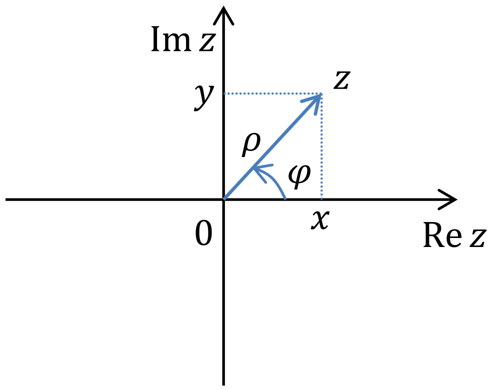
Семинар 13

Элементарные функции комплексной переменной



Вспомним основные свойства комплексных чисел.
Как мы помним с первого курса, *комплексное число* $z \in \mathbb{C}$ — это упорядоченная пара вещественных чисел $x, y \in \mathbb{R}$:
$x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z.$
Комплексному числу z соответствует точка (x, y) на комплексной плоскости (или радиус-вектор, проведённый из начала координат в точку (x, y)).
На рисунке ρ и φ — полярные координаты точки z (для $z = 0$ угол φ не определён).
Комплексное число z можно записать в *алгебраической*, *тригонометрической* и *показательной* форме:

$$z = \underbrace{x + iy}_{\text{алгебраическая}} = \underbrace{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{\text{тригонометрическая}} = \underbrace{\rho e^{i\varphi}}_{\text{показательная}},$$

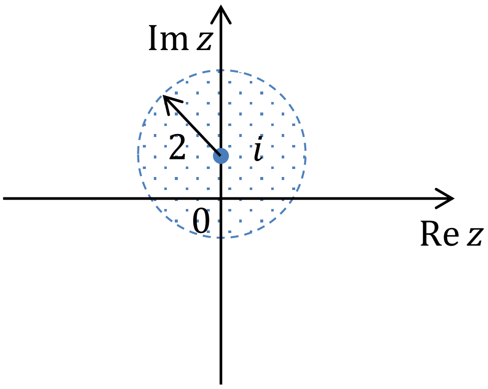
где $e^{i\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \cos\varphi + i\sin\varphi$ (*формула Эйлера*), i — *мнимая единица*: $i \cdot i = i^2 = -1$.
Тригонометрическая и показательная форма имеют смысл при $z \neq 0$.
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ — *модуль* комплексного числа,
φ — *аргумент* комплексного числа, он находится из системы уравнений:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\rho}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\rho}. \end{cases}$$

Чтобы полярный угол φ определялся этими соотношениями однозначно, накладывается дополнительное условие, чаще всего $-\pi < \varphi \le \pi$ или $0 \le \varphi < 2\pi$, в общем случае — условие типа $\alpha \le \varphi < \alpha + 2\pi$ или $\alpha < \varphi \le \alpha + 2\pi$ (мы будем обычно использовать условие $-\pi < \varphi \le \pi$). Как правило, дополнительное условие ставят так, чтобы на положительной части вещественной оси выполнялось равенство $\arg z = 0$. Выделенный таким образом единственный угол φ называется *главным значением* аргумента:
$\arg z = \varphi$, где $\varphi \in (-\pi;\ \pi]$, — *однозначная* функция.
Все значения аргумента описываются *многозначной* функцией (для каждого z имеется набор значений функции):
$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$
Арифметические операции с комплексными числами осуществляются по правилам действия с многочленами с учётом того, что $i^2 = -1$:

$$(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d),$$
$$(a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad + i^2bd = (ac - bd) + i(bc + ad),$$
$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Если $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$ — комплексно сопряжённое число. Заметим, что
$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$



Пример 1 (самостоятельно). Изобразить на комплексной плоскости множество точек z: $|z-i|<2$.
Убедимся в том, что $|z-z_0|$ — это расстояние между точками z и z_0 на комплексной плоскости. В самом деле, если $z=x+iy$, $z_0=x_0+iy_0$, то
$|z-z_0|=|x-x_0+i(y-y_0)|=$
$=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.
Значит, множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству $|z-i|<2$, является открытым кругом с центром в точке i и радиусом 2.

Для комплексного числа $z\in\mathbb{C}$ *степенная функция* z^n определяется так:
$z^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n\text{ раз}}$ для всех $n\in\mathbb{N}$.
Это однозначная функция (для каждого z функция принимает одно значение).

Формула Муавра
$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$, где $n\in\mathbb{N},\varphi\in\mathbb{R}$, т. е.
$\left(e^{i\varphi}\right)^n=e^{in\varphi}$,
позволяет выводить тригонометрические формулы для синуса и косинуса кратных углов.

Если $z=\rho e^{i\varphi}$, то, согласно формуле Муавра, $z^n=\left(\rho e^{i\varphi}\right)^n=\rho^n e^{in\varphi}$.

Корень n-й степени из комплексного числа определяется как функция, обратная к z^n:
$w \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n=z$.
Если $z=\rho e^{i\varphi}$, то
$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)},\qquad k=0,1,\ldots,n-1;\qquad n\in\mathbb{N}.\qquad (*)$$
Здесь в правой части формулы выражение $\sqrt[n]{\rho}$ означает *арифметический* (вещественный положительный) корень n-й степени из вещественного положительного числа ρ (однозначная функция).
Функция $\sqrt[n]{z}$ является многозначной функцией (для каждого $z\neq 0$ она принимает n различных комплексных значений).
Для $z=0$: $\sqrt[n]{0}=0$.

Пример 2 (самостоятельно). Вычислить $\sqrt[3]{-1+i}$. Ответ представить в алгебраической или показательной форме.
Рассмотрим комплексное число $z=-1+i$. Представим его в показательной форме. Для этого вычислим модуль и аргумент числа z:
$x=\operatorname{Re}z=-1$, $y=\operatorname{Im}z=1$,
$\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}$ (арифметическое значение корня).
$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{x}{\rho}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \sin\varphi=\dfrac{y}{\rho}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

$\varphi = \frac{3\pi}{4}$ — одно из решений этой системы (это главное значение аргумента). Тогда
$-1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
Отсюда
$\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}\right)}, k = 0, 1, 2.$

$$\sqrt[3]{-1+i} = \left[\begin{array}{l} \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1+i}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, \\ \sqrt[6]{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}, \\ \sqrt[6]{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + i\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $\sqrt[6]{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$, $\sqrt[6]{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$.

Экспонента комплексного числа $z = x + iy$ определяется так:
$\exp z = e^z = e^{x+iy} \overset{\text{def}}{=} e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$.
Здесь в правой части формулы стоит $e^x = \exp x$ — обычная (вещественная) экспонента вещественного числа $x \in \mathbb{R}$.
$\exp z$ — это однозначная функция.
Она обладает *характеристическим* свойством экспоненты:
$\exp(z_1 + z_2) \equiv \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$.

Гиперболические и *тригонометрические* функции комплексной переменной определяются так:

$$\operatorname{ch} z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{sh} z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{th} z \overset{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{cth} z \overset{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z},$$

$$\cos z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \operatorname{tg} z \overset{\text{def}}{=} \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z \overset{\text{def}}{=} \frac{\cos z}{\sin z}.$$

В частном случае, когда z — вещественное число, получаются обычные (вещественные) гиперболические и тригонометрические функции.
Все известные гиперболические и тригонометрические *тождества* будут справедливы и для комплексных z.
Не будут справедливы *неравенства* $|\cos z| \le 1$, $|\sin z| \le 1$.

Пример 3 (самостоятельно). Доказать основное тригонометрическое тождество
$\sin^2 z + \cos^2 z \equiv 1$.

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1,$$

ч. т. д.

Пример 4 (самостоятельно). Вычислить $\cos i$. Ответ представить в алгебраической форме.

$$\cos i = \frac{e^{i\cdot i} + e^{-i\cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e^1}{2} = \operatorname{ch} 1.$$

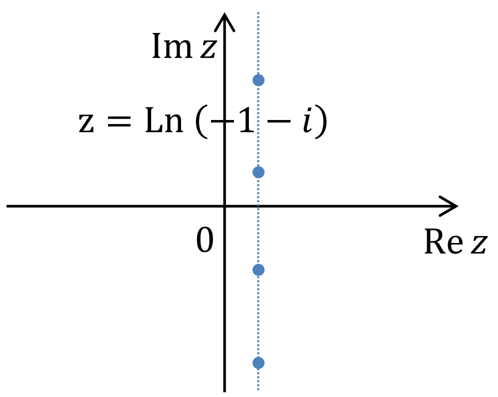
Получилось вещественное число, причём $\cos i = \frac{e^{-1}+e^1}{2} > \frac{e}{2} > 1$.
Ответ: $\operatorname{ch} 1$.

Пример 5 (самостоятельно). Вычислить $\sin(2+3i)$. Ответ представить в алгебраической форме.

$$\sin(2+3i)=\frac{e^{i(2+3i)}-e^{-i(2+3i)}}{2i}=\frac{e^{2i}e^{-3}-e^{-2i}e^{3}}{2i}=$$
$$=\frac{e^{-3}(\cos 2+i\sin 2)-e^{3}(\cos 2-i\sin 2)}{2i}=\frac{e^{-3}(-i\cos 2+\sin 2)-e^{3}(-i\cos 2-\sin 2)}{2}=$$
$$=i\cos 2\frac{e^{3}-e^{-3}}{2}+\sin 2\frac{e^{3}+e^{-3}}{2}=\sin 2\operatorname{ch}3+i\cos 2\operatorname{sh}3.$$

Ответ: $\sin 2\operatorname{ch}3+i\cos 2\operatorname{sh}3$.

Логарифм комплексного числа определяется как функция, обратная экспоненте:
$w\stackrel{\text{def}}{=}\operatorname{Ln}z\Leftrightarrow\exp w=z$.
Если $z=\rho e^{i\varphi}\neq 0$, то
$\operatorname{Ln}z=\ln\rho+i(\varphi+2\pi k)=\ln|z|+i\operatorname{Arg}z,\qquad k\in\mathbb{Z}$.
Здесь в правой части формулы стоит $\ln\rho=\ln|z|$ — это обычный (вещественный) логарифм вещественного положительного числа ρ.
Для $z=0$ функция $\operatorname{Ln}z$ не определена.
Итак, $\operatorname{Ln}z$ — многозначная функция.
Также вводится *главное значение* логарифма — однозначная функция:
$\ln z\stackrel{\text{def}}{=}\ln|z|+i\arg z$.
Для вещественных положительных z функция $\ln z$ принимает вещественные значения.



Пример 6 (самостоятельно). Вычислить $\operatorname{Ln}(-1-i)$ и $\ln(-1-i)$. Ответ представить в алгебраической форме и изобразить на комплексной плоскости.
$|-1-i|=\sqrt{2}$,
$\arg(-1-i)=-\frac{3\pi}{4}\in(-\pi;\pi]$,
$\operatorname{Arg}(-1-i)=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.
$$\operatorname{Ln}(-1-i)=\ln\sqrt{2}+i\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right),\qquad k\in\mathbb{Z}.$$
$$\ln(-1-i)=\ln\sqrt{2}-\frac{3\pi}{4}i.$$

Ответ: $\operatorname{Ln}(-1-i)=\ln\sqrt{2}+i\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z};\ \ln(-1-i)=\ln\sqrt{2}-\frac{3\pi}{4}i$.

Обратные тригонометрические и гиперболические функции комплексной переменной определяются так:
$w\stackrel{\text{def}}{=}\operatorname{Arccos}z\Leftrightarrow\cos w=z$,
$w\stackrel{\text{def}}{=}\operatorname{Arcsin}z\Leftrightarrow\sin w=z$, и т. д.
Все эти функции — многозначные.

Пример 7 (самостоятельно). Вычислить $\operatorname{Arccos}z$. Ответ выразить через функцию Ln.
$w\stackrel{\text{def}}{=}\operatorname{Arccos}z\Leftrightarrow\cos w=z$.
Решим уравнение $\cos w=z$ относительно w:
$$\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}=z.$$

$e^{iw} + e^{-iw} = 2z.$

Сделаем замену: $e^{iw} = t$. Тогда

$t + \dfrac{1}{t} = 2z.$

$t^2 - 2zt + 1 = 0.$

$t = \dfrac{2z + \sqrt{4z^2 - 4}}{2} = z + \sqrt{z^2 - 1}.$

Здесь $\sqrt{z^2-1}$ обозначает *все* значения квадратного корня из комплексного числа $z^2 - 1$ (двузначная функция, определяемая формулой (*) на с. 2).

$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}.$

$iw = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$

$w = -i\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) = \mathrm{Arccos}\, z.$

Ответ: $\mathrm{Arccos}\, z = -i\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$

Функция z^α для $\alpha \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ определяется так:

$z^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\alpha \,\mathrm{Ln}\, z), \qquad z \neq 0.$

Это многозначная функция. Её *главное значение* $\exp(\alpha \ln z)$ совпадает с обычным (вещественным положительным) значением функции z^α для вещественного положительного z и вещественного α.

Для $z = 0$ функция z^α, вообще говоря, не определена.

Для $\alpha = 0$ имеем $z^0 = \exp(0) = 1$ при $\forall z \neq 0$.

Есть одна тонкость, которая может привести к путанице. Если мы положим $z = e$, то

$e^\alpha = \exp(\alpha\, \mathrm{Ln}\, e) = \exp\big(\alpha(1 + 2\pi k i)\big) = \exp(\alpha + 2\pi k \alpha i) = \exp\alpha \cdot \exp(2\pi k \alpha i), \qquad k \in \mathbb{Z},$

т. е., вообще говоря, $e^\alpha \neq \exp\alpha$, т. к. e^α — многозначная функция, а $\exp\alpha$ — однозначная. Тем не менее, так традиционно сложилось, что обычно под выражением e^α понимают её главное значение, т. е. $\exp\alpha$, — однозначную функцию, определённую формулой

$\exp(\alpha) = e^{\mathrm{Re}\,\alpha}(\cos(\mathrm{Im}\,\alpha) + i\sin(\mathrm{Im}\,\alpha)),$

если не оговорено обратное.

Таким образом, мы будем обычно писать e^α вместо $\exp\alpha$, подразумевая однозначную функцию $\exp\alpha$.

Пример 8 (самостоятельно). Вычислить i^i. Ответ представить в алгебраической форме.

$i^i = \exp(i\, \mathrm{Ln}\, i).$

$i = 1e^{i\frac{\pi}{2}}.$

$\mathrm{Ln}\, i = i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$

$i^i = \exp\left(i \cdot i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right) = \exp\left(-\dfrac{\pi}{2} - 2\pi k\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$

Здесь $\exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2\pi k\right)$ — вещественная экспонента.

Ответ: $\exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 9 (самостоятельно). Вычислить $1^{\sqrt{2}}$. Ответ представить в алгебраической форме.
$1^{\sqrt{2}} = \exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1\right)$.
$1 = 1e^{i\cdot 0}$.
$\mathrm{Ln}\,1 = 2\pi k i, \qquad k \in \mathbb{Z}$.
$1^{\sqrt{2}} = \exp\left(\sqrt{2}\cdot 2\pi k i\right) = \cos\left(2\sqrt{2}\pi k\right) + i\sin\left(2\sqrt{2}\pi k\right), \qquad k \in \mathbb{Z}$.
При $k = 0$ получается вещественное значение $1^{\sqrt{2}} = 1$.
Ответ: $\cos\left(2\sqrt{2}\pi k\right) + i\sin\left(2\sqrt{2}\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 10 (самостоятельно). Вычислить 2^2. Ответ представить в алгебраической форме.
$2^2 = \exp(2\,\mathrm{Ln}\,2)$.
$2 = 2e^{i\cdot 0}$.
$\mathrm{Ln}\,2 = \ln 2 + 2\pi k i, \qquad k \in \mathbb{Z}$.

$$2^2 = \exp(2\cdot(\ln 2 + 2\pi k i)) = \exp(2\ln 2 + 4\pi k i) = \underbrace{e^{2\ln 2}}_{4}\cdot\underbrace{e^{4\pi k i}}_{1} = 4.$$

Здесь $e^{2\ln 2} = 2^2 = 4$ — вещественная экспонента.
Ответ: 4.
В этом примере многозначная функция z^α выродилась в однозначную.
Можно показать, что при всех $n \in \mathbb{N}$:
$z^n \overset{\text{def}}{=} \exp(n\,\mathrm{Ln}\,z)$ совпадает с $z^n \overset{\text{def}}{=} \rho^n e^{in\varphi}$ — однозначной функцией, которую мы определили раньше.

Пример 11 (самостоятельно). Вычислить $(-1)^{0{,}5}$. Ответ представить в алгебраической форме.
$(-1)^{0{,}5} = \exp(0{,}5\,\mathrm{Ln}\,(-1))$.
$-1 = 1e^{i\cdot\pi}$.
$\mathrm{Ln}\,(-1) = i(\pi + 2\pi k), \qquad k \in \mathbb{Z}$.

$$(-1)^{0{,}5} = \exp(0{,}5\cdot i(\pi + 2\pi k)) = \exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \pm i.$$

Ответ: $\pm i$.
Мы видим, что множество значений $(-1)^{0{,}5}$ совпадает с множеством значений $\sqrt{-1}$. Можно показать, что $z^{1/n} \equiv \sqrt[n]{z}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

ДЗ 13. Волк № 1.1, 1.2(1–8), 1.4(1, 7), 1.23, 1.27, 1.29, 1.68(1–3), 1.71(1–3), 1.72, 1.74 (2–4), 1.77(2, 3), 1.81 (1, 3–5).