Семинар 14

Классификация точек покоя

Пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ — точка покоя системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \tag{1}$$

Пусть λ_1, λ_2 — корни ХУ $\det(A - \lambda E) = 0$ соответствующей линеаризованной системы

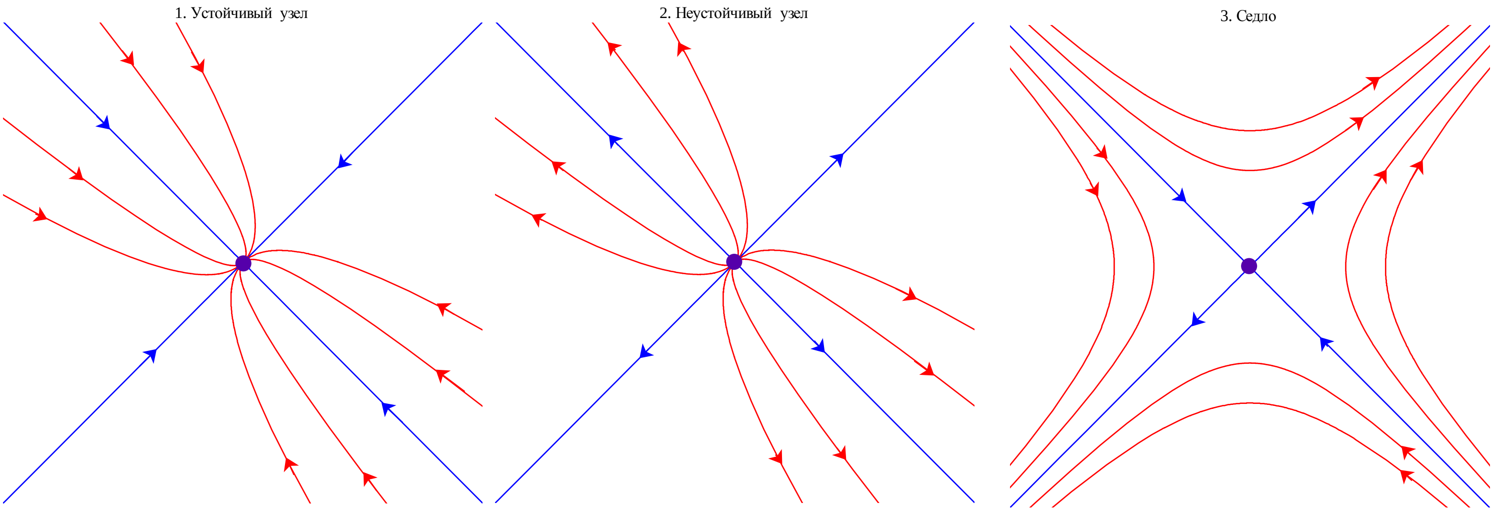
$$\begin{cases} \Delta\dot{x} = a_{11}\Delta x + a_{12}\Delta y, \\ \Delta\dot{y} = a_{21}\Delta x + a_{22}\Delta y, \end{cases} \tag{2}$$

где $a_{11} = f_x(x_0, y_0)$, $a_{12} = f_y(x_0, y_0)$, $a_{21} = g_x(x_0, y_0)$, $a_{22} = g_y(x_0, y_0)$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

$\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. В точке покоя $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$.

Линеаризованную систему (2) можно решить и нарисовать фазовые траектории в окрестности точки покоя. В зависимости от значений λ_1, λ_2 они будут располагаться по-разному. На этом основана классификация точек покоя *линейной* системы (2).

1. *Устойчивый узел.* Корни ХУ вещественны, отрицательны и различны: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. В числе фазовых траекторий есть две прямых (проходящих через точку покоя), одна из которых является касательной для всех криволинейных траекторий. Направляющие векторы прямых — СВ матрицы A. Все фазовые траектории сходятся к точке покоя. Точка покоя асимптотически устойчива. (См. рис.)
2. *Неустойчивый узел.* Корни ХУ вещественны, положительны и различны: $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. В числе фазовых траекторий есть две прямых (проходящих через точку покоя), одна из которых является касательной для всех криволинейных траекторий. Направляющие векторы прямых — СВ матрицы A. Все фазовые траектории расходятся от точки покоя. Точка покоя неустойчива.
3. *Седло.* Корни ХУ вещественны, отличны от нуля и разного знака: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. В числе фазовых траекторий есть две прямых (*сепаратрисы*), проходящих через точку покоя, которые являются асимптотами для всех криволинейных траекторий. Направляющие векторы прямых — СВ матрицы A. Точка покоя неустойчива.



4. *Устойчивый фокус.* Корни ХУ — не вещественные, комплексно сопряжённые, с отрицательной вещественной частью: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$, $\alpha < 0$. Фазовые траектории представляют собой накручивающиеся на точку покоя спирали. Точка покоя асимптотически устойчива.

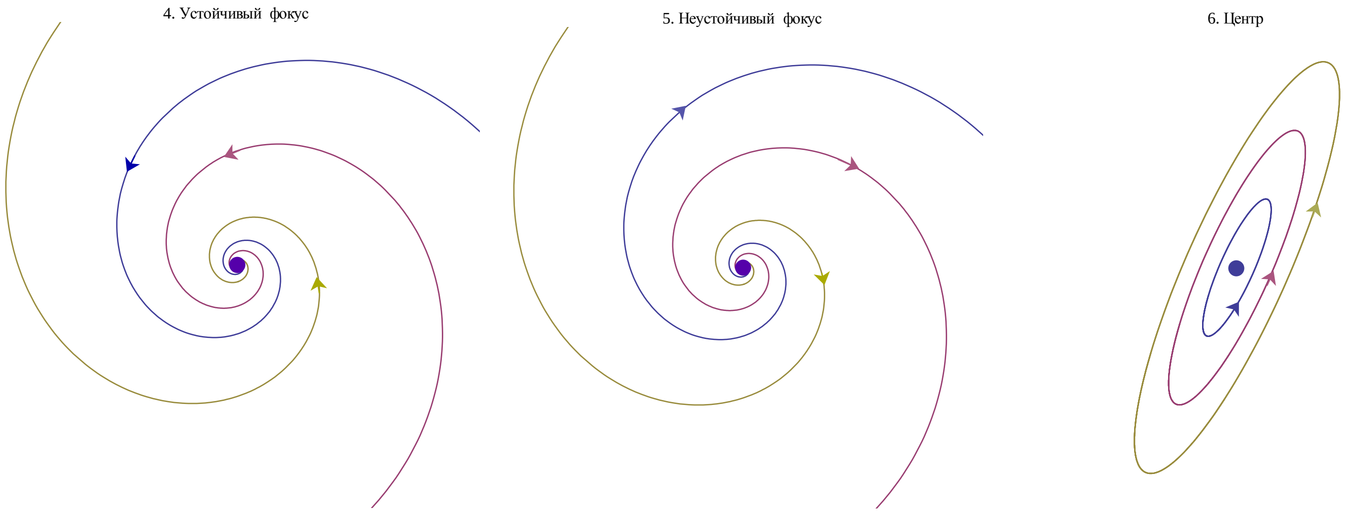
5. *Неустойчивый фокус.* Корни ХУ — не вещественные, комплексно сопряжённые, с положительной вещественной частью: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$, $\alpha > 0$. Фазовые траектории представляют собой раскручивающиеся от точки покоя спирали. Точка покоя неустойчива.

В случаях 1–5 (невырожденных случаях) поведение фазовых траекторий вблизи точки покоя для *нелинейной* системы (1) качественно совпадает с поведением фазовых траекторий *линеаризованной* системы (2) (при этом траектории могут слегка деформироваться, например, прямолинейные сепаратрисы седла могут стать криволинейными).

В примере 2 семинара 13 точка покоя $M_1(3;\ 2)$ является седлом ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$), а точка покоя $M_2(0;\ -1)$ — устойчивым фокусом ($\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2}$).

В остальных (вырожденных) случаях, когда $\operatorname{Re}\lambda = 0$ или $\lambda_1 = \lambda_2$, поведение фазовых траекторий вблизи точки покоя для нелинейной системы (1) может качественно отличаться от поведения фазовых траекторий линеаризованной системы (2)! Рассмотрим самый важный из вырожденных случаев:

6. *Центр.* Корни ХУ — чисто мнимые: $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$, $\beta \neq 0$. Фазовые траектории представляют собой эллипсы. Точка покоя устойчива, но не асимптотически.



Классификация точек покоя в прочих вырожденных случаях приведена в дополнении.
Теперь посмотрим, как можно найти уравнения фазовых траекторий.

Пример 1 (задача к общему зачёту № 78). Найти точки покоя, определить их тип, нарисовать фазовый портрет (т. е. изобразить фазовые траектории) уравнения $\ddot{y} = y(y^2 - 1)$.
Обозначим $p = \dot{y}$, тогда уравнение сводится к автономной системе:

$$\begin{cases} \dot{y} = p, \\ \dot{p} = y(y^2 - 1). \end{cases} \tag{3}$$

Сначала найдём стационарные точки и определим их тип. Стационарные точки находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} f(y,p) = p = 0, \\ g(y,p) = y(y^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Значит, на фазовой плоскости Oyp есть три точки покоя: $M_1(0;0)$, $M_2(1;0)$, $M_3(-1;0)$.
Найдём матрицу линеаризованной системы в точке $M_1(0;0)$:

$a_{11} = f_y(0,0) = 0, \qquad a_{12} = f_p(0,0) = 1,$

$a_{21} = g_y(0,0) = (3y^2 - 1)|_{y=0} = -1, \qquad a_{22} = g_p(0,0) = 0,$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найдём корни ХУ:

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0, \lambda_{1,2} = \pm i$.

В первом приближении точка покоя является центром. Но это вырожденный случай, для нелинейной системы центр может превратиться в фокус, устойчивый или неустойчивый.

Аналогично в точках $M_2(1;0)$ и $M_3(-1;0)$:

$a_{11} = f_y(\pm 1, 0) = 0, \qquad a_{12} = f_p(\pm 1, 0) = 1,$

$a_{21} = g_y(\pm 1, 0) = (3y^2 - 1)|_{y=\pm 1} = 2, \qquad a_{22} = g_p(\pm 1, 0) = 0,$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Корни ХУ:

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0, \qquad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

Точки покоя M_2, M_3 являются сёдлами.

Теперь запишем систему (3) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = p, \\ \dfrac{dp}{dt} = y(y^2 - 1) \end{cases}$$

и поделим второе уравнение на первое:

$$\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{y(y^2 - 1)}{p}.$$

(При этом теряются решения, соответствующие найденным выше точкам покоя.)

Теперь dt сокращается, и получается ОДУ для нахождения фазовых траекторий:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{y(y^2 - 1)}{p}.$$

Разделив переменные, находим:

$p\,dp = y(y^2 - 1)dy$.

$$\frac{p^2}{2} = \int (y^3 - y)\,dy = \frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2} + \tilde{C}, \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

Отсюда

$$p = \pm\sqrt{\frac{y^4}{2} - y^2 + 2\tilde{C}} = \pm\sqrt{\frac{y^4}{2} - y^2 + 2\tilde{C}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(y^4 - 2y^2 + 1 - 1 + 4\tilde{C}\right)} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{(y^2 - 1)^2 - C}{2}}, \qquad C = 1 - 4\tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

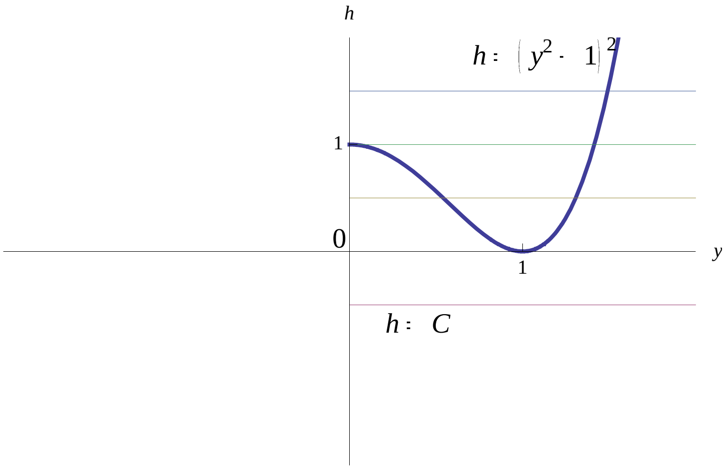
Итак, получены уравнения семейства фазовых траекторий: $p = \pm\sqrt{\frac{(y^2-1)^2 - C}{2}}$.

Нарисуем фазовый портрет. Очевидно, он симметричен относительно осей Oy и Op. Таким образом, достаточно исследовать первую четверть фазовой плоскости: $y \geq 0, p \geq 0$.

Итак, рассмотрим функцию $p(y) = \sqrt{\frac{(y^2-1)^2 - C}{2}}$ при $y \geq 0$.

Очевидно, что чем больше C, тем ниже лежит кривая.

Нарисуем график функции $h(y) = (y^2 - 1)^2$ при $y \geq 0$. Тогда функция $p(y)$ определена там, где $h(y) \geq C$ (т. е. в области, где график $h = (y^2 - 1)^2$ лежит выше прямой $h = C$), при этом точки минимума и максимума функций $p(y)$ и $h(y)$ совпадают.

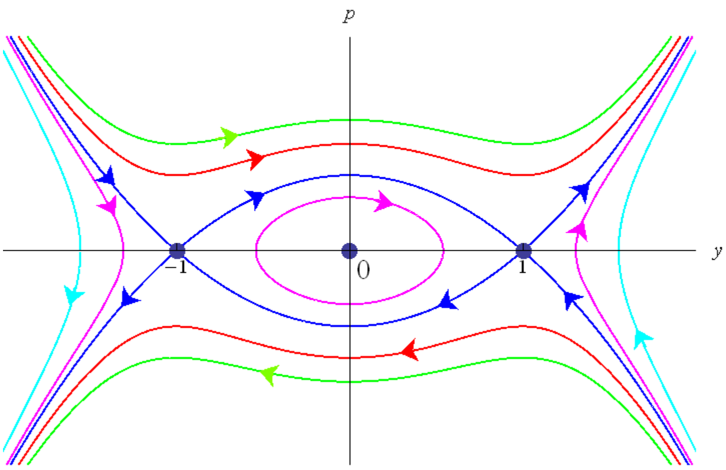


При $C < 0$ функция $p(y)$ определена при всех y, в точке $y = 1$ она имеет минимум (красная и зелёная траектории).

При $C = 0$ имеем $p(y) = \frac{|y^2-1|}{\sqrt{2}}$ — кривая, проходящая через седло $M_2(1; 0)$ (синяя траектория).

При $0 < C \leq 1$ функция $p(y)$ определена в двух областях, в которых $(y^2 - 1)^2 \geq C$: при $y^2 - 1 \geq \sqrt{C}$ и при $y^2 - 1 \leq -\sqrt{C}$, т. е. при $y \geq \sqrt{1 + \sqrt{C}}$ и при $0 \leq y \leq \sqrt{1 - \sqrt{C}}$ (розовые траектории). Функция $p(y)$ обращается в нуль в граничных точках области определения.

При $C > 1$ функция $p(y)$ определена в области $y \geq \sqrt{1 + \sqrt{C}}$. Функция $p(y)$ обращается в нуль в граничной точке области определения (голубая траектория).



С учётом сделанных выше наблюдений рисуем фазовый портрет сначала в первой четверти, а затем продолжаем его за счёт симметрии на всю фазовую плоскость. Теперь стрелками обозначаем направление движения по фазовым траекториям. В верхней полуплоскости $p = \dot{y} > 0$, значит, $y(t)$ возрастает. В нижней полуплоскости всё наоборот.

Нанесём на фазовую плоскость точки покоя (чёрные точки).

Из фазового портрета видно, что в окрестности точки покоя $M_1(0; 0)$ фазовые траектории замкнуты (кстати, замкнутые траектории соответствуют периодическим решениям $y(t)$), значит, она действительно является центром и устойчива, но не асимптотически. Сёдла $M_2(1; 0)$ и $M_3(-1; 0)$ имеют общие сепаратрисы (фазовые траектории, проходящие через седло), уравнения которых $p = \pm\frac{y^2-1}{\sqrt{2}}$. На рисунке сепаратрисы обозначены синим цветом.

Ответ: $M_1(0; 0)$ — центр, $M_2(1; 0)$ и $M_3(-1; 0)$ — сёдла.

Фазовый портрет позволяет, не находя ОР исходного ОДУ $y(t)$, изучить его качественное поведение при разных НУ. Например, каждой паре НУ $y(t_0) = y_0$, $\dot{y}(t_0) = y_1$ соответствует некоторая точка на фазовой плоскости. Дальнейшее поведение решения определяется тем, какой фазовой траектории принадлежит эта точка. Вдоль некоторых фазовых траекторий решение уходит на бесконечность, вдоль других — будет стремиться к точке покоя или будет периодическим. Также с помощью фазового портрета можно исследовать разрешимость краевых задач.

Пример 2. При каких y_0 разрешима нелинейная краевая задача
$$\begin{cases} \ddot{y} = y(y^2 - 1), & t > 0, \\ y(0) = y_0, & y(+\infty) = 1? \end{cases}$$
Пользуясь нарисованным фазовым портретом, определяем, что $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 1$ только при движении по устойчивой сепаратрисе седла $M_3(1;\ 0)$: $p = \frac{1-y^2}{\sqrt{2}}$. Если по этой сепаратрисе приближаться к седлу справа, то в начальный момент времени $y > 1$. Если слева, то в начальный момент времени $-1 < y < 1$. Если в начальный момент времени $y = 1$, то мы уже находимся в седле и там останемся. Таким образом, краевая задача разрешима (причём однозначно) при $y_0 > -1$.
Ответ: $y_0 > -1$.

ДЗ 14. Определить тип точек покоя линейных систем:

а) $\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -2y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2y; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -2y; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x} = -x - y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$

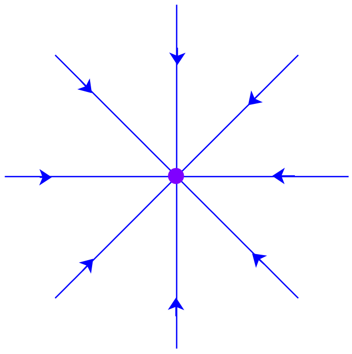
Филиппов № 988, 1001, 1003, 1009.

При каких y_0 разрешима краевая задача $\begin{cases} \ddot{y} = y(y-1),\ t > 0, \\ y(0) = y_0,\ y(+\infty) = 1 \end{cases}$ и сколько она имеет решений?

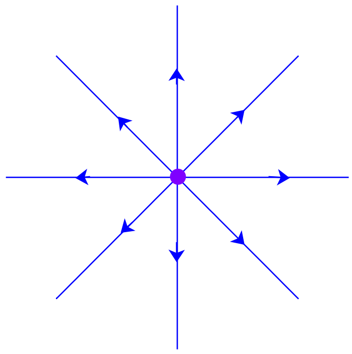
Дополнение. Продолжение классификации точек покоя (вырожденные случаи)

7. *Устойчивый дикритический узел.* Корни ХУ вещественны, отрицательны, совпадают: $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, и у матрицы A есть два ЛНЗ СВ. Все фазовые траектории — прямые, проходящие через точку покоя. Точка покоя асимптотически устойчива.
8. *Неустойчивый дикритический узел.* Корни ХУ вещественны, положительны, совпадают: $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, и у матрицы A есть два ЛНЗ СВ. Все фазовые траектории — прямые, проходящие через точку покоя. Точка покоя неустойчива.
9. *Устойчивый вырожденный узел.* Корни ХУ вещественны, отрицательны, совпадают: $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, и у матрицы A есть только один ЛНЗ СВ. Среди фазовых траекторий есть одна прямая (проходящая через точку покоя), которой касаются все криволинейные траектории. Направляющий вектор прямой — СВ матрицы A. Точка покоя асимптотически устойчива.

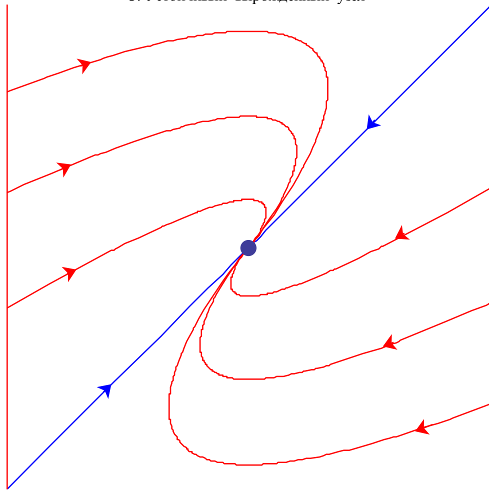
7. Устойчивый дикритический узел



8. Неустойчивый дикритический узел

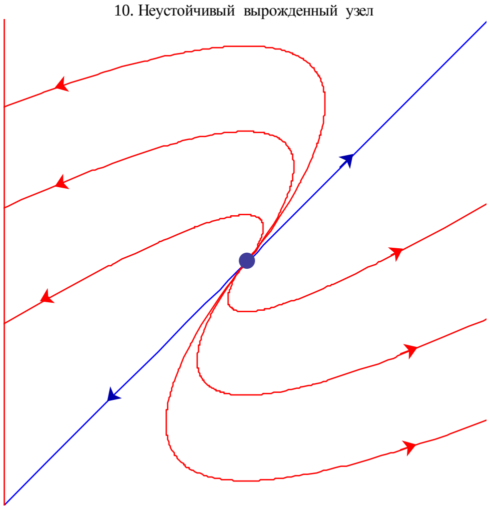


9. Устойчивый вырожденный узел

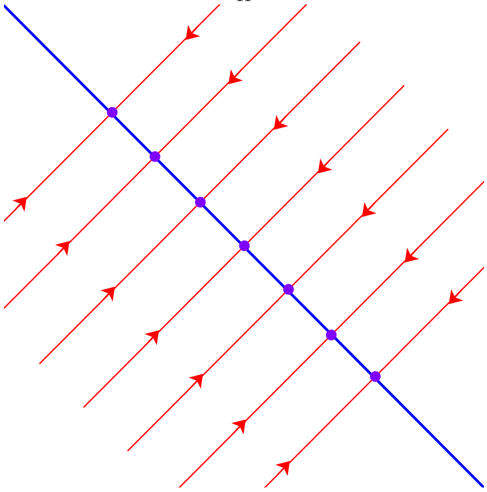


10. *Неустойчивый вырожденный узел.* Корни ХУ вещественны, положительны, совпадают: $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, и у матрицы A есть только один ЛНЗ СВ. Среди фазовых траекторий есть одна прямая (проходящая через точку покоя), которой касаются все криволинейные траектории. Направляющий вектор прямой — СВ матрицы A. Точка покоя неустойчива.
11. Один корень ХУ нулевой, другой — отрицательный: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$. Точки покоя заполняют прямую. Фазовые траектории образуют семейство параллельных прямых, пересекающих её. Направляющие векторы прямых — СВ матрицы A. Точки покоя устойчивы, но не асимптотически.
12. Один корень ХУ нулевой, другой — положительный: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$. Точки покоя заполняют прямую. Фазовые траектории образуют семейство параллельных прямых, пересекающих её. Направляющие векторы прямых — СВ матрицы A. Точки покоя неустойчивы.

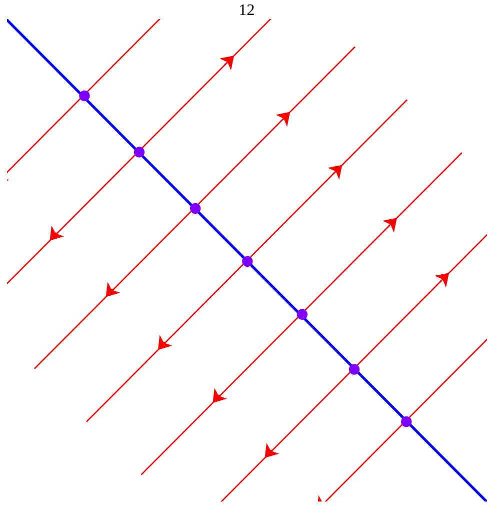
10. Неустойчивый вырожденный узел



11

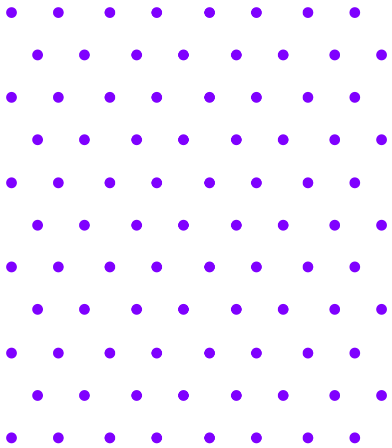


12



13. Оба корня ХУ нулевые: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, и у матрицы A есть два ЛНЗ СВ. Вся плоскость состоит из точек покоя. Точки покоя устойчивы, но не асимптотически.
14. Оба корня ХУ нулевые: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, и у матрицы A есть только один ЛНЗ СВ. Точки покоя заполняют прямую. Фазовые траектории — прямые, параллельные ей. Направляющий вектор прямых — СВ матрицы A. Точки покоя неустойчивы.

13



14