Семинар 17

Уравнение теплопроводности на прямой

$$\xrightarrow[\hspace{6em} x]{} \qquad \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ |u| < \text{const}, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Найти $u(x,t)$ при $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Если функции $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и ограничены, то классическое решение $u(x,t)$ существует и единственно.

Получим решение с помощью преобразования Фурье по x, предположив, что функции f, φ, u, u_t, u_x, u_{xx} абсолютно интегрируемы по x на $\mathbb{R}$ и $u \to 0$, $u_x \to 0$ при $x \to \infty$.

Введём обозначения для Фурье-образов:

$$U(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\xi,t) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi\,, \qquad F(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,t) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi,$$

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Возьмём преобразование Фурье от левой и правой части уравнения теплопроводности:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_t(\xi,t) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi}_{U_t(\lambda,t)} = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{\xi\xi}(\xi,t) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,t) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi}_{F(\lambda,t)}.$$

Преобразуем оставшийся интеграл, проинтегрировав по частям два раза:

$$\frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{\xi\xi}(\xi,t) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi = \underbrace{\frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} u_\xi(\xi,t) e^{-i\lambda\xi} \Big|_{\xi\to-\infty}^{\xi\to+\infty}}_{0} + \frac{i\lambda a^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_\xi(\xi,t) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi =$$

$$= \underbrace{\frac{i\lambda a^2}{\sqrt{2\pi}} u(\xi,t) e^{-i\lambda\xi} \Big|_{\xi\to-\infty}^{\xi\to+\infty}}_{0} + \frac{(i\lambda)^2 a^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\xi,t) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi = -a^2\lambda^2 U(\lambda,t).$$

Тогда

$U_t(\lambda,t) = -a^2\lambda^2 U(\lambda,t) + F(\lambda,t), \qquad t > 0.$

Возьмём преобразование Фурье от НУ:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\xi,0) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi}_{U(\lambda,0)} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi}_{\Phi(\lambda)}.$$

Таким образом, получилась задача Коши

$$\begin{cases} U_t(\lambda,t) + a^2\lambda^2 U(\lambda,t) = F(\lambda,t), & t > 0, \\ U(\lambda,0) = \Phi(\lambda), \end{cases}$$

для ОДУ первого порядка по t, где неизвестная функция U зависит также от параметра λ.

Решение этой задачи, как мы знаем (см. семинар 15), можно записать в виде:

$$U(\lambda,t)=\Phi(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}+\int\limits_0^t F(\lambda,\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\,d\tau.$$

Чтобы получить функцию $u(x,t)$, сделаем обратное преобразование Фурье:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(\lambda,t)e^{i\lambda x}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t+i\lambda x}\,d\lambda+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_0^t F(\lambda,\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\,d\tau\right]e^{i\lambda x}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t+i\lambda x}\,d\lambda+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda,\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)+i\lambda x}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,d\xi\right]e^{-a^2\lambda^2 t+i\lambda x}\,d\lambda+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)e^{-i\lambda\xi}\,d\xi\right]e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)+i\lambda x}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t+i\lambda(x-\xi)}\,d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)\,d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)+i\lambda(x-\xi)}\,d\lambda.$$

(В предположении, что можно менять порядок интегрирования.)

Вычислим внутренние интегралы по λ. Для этого рассмотрим вспомогательный интеграл:

$$I(p)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2+i\lambda p}\,d\lambda,\qquad p\in\mathbb{R}.$$

Вычислим этот интеграл с помощью дифференцирования по параметру.

Обоснование возможности дифференцирования $I(p)$ по параметру p под знаком интеграла:

1) $I(p)$ сходится при $p=0$:

   $$I(0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2}\,d\lambda=\sqrt{\pi}\ \text{— интеграл Пуассона.}$$

2) Подынтегральная функция $e^{-\lambda^2+i\lambda p}$ и её производная по p непрерывны.
3) Интеграл

   $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}e^{-\lambda^2+i\lambda p}\,d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}i\lambda e^{-\lambda^2+i\lambda p}\,d\lambda$$

   сходится равномерно при $p\in\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса: $\left|i\lambda e^{-\lambda^2+i\lambda p}\right|=|\lambda|e^{-\lambda^2}$, мажорантный интеграл сходится:

   $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\lambda|e^{-\lambda^2}\,d\lambda=2\int\limits_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda^2}\,d\lambda=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda^2}\,d(\lambda^2)=-e^{-\lambda^2}\Big|_0^{+\infty}=1.$$

Из условий 1)–3) следует возможность дифференцирования $I(p)$ по параметру p под знаком интеграла. Тогда

$$I'(p)=\int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda e^{-\lambda^2+i\lambda p}\,d\lambda=-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(-2\lambda+ip-ip)e^{-\lambda^2+i\lambda p}\,d\lambda=$$

$$=-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(-2\lambda+ip)e^{-\lambda^2+i\lambda p}\,d\lambda-\frac{p}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2+i\lambda p}\,d\lambda=$$

$$=-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2+i\lambda p}\,d(-\lambda^2+i\lambda p)-\frac{p}{2}I(p)=\underbrace{-\frac{i}{2}e^{-\lambda^2+i\lambda p}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0}-\frac{p}{2}I(p)=-\frac{p}{2}I(p).$$

Таким образом, функция $I(p)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{dI}{dp}=-\frac{p}{2}I,$$

откуда

$$\frac{dI}{I}=-\frac{p}{2}dp,$$

$$\ln|I|=-\frac{p^2}{4}+\tilde{C},$$

$$I(p)=\underbrace{\pm e^{\tilde{C}}}_{C}e^{-\frac{p^2}{4}}=Ce^{-\frac{p^2}{4}}.$$

Поскольку $I(0)=\sqrt{\pi}$, то $C=\sqrt{\pi}$, и

$$I(p)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{p^2}{4}}.$$

Далее, вычислим интеграл

$$J(\alpha,\beta)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2\lambda^2+i\beta\lambda}\,d\lambda,\qquad \alpha>0,\qquad \beta\in\mathbb{R}.$$

$$J(\alpha,\beta)=\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\alpha\lambda)^2+i\frac{\beta}{\alpha}(\alpha\lambda)}\,d(\alpha\lambda)=\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-q^2+i\frac{\beta}{\alpha}q}\,dq=\frac{1}{\alpha}I\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t+i\lambda(x-\xi)}\,d\lambda=J\left(a\sqrt{t},x-\xi\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)+i\lambda(x-\xi)}\,d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}.$$

Теперь получим:

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\xi.$$

Обозначим

$$\boxed{G(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}.}$$

Тогда

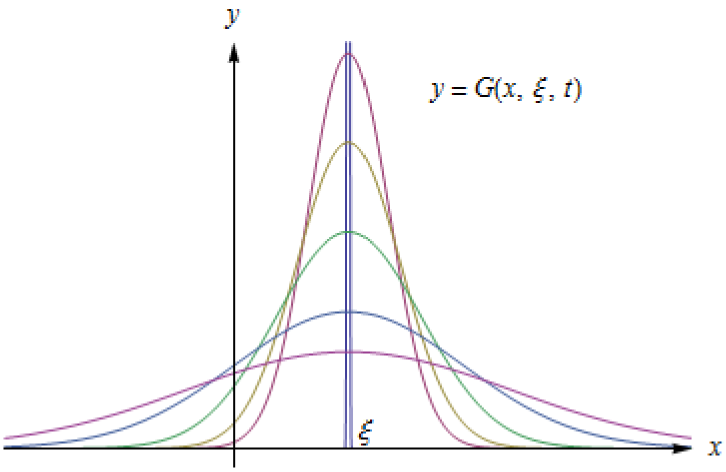
$$\boxed{u(x,t) = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi}_{\text{интеграл Пуассона}} + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\, d\xi\,.}$$

Эта формула даёт решение уравнения теплопроводности на прямой. Она справедлива и для кусочно-непрерывных функций φ, f. Выписанную формулу можно использовать в дальнейшем при решении задач.

Функция $G(x,\xi,t)$ называется фундаментальным решением уравнения теплопроводности на прямой. Она удовлетворяет задаче:

$$\begin{cases} G_t = a^2 G_{xx}, & t > 0, \quad x,\xi \in \mathbb{R}, \\ G|_{t=0} = \delta(x-\xi), & x,\xi \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Физический смысл: функция $G(x,\xi,t)$ описывает температуру в точке x в момент времени t, если в точке ξ в начальный момент времени мгновенно выделилось



определённое количество тепла ($Q = c\rho$, начальная температура нулевая).

Из графиков функции $G(x,\xi,t)$ при разных t мы видим, что с течением времени тепло, первоначально сосредоточенное в одной точке ξ, «расплывается» по всей прямой.

Парадокс бесконечной теплопроводности. В начальный момент времени $t = 0$ температура во всех точках x, кроме $x = \xi$, равна нулю. Но в любой последующий момент времени температура во всех точках прямой больше нуля, что означает бесконечную скорость распространения тепла. Такого не может быть. Это погрешность нашей модели, не учитывающей корпускулярную структуру вещества.

Аналогично решается уравнение теплопроводности на плоскости:

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t), & x,y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y), & x,y \in \mathbb{R}, \\ |u| < \text{const}, & x,y \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

В этом случае надо взять преобразование Фурье по двум переменным:

$$U(\lambda,\mu,t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\xi,\eta,t) e^{-i\lambda\xi - i\mu\eta}\, d\xi\, d\eta,$$

и т.д.

Окончательно получим, что решение уравнения теплопроводности на плоскости имеет вид:

$$u(x,y,t) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi,\eta) G(x,\xi,y,\eta,t)\, d\xi\, d\eta + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta,\tau) G(x,\xi,y,\eta,t-\tau)\, d\xi\, d\eta,$$

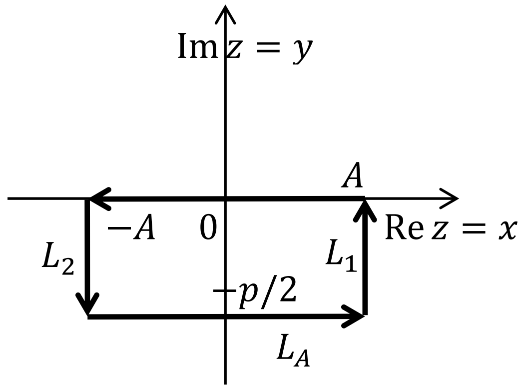
где

$$G(x,\xi,y,\eta,t)=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^2 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}$$
— фундаментальное решение уравнения теплопроводности на плоскости.
Аналогично в трёхмерном пространстве:
$$\begin{cases} u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x,y,t), \qquad x,y,z\in\mathbb{R}, \qquad t>0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z), \qquad x,y,z\in\mathbb{R},\\ |u|<\mathrm{const}, \qquad x,y,z\in\mathbb{R}, \qquad t\geq 0.\end{cases}$$
$$u(x,y,z,t)=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta,\zeta)G(x,\xi,y,\eta,z,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$
$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(x,\xi,y,\eta,z,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$
где
$$G(x,\xi,y,\eta,z,\zeta,t)=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}$$
— фундаментальное решение уравнения теплопроводности в пространстве.

ДЗ 17. БК с. 213–214 № 12–16.

Другой способ вычисления интеграла $\boldsymbol{I(p)}$

Вычислим интеграл
$$I(p)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2+i\lambda p}\,d\lambda, \qquad p\in\mathbb{R},$$
другим способом. Выделим полный квадрат:
$$I(p)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left[\lambda^2-i\lambda p+\left(\frac{ip}{2}\right)^2-\left(\frac{ip}{2}\right)^2\right]}d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\lambda^2-i\lambda p-\frac{p^2}{4}\right)}e^{-\frac{p^2}{4}}\,d\lambda=$$
$$=e^{-\frac{p^2}{4}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\lambda-\frac{ip}{2}\right)^2}d\left(\lambda-\frac{ip}{2}\right)=e^{-\frac{p^2}{4}}\int\limits_L e^{-z^2}\,dz, \tag{1}$$
где L — прямая $\operatorname{Im} z=-\frac{p}{2}$ на комплексной плоскости.
Покажем, что
$$\int\limits_L e^{-z^2}\,dz=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}.$$
Рассмотрим интеграл по конечному отрезку L_A прямой L



$I_A = \int_{L_A} e^{-z^2}\,dz = \int_{-A}^{A} e^{-\left(x-\frac{ip}{2}\right)^2}\,dx$

и замкнём контур интегрирования так, как показано на рисунке.

Поскольку подынтегральная функция e^{-z^2} аналитична на всей комплексной плоскости, интеграл от неё по замкнутому контуру равен нулю:

$$I_A + I_1 + I_2 + I_0 = 0, \qquad (2)$$

где

$$I_0 = \int\limits_{A}^{-A} e^{-x^2}\,dx,$$

I_1 и I_2 — интегралы от функции e^{-z^2} по отрезкам прямых L_1: $\operatorname{Re} z = A$, $-\frac{p}{2} \le \operatorname{Im} z \le 0$ и L_2: $\operatorname{Re} z = -A$, $-\frac{p}{2} \le \operatorname{Im} z \le 0$, соответственно, в указанном на рисунке направлении.

Рассмотрим

$$I_1 = \int\limits_{L_1} e^{-z^2}\,dz = \int\limits_{-\frac{p}{2}}^{0} e^{-(A+iy)^2} i\,dy = i\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{0} e^{-A^2-2Aiy+y^2}\,dy = ie^{-A^2}\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{0} e^{-2Aiy}e^{y^2}\,dy,$$

откуда

$$|I_1| = \left| ie^{-A^2}\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{0} e^{-2Aiy}e^{y^2}\,dy \right| \le e^{-A^2}\underbrace{\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{0} e^{y^2}\,dy}_{\text{не зависит от } A}.$$

Заметим, что $I_1 \to 0$ при $A \to +\infty$. Аналогично можно показать, что $I_2 \to 0$ при $A \to +\infty$. Тогда, перейдя в равенстве (2) к пределу при $A \to +\infty$, получим, что

$$\int\limits_{L} e^{-z^2}\,dz = \lim_{A\to+\infty} I_A = -\lim_{A\to+\infty}(I_0 + I_1 + I_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Теперь из (1) следует, что

$$I(p) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{p^2}{4}}.$$