Семинар 24

Пример 1 (Демидович № 3817, самостоятельно). Вычислить $I(p)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin px}{x}\right)^2dx$.

1. Заметим, что функция $I(p)$ является чётной (относительно p), $I(0)=0$, поэтому достаточно найти $I(p)$ при $p>0$.

2. Продифференцируем (формально) по параметру p под знаком интеграла, а затем обоснуем возможность такого дифференцирования:

$$I'(p)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}\left[\left(\frac{\sin px}{x}\right)^2\right]dx=\int_0^{+\infty}2\frac{\sin px}{x}\cdot\frac{x\cos px}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{2\sin px\cos px}{x}dx=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2px}{x}dx=D(2p)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}p.$$

Тогда при $p>0$: $I(p)=\frac{\pi}{2}$, $I(p)=\frac{\pi}{2}p+C$.

2. Теперь обоснуем возможность дифференцирования по параметру под знаком интеграла при $p>0$:

1) функция $f(x,p)=\left(\frac{\sin px}{x}\right)^2$ непрерывна (после доопределения при $x=0$ по непрерывности значением p^2) при $x\geq 0$, $p\in\mathbb{R}$;
функция $f_p(x,p)=\frac{\sin 2px}{x}$ тоже непрерывна (доопределяется при $x=0$ предельным значением $2p$) при $x\geq 0$, $p\in\mathbb{R}$;

2) интеграл $I(p)$ сходится даже равномерно на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса, т. к. $|f(x,p)|=\left(\frac{\sin px}{x}\right)^2\leq\frac{1}{x^2}=F(x)$ при $x>0$ и $\forall p$, а мажорантный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится;

3) интеграл $\int_0^{+\infty}f_p(x,p)\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2px}{x}dx$ сходится равномерно на множестве $p\geq p_0>0$ по признаку Дирихле:

   а) $\left|\int_0^A\sin 2px\,dx\right|=\left|-\frac{\cos 2px}{2p}\Big|_0^A\right|=\left|\frac{1-\cos 2pA}{2p}\right|\leq\frac{1}{p}\leq\frac{1}{p_0}$ $\forall p\geq p_0$, $\forall A$;

   б) функция $\frac{1}{x}$ монотонно убывает по переменной x;

   в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sup\limits_{p\geq p_0}\left|\frac{1}{x}\right|=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

Поэтому $I'(p)$ действительно можно находить с помощью дифференцирования под знаком интеграла при $p\geq p_0$, а в силу произвольности числа $p_0>0$ — при $\forall p>0$.

Таким образом мы доказали, что $I(p)=\frac{\pi}{2}p+C$ при $p>0$.

3. Найдём неизвестную константу C.

Поскольку подынтегральная функция $f(x,p)=\left(\frac{\sin px}{x}\right)^2$ непрерывна (при $x=0$ доопределяется предельным значением p^2) и интеграл $I(p)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ (см. п. 2), то функция $I(p)$ непрерывна при всех p.

В частности, $0=I(0)=\lim\limits_{p\to 0+0}I(p)=\lim\limits_{p\to 0+0}\left(\frac{\pi}{2}p+C\right)=C$.

Итак, $I(p)=\frac{\pi}{2}p$ при $p\geq 0$.

4. В силу чётности подынтегральной функции относительно параметра p, при $p<0$ получаем:

$I(p) = I(-|p|) = I(|p|) = \dfrac{\pi}{2}|p|.$

Окончательно имеем:

$$I(p) = \frac{\pi}{2}|p|, \qquad p \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $I(p) = \frac{\pi}{2}|p|,\ p \in \mathbb{R}.$

Эйлеровы интегралы

1) *Гамма-функция* Эйлера: $\boxed{\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx}$, $p > 0$.

   При $p > 0$ она определена, непрерывна, бесконечное число раз дифференцируема. Её можно дифференцировать по p под знаком интеграла сколько угодно раз.

   Формула понижения: $\boxed{\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)}$, $p > 0$. (Доказывается с помощью интегрирования по частям.)

   $\boxed{\Gamma(1) = 1.}$ (Вычисляется непосредственно.)

   $\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. (Следует из формулы понижения.)

   Формула дополнения: $\boxed{\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}}$, $0 < p < 1$. (Доказывается методами ТФКП, см. пример 5 семинара 20.)

2) *Бета-функция* Эйлера: $\boxed{\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}$, $p > 0, q > 0$.

   При $p > 0$, $q > 0$ она определена, непрерывна, бесконечное число раз дифференцируема. Её можно дифференцировать по p и по q под знаком интеграла сколько угодно раз.

   Симметричность: $\boxed{\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p).}$ (Доказывается с помощью замены переменной.)

   Связь с гамма-функцией Эйлера: $\boxed{\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.}$

Пример 2 (Демидович № 3859, самостоятельно).

Вычислить интеграл $I(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x^p}\,dx, p > 0.$

Заметим, что интеграл похож на гамма-функцию. Попробуем его к ней свести. Сделаем замену:

$x^p = t, x = t^{\frac{1}{p}}, dx = \frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}\,dt.$

$$I(p) = \frac{1}{p}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{1}{p}-1}\,dt = \frac{\Gamma(1/p)}{p}.$$

Значение $\Gamma(1/p)$ для *произвольного* $p > 0$ мы вычислить не можем, поэтому оставим ответ в таком виде.

Ответ: $I(p) = \frac{\Gamma(1/p)}{p}.$

Отсюда получим значение интеграла Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2I(2) = 2\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Вычислим $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, воспользовавшись формулой дополнения:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}.$$

$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \Rightarrow \boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$. (Поскольку из определения гамма-функции видно, что при вещественных p её значения положительны.)

Тогда $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

Пример 3 (Демидович № 3844, самостоятельно). Вычислить $I(p) = \int_0^p x^2\sqrt{p^2-x^2}\,dx$, $p > 0$.

Заметим, что

$$I(p) = \int_0^p x^2\sqrt{p^2-x^2}\,dx = p\int_0^p x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{p^2}}\,dx.$$

А последний интеграл похож на бета-функцию. Сделаем замену:

$\left(\frac{x}{p}\right)^2 = t,\ x = p\sqrt{t},\ dx = \frac{p}{2\sqrt{t}}dt.$

$$I(p) = p\int_0^1 p^2 t\sqrt{1-t}\,\frac{p}{2\sqrt{t}}dt = \frac{p^4}{2}\int_0^1 \sqrt{t}\,\sqrt{1-t}\ dt = \frac{p^4}{2}\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{p^4}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}.$$

$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \Gamma(3) = 2! = 2.$

$$I(p) = \frac{p^4\pi}{16}.$$

Ответ: $I(p) = \frac{p^4\pi}{16}$.

Пример 4 (самостоятельно). Вычислить $I(p) = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+1}$, $p > 1$.

Сделаем замену:

$\frac{1}{x^p+1} = t,\ x = \left(\frac{1}{t}-1\right)^{1/p},\ dx = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{\frac{1}{p}-1}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\frac{1}{p}\frac{(1-t)^{\frac{1}{p}-1}}{t^{\frac{1}{p}+1}}dt.$

$$I(p) = \frac{1}{p}\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{p}-1}t^{-\frac{1}{p}}\,dt = \frac{1}{p}\mathrm{B}\left(1-\frac{1}{p},\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}}.$$

Ответ: $I(p) = \frac{\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}}$.

Пример 5 (самостоятельно). Вычислить $I(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\ln x\,dx$, $p > 0$.

Заметим, что $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\ln x\,dx = \frac{d}{dp}\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx = \frac{d}{dp}\Gamma(p) = \Gamma'(p)$, $p > 0$, поскольку гамма-функцию можно дифференцировать под знаком интеграла.

Ответ: $I(p) = \Gamma'(p)$.

Пример 6 (самостоятельно). Выразить бета-функцию через несобственный интеграл по полупрямой $[0, +\infty)$.

$$\mathrm{B}(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

Сделаем замену:

$x = \frac{1}{t+1}$, $dx = -\frac{dt}{(t+1)^2}$, $t = \frac{1}{x} - 1$.

$$\mathrm{B}(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1}\right)^{p-1} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)^{q-1} \frac{dt}{(t+1)^2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{q-1}}{(t+1)^{p+q}}\,dt.$$

Поскольку $\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p)$, то справедливо также представление

$$\mathrm{B}(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}}\,dt.$$

Ответ: $\mathrm{B}(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{q-1}}{(t+1)^{p+q}}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}}\,dt$.

ДЗ 24. Демидович № 3845–3853, 3856, 3860, 3861, 3863.