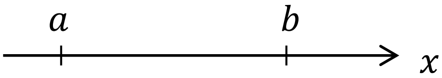
Семинар 2

Задачи Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа в прямоугольных областях

(Начально)-краевые задачи для уравнений математической физики во многих случаях сводятся к задачам Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа, поэтому сначала нужно научиться решать эти задачи в различных областях.

Отрезок



$$\boxed{\begin{array}{l} y''(x) + \lambda y(x) = 0,\ a < x < b, \\ +\ \text{однородные ГУ при } x = a, x = b. \end{array}} \qquad \begin{array}{r} (1) \\ (2) \end{array}$$

Требуется найти все значения λ, при которых существуют нетривиальные решения $y(x) \not\equiv 0$ данной краевой задачи. Такие λ называются собственными значениями (СЗ), а нетривиальные решения $y(x)$ — собственными функциями (СФ) задачи Штурма–Лиувилля. Задачи Штурма–Лиувилля на отрезке рассматривались в прошлом семестре.

Т. (свойства СЗ и СФ задачи Штурма–Лиувилля).

1. В случае однородных ГУ
   Дирихле: $y(a) = 0,\ y(b) = 0,$
   Неймана: $y'(a) = 0,\ y'(b) = 0,$
   третьего рода: $y'(a) - h_1 y(a) = 0,\ y'(b) + h_2 y(b) = 0$ (при $h_1 > 0, h_2 > 0$),
   а также смешанных ГУ (любая комбинация перечисленных) СЗ задачи Штурма–Лиувилля (1), (2) *неотрицательны:* $\boxed{\lambda \geq 0.}$
   При этом *нулевое* СЗ $\lambda = 0$ есть *тогда и только тогда*, когда *на всей границе* ставится условие Неймана:
   $y'(a) = 0, \qquad y'(b) = 0.$
2. СФ задачи Штурма–Лиувилля (1), (2), отвечающие различным СЗ, *ортогональны* (с весом 1) на отрезке $[a, b]$.

Т. (Стеклова). Если $f(x) \in C^2[a, b]$ и удовлетворяет однородным ГУ (2), то ция $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье по ортогональной системе СФ задачи Штурма–Лиувилля (1), (2):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x), \qquad x \in [a, b],$$

причём коэффициенты ряда вычисляются по формуле:

$$f_n = \frac{(f, y_n)}{\|y_n\|^2} = \frac{1}{\|y_n\|^2} \int_a^b f(x) y_n(x)\, dx, \qquad \|y_n\|^2 = (y_n, y_n) = \int_a^b y_n^2(x)\, dx.$$

Замечание: если функция $f(x)$ не удовлетворяет ГУ, то указанный ряд Фурье будет сходиться к $f(x)$ во всех внутренних точках (a, b).

Замечание: аналогичные теоремы справедливы в двумерных и трёхмерных ограниченных областях.

Пример 1 (смешанные ГУ). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.: $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \ 0 < x < l, \\ y(0) = 0, \ y(l) + y'(l) = 0. \end{cases}$

В силу приведённой выше теоремы все СЗ *положительны:* $\lambda > 0$.

Тогда ОР ДУ:

$y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$

Из ГУ:

$\begin{cases} y(0) = A = 0, \\ y(l) + y'(l) = A\cos\sqrt{\lambda}l + B\sin\sqrt{\lambda}l - A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$

В силу $A = 0$ имеем:

$B\left(\sin\sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l\right) = 0.$

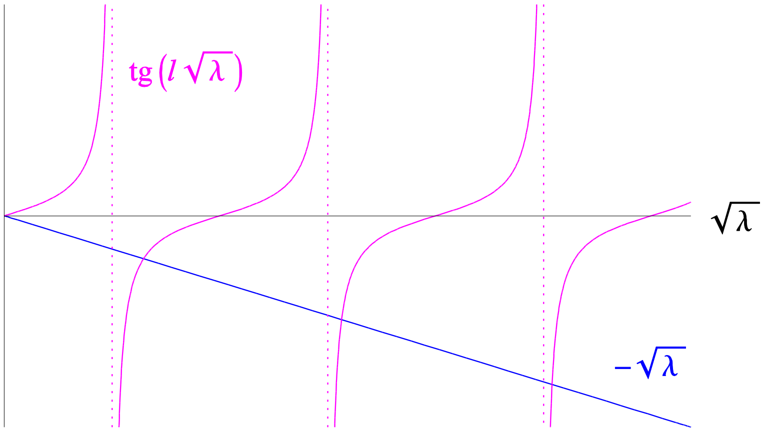
Нетривиальные решения будут, только если

$\sin\sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0,$

т.е.

$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\,l = -\sqrt{\lambda}.$

Это трансцендентное уравнение имеет бесконечно много положительных корней λ_n, $n = 1, 2, \ldots$ (см. рис.). Им соответствуют СФ



$y_n(x) = B\sin\sqrt{\lambda_n}x, \qquad B \neq 0.$

Поскольку СФ *всегда* определены с точностью до ненулевого множителя, мы в дальнейшем будем этот множитель опускать, т.е. выписывать только систему ЛНЗ СФ.

Ответ: $\lambda_n > 0$ — корни уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l = -\sqrt{\lambda}$, $n = 1, 2, \ldots$;

$y_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x.$

ДЗ. Разложить функцию $f(x) = -\frac{x}{l}$ в ряд Фурье по ортогональной системе функций $y_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x$ на отрезке $[0, l]$.

Пример 2 (периодические ГУ). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.: $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ y(x + 2l) \equiv y(x). \end{cases}$

Требуется найти все $2l$-периодические нетривиальные решения ДУ.

1) $\lambda < 0$.

   $y(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}.$

   При $|A| + |B| \neq 0$ функция $y(x)$ не может быть периодической, т.к. она неограничена. (В самом деле, непрерывная периодическая функция ограничена на отрезке $[0, 2l]$, а следовательно, и на всей вещественной оси.) Поэтому СФ и СЗ нет.

2) $\lambda = 0$.

   $y(x) = Ax + B.$

   При $A \neq 0$ функция $y(x)$ неограничена. При $A = 0$: $y(x) = B$ — $2l$-периодическая функция.

3) $\lambda > 0$.

   $y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x = C\sin\left(\sqrt{\lambda}x + \varphi\right).$

При $C \neq 0$ у этой функции наименьший период $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$. Чтобы она имела период $2l$, нужно, чтобы в $2l$ укладывалось целое число периодов T:

$$2l = n\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Соответствующие СФ:

$$y_n(x) = A_n \cos\frac{\pi n x}{l} + B_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \qquad |A_n| + |B_n| \neq 0.$$

Поскольку каждому СЗ $\lambda_n > 0$ отвечают две ЛНЗ СФ, мы будем обозначать их следующим образом:

$$y_n(x) = \cos\frac{\pi n x}{l}, \qquad y_{-n}(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Ответ: $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $y_0(x) = 1$, $y_n(x) = \cos\frac{\pi n x}{l}$, $y_{-n}(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$, $n = 1, 2, \dots$

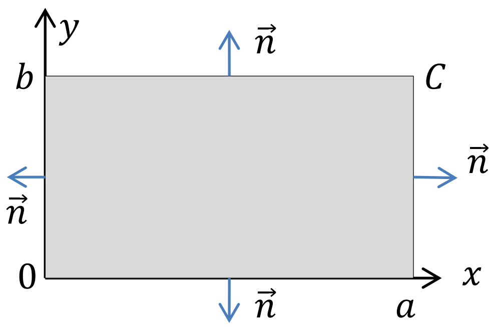
ДЗ: убедиться, что эти СФ ортогональны на $[0, 2l]$, и вычислить квадраты их норм.

В частности, при $l = \pi$ имеем:

$$\lambda_n = n^2, \qquad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$y_0(x) = 1, \qquad y_n(x) = \cos nx, \qquad y_{-n} = \sin nx, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Пример 3 (прямоугольник). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.:



$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \qquad 0 < x < a, \qquad 0 < y < b; \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_C = 0. \end{cases}$$

Здесь $u = u(x, y)$.

ГУ Неймана можно записать в виде:

$$-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \qquad -\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0.$$

Задача решается **методом разделения переменных.** Будем искать $u(x, y)$ в виде

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \not\equiv 0.$$

Подставим это выражение в ДУ, учтя, что $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + \lambda X(x)Y(y) = 0.$$

Поделим на $X(x)Y(y) \not\equiv 0$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda = 0.$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda.$$

Это должно выполняться везде внутри прямоугольника: $0 < x < a$, $0 < y < b$. Но левая часть — это функция только переменной x, а правая часть — только переменной y. Эти функции могут быть тождественно равны только тогда, когда они равны константе. Тогда

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu, \qquad -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\mu.$$

Для функции $X(x)$ получаем уравнение

$X''(x) + \mu X(x) = 0, \qquad x \in (0, a).$

Теперь подставим $u(x, y) = X(x)Y(y)$ в ГУ $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0$ и получим ГУ для $X(x)$:

$X'(0)\cancel{Y(y)} = 0, \qquad X'(a)\cancel{Y(y)} = 0.$

Таким образом, имеем задачу Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0, \qquad 0 < x < a, \\ X'(0) = 0, \qquad X'(a) = 0. \end{cases}$$

Дома вы убедитесь в том, что её СЗ $\mu_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2$, а СФ — $X_n(x) = \cos\frac{\pi n x}{a}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Для функции $Y(y)$ имеем уравнение:

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda + \mu = -\nu, \qquad \lambda = \mu + \nu.$$

С учётом ГУ получим задачу Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} Y''(y) + \nu Y(y) = 0, \qquad 0 < y < b, \\ Y'(0) = 0, \qquad Y'(b) = 0. \end{cases}$$

Она аналогична задаче для $X(x)$ и имеет СЗ $\nu_m = \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2$ и СФ $Y_m(y) = \cos\frac{\pi m y}{b}$, $m = 0, 1, 2, \dots$

Тогда СЗ задачи Штурма–Лиувилля для прямоугольника:

$\lambda_{nm} = \mu_n + \nu_m = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2$, а СФ:

$$u_{nm}(x, y) = X_n(x)Y_m(y) = \cos\frac{\pi n x}{a} \cdot \cos\frac{\pi m y}{b}.$$

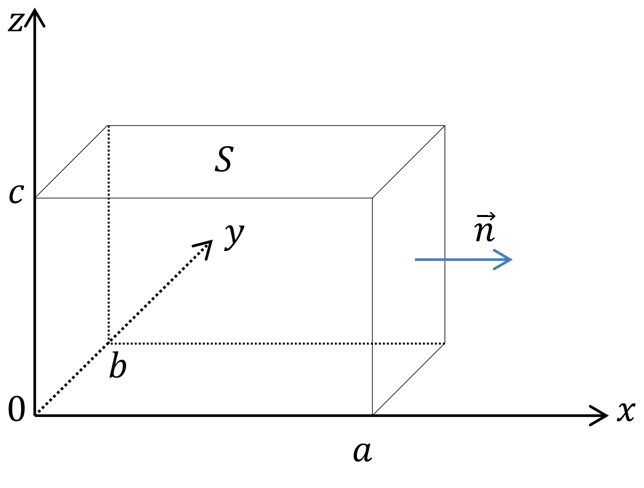
Все ли ЛНЗ СФ мы нашли? Можно показать, что найденные СФ образуют замкнутую ортогональную систему функций в прямоугольнике (это следует из замкнутости систем СФ $\{X_n(x)\}$ и $\{Y_m(y)\}$ на отрезках $[0, a]$ и $[0, b]$, соответственно). Из замкнутости следует полнота. Если бы существовали другие ЛНЗ СФ, то они были бы ортогональны найденным (или их можно было бы сделать ортогональными по алгоритму Грама–Шмидта), но тогда в силу полноты нашей системы эти СФ были бы тривиальными, что невозможно. Поэтому других ЛНЗ СФ нет.

Ответ: $\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2$, $u_{nm}(x, y) = \cos\frac{\pi n x}{a} \cdot \cos\frac{\pi m y}{b}$, $n, m = 0, 1, 2, \dots$

ДЗ: вычислить квадраты норм СФ по формуле

$$\|u_{nm}\|^2 = \int_0^a dx \int_0^b u_{nm}^2(x, y)\, dy = \int_0^a X_n^2(x)\, dx \int_0^b Y_m^2(y)\, dy = \|X_n\|^2 \cdot \|Y_m\|^2.$$

Пример 4 (прямоугольный параллелепипед). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.:



$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \; 0 < x < a, \; 0 < y < b, \; 0 < z < c; \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = 0. \end{cases}$$

Здесь $u = u(x, y, z)$. ГУ Неймана можно записать в виде:

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=a} = 0, \qquad -\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=b} = 0,$$
$$-\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{x=c} = 0.$$
Будем искать $u(x,y,z)$ в виде
$u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) \not\equiv 0.$
Подставив это в ДУ и поделив на $X(x)Y(y)Z(z)$, получим
$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + \lambda = 0.$$
Отсюда
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} - \lambda = -\mu.$$
С учётом ГУ, получим задачу Ш.–Л. для функции $X(x)$:
$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0, \qquad 0 < x < a, \\ X'(0) = 0, \qquad X'(a) = 0. \end{cases}$$
Она имеет СЗ $\mu_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2$ и СФ $X_n(x) = \cos\frac{\pi n x}{a}$, $n = 0, 1, 2, \dots$
В уравнении
$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} - \lambda = -\mu$$
разделим переменные ещё раз:
$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} - \lambda + \mu = -\nu.$$
Тогда имеем задачу Ш.–Л. для функции $Y(y)$:
$$\begin{cases} Y''(y) + \nu Y(y) = 0, \qquad 0 < y < b, \\ Y'(0) = 0, \qquad Y'(b) = 0. \end{cases}$$
Она имеет СЗ $\nu_m = \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2$ и СФ $Y_m(y) = \cos\frac{\pi m y}{b}$, $m = 0, 1, 2, \dots$
Для функции $Z(z)$:
$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda + \mu + \nu = -\kappa, \qquad \lambda = \mu + \mu + \kappa,$$
и получаем задачу Ш.–Л.:
$$\begin{cases} Z''(z) + \kappa Z(z) = 0, \qquad 0 < z < c, \\ Z'(0) = 0, \qquad Z'(c) = 0. \end{cases}$$
Она имеет СЗ $\kappa_k = \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2$ и СФ $Z_k(z) = \cos\frac{\pi k z}{c}$, $k = 0, 1, 2, \dots$
Тогда СЗ задачи Ш.–Л. в прямоугольнике:
$$\lambda_{nmk} = \mu_n + \nu_m + \kappa_k = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2, \qquad n, m, k = 0, 1, 2, \dots,$$
а её СФ —
$$u_{nmk}(x,y,z) = X_n(x)Y_m(y)Z_k(z) = \cos\frac{\pi n x}{a} \cdot \cos\frac{\pi m y}{b} \cdot \cos\frac{\pi k z}{c}.$$
Ответ: $\lambda_{nmk} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2$, $u_{nmk}(x,y,z) = \cos\frac{\pi n x}{a} \cdot \cos\frac{\pi m y}{b} \cdot \cos\frac{\pi k z}{c}$,
$n, m, k = 0, 1, 2, \dots$
ДЗ: вычислить $\|u_{nmk}\|^2$.

ДЗ 2. Доделать примеры 1–4.
Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л. для уравнения
$y''(x) + \lambda y(x) = 0$
на отрезке $[0, l]$ с ГУ:

а) $y(0) = 0, y(l) = 0$;
б) $y'(0) = 0, y'(l) = 0$;
в) $y(0) = 0, y'(l) = 0$;
г) $y'(0) = 0, y(l) = 0$;
д) $y'(0) - y(0) = 0, y'(l) = 0$.

БК с. 62 № 2 (в,г,д), с. 63 № 6(а).
Во всех этих задачах вычислить также квадраты норм СФ.