напомним, что в сферических координатах оператор Лапласа имеет вид (см. семинар 8):

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi} u.$$

Пример 2 (в шаре). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.:



$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \ 0 \le r < a, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

Будем искать СФ в виде:

$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi) \not\equiv 0.$

Подставив это выражение в ДУ $\Delta u + \lambda u = 0$, получим:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2R'(r)\right)Y(\theta,\varphi) + \frac{R(r)}{r^2}\Delta_{\theta\varphi} Y(\theta,\varphi) + \lambda R(r)Y(\theta,\varphi) = 0.$$

Разделим переменные, умножив уравнение на $\frac{r^2}{R(r)Y(\theta,\varphi)}$:

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2R'(r)\right)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Delta_{\theta\varphi} Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} = \nu.$$

Для функции $Y(\theta,\varphi)$ получим задачу Ш.–Л. на единичной сфере:

$$\begin{cases} \Delta_{\theta\varphi} Y(\theta,\varphi) + \nu Y(\theta,\varphi) = 0, \\ Y(\theta,\varphi+2\pi) \equiv Y(\theta,\varphi), \\ |Y|\big|_{\theta=0,\pi} < \infty. \end{cases}$$

В семинаре 8 получены её СЗ и СФ (сферические функции):

$$\nu_n = n(n+1), \qquad n = 0, 1, \dots,$$

$$Y_n^{(\pm m)}(\theta,\varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\Phi_{\pm m}(\varphi),$$

$$\Phi_0(\varphi) = 1, \qquad \Phi_m(\varphi) = \cos m\varphi\,, \qquad \Phi_{-m}(\varphi) = \sin m\varphi\,, \qquad m = 1, 2, \dots, n,$$

$$\left\|Y_n^{(\pm m)}\right\|^2 = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\pi(1+\delta_{m0}).$$

Далее, для функции $R(r)$ имеем ДУ:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \big(\lambda r^2 - n(n+1)\big)R(r) = 0.$$

В этом уравнении сделаем замену неизвестной функции:

$$R(r) = \frac{v(r)}{\sqrt{r}}.$$

Тогда

$$\frac{dR}{dr} = \frac{d}{dr}\left(v(r)\cdot\frac{1}{\sqrt{r}}\right) = \frac{v'(r)}{\sqrt{r}} - \frac{v(r)}{2r^{\frac{3}{2}}},$$

$$r^2\frac{dR}{dr} = r^{\frac{3}{2}}v'(r) - \frac{\sqrt{r}v(r)}{2},$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = r^{\frac{3}{2}}v''(r) + \frac{3}{2}\sqrt{r}v'(r) - \frac{\sqrt{r}v'(r)}{2} - \frac{v(r)}{4\sqrt{r}} = r^{\frac{3}{2}}v''(r) + \sqrt{r}v'(r) - \frac{v(r)}{4\sqrt{r}}.$$

Теперь ДУ принимает вид:

$$r^{\frac{3}{2}}v''(r) + \sqrt{r}v'(r) - \frac{v(r)}{4\sqrt{r}} + \big(\lambda r^2 - n(n+1)\big)\frac{v(r)}{\sqrt{r}} = 0.$$

Умножим его на $\sqrt{r}$:

$$r^2v''(r) + rv'(r) + \left(\lambda r^2 - n^2 - n - \frac{1}{4}\right)v(r) = 0.$$

$$r^2v''(r) + rv'(r) + \left(\lambda r^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)v(r) = 0.$$

При $\lambda = 0$ это уравнение Эйлера, которое впервые нам встретилось в семинаре 4. При $\lambda > 0$ это уравнение приводится к уравнению Бесселя порядка $n+\frac{1}{2}$ (см. семинар 6). Выпишем ОР этого ДУ:

$$v(r) = \begin{cases} Ar^{n+\frac{1}{2}} + Br^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}, & \lambda = 0, \\ AJ_{n+\frac{1}{2}}\big(\sqrt{\lambda}r\big) + BN_{n+\frac{1}{2}}\big(\sqrt{\lambda}r\big), & \lambda > 0. \end{cases}$$

Оказывается, цилиндрические функции *полуцелого* порядка выражаются через синус и косинус:

$$J_{\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin t\,, \qquad N_{\frac{1}{2}}(t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t\,,$$

$$J_{n-\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}t^n\left(-\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^n \cos t\,,\ \ N_{n-\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}t^n\left(-\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^n \sin t\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$R(r) = \frac{v(r)}{\sqrt{r}} = \begin{cases} Ar^n + Br^{-(n+1)}, & \lambda = 0, \\ A\dfrac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}} + B\dfrac{N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}}, & \lambda > 0. \end{cases}$$

Из условия ограниченности решения при $r = 0$ получим, что $B = 0$ в обоих случаях. (Заметим, что функция $\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}}$ ограничена при $r \to 0+0$, т.к. $J_\nu(t) \sim t^\nu$ при $t \to 0+0$, и следовательно, $\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}} \sim r^n$.) Тогда с точностью до постоянного множителя имеем:

$$R(r) = \begin{cases} r^n, & \lambda = 0, \\ \dfrac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}}, & \lambda > 0. \end{cases}$$

ГУ $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$ порождает ГУ $R'(a) = 0$.

а) При $\lambda = 0$:
$R'(a) = na^{n-1} = 0$, откуда $n = 0$.
Тогда
$R_{00}(r) = 1$,
$u_{000}(r,\theta,\varphi) = R_{00}(r)Y_0^{(0)}(\theta,\varphi) = 1$ — СФ, отвечающая СЗ $\lambda_0^{(0)} = 0$,
$\|u_{000}\|^2 = \dfrac{4}{3}\pi a^3$.

б) При $\lambda > 0$:

$$R'(a) = \frac{d}{dr}\left(\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}}\right)\Bigg|_{r=a} = \left(\frac{\sqrt{\lambda}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}} - \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{2r^{\frac{3}{2}}}\right)\Bigg|_{r=a} =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)}{\sqrt{a}} - \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)}{2a^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

$$\boxed{2\sqrt{\lambda}aJ'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right) - J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right) = 0.} \qquad (1)$$

Положительные корни этого уравнения являются СЗ $\lambda_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \ldots$ Им соответствуют функции

$$R_{nk}(r) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)}{\sqrt{r}}$$

и СФ исходной задачи Ш.–Л. в шаре
$u_{nk\pm m}(r,\theta,\varphi) = R_{nk}(r)Y_n^{(\pm m)}(\theta,\varphi)$.

$$\left\|u_{nk\pm m}\right\|^2 = \int_0^a r^2\,dr \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} u_{nk\pm m}^2(r,\theta,\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \underbrace{\int_0^a r^2 R_{nk}^2(r)\,dr}_{\|R_{nk}\|^2} \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} \left[Y_n^{(\pm m)}(\theta,\varphi)\right]^2 d\varphi}_{\left\|Y_n^{(\pm m)}\right\|^2} = \|R_{nk}\|^2 \left\|Y_n^{(\pm m)}\right\|^2,$$

$$\|R_{nk}\|^2 = \int_0^a r^2 R_{nk}^2(r)\,dr = \int_0^a r J_{n+\frac{1}{2}}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)dr \overset{\left(t=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)}{=} \frac{1}{\lambda_k^{(n)}} \int_0^{a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}} t J_{n+\frac{1}{2}}^2(t)\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[{J'_{n+\frac{1}{2}}}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) + \left(1 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right) J_{n+\frac{1}{2}}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\right].$$

Здесь была использована формула для цилиндрической функции ν-го порядка:

$$\int t Z_\nu^2(t)\,dt = \frac{t^2}{2}\left[{Z'_\nu}^2(t) + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) Z_\nu^2(t)\right] + \mathrm{const}.$$

Из уравнения (1) можно выразить:

$$J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{2\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a}.$$

Тогда

$$\|R_{nk}\|^2 = \frac{a^2}{2}\left[\frac{J_{n+\frac{1}{2}}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{4\lambda_k^{(n)}a^2} + \left(1 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right) J_{n+\frac{1}{2}}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\right] =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{n(n+1)}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right) J_{n+\frac{1}{2}}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right).$$

Другой вид для квадрата нормы можно получить, если выразить из уравнения (1):

$$J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) = 2\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right).$$

Тогда

$$\|R_{nk}\|^2 = 2a^2\left[\lambda_k^{(n)}a^2 - n(n+1)\right] {J'_{n+\frac{1}{2}}}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right).$$

Ответ: $\lambda_0^{(0)} = 0$, $\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $2\sqrt{\lambda}aJ'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) - J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) = 0$, $k = 1, 2, \dots$;

$u_{000}(r,\theta,\varphi) = 1$, $u_{nk\pm m}(r,\theta,\varphi) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)}{\sqrt{r}} Y_n^{(\pm m)}(\theta,\varphi)$, $n = 0, 1, \dots$, $m = 0, 1, \dots, n$;

$\|u_{000}\|^2 = \frac{4}{3}\pi a^3$,

$$\|u_{nk\pm m}\|^2 = \left(1 - \frac{n(n+1)}{\lambda_k^{(n)} a^2}\right) J_{n+\frac{1}{2}}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\frac{a^2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\pi(1+\delta_{m0}) = 2a^2\left[\lambda_k^{(n)}a^2 - n(n+1)\right]{J'_{n+\frac{1}{2}}}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\frac{a^2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\pi(1+\delta_{m0}).$$

ДЗ 9. Найти СЗ, СФ и квадрат нормы СФ: БК с. 63 № 7(г), с. 64 № 8(б,в), 9(г), а также в шаре с ГУ:

а) $u|_{r=a} = 0$,

б) $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial r} + hu\right)\right|_{r=a} = 0,\ h = \text{const} > 0.$