Семинар 15

Достаточные условия экстремума в задаче с закреплёнными концами

Итак, локальный экстремум функционала

$$V[y] = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$$

с условиями

$y(a) = A$, $y(b) = B$ (закреплённые концы)

может достигаться *только* на решениях краевой задачи для уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0, \qquad x \in (a;\ b), \\ y(a) = A, \qquad y(b) = B. \end{cases}$$

Это НУЭ. Пусть $y_0(x)$ — решение этой краевой задачи (*исследуемая экстремаль*). Для того чтобы проверить, будет ли функционал действительно достигать экстремума на функции $y_0(x)$, нужны достаточные условия экстремума (ДУЭ).

Прежде всего необходимо включить исследуемую экстремаль в *поле экстремалей*.

Рассмотрим область G на плоскости Oxy, содержащую кривую $y = y_0(x)$, $x \in [a;\ b]$.

Поскольку уравнение Эйлера, в общем случае, является ОДУ 2-го порядка, его ОР — это двухпараметрическое семейство кривых (экстремалей):

$y = y(x, C_1, C_2)$.

Из этого семейства можно выделить однопараметрическое подсемейство кривых:

$y = y(x, C)$.

О. Кривые семейства $y = y(x, C)$ образуют *собственное* поле в области G, если через каждую точку области G проходит одна и только одна кривая из этого семейства.

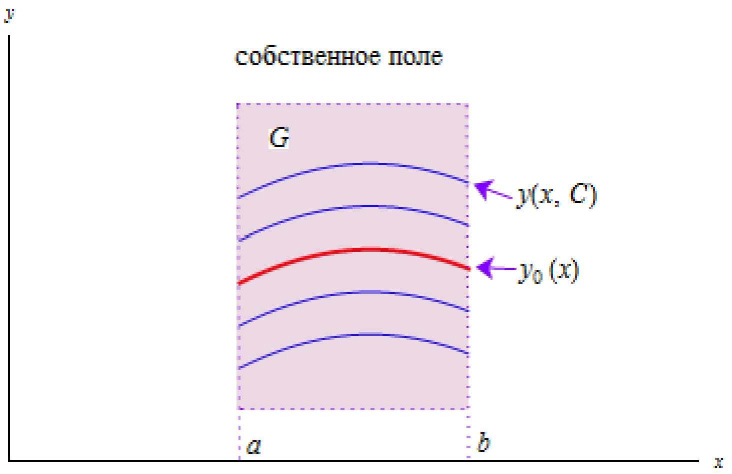
Пусть экстремали $y = y(x, C)$ образуют собственное поле в области G и исследуемая экстремаль $y_0(x)$ содержится *внутри* этого семейства при некотором значении $C = C_0$:

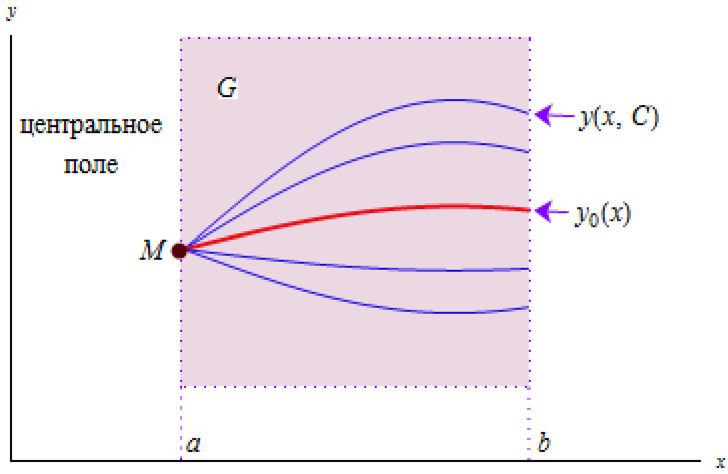
$y(x, C_0) = y_0(x)$,

а выше и ниже кривой $y = y_0(x)$ есть другие кривые семейства. Тогда говорят, что исследуемая экстремаль $y_0(x)$ включена в собственное поле экстремалей.

О. Кривые семейства $y = y(x, C)$ образуют *центральное* поле в области G, если все эти кривые проходят через некоторую общую точку $M \in G$ (*центр поля*), а через любую другую точку области G проходит одна и только одна кривая из этого семейства.

Пусть экстремали $y = y(x, C)$ образуют центральное поле в области G, причём центр поля находится в точке $(a;\ A)$ или в точке $(b;\ B)$, и исследуемая экстремаль $y_0(x)$ содержится *внутри* этого семейства: $y(x, C_0) = y_0(x)$, а выше и ниже исследуемой экстремали есть другие кривые семейства. Тогда говорят, что исследуемая экстремаль включена в центральное поле экстремалей.





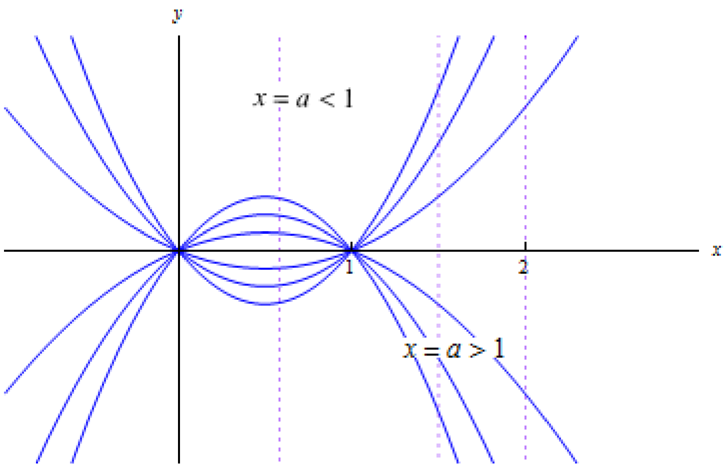
Пример 1 (самостоятельно). Образуют ли кривые семейства $y(x, C) = C(x-1)x$ собственное или центральное поле в области

а) $x \in (-\infty;\ 0]$,

б) $x \in [0;\ a]$, где $a < 1$,

в) $x \in [0;\ a]$, где $a \geq 1$,

г) $x \in [2;\ +\infty)$?



Ответ:

а) центральное поле,

б) центральное поле,

в) не образуют ни собственного, ни центрального поля,

г) собственное поле.

Пример 2. Включить исследуемую экстремаль в собственное и центральное поле экстремалей: $V[y] = \int_{-1}^{1} (12xy + (y')^2 + x^2)\, dx$, $y(-1) = -2$, $y(1) = 0$.

Здесь $F(x, y, y') = 12xy + (y')^2 + x^2$.

Уравнение Эйлера принимает вид:

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0.$$

$$12x - \frac{d}{dx}(2y') = 0.$$

$$\frac{d}{dx}(y') = 6x.$$

$y' = 3x^2 + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.$

$y = x^3 + C_1 x + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}.$

Краевые условия:

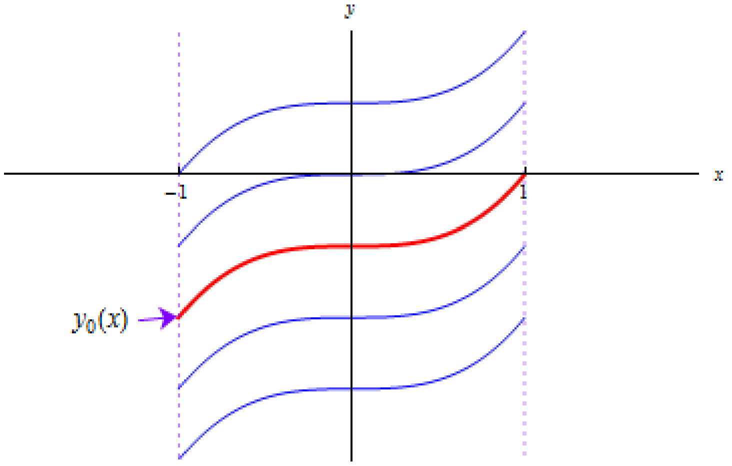
$$\begin{cases} y(-1) = -1 - C_1 + C_2 = -2, \\ y(1) = 1 + C_1 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 1, \\ C_1 + C_2 = -1. \end{cases}$$

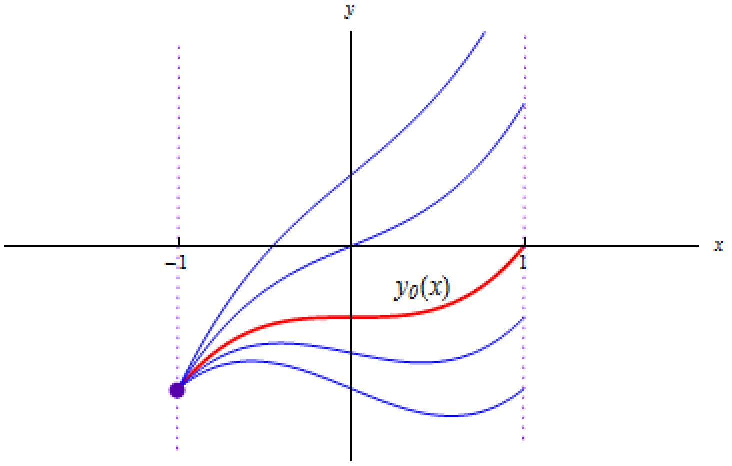
Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = -1$. Исследуемая экстремаль:

$y_0(x) = x^3 - 1$.



1. Построим собственное поле экстремалей, включающее исследуемую экстремаль. В ОР уравнения Эйлера
$y = x^3 + C_1 x + C_2$
положим $C_1 = 0$. Получим
$y(x, C_2) = x^3 + C_2$.
Исследуемая экстремаль входит в это семейство при $C_2 = -1$:
$y(x, -1) = x^3 - 1 = y_0(x)$.

Очевидно, что через каждую точку полосы $-1 \le x \le 1$ проходит одна и только одна кривая семейства $y(x, C_2) = x^3 + C_2$ (поскольку все кривые получаются друг из друга сдвигом вдоль оси Oy). Значит, кривые семейства $y(x, C_2) = x^3 + C_2$ действительно образуют собственное поле в полосе $-1 \le x \le 1$, и исследуемая экстремаль включена в это поле.



2. Построим центральное поле экстремалей, включающее исследуемую экстремаль. Потребуем, чтобы центр поля лежал на левой границе области, т. е. при $x = -1$. Тогда все экстремали должны удовлетворять левому краевому условию:
$y(-1) = -2$.
Взяв ОР уравнения Эйлера
$y = x^3 + C_1 x + C_2$,
потребуем
$y(-1) = -1 - C_1 + C_2 = -2$,

т. е. $C_2 = C_1 - 1$.

Получится однопараметрическое семейство кривых

$y(x, C_1) = x^3 + C_1 x + C_1 - 1$,

которое включает исследуемую экстремаль при $C_1 = 0$:

$y(x, 0) = x^3 - 1 = y_0(x)$.

Убедимся, что через каждую точку $(x_0;\ y_0)$, где $-1 < x_0 \le 1$, проходит одна и только одна кривая семейства $y(x, C_1) = x^3 + C_1 x + C_1 - 1$. В самом деле, из уравнения

$y_0 = x_0^3 + C_1 x_0 + C_1 - 1$

при $x_0 \ne -1$ однозначно определяется параметр C_1:

$$C_1 = \frac{y_0 - x_0^3 + 1}{x_0 + 1}.$$

Значит, кривые семейства $y(x, C_1)$ действительно образуют центральное поле, включающее исследуемую экстремаль.

Ответ: собственное поле $y(x, C_2) = x^3 + C_2$,

центральное поле $y(x, C_1) = x^3 + C_1 x + C_1 - 1$.

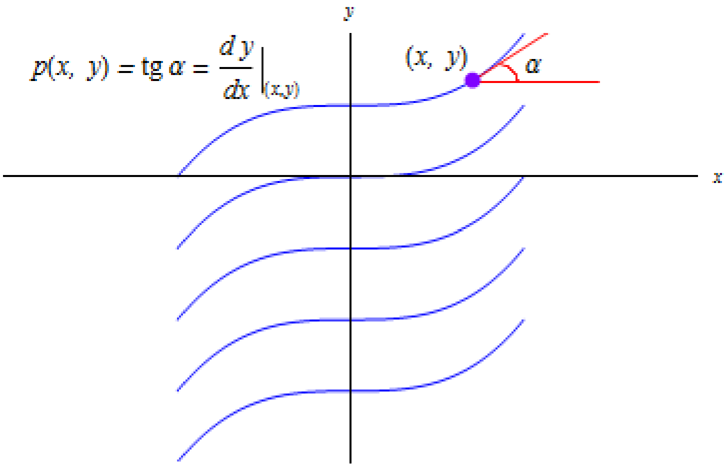
Достаточные условия Лежандра

Пусть $F(x,y,y') \in C^{(3)}$, $y_0(x)$ — исследуемая экстремаль (т. е. $y_0(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера и краевым условиям), включённая в собственное *или* центральное поле экстремалей. Тогда

а) если $F_{y'y'}\Big|_{\substack{y=y_0(x)\\ y'=y_0'(x)\\ x\in[a;\,b]}} > 0$ $\left(F_{y'y'}\Big|_{\substack{y=y_0(x)\\ y'=y_0'(x)\\ x\in[a;\,b]}} < 0\right)$, то на функции $y_0(x)$ достигается *слабый* минимум (максимум) функционала $V[y]$ в задаче с закреплёнными концами;

б) если $F_{y'y'} \geq 0$ $(F_{y'y'} \leq 0)$ во всех точках $(x;\ y)$, достаточно близких к точкам исследуемой экстремали $\big(x;\ y_0(x)\big)$, $x \in [a;\ b]$, и при любых y', то на функции $y_0(x)$ достигается *сильный* минимум (максимум) функционала $V[y]$ в задаче с закреплёнными концами.

Достаточные условия Вейерштрасса



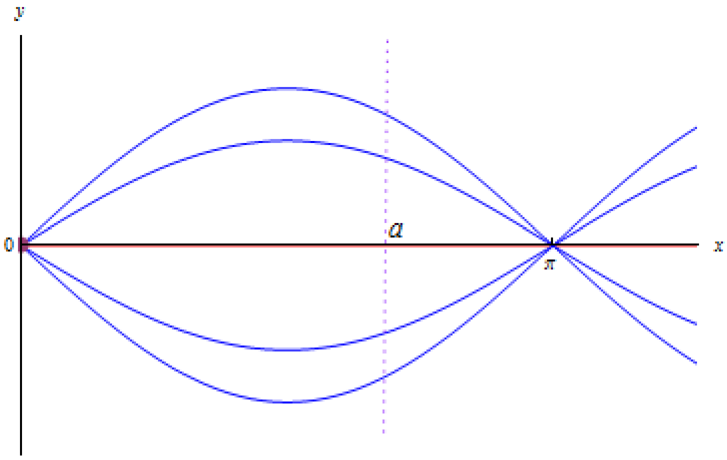
Пусть $F(x,y,y') \in C^{(2)}$, $y_0(x)$ — исследуемая экстремаль (т. е. $y_0(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера и краевым условиям), включённая в собственное *или* центральное поле экстремалей. Тогда через каждую точку, кроме центра поля, проходит одна и только одна экстремаль. Пусть

$p = p(x,y)$ — наклон поля экстремалей в точке $(x;\ y)$, т. е. производная $\frac{dy}{dx}$ той экстремали, которая проходит через ку $(x;\ y)$, в этой самой точке $(x;\ y)$.

Рассмотрим функцию *Вейерштрасса:*
$E(x,y,p,y') = F(x,y,y') - F(x,y,p) - (y'-p)F_p(x,y,p)$.

1. Если $E \geq 0$ $(E \leq 0)$ во всех точках $(x;\ y)$, достаточно близких к точкам исследуемой экстремали $\big(x;\ y_0(x)\big)$, $x \in [a;\ b]$, и при всех y', достаточно близких к $p(x,y)$, то на функции $y_0(x)$ достигается *слабый* минимум (максимум) функционала $V[y]$ в задаче с закреплёнными концами.
2. Если $E \geq 0$ $(E \leq 0)$ во всех точках $(x;\ y)$, достаточно близких к точкам исследуемой экстремали $\big(x;\ y_0(x)\big)$, $x \in [a;\ b]$, и при любых y', то на функции $y_0(x)$ достигается *сильный* минимум (максимум) функционала $V[y]$ в задаче с закреплёнными концами.
3. Если $E(x,y_0(x),p,y')$ принимает значения разного знака при разных y' (при каждом фиксированном $x \in [a;\ b]$), то *сильный* экстремум функционала $V[y]$ в задаче с закреплёнными концами на функции $y_0(x)$ *не достигается*.
4. Если $E(x,y_0(x),p,y')$ принимает значения разного знака при y', сколь угодно близких к $p(x,y)$ (при каждом фиксированном $x \in [a;\ b]$), то *слабый* экстремум функционала $V[y]$ в задаче с закреплёнными концами на функции $y_0(x)$ *не достигается*.

Пример 3 (самостоятельно). Исследовать на экстремум: $V[y]=\int_0^a((y')^2-y^2)\,dx$, $y(0)=y(a)=0,\ 0<a<\pi$.
Здесь $F(x,y,y')=(y')^2-y^2$.
Запишем уравнение Эйлера:
$$F_y-\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=0.$$
$$-2y-\frac{d}{dx}(2y')=0.$$
$$y''+y=0.$$
Его ОР:
$$y=C_1\sin x+C_2\cos x.$$
Подставим ОР в КУ:
$$\begin{cases}y(0)=C_2=0,\\ y(a)=C_1\sin a+C_2\cos a=0.\end{cases}$$
Отсюда получим $C_2=0$, $C_1=0$ (т. к. $a<\pi$).
Исследуемая экстремаль:
$$y_0(x)=0.$$



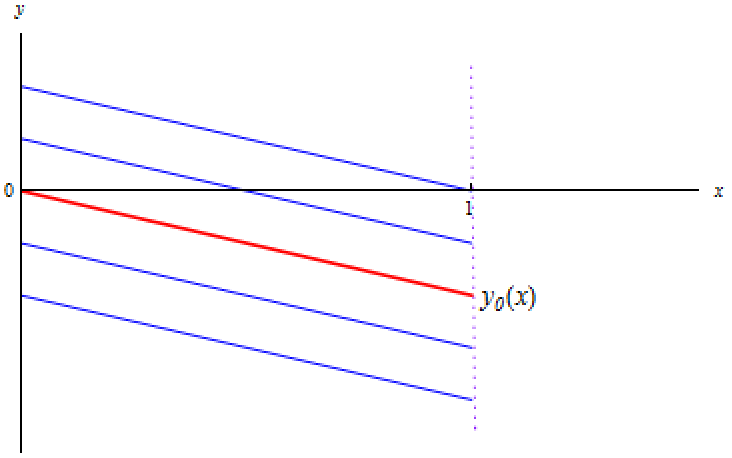
Построим центральное поле экстремалей с центром при $x=0$, включающее исследуемую экстремаль. Для этого возьмём ОР уравнения Эйлера
$$y=C_1\sin x+C_2\cos x$$
и потребуем выполнения краевого условия при $x=0$:
$$y(0)=0.$$
Тогда $C_2=0$, и получим семейство кривых:
$$y(x,C_1)=C_1\sin x.$$
Очевидно, в полосе $0\le x\le a$ эти кривые образуют центральное поле, включающее исследуемую экстремаль при $C_1=0$:
$$y(x,0)=0=y_0(x).$$

1. Проверим условия Лежандра:
   $$F_{y'y'}=2>0$$
   всегда, поэтому на исследуемой экстремали $y_0(x)$ достигается сильный минимум (а следовательно, и слабый минимум).
2. То же самое можно получить и из условий Вейерштрасса (другой способ решения):
   $$E(x,y,p,y')=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p)=$$
   $$=(y')^2-y^2-p^2+y^2-(y'-p)\cdot 2p=(y')^2-p^2-2py'+2p^2=$$
   $$=(y')^2-2py'+p^2=(y'-p)^2\ge 0$$
   всегда, поэтому на исследуемой экстремали $y_0(x)$ достигается сильный минимум.

Ответ: на функции $y=0$ достигается сильный минимум.

Пример 4 (самостоятельно). Исследовать на экстремум: $V[y]=\int_0^1((y')^3-3y')\,dx$, $y(0)=0,\ y(1)=-2$.
Поскольку $F=(y')^3-3y'$ — зависит только от y' и $F_{y'y'}\not\equiv 0$, то общее решение уравнения Эйлера имеет вид

$y = C_1 x + C_2, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$
Подставим ОР в КУ:
$$\begin{cases} y(0) = C_2 = 0, \\ y(1) = C_1 + C_2 = -2. \end{cases}$$
Отсюда $C_1 = -2$, $C_2 = 0$.
Исследуемая экстремаль:
$y_0(x) = -2x.$



Её можно включить в собственное поле экстремалей
$y(x, C_2) = -2x + C_2$
при $C_2 = 0$:
$y(x, 0) = -2x = y_0(x).$

1. Проверим условия Лежандра.
   $F_{y'y'} = 6y'.$
   $$F_{y'y'}\Big|_{\substack{y=y_0(x)\\ y'=y_0'(x)\\ x\in[0;\,1]}} = -12 < 0,$$
   поэтому на исследуемой экстремали $y_0(x)$ достигается слабый максимум.
   При произвольных y' функция $F_{y'y'} = 6y'$ знакопеременна, поэтому о сильном экстремуме ничего сказать нельзя.
2. Для того чтобы проверить, достигается ли сильный максимум, используем условия Вейерштрасса.
   $$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p) =$$
   $$= (y')^3 - 3y' - p^3 + 3p - (y' - p)(3p^2 - 3) =$$
   $$= (y' - p)((y')^2 + y'p + p^2) - 3(y' - p) - (y' - p)(3p^2 - 3) =$$
   $$= (y' - p)((y')^2 + y'p + p^2 - 3 - 3p^2 + 3) = (y' - p)((y')^2 + y'p - 2p^2) =$$
   $$= (y' - p)((y')^2 - p^2 + y'p - p^2) = (y' - p)^2(y' + 2p).$$
   Функция Вейерштрасса не зависит от x и y, а зависит только от p и y'. При y', близких к $p(x, y) = -2$, имеем $E(x, y, p, y') < 0$, поэтому на исследуемой экстремали $y_0(x)$ достигается слабый максимум (как и было получено ранее из условий Лежандра).
   Поскольку $(y' - p)^2 \geq 0$ всегда, а $(y' + 2p)$ меняет знак при $y' = -2p$, то функция Вейерштрасса принимает значения разных знаков при разных y', и сильный экстремум на исследуемой экстремали $y_0(x)$ не достигается.

Ответ: на функции $y = -2x$ достигается слабый максимум.

ДЗ 15.

1. Образуют ли кривые семейства $y = C(x^2 - 2x)$ собственное или центральное поле в области
   а) $0 \leq x \leq 1$,
   б) $-1 \leq x \leq 3$,
   в) $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$?
2. Включить исследуемую экстремаль в собственное и центральное поле экстремалей: $V[y] = \int_0^1 ((y')^2 - 2xy)\, dx$, $y(0) = y(1) = 0$.

Эльсгольц гл. 8 № 1, 3–5, 7–9, 14.