Семинар 1

Вывод уравнений математической физики. Постановка краевых задач

Основные уравнения математической физики:

$$\boxed{u_t(M,t) = a^2 \vartriangle u(M,t) + f(M,t)}$$

— уравнение *теплопроводности* (описывает распространение тепла, диффузию, движение вязкой жидкости);

$$\boxed{u_{tt}(M,t) = a^2 \vartriangle u(M,t) + f(M,t)}$$

— уравнение *колебаний* (описывает малые механические колебания струны, газа, твёрдого тела);

$$\boxed{\vartriangle u(M) = 0}$$

— уравнение *Лапласа* (описывает стационарную теплопроводность, стационарную диффузию, стационарное течение идеальной жидкости, электростатику);

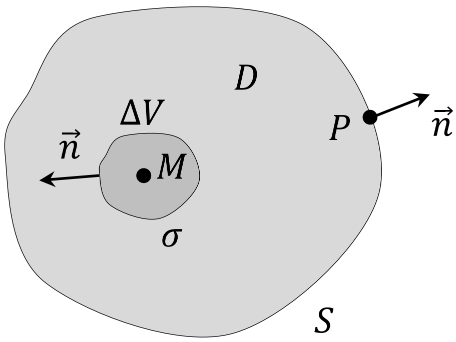
$$\boxed{\vartriangle u(M) + cu(M) = 0}$$

— уравнение *Гельмгольца* (описывает гармонические волны).

Здесь u — неизвестная функция; постоянные коэффициенты a^2, c и функция $f(M,t)$ — даны; M — точка в пространстве, на плоскости или на прямой, t — время.

Рассмотрим вывод уравнения математической физики на примере уравнения теплопроводности.

Уравнение теплопроводности



Пусть трёхмерная область D, ограниченная стью S, заполнена веществом с удельной теплоёмкостью $c(M)$, плотностью $\rho(M)$ и коэффициентом теплопроводности $k(M)$. Пусть $u(M,t)$ — температура в точке M в момент времени t. Будем считать, что все функции достаточно гладкие.

Рассмотрим подобласть ΔV, ограниченную стью σ. Изменение внутренней энергии в области ΔV за время Δt:

$$\Delta Q = \int\limits_{\Delta V} c(M)\rho(M)[u(M,t+\Delta t) - u(M,t)]\,dV = \int\limits_{\Delta V} c(M)\rho(M)\left[\int\limits_{t}^{t+\Delta t} u_t(M,\tau)\,d\tau\right]dV =$$

$$= \int\limits_{t}^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} c(M)\rho(M)u_t(M,\tau)\,dV.$$

Закон Фурье:

$\overrightarrow{\Phi}(M,t) = -k(M)\nabla u(M,t)$ — поток тепла (он направлен от более нагретого участка к менее нагретому и пропорционален градиенту температуры). Величина потока Φ — это количество тепла, протекающего через единичную площадку в единичный момент времени в направлении вектора $\overrightarrow{\Phi}$.

Согласно закону Фурье, за время Δt через поверхность σ наружу вышло количество тепла

$$\Delta Q_1 = \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_\sigma \left(\vec{\Phi}(M,\tau),\vec{n}\right) dS = \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} \operatorname{div}\left(\vec{\Phi}(M,\tau)\right) dV =$$

$$= -\int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} \operatorname{div}\big(k(M)\nabla u(M,\tau)\big)\, dV,$$

где $\vec{n}$ — единичная внешняя нормаль к поверхности σ и использована теорема Остроградского–Гаусса.

Если в области ΔV есть внешние источники (или поглотители) тепла, то за время Δt они выделили количество тепла

$$\Delta Q_2 = \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} F(M,\tau)\, dV,$$

где $F(M,\tau)$ — удельная мощность источников тепла (количество тепла, выделяемое внешними источниками в единичном объёме в единицу времени).

Закон сохранения энергии:

$\Delta Q = \Delta Q_2 - \Delta Q_1$.

$$\int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} c(M)\rho(M)u_t(M,\tau)\, dV =$$

$$= \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} F(M,\tau)\, dV + \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} \operatorname{div}\big(k(M)\nabla u(M,\tau)\big)\, dV.$$

Отсюда:

$$\int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} \Big[c(M)\rho(M)u_t(M,\tau) - F(M,\tau) - \operatorname{div}\big(k(M)\nabla u(M,\tau)\big)\Big]\, dV = 0.$$

По формуле среднего значения:

$$\int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} \Big[c(M)\rho(M)u_t(M,\tau) - F(M,\tau) - \operatorname{div}\big(k(M)\nabla u(M,\tau)\big)\Big]\, dV =$$

$$= \Big[c(M^*)\rho(M^*)u_t(M^*,t^*) - F(M^*,t^*) - \operatorname{div}\big(k(M^*)\nabla u(M^*,t^*)\big)\Big]\Delta t \Delta V = 0,$$

где $M^* \in \Delta V$, $t^* \in (t, t+\Delta t)$.

Будем стягивать область ΔV к некоторой фиксированной точке M (при этом $\Delta V \to 0$) и устремим Δt к нулю, тогда

$$c(M)\rho(M)u_t(M,t) - F(M,t) - \operatorname{div}\big(k(M)\nabla u(M,t)\big) = 0.$$

Пусть теперь $c = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, $k = \text{const}$. Тогда $\operatorname{div}(k\nabla u) = k\operatorname{div}(\nabla u) = k \,\Delta\, u$, и

$$u_t = \frac{k}{c\rho}\,\Delta\, u + \frac{F(M,t)}{c\rho}.$$

Обозначим $\frac{k}{c\rho} = a^2$ (коэффициент *температуропроводности*), $\frac{F(M,t)}{c\rho} = f(M,t)$. Получим

$$\boxed{u_t = a^2\,\Delta\, u + f(M,t).}$$

Это и есть уравнение теплопроводности. Оно выполняется во всех внутренних точках M области D в любой момент времени t.

Если распределение температуры стационарно, т.е. температура в каждой точке не изменяется со временем, $u = u(M)$ и $f = f(M)$, то получим уравнение *Пуассона:*

$\Delta\, u = -\dfrac{f(M)}{a^2}.$

В частном случае, когда $f \equiv 0$, имеем уравнение *Лапласа:*

$\boxed{\Delta\, u = 0.}$

Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности ставятся дополнительные условия: начальное и граничное.

НУ: $\boxed{u|_{t=0} = \varphi(M)}$ — задана температура в каждой точке области D в начальный момент времени $t = 0$.

ГУ: ставится на границе S области D. Рассмотрим ГУ трёх типов.

1) $\boxed{u|_S = \mu(P,t)}$ — ГУ *первого* рода или условие *Дирихле:* на границе поддерживается заданная температура (здесь P — точка поверхности S, $\mu(P,t)$ — заданная функция).
2) $\boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \nu(P,t)}$ — ГУ *второго рода* или условие *Неймана.* Выясним его физический смысл. Если мы умножим левую и правую части этого равенства на коэффициент $-k$, то получим

   $\left.\left(-k\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_S = -k\nu(P,t),$

   т.е. $\Phi_n|_S = -k\nu(P,t)$, где $\Phi_n = \left(\vec{\Phi},\vec{n}\right) = (-k\nabla u,\vec{n}) = -k\frac{\partial u}{\partial n}$ — проекция вектора $\vec{\Phi}$ на единичную внешнюю нормаль $\vec{n}$ к поверхности S. Таким образом, условие Неймана означает, что задан поток тепла через границу S. В частности, *однородное* условие Неймана

   $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$

   означает, что граница теплоизолирована.
3) $\boxed{\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h(P)u\right)\right|_S = \eta(P,t)}$ — ГУ *третьего рода.* Оно описывает теплообмен с окружающей средой. В самом деле, если температура окружающей среды равна u_0, то поток тепла с поверхности S (имеющей температуру u) в окружающую среду (в направлении внешней нормали) описывается законом Ньютона:

   $\Phi_0 = \alpha(u - u_0)$, где α — коэффициент теплообмена.

   Поскольку Φ_0 должен быть равен $\Phi_n|_S$ (мы будем считать, что на границе нет дополнительных источников тепла), то

   $-k\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \alpha(u - u_0),$

   откуда получаем

   $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\alpha}{k}u\right)\right|_S = \frac{\alpha}{k}u_0$, а это и есть ГУ третьего рода, где

   $h(P) = \dfrac{\alpha(P)}{k}, \qquad \eta(P,t) = \dfrac{\alpha(P)}{k}u_0(P,t).$

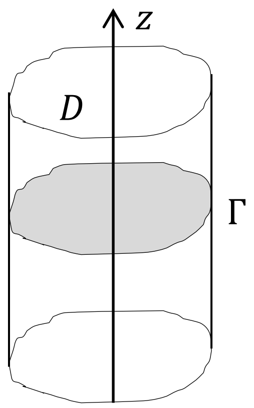
   Если мы устремим здесь α к нулю, то получим однородное условие Неймана $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$: теплообмен отсутствует. Если же устремим α к бесконечности, то получим условие Дирихле $u|_S = u_0$: идеальный тепловой контакт.

   Заметим, что коэффициент $h(P) = \frac{\alpha}{k}$ в ГУ третьего рода *неотрицателен.*

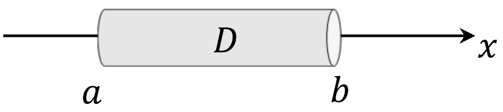
Таким образом, для уравнения теплопроводности в ограниченной области D ставится *начально-краевая* задача:

$u_t = a^2 \Delta u + f(M,t), \qquad M \in D, \qquad t > 0;$
$u|_{t=0} = \varphi(M), \qquad M \in \overline{D};$
+ граничное условие на S.

Требуется найти функцию $u(M,t)$ при $M \in \overline{D}$ (в области D вместе с её границей S), $t > 0$. (В стационарном случае — для уравнения Пуассона или Лапласа — начальное условие не ставится.)
Теперь запишем уравнение теплопроводности в декартовых координатах:
$u_t(x,y,z,t) = a^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) + f(x,y,z,t), \qquad (x,y,z) \in D.$



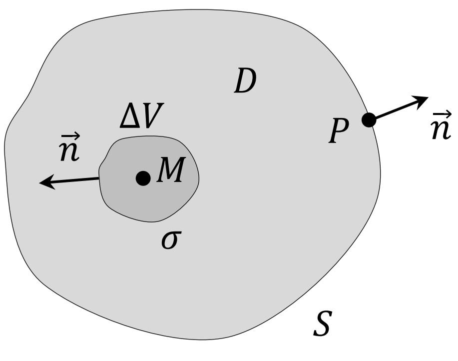
Если область D имеет форму бесконечного цилиндра с осью Oz, т.е. геометрия области не зависит от координаты z, и функция f, а также граничные и начальные условия не зависят от z, то в силу симметрии и температура u не будет зависеть от z. Тогда получим двумерное уравнение теплопроводности:
$u_t(x,y,t) = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f(x,y,t),\ (x,y) \in \Gamma$ — в поперечном сечении цилиндра.
Если же область D имеет форму тонкого стержня, параллельного оси Ox, с теплоизолированной боковой поверхностью, т.е. изменением температуры в поперечном сечении можно пренебречь, то уравнение теплопроводности будет одномерным:
$u_t(x,t) = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad x \in (a,b).$



ДЗ 1. БСТ гл. II № 1, 4, 11; гл. III № 6, 9; гл. IV № 3.

Дополнительный материал

Диффузия



Пусть теперь $u(M,t)$ — концентрация вещества в точке M в момент времени t.
Закон диффузии:
$\vec{\Phi}(M,t) = -d(M)\nabla u(M,t),$
где $\vec{\Phi}$ — поток вещества, $d(M)$ — коэффициент диффузии.
Изменение количества вещества в области ΔV за время Δt:

$$\Delta m = \int\limits_{\Delta V} [u(M,t+\Delta t) - u(M,t)]\,dV = \int\limits_{\Delta V} \left[\int\limits_{t}^{t+\Delta t} u_t(M,\tau)\,d\tau\right] dV = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} u_t(M,\tau)\,dV.$$

Количество вещества, которое вышло через поверхность σ за время Δt за счёт диффузии:

$$\Delta m_1 = \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_\sigma \left(\vec{\Phi}(M,\tau), \vec{n}\right) dS = \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} \operatorname{div}\left(\vec{\Phi}(M,\tau)\right) dV =$$

$$= -\int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} \operatorname{div}\big(d(M)\nabla u(M,\tau)\big)\, dV.$$

Если в области ΔV есть внешние источники (или поглотители) вещества, то за время Δt они выделили количество вещества

$$\Delta m_2 = \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} f(M,\tau)\, dV,$$

где $f(M,\tau)$ — удельная мощность источников вещества (количество вещества, выделяемое внешними источниками в единичном объёме в единицу времени).

Закон сохранения вещества:

$\Delta m = \Delta m_2 - \Delta m_1$.

$$\int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} u_t(M,\tau)\, dV = \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} f(M,\tau)\, dV + \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{\Delta V} \operatorname{div}\big(d(M)\nabla u(M,\tau)\big)\, dV.$$

Применив формулу среднего значения и устремив $\Delta V \to 0$, $\Delta t \to 0$, получим

$u_t(M,t) = \operatorname{div}\big(d(M)\nabla u(M,t)\big) + f(M,t)$.

Если $d = \mathrm{const}$, то

$\boxed{u_t = d \,\Delta\, u + f(M,t).}$

Значит, диффузия описывается тем же уравнением, что и теплопроводность.

Стационарная диффузия $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ описывается уравнением Пуассона:

$$\Delta\, u = -\frac{f(M)}{d}.$$

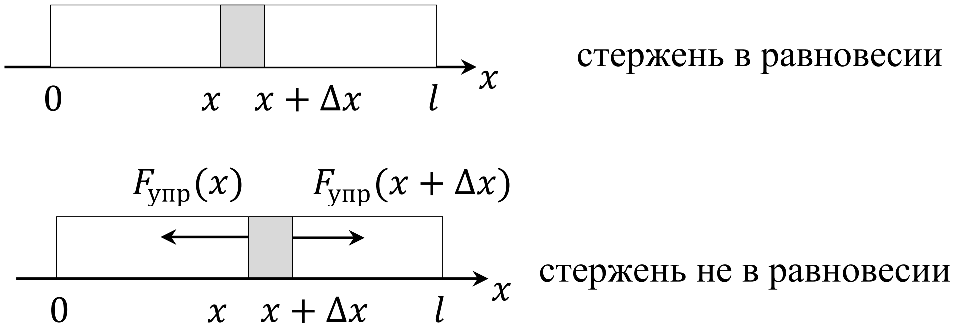
При $f \equiv 0$ — уравнением Лапласа: $\boxed{\Delta\, u = 0.}$

Начальное условие: $u|_{t=0} = \varphi(M)$ — задана начальная концентрация.

Граничное условие.

1) $u|_S = \mu(P,t)$ — на границе поддерживается заданная концентрация.
2) $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \nu(P,t)$ — на границе задан поток вещества.

Уравнение малых продольных колебаний стержня



Пусть тонкий упругий стержень в положении равновесия (когда он не деформирован) имеет длину l. Направим ось Ox вдоль стержня и поместим начало координат на левом конце стержня.

Рассмотрим малый участок стержня, заключённый между сечениями x и $x + \Delta x$.

Пусть точки стержня могут колебаться вдоль оси Ox (но каждое поперечное сечение стержня колеблется как единое целое). Обозначим через $u(x,t)$ отклонение сечения стержня, находившегося в положении равновесия в точке x, от этого положения равновесия в момент времени t.
При отклонении стержня от положения равновесия удлинение выделенного участка стержня равно $\Delta u = u(x+\Delta x, t) - u(x,t)$. По закону Гука сила упругости, действующая в сечении x, пропорциональна относительному удлинению $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ и равна (по абсолютной величине)

$$F_{\text{упр}}(x,t) = k(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, t) - u(x,t)}{\Delta x} = k(x) u_x(x,t),$$

где $k(x) = E(x)S$, S — площадь сечения, $E(x)$ — модуль Юнга.
Пусть $\tilde{f}(x,t)$ — линейная плотность внешних сил, приложенных к стержню, $\rho(x)$ — линейная плотность стержня (в положении равновесия). Запишем второй закон Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

где $\vec{p}$ — импульс, $\vec{F}$ — приложенная сила.
Применительно к выделенному участку стержня это будет выглядеть так:

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} \rho(\xi) u_t(\xi,t)\, d\xi = F_{\text{упр}}(x+\Delta x, t) - F_{\text{упр}}(x,t) + \int_x^{x+\Delta x} \tilde{f}(\xi,t)\, d\xi.$$

Отсюда

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho(\xi) u_{tt}(\xi,t)\, d\xi = k(x+\Delta x) u_x(x+\Delta x, t) - k(x) u_x(x,t) + \int_x^{x+\Delta x} \tilde{f}(\xi,t)\, d\xi,$$

т.е.

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho(\xi) u_{tt}(\xi,t)\, d\xi = \int_x^{x+\Delta x} \frac{d}{d\xi}\big(k(\xi) u_x(\xi,t)\big)\, d\xi + \int_x^{x+\Delta x} \tilde{f}(\xi,t)\, d\xi.$$

Применив формулу среднего значения и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим:

$$\rho(x) u_{tt}(x,t) = \big(k(x) u_x(x,t)\big)_x + \tilde{f}(x,t).$$

Если $\rho = \text{const}$, $k = \text{const}$, то

$$u_{tt} = \frac{k}{\rho} u_{xx} + \frac{\tilde{f}(x,t)}{\rho}.$$

Обозначив $\frac{k}{\rho} = a^2$, $\frac{\tilde{f}(x,t)}{\rho} = f(x,t)$, получим:

$$\boxed{u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad x \in (0,l).}$$

Это уравнение *колебаний* на отрезке.
Поскольку по t это уравнение второго порядка, то ставятся два *начальных* условия:

$$\boxed{\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} &= \psi(x). \end{aligned}}$$

Т.е. заданы начальные отклонения и скорости точек стержня.
Граничные условия:

1) $\boxed{u|_{x=0} = \mu(t)}$ — левый конец движется по заданному закону. Это условие Дирихле. В частности, при $\mu(t) \equiv 0$, имеем неподвижно закреплённый конец.

2) Левый конец свободен: $F_{\text{упр}}(0) = 0$. Тогда $ku_x|_{x=0} = 0$, откуда

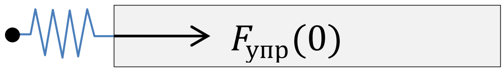
$$\boxed{u_x|_{x=0} = 0.}$$

Если же на левый конец действует заданная внешняя сила $F_0(t)$, то $F_{\text{упр}}(0) = -F_0(t)$, и $ku_x|_{x=0} = -F_0(t)$, откуда

$$\boxed{u_x|_{x=0} = -\frac{F_0(t)}{k}.}$$

Это условие Неймана.

3) Левый конец закреплён на пружине с коэффициентом упругости k_0. Тогда



$F_{\text{упр}}(0) = k_0 u|_{x=0}$, откуда $ku_x|_{x=0} = k_0 u|_{x=0}$, и

$$\boxed{\left.\left(u_x - \frac{k_0}{k}u\right)\right|_{x=0} = 0.}$$

Если другой конец пружины двигают по закону $x = \mu(t)$, то $F_{\text{упр}}(0) = k_0\big(u|_{x=0} - \mu(t)\big)$, откуда $ku_x|_{x=0} = k_0\big(u|_{x=0} - \mu(t)\big)$, и

$$\boxed{\left.\left(u_x - \frac{k_0}{k}u\right)\right|_{x=0} = -\frac{k_0}{k}\mu(t).}$$

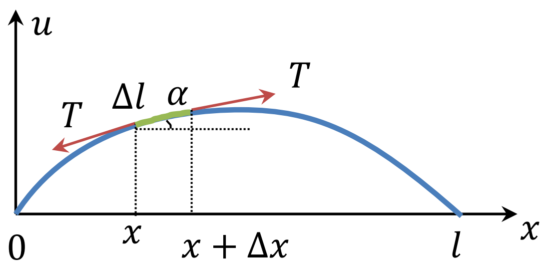
Это граничное условие третьего рода.

Аналогичные граничные условия ставятся на правом конце.

Таким образом, для уравнения колебаний на отрезке ставится следующая начально-краевая задача:

$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad x \in (0,l), \qquad t > 0;$
$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in (0,l);$
$u_t|_{t=0} = \psi(x), \qquad x \in (0,l);$
$+$ граничные условия при $x = 0$ и $x = l$.

Уравнение малых поперечных колебаний струны



Рассмотрим натянутую (сила натяжения T) струну длины l, которая может совершать колебания в поперечном направлении (в плоскости). Направим ось Ox вдоль струны. Пусть $u(x,t)$ — отклонение ки x струны от положения равновесия. Рассмотрим участок струны, расположенный между точками x и $x + \Delta x$. Вычислим его длину:

$$\Delta l = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + u_x^2}\, d\xi.$$

С другой стороны:

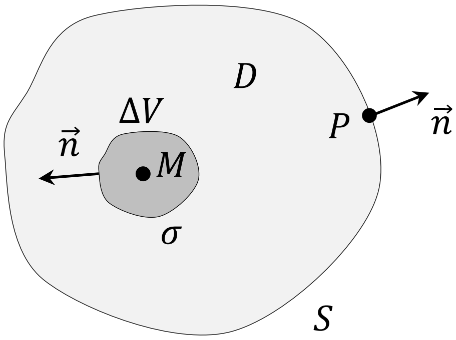
$$u_x = \operatorname{tg}\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + o(\alpha^4), \qquad \alpha \to 0,$$

$$u_x^2 = \alpha^2 + o(\alpha^2), \qquad \sqrt{1 + u_x^2} = 1 + \frac{\alpha^2}{2} + o(\alpha^2).$$

Если колебания струны малы, то угол α близок к нулю. Будем считать малыми колебаниями такие, при которых можно пренебречь членами порядка α^2 по сравнению с 1 и считать, что

$$\Delta l \approx \int\limits_x^{x+\Delta x} d\xi = \Delta x,$$
т.е. длина струны при малых колебаниях не изменяется. Но тогда и сила натяжения не изменяется и равна T для любой точки струны. Запишем второй закон Ньютона
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$
для выделенного участка струны в проекции на ось Ou. При этом будем считать, что проекция силы натяжения $T_u = T\sin\alpha = T\alpha\left(1 + \frac{\alpha^2}{6} + o(\alpha^3)\right) \approx T\alpha \approx Tu_x$. Тогда
$$\frac{d}{dt}\int\limits_x^{x+\Delta x} \rho(\xi)u_t(\xi,t)\,d\xi = T\big(u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)\big) + \int\limits_x^{x+\Delta x} F(\xi,t)\,d\xi,$$
где $\rho(x)$ — линейная плотность струны, $F(x,t)$ — линейная плотность внешних сил, приложенных к струне (по оси Ou). Отсюда
$$\int\limits_x^{x+\Delta x} \rho(\xi)u_{tt}(\xi,t)\,d\xi = T\int\limits_x^{x+\Delta x} u_{xx}(\xi,t)\,d\xi + \int\limits_x^{x+\Delta x} F(\xi,t)\,d\xi.$$
Применив формулу среднего значения и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим:
$$\rho(x)u_{tt}(x,t) = Tu_{xx}(x,t) + F(x,t).$$
Если $\rho = \mathrm{const}$, то
$$u_{tt} = \frac{T}{\rho}u_{xx} + \frac{F(x,t)}{\rho}.$$
Положим $\frac{T}{\rho} = a^2, \frac{F(x,t)}{\rho} = f(x,t)$. Тогда
$$u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t), \qquad x \in (0,l).$$
Получили опять уравнение колебаний на отрезке.
Начальные условия:
$u|_{t=0} = \varphi(x)$,
$u_t|_{t=0} = \psi(x)$ — заданы начальные отклонения и скорости точек струны.
В частности, если $\psi \equiv 0$, $\varphi \not\equiv 0$, то в начальный момент покоящаяся струна отклонена от положения равновесия (гитара). Если $\varphi \equiv 0$, $\psi \not\equiv 0$, то начального отклонения нет, но струне придали начальный импульс (скорость), например, при ударе молоточком (пианино).
Граничные условия:
1) Левый конец закреплён: $u|_{x=0} = 0$.
   Левый конец движется по заданному закону: $u|_{x=0} = \mu(t)$.
2) Левый конец свободен: $T_u|_{x=0} = 0 \Rightarrow u_x|_{x=0} = 0$.
   К левому концу приложена сила $F_0(t)$ по оси Ou: $F_0(t) = -Tu_x|_{x=0} \Rightarrow$
   $$u_x|_{x=0} = -\frac{F_0(t)}{T}.$$
3) Левый конец закреплён на пружине: $Tu_x|_{x=0} = k_0u|_{x=0} \Rightarrow \left(u_x - \frac{k_0}{T}u\right)\Big|_{x=0} = 0$.
   Левый конец закреплён на пружине, которую двигают по закону $u = \mu(t)$:
   $$Tu_x|_{x=0} = k_0\big(u|_{x=0} - \mu(t)\big) \Rightarrow \left(u_x - \frac{k_0}{T}u\right)\Big|_{x=0} = -\frac{k_0}{T}\mu(t).$$
Аналогичные граничные условия ставятся на правом конце струны.

Уравнение малых колебаний газа в сосуде



Пусть $p(M,t)$ — давление, $\vec{v}(M,t)$ — скорость, $\rho(M,t)$ — плотность газа, $\vec{F}(M,t)$ — плотность внешних сил. Рассмотрим подобласть ΔV. Запишем второй закон Ньютона для газа, находящегося в ней в момент времени t:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Delta V}\rho(M,t)\vec{v}(M,t)\,dV =$$
$$= -\int\limits_{\sigma} p(M,t)\vec{n}\,dS + \int\limits_{\Delta V}\vec{F}(M,t)\,dV.$$

Рассмотрим интеграл $\vec{I} = \int_\sigma p(M,t)\vec{n}\,dS$. Это вектор. Его первую компоненту можно записать в виде:

$I_1 = \int_\sigma (\vec{A},\vec{n})\,dS$, где $\vec{A} = \{p,0,0\}$. Тогда по формуле Остроградского–Гаусса:

$$I_1 = \int\limits_{\Delta V}\operatorname{div}\vec{A}\,dV = \int\limits_{\Delta V}\frac{\partial p}{\partial x}dV.$$

Аналогично, $I_2 = \int_{\Delta V}\frac{\partial p}{\partial y}dV$, $I_3 = \int_{\Delta V}\frac{\partial p}{\partial z}dV$, и $\vec{I} = \int_{\Delta V}\nabla p\,dV$.

Далее:

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(M,t) = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v},\nabla)\vec{v}.$$

Тогда получим:

$$\int\limits_{\Delta V}\rho(\vec{v}_t + (\vec{v},\nabla)\vec{v})\,dV = -\int\limits_{\Delta V}\nabla p\,dV + \int\limits_{\Delta V}\vec{F}\,dV.$$

Воспользовавшись формулой среднего значения и перейдя к пределу при $\Delta V \to 0$, получим:

$$\boxed{\rho(\vec{v}_t + (\vec{v},\nabla)\vec{v}) = -\nabla p + \vec{F}.}$$

Закон сохранения вещества:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Delta V}\rho(M,t)\,dV = -\int\limits_{\sigma}(\rho\vec{v},\vec{n})\,dS = -\int\limits_{\Delta V}\operatorname{div}(\rho\vec{v})\,dV.$$

Воспользовавшись формулой среднего значения и перейдя к пределу при $\Delta V \to 0$, получим:

$$\boxed{\rho_t + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0.}$$

К двум полученным уравнениям газодинамики надо добавить ещё уравнение состояния газа:

$$\boxed{p = c(\rho).}$$

Пусть $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}(M)$, $p = p_0 + \tilde{p}(M) = c(\rho_0) + c'(\rho_0)\tilde{\rho} + o(\tilde{\rho})$, где ρ_0 и p_0 — плотность и давление в положении равновесия, а $\tilde{\rho}$ и $\tilde{p}$ — малые отклонения от положения равновесия. Будем считать малыми колебаниями такие, при которых можно пренебречь квадратами и произведениями малых величин по сравнению с первыми степенями. Кроме того, будем считать малыми величинами скорость $\vec{v}$ и её частные производные. Тогда система уравнений газодинамики принимает вид:

$$\begin{cases}\rho_0\vec{v}_t = -c'(\rho_0)\nabla\tilde{\rho} + \vec{F},\\ \tilde{\rho}_t + \rho_0\operatorname{div}(\vec{v}) = 0.\end{cases}$$

Теперь возьмём дивергенцию от первого уравнения и производную по t от второго:

$$\begin{cases}\rho_0\operatorname{div}\vec{v}_t = -c'(\rho_0)\,\Delta\,\tilde{\rho} + \operatorname{div}\vec{F},\\ \tilde{\rho}_{tt} + \rho_0\operatorname{div}(\vec{v}_t) = 0.\end{cases}$$

Вычтя из второго уравнения первое, получим:

$$\tilde{\rho}_{tt} = c'(\rho_0)\,\Delta\,\tilde{\rho} - \operatorname{div}\vec{F}.$$

Введя обозначения $c'(\rho_0) = a^2 > 0$, $-\operatorname{div}\vec{F} = f(M,t)$, получим трёхмерное уравнение колебаний:

$$\boxed{\tilde{\rho}_{tt} = a^2\,\Delta\,\tilde{\rho} + f(M,t).}$$

Оно описывает распространение звука в газе.

Начальные условия. Поскольку уравнение второго порядка по t, то начальных условий должно быть два:

1) Задана начальная плотность: $\boxed{\tilde{\rho}|_{t=0} = \varphi(M).}$
2) Задана начальная скорость: $\vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0$.
   Из уравнения $\tilde{\rho}_t + \rho_0\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$ получим:
   $\boxed{\tilde{\rho}_t|_{t=0} = -\rho_0\operatorname{div}\vec{v}_0\,.}$

Граничные условия:

1) Абсолютно мягкий сосуд. Тогда $p|_S = p_{\text{вн}} = p_0$, где $p_{\text{вн}}$ — давление внешней среды. Отсюда $\tilde{p}|_S = 0$ и $\boxed{\tilde{\rho}|_S = 0.}$
2) Абсолютно жёсткий сосуд: $v_n|_S = 0$. Рассмотрим уравнение $\rho_0\vec{v}_t = -c'(\rho_0)\nabla\tilde{\rho} + \vec{F}$ на границе S, считая, что $\vec{F} = 0$ вблизи границы. Умножив уравнение на $\vec{n}$, получим:
   $\rho_0(v_n|_S)_t = -c'(\rho_0)\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial n}\Big|_S = 0$, откуда
   $$\boxed{\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial n}\Big|_S = 0.}$$

В промежуточном случае надо ставить ГУ третьего рода.

В случае установившихся колебаний с частотой ω: $\tilde{\rho}(M,t) = u(M)\sin(\omega t + \varphi)$, под действием силы $f(M,t) = \tilde{f}(M)\sin(\omega t + \varphi)$, уравнение колебаний принимает вид:

$$-\omega^2 u = a^2\,\Delta\,u + \tilde{f}(M),$$

или $\Delta\,u + k^2 u = \bar{\tilde{f}}$ — уравнение *Гельмгольца*, где $k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$. Если внешней силы нет, то уравнение Гельмгольца однородно:

$$\boxed{\Delta\,u + k^2 u = 0.}$$