Семинар 14

Аналитические функции комплексной переменной

Аналитические функции — самые важные в ТФКП. Фактически, изучению их свойств и посвящена вся ТФКП.
На сегодняшнем семинаре мы будем изучать пока только *однозначные* функции комплексной переменной.
Функцию $f(z)$ можно рассматривать как функцию точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, т. е. функцию двух вещественных переменных x, y. Для функции $f(z)$ вводятся понятия предела (по Гейне и по Коши) и непрерывности так же, как и для вещественной функции двух переменных. Однако для $f(z)$ оказывается возможным ввести ещё понятие производной по z (а не только частных производных по x и y).
О. Функция $f(z)$, определённая в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, называется *дифференцируемой* в точке z_0, если

$$\exists f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}$$

(имеется в виду конечный предел).
Здесь $z \to z_0$ означает, что расстояние между точками комплексной плоскости z и z_0 стремится к нулю, т. е. $|z - z_0| = |\Delta z| \to 0$. При этом предел $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, если он существует, *не зависит* от способа стремления z к z_0 на комплексной плоскости.
Если функция $f(z)$ *дифференцируема* в точке z_0, то она *непрерывна* в точке z_0.
Исходя из определения, можно показать, что
$(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(e^z)' = e^z$, $(\ln z)' = \frac{1}{z}$, $(z^n)' = nz^{n-1}$ (при $n \in \mathbb{Z}$).
Также будут справедливы стандартные формулы для производной суммы, разности, произведения, частного, сложной функции.
Напомним, что *область* G комплексной плоскости $\mathbb{C}$ — это открытое связное множество точек из $\mathbb{C}$.
О. Функция $f(z)$ называется *аналитической* в области G, если в области G существует и непрерывна её производная $\frac{df}{dz}$.
Сумма, разность, произведение и частное (когда делитель не обращается в нуль), а также суперпозиция (сложная функция) аналитических функций есть функция аналитическая.
О. Функция $f(z)$ называется *аналитической* в точке z_0, если она является аналитической *в некоторой окрестности* точки z_0.
Т. Если функция $f(z)$ является аналитической в области G, то она *бесконечное число раз дифференцируема* в области G.
Заметим, что для функции *вещественной* переменной из существования и непрерывности *первой* производной *не следует* существование производных *любого* порядка! А для функции комплексной переменной — следует.
Пусть $z = x + iy$, $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — вещественная и мнимая части функции $f(z)$, соответственно.

Т. (условия Коши–Римана). Функция $f(z)$ является аналитической в области $G \Leftrightarrow$ в области G существуют *непрерывные* частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, связанные соотношениями $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$.

Пример 1 (самостоятельно). Исследовать на аналитичность функции $e^z, \frac{1}{z}, |z|^2$.

а) $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = \underbrace{e^x\cos y}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{e^x\sin y}_{v(x,y)}$.

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y,\ \frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y,\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ \forall x, y.$
$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\ \forall x, y.$

Следовательно, функция $f(z) = e^z$ является аналитической на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (такие функции называются *целыми*).

б) $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{v(x,y)}$.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ при $x^2 + y^2 \neq 0$.
$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ при $x^2 + y^2 \neq 0$.

Следовательно, функция $f(z) = \frac{1}{z}$ является аналитической при $z \neq 0$.

в) $f(z) = |z|^2 = \underbrace{x^2 + y^2}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{0}_{v(x,y)}$.

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ при $x = 0$,
$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ при $y = 0$.

Условия К.–Р. выполняются только в точке $z = 0$. Но функция $f(z) = |z|^2$ *не является* аналитической в точке $z = 0$, т. к. аналитичность *в точке* — это аналитичность *в некоторой окрестности* этой точки, чего в данном случае нет.

Значит, функция $f(z) = |z|^2$ не является аналитической ни в одной точке.

Так же можно показать, что функции $\sin z, \cos z, z^n$ (при $n \in \mathbb{N}$) являются аналитическими на всей комплексной плоскости.

О. Вещественная функция двух вещественных переменных $u(x, y)$ называется *гармонической* в области G, если $u(x, y) \in C^2(G)$ и $\Delta u = 0$ в G.
Т. Если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является аналитической в области G, то $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — гармонические функции в области G.
Условия К.–Р. позволяют восстановить аналитическую функцию по её вещественной или мнимой части.

Пример 2. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, если
$u(x, y) = e^x\sin y + 2xy$.
Сначала проверим, может ли функция $u(x, y)$ быть вещественной частью некоторой аналитической функции (если это не так, то задача не имеет решения). Если $u(x, y)$ — вещественная часть некоторой аналитической функции, то $u(x, y)$ должна быть гармонической функцией. Проверим это:

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0 \ \Rightarrow \ u(x, y)$ — гармоническая функция (на всей плоскости). Поэтому она может быть вещественной частью некоторой аналитической функции $f(z)$. Остаётся найти мнимую часть $v(x, y)$ функции $f(z)$. Вещественная и мнимая части аналитической функции связаны между собой условиями К.–Р.:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y + 2y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + 2x = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отсюда

$$dv(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = (-e^x \cos y - 2x)\, dx + (e^x \sin y + 2y)\, dy =$$
$$= d(-e^x \cos y - x^2 + y^2).$$

Тогда

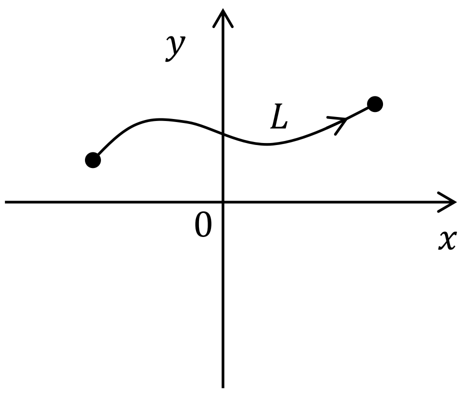
$$v(x, y) = -e^x \cos y - x^2 + y^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = e^x \sin y + 2xy + i(-e^x \cos y - x^2 + y^2 + C) =$$
$$= e^x(\sin y - i \cos y) + (2xy - ix^2 + iy^2) + iC =$$
$$= -ie^x(\cos y + i \sin y) - i(x^2 - y^2 + 2ixy) + iC = -ie^z - iz^2 + iC = -i(e^z + z^2 - C).$$

Эта функция является аналитической на всей комплексной плоскости, и её вещественная часть совпадает с функцией $u(x, y)$.

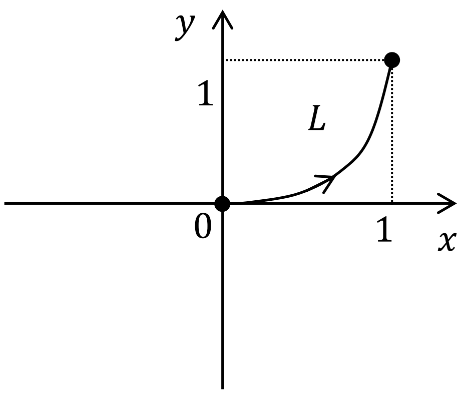
Ответ: $f(z) = -i(e^z + z^2 - C)$, $C \in \mathbb{R}$.



Интеграл по кусочно-гладкой кривой на комплексной плоскости определяется так:

$$\int_L f(z)\, dz = \int_L (u + iv)(dx + i\, dy) =$$
$$= \int_L u\, dx - v\, dy + i \int_L v\, dx + u\, dy.$$

Он сводится к двум вещественным криволинейным интегралам второго рода.

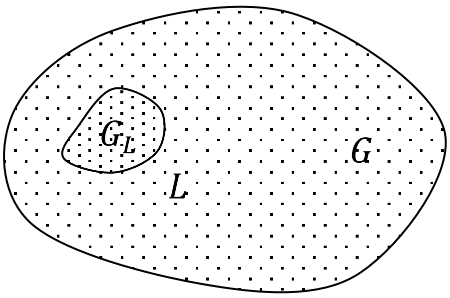


Пример 3. Найти $\int_L \bar{z}\, dz$ по кривой L: $y = x^\alpha$, $0 \le x \le 1$, $\alpha > 0$, в направлении возрастания x.

Имеем:

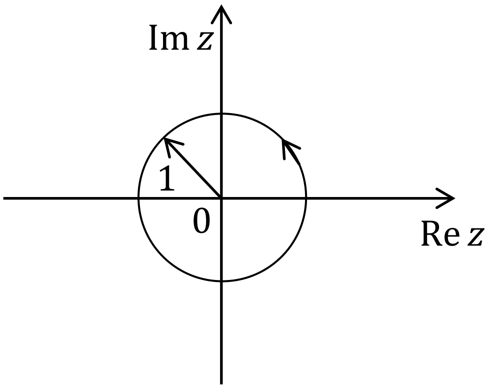
$$\int_L \bar{z}\, dz = \int_L (x - iy)(dx + i\, dy) =$$
$$= \int_L \underbrace{x\, dx + y\, dy}_{\text{полный дифференциал}} + i \int_L -y\, dx + x\, dy =$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{(0,0)}^{(1,1)} + i \int_0^1 (-x^\alpha\, dx + x \cdot \alpha x^{\alpha - 1}\, dx) = 1 + i(\alpha - 1) \int_0^1 x^\alpha\, dx = 1 + i\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}.$$

Ответ: $1 + i\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$.



Напомним, что плоская область G называется *односвязной,* если любая кусочно-гладкая замкнутая кривая L без самопересечений, лежащая в G, ограничивает область G_L, целиком лежащую в G («область без дырок»). (Или эквивалентно: любую замкнутую кривую можно стянуть в точку, оставаясь в области G.)

Т. (Коши). Если функция $f(z)$ является аналитической в *односвязной* области G, то по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру $L \subset G$: $\oint_L f(z)\,dz = 0$.



Пример 4 (самостоятельно). Найти $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z}$.

Перейдём к полярным координатам.

На окружности $|z| = 1$:

$z = e^{i\varphi}, -\pi < \varphi \le \pi, dz = ie^{i\varphi}\,d\varphi.$

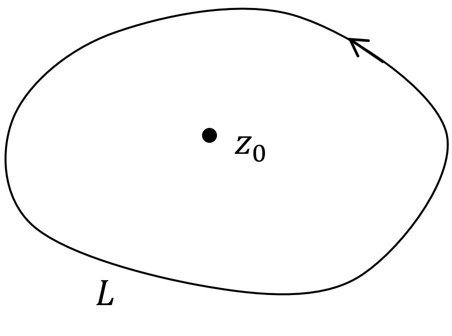
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{i\varphi}\,d\varphi}{e^{i\varphi}} = 2\pi i.$$

Ответ: $2\pi i$.

Однако в примере 1б мы установили, что функция $\frac{1}{z}$ является аналитической при $z \neq 0$. Тогда почему интеграл по замкнутому контуру от неё не равен нулю? Дело в том, что область аналитичности функции $\frac{1}{z}$ (вся комплексная плоскость с выброшенной точкой 0) не является односвязной, поэтому теорема Коши неприменима.

Из теоремы Коши следует, что *интеграл по кусочно-гладкой (вообще говоря, незамкнутой) кривой от аналитической функции в односвязной области не зависит от пути интегрирования.* Для аналитической функции $f(z)$ в *односвязной* области справедлива формула *Ньютона–Лейбница:*

$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$, где $F(z)$ — первообразная функции $f(z)$: $F'(z) = f(z)$.

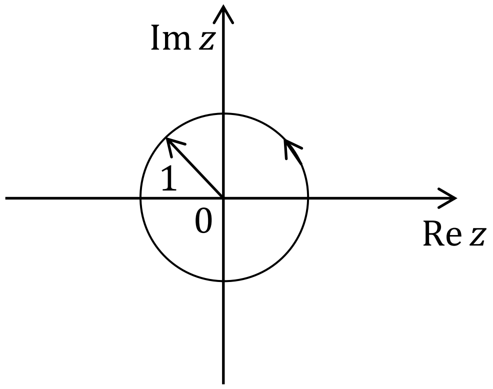


Т. (формула Коши). Пусть функция $f(z)$ является аналитической в *односвязной* области G, $L \subset G$ — замкнутый кусочно-гладкий контур, точка z_0 лежит *внутри* контура L. Тогда

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz\,,}$$

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \left.\frac{d^n f(z)}{dz^n}\right|_{z=z_0} = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz\,, \qquad n \in \mathbb{N}.}$$

Заметим, что если бы точка z_0 лежала *снаружи* контура L, то подынтегральная функция $\frac{f(z)}{z-z_0}$ была бы аналитической в области, содержащей контур L и его внутренность, поэтому по теореме Коши $\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 0$.



Пример 5 (самостоятельно). Вычислить $\oint_{|z|=1} \frac{\sin^2 z}{z^3} dz$.

Пусть $f(z) = \sin^2 z$ — аналитическая функция на всей комплексной плоскости (т. к. $\sin z$ — аналитическая функция, поскольку $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, а для e^z мы доказали аналитичность в примере 1а), $z_0 = 0$. Тогда по формуле Коши:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin^2 z}{z^3} dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin^2 z}{(z-0)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \cdot \frac{d^2(\sin^2 z)}{dz^2}\bigg|_{z=0} = \pi i \cdot \frac{d(2\sin z \cos z)}{dz}\bigg|_{z=0} =$$
$$= \pi i \cdot \frac{d(\sin 2z)}{dz}\bigg|_{z=0} = \pi i \cdot (2\cos 2z)|_{z=0} = 2\pi i.$$

Ответ: $2\pi i$.

ДЗ 14. Волк № 1.132, 1.164(3), 1.167, 3.4, 3.32, 3.27.

Дополнительный материал

О многозначных функциях

Рассмотрим многозначную функцию $\sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{i\left(\frac{\varphi}{2} + \pi k\right)}$, $k = 0$, 1, где $z = \rho e^{i\varphi}$. Пусть $\varphi = \arg z$, $-\pi < \arg z \le \pi$. Выберем одну из *ветвей* функции $\sqrt{z}$, зафиксировав k. Например, положим $k = 0$. Тогда мы получим *главную ветвь* функции $\sqrt{z}$, т. е. такую, которая принимает вещественные положительные значения при вещественных положительных z (когда $\varphi = 0$). Обозначим её через $f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi}{2}}$. Это однозначная функция. При каких z она аналитична?

Покажем, что функция $f(z)$ имеет разрыв на отрицательной части вещественной оси.

В самом деле, рассмотрим, например, точку $-x_0$, расположенную на отрицательной части вещественной оси (тогда $x_0 > 0$). Пусть точка z стремится к точке $-x_0$ сверху, т. е. из верхней полуплоскости. Тогда

$|z| = \rho \to x_0$, $\arg z = \varphi \to \pi$, и

$f(z) = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi}{2}} \to \sqrt{x_0} e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{x_0}$.

Теперь пусть точка z стремится к точке $-x_0$ снизу, т. е. из нижней полуплоскости. Тогда

$|z| = \rho \to x_0$, $\arg z = \varphi \to -\pi$, и $f(z) = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi}{2}} \to \sqrt{x_0} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\sqrt{x_0}$.

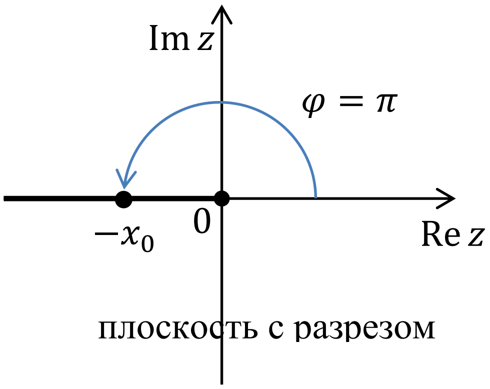
Мы убеждаемся в том, что функция $f(z)$ не имеет предела в точке $-x_0$, и, стало быть, не является непрерывной и тем более аналитической на отрицательной части вещественной оси (из-за того, что $\varphi = \arg z$ имеет там разрыв).

Однако можно доказать, что функция $f(z)$ будет аналитической на всей комплексной плоскости *с разрезом* вдоль неположительной части вещественной оси, т. е. на множестве $\{z\colon\ z \ne 0,\ \ -\pi < \arg z < \pi\}$.

Найдём её производную:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\sqrt{z+\Delta z}-\sqrt{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left(\sqrt{z+\Delta z}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{z+\Delta z}+\sqrt{z}\right)}{\Delta z\left(\sqrt{z+\Delta z}+\sqrt{z}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z+\Delta z-z}{\Delta z\left(\sqrt{z+\Delta z}+\sqrt{z}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{z}}=\frac{1}{2f(z)}.$$



На плоскости с разрезом функция $f(z)=\sqrt{\rho}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ непрерывна и $f(z)\neq 0$, поэтому её производная $f'(z)=\frac{1}{2f(z)}$ существует и непрерывна. Следовательно, главная ветвь функции $\sqrt{z}$ является однозначной аналитической функцией на плоскости с разрезом.

То же самое относится и к другой ветви двузначной функции $\sqrt{z}$ (для $k=1$), а также к однозначным ветвям функций типа $z\sqrt{z}$, $\operatorname{Ln} z$ и т. п.

Условия Коши–Римана в других координатах

Условия К.–Р. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ можно записать и в полярных координатах.

Например, если $z=\rho e^{i\varphi}$, $f(z)=f(\rho,\varphi)=u(\rho,\varphi)+iv(\rho,\varphi)$, то условия К.–Р. принимают вид:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial \rho}.}$$

Но наиболее красиво условия К.–Р. будут выглядеть, если выразить функцию $f(x,y)$ через z и $\bar{z}$, т. е. перейти от переменных x, y к переменным z, $\bar{z}$ по формулам:

$$\begin{cases} z=x+iy,\\ \bar{z}=x-iy. \end{cases}$$

Отсюда $x=x(z,\bar{z})=\frac{z+\bar{z}}{2}$, $x=y(z,\bar{z})=\frac{z-\bar{z}}{2i}$. Тогда $f(x,y)=f\big(x(z,\bar{z}),y(z,\bar{z})\big)=\tilde{f}(z,\bar{z})$, и условия К.–Р. принимают вид:

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}=0.}$$

Заметим, что здесь «зашифрованы» два условия — для вещественной и для мнимой части функции $\tilde{f}$.

Отсюда следует, что, например, функция $\bar{z}$ не является аналитической ни в одной точке. А также функция $|z|^2=z\bar{z}$.

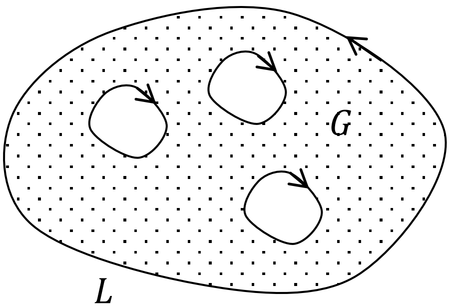
Пример 6. Докажем, что функция $\ln z=\ln|z|+i\arg z$, где $-\pi<\arg z\leq\pi$, является аналитической на всей комплексной плоскости с разрезом вдоль неположительной части вещественной оси: $\{z\colon\ z\neq 0,\ \ -\pi<\arg z<\pi\}$.

В самом деле, $\ln z=\underbrace{\ln\rho}_{u(\rho,\varphi)}+i\cdot\underbrace{\varphi}_{v(\rho,\varphi)}$,

$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}$, $\frac{\partial u}{\partial \varphi}=0$, $\frac{\partial v}{\partial \rho}=0$, $\frac{\partial v}{\partial \varphi}=1$.

На указанном множестве точек условия К.–Р. $\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}$, $\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}$ выполняются (и частные производные непрерывны), значит, функция $\ln z$ является аналитической. То же можно утверждать и для любой другой однозначной ветви функции $\operatorname{Ln} z$.
Заметим, что при $z = 0$ функция $\ln z$ не определена, а на отрицательной части вещественной оси она разрывна, т. к. там имеет разрыв её мнимая часть — функция $\arg z$, поэтому в этих точках функция $\ln z$ не является аналитической.

Теорема Коши в многосвязной области



Многосвязной называется область, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких замкнутых кривых («область с дырками»).
Т. (Коши). Если функция $f(z)$ аналитична в *многосвязной ограниченной* области G и непрерывна в $\bar{G}$, то $\oint_L f(z)\,dz = 0$, где интеграл берётся по *полной* границе L области G в положительном направлении.

О непрерывности производной

Для функции *вещественной* переменной из существования производной во всех точках *не следует* непрерывность производной. Например, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

При $x \neq 0$: $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.
При $x = 0$: $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 \sin\frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x} = 0$.
Значит, $f'(x)$ существует при всех x. Но

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0}\left(\underbrace{2x\sin\frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\text{не имеет предела}}\right)$$ — не существует (доказывается от противного).

Значит, $f'(x)$ разрывна в точке $x = 0$ (разрыв второго рода).
Для функции *комплексной* переменной из существования производной во всех точках области G *следует* непрерывность производной в области G (доказательство можно посмотреть, например, в книге Маркушевича «Теория аналитических функций», т. 1). Поэтому в определении аналитической функции *можно не требовать* непрерывности производной, это будет выполняться автоматически. Однако в нашем курсе мы будем требовать непрерывности производной для упрощения доказательств теорем.