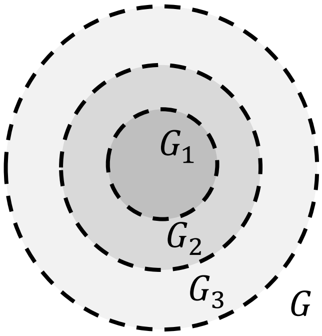
# Семинар 21

## Кратные несобственные интегралы

Рассмотрим сначала двойной интеграл по неограниченной области.




Пусть функция $f(x,y)$ определена в неограниченной области $G \subset \mathbb{R}^2$ и интегрируема (по Риману) в любой квадрируемой ограниченной подобласти области $G$. Пусть $\{G_n\}$ — последовательность квадрируемых ограниченных областей, *монотонно исчерпывающих* область $G$, т. е. таких, что $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset G_{n+1} \subset \cdots$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$. Тогда

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{G_n} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Если существует *конечный* предел и он *не зависит* от выбора последовательности $\{G_n\}$, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*.

**Т. 1.** Если $f(x,y) \geq 0$ в области $G$ и существует *конечный* предел $\lim\limits_{n\to\infty} \iint_{G_n} f(x,y)\,dx\,dy$ *хотя бы для одной* последовательности $\{G_n\}$ квадрируемых ограниченных областей, монотонно исчерпывающих область $G$, то несобственный интеграл $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$ сходится (т. е. предел не будет зависеть от выбора последовательности $\{G_n\}$).

**Т. 2.** $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$ сходится $\Leftrightarrow$ $\iint_G |f(x,y)|\,dx\,dy$ сходится.

Таким образом, для двойного несобственного интеграла *сходимость* эквивалентна *абсолютной сходимости* (в отличие от одномерного несобственного интеграла, который может сходиться *условно*).

Аналогично определяется тройной несобственный интеграл. Так же (через монотонно исчерпывающую последовательность областей) определяются кратные несобственные интегралы от неограниченной функции по ограниченной области. Для всех этих интегралов справедливы теоремы 1 и 2.

**Пример 1.** Вычислить интеграл *Пуассона*: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Заметим, что в силу чётности подынтегральной функции:

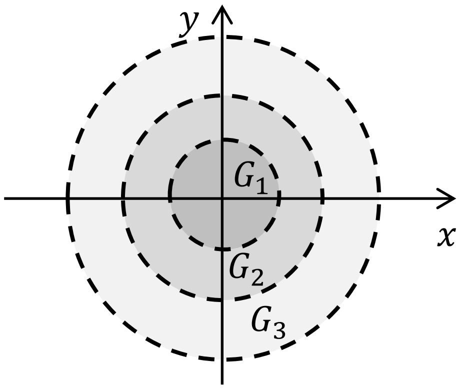
$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx}_{x=-t\ \Rightarrow\ \int_{+\infty}^{0} e^{-(-t)^2}\,d(-t) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt} + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ сходится, т. к. функция $1/e^{x^2}$ убывает на бесконечности быстрее $1/x^2$.

После того как мы установили сходимость интеграла Пуассона, приступим к его вычислению. Рассмотрим вспомогательный двойной интеграл:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Вычислим его по определению.




Рассмотрим последовательность вложенных кругов
$G_n$: $x^2 + y^2 < n^2$, $\quad n = 1, 2, \ldots$
Последовательность квадрируемых ограниченных областей $\{G_n\}$ монотонно исчерпывает область $\mathbb{R}^2$.
Вычислим интеграл по $G_n$:

$$\iint\limits_{G_n} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_0^n d\rho \int\limits_0^{2\pi} e^{-\rho^2}\rho\,d\varphi = \int\limits_0^n e^{-\rho^2}\rho\,d\rho \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}.$$

Здесь мы перешли к полярным координатам:
$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $0 \le \rho < n$, $0 \le \varphi < 2\pi$.
Далее,

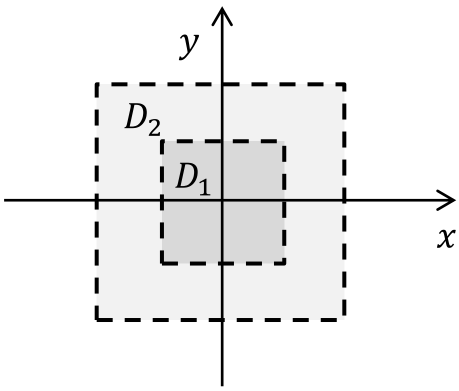
$$\int e^{-\rho^2}\rho\,d\rho = -\frac{1}{2}\int e^{-\rho^2}\,d(-\rho^2) = -\frac{e^{-\rho^2}}{2} + \text{const},$$

откуда получаем

$$\iint\limits_{G_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = 2\pi\left(-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right)\Bigg|_0^n = \pi\left(1 - e^{-n^2}\right).$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\iint_{G_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi$ и подынтегральная функция $e^{-x^2-y^2}$ неотрицательна, то, согласно теореме 1:

$$\exists \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi.$$




Теперь установим связь между вычисленным двойным несобственным интегралом и интегралом Пуассона. Рассмотрим другую последовательность квадрируемых ограниченных областей, монотонно исчерпывающих $\mathbb{R}^2$, — вложенных квадратов
$D_n$: $-n < x < n$, $\quad -n < y < n$, $\quad n = 1, 2, \ldots$
Тогда, сведя интеграл к повторному, получим:

$$\iint\limits_{D_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_{-n}^{n} dx \int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2-y^2}\,dy =$$

$$= \underbrace{\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx}_{I_n} \underbrace{\int\limits_{-n}^{n} e^{-y^2}\,dy}_{I_n} = I_n^2.$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} I_n^2 = \pi$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \sqrt{\pi}$. Но

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = I.$$

Отсюда получаем

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}, \qquad \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Запомним этот важный результат.

*Ответ:* $\sqrt{\pi}$.

## Собственные интегралы с параметром

Пусть функция $f(x,p)$ задана в прямоугольнике $a \le x \le b$, $c \le p \le d$, и при каждом фиксированном $p \in [c;\ d]$ интегрируема в собственном смысле (по Риману) по переменной $x$ на отрезке $[a;\ b]$. Тогда

$$I(p) = \int\limits_{a}^{b} f(x,p)\,dx$$

является функцией переменной $p \in [c;\ d]$ (собственный интеграл, зависящий от параметра $p$).

**Т. (о непрерывной зависимости собственного интеграла от параметра).** Если функция $f(x,p)$ непрерывна в прямоугольнике $a \le x \le b$, $c \le p \le d$, то $I(p)$ непрерывен на отрезке $p \in [c;\ d]$.

**Следствие.** При условиях предыдущей теоремы

$$\lim_{p\to p_0} \int\limits_{a}^{b} f(x,p)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x,p_0)\,dx, \qquad p_0 \in [c;\ d].$$

**Т. (о дифференцировании собственного интеграла по параметру).** Если функции $f(x,p)$ и $f_p(x,p)$ непрерывны в прямоугольнике $a \le x \le b$, $c \le p \le d$, то

$$\exists I'(p) = \frac{dI(p)}{dp} = \frac{d}{dp}\int\limits_{a}^{b} f(x,p)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f_p(x,p)\,dx, \qquad p \in [c;\ d].$$

**Т. (об интегрировании собственного интеграла по параметру).** Если функция $f(x,p)$ непрерывна в прямоугольнике $a \le x \le b$, $c \le p \le d$, то

$$\exists \int\limits_{c}^{d} I(p)\,dp = \int\limits_{c}^{d} dp \int\limits_{a}^{b} f(x,p)\,dx = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x,p)\,dp.$$

**Пример 2 (самостоятельно).** Найти $I'(p)$, если $I(p) = \int_1^2 \ln px\,dx$, где $p > 0$.

Подынтегральная функция $f(x,p) = \ln px$ и её частная производная $f_p(x,p) = \frac{1}{p}$ непрерывны при $x \in [1;\ 2]$ и $p > 0$, поэтому

$$I'(p) = \int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{p} = \frac{1}{p}.$$

Этот результат можно было бы получить непосредственно, т. к.

$$I(p) = \int_1^2 \ln px\,dx = \int_1^2 (\ln p + \ln x)\,dx = \underbrace{\int_1^2 \ln p\,dx}_{\ln p} + \underbrace{\int_1^2 \ln x\,dx}_{\text{не зависит от } p}.$$

*Ответ:* $\frac{1}{p}$.

**Пример 3 (без вывода).** Найти $I'(p)$, если $I(p) = \int_{x_1(p)}^{x_2(p)} f(x,p)\,dx$, и функции $f(x,p)$, $f_p(x,p)$ непрерывны, а функции $x_1(p)$ и $x_2(p)$ — дифференцируемы в рассматриваемой области.
Будем рассматривать $I(p)$ как сложную функцию параметра $p$:
$I(p) = F\big(p, x_1(p), x_2(p)\big)$, где $F(p, x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x,p)\,dx$.
Тогда

$$I'(p) = \frac{d}{dp} F\big(p, x_1(p), x_2(p)\big) =$$

$$= \frac{\partial F\big(p, x_1(p), x_2(p)\big)}{\partial p} + \frac{\partial F\big(p, x_1(p), x_2(p)\big)}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1(p)}{dp} + \frac{\partial F\big(p, x_1(p), x_2(p)\big)}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2(p)}{dp} =$$

$$= \int_{x_1(p)}^{x_2(p)} f_p(x,p)\,dx + f(x_2(p),p)x_2'(p) - f(x_1(p),p)x_1'(p).$$

Таким образом,

$$\boxed{\frac{d}{dp}\int_{x_1(p)}^{x_2(p)} f(x,p)\,dx = \int_{x_1(p)}^{x_2(p)} f_p(x,p)\,dx + f(x_2(p),p)x_2'(p) - f(x_1(p),p)x_1'(p).}$$

**Пример 4 (самостоятельно).** Найти $I'(p)$, если $I(p) = \int_1^p \ln px\,dx$, где $p > 0$.

$$I'(p) = \int_1^p \frac{dx}{p} + \ln p^2 = 1 - \frac{1}{p} + 2\ln p.$$

*Ответ:* $1 - \frac{1}{p} + 2\ln p$.

**Пример 5 (Демидович № 3718а, самостоятельно).** Найти $I'(p)$, если $I(p) = \int_{\sin p}^{\cos p} e^{p\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

$$I'(p) = \int_{\sin p}^{\cos p} e^{p\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,dx + e^{p\sqrt{1-\cos^2 p}} \cdot (-\sin p) - e^{p\sqrt{1-\sin^2 p}} \cdot \cos p =$$

$$= \int_{\sin p}^{\cos p} e^{p\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,dx - e^{p|\sin p|}\sin p - e^{p|\cos p|}\cos p.$$

*Ответ:* $\int_{\sin p}^{\cos p} e^{p\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,dx - e^{p|\sin p|}\sin p - e^{p|\cos p|}\cos p$.

**Пример 6 (Демидович № 3718в, самостоятельно).** Найти $I'(p)$, если

$$I(p) = \int_0^p \frac{\ln(1+px)}{x}\,dx, \qquad p > 0.$$

Заметим, что данный интеграл является собственным, т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+px)}{x} = p$. Доопределим подынтегральную функцию $f(x,p) = \frac{\ln(1+px)}{x}$ по непрерывности при $x = 0$. Тогда функция $f(x,p)$ будет непрерывна в некотором прямоугольнике $0 < p_1 \le p \le p_2$, $0 \le x \le p_2$. Её частная производная $f_p(x,p) = \frac{x}{x(1+px)} = \frac{1}{1+px}$ также будет непрерывна в этом прямоугольнике, и

$$I'(p) = \int_0^p \frac{dx}{1+px} + \frac{\ln(1+p^2)}{p} = \frac{\ln(1+px)}{p}\bigg|_{x=0}^{x=p} + \frac{\ln(1+p^2)}{p} = \frac{2\ln(1+p^2)}{p}.$$

*Ответ:* $\frac{2\ln(1+p^2)}{p}$.

**Пример 7 (Демидович № 3737).** Вычислить $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx$, где $a, b > 0$.

Подумаем, на что похоже подынтегральное выражение.

Заметим, что $\frac{\partial}{\partial t}(x^t) = x^t \ln x$, т. е. $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x^t}{\ln x}\right) = x^t$, откуда $\int x^t\,dt = \frac{x^t}{\ln x} + \text{const}$, поэтому $\int_a^b x^t\,dt = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$.

Рассмотрим $F(x) = \int_a^b x^t\,dt$, где $x$ — параметр. Подынтегральная функция $f(t,x) = x^t$ непрерывна в прямоугольнике $a \le t \le b$, $0 \le x \le 1$, поэтому функцию $F(x)$ можно интегрировать по $x$ на отрезке $[0;\ 1]$ (под знаком интеграла):

$$\int_0^1 F(x)\,dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^t\,dt = \int_a^b dt \underbrace{\int_0^1 x^t\,dx}_{\left.\frac{x^{t+1}}{t+1}\right|_{x=0}^{x=1}} = \int_a^b \frac{dt}{t+1} = \ln(t+1)|_a^b =$$

$$= \ln(b+1) - \ln(a+1) = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

С другой стороны,

$$\int_0^1 F(x)\,dx = \int_0^1 dx \underbrace{\int_a^b x^t\,dt}_{\frac{x^b - x^a}{\ln x}} = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = I.$$

Значит, $I = \ln\frac{b+1}{a+1}$.

*Ответ:* $\ln\frac{b+1}{a+1}$.

**ДЗ 21.** Демидович № 3713(б), 3715, 3717, 3718(б,д), 3804, 4172, 4187, 4197, 4199.