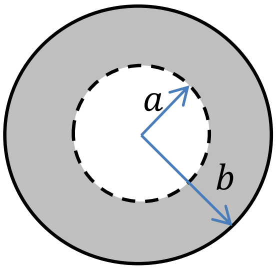
Семинар 10

Пример 1 (в шаровом слое). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л. в шаровом слое:



$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \ a < r < b, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \ u|_{r=b} = 0. \end{cases}$$

Заметим, что для смешанной задачи все СЗ $\lambda > 0$.

Будем искать СФ в виде:

$u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi) \not\equiv 0.$

Подставив это выражение в ДУ $\Delta u + \lambda u = 0$ и разделив переменные, получим:

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2 R'(r)\right)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Delta_{\theta\varphi} Y(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)} = \nu.$$

Для функции $Y(\theta, \varphi)$ получим задачу Ш.–Л. на единичной сфере:

$$\begin{cases} \Delta_{\theta\varphi} Y(\theta, \varphi) + \nu Y(\theta, \varphi) = 0, \\ Y(\theta, \varphi + 2\pi) \equiv Y(\theta, \varphi), \\ |Y|\big|_{\theta = 0, \pi} < \infty. \end{cases}$$

Её СЗ и СФ:

$\nu_n = n(n+1), \qquad n = 0, 1, \dots,$

$Y_n^{(\pm m)}(\theta, \varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\Phi_{\pm m}(\varphi),$

$\Phi_0(\varphi) = 1, \qquad \Phi_m(\varphi) = \cos m\varphi, \qquad \Phi_{-m}(\varphi) = \sin m\varphi, \qquad m = 1, 2, \dots, n,$

$$\left\| Y_n^{(\pm m)} \right\|^2 = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \pi (1 + \delta_{m0}).$$

Далее, для функции $R(r)$ имеем ДУ:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda r^2 - n(n+1)\right) R(r) = 0.$$

В семинаре 9 построено его ОР:

$$R(r) = \frac{v(r)}{\sqrt{r}},$$

где

$$v(r) = A J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda} r\right) + B N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda} r\right)$$

(поскольку $\lambda > 0$).

Из ГУ $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \ u|_{r=b} = 0$ получим $R'(a) = 0$, $R(b) = 0$. Подставим сюда найденное $R(r)$:

$$R'(a) = \left.\left(\frac{v'(r)}{\sqrt{r}} - \frac{v(r)}{2r^{\frac{3}{2}}}\right)\right|_{r=a} = \frac{2a v'(a) - v(a)}{2a^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$R(b) = \frac{v(b)}{\sqrt{b}} = 0.$$

Отсюда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2a v'(a) - v(a) = 0, \\ v(b) = 0. \end{cases}$$

Подставим в неё функцию $v(r)$:

$$\begin{cases} 2a\sqrt{\lambda}AJ'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) + 2a\sqrt{\lambda}BN'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) - AJ_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) - BN_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) = 0, \\ AJ_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}b) + BN_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}b) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[2a\sqrt{\lambda}J'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) - J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a)\right]A + \left[2a\sqrt{\lambda}N'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) - N_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a)\right]B = 0, \\ AJ_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}b) + BN_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}b) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Эта однородная СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов A, B имеет нетривиальные решения $\Leftrightarrow$ её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 2a\sqrt{\lambda}J'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) - J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) & 2a\sqrt{\lambda}N'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) - N_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) \\ J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}b) & N_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}b) \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$\boxed{\left[2a\sqrt{\lambda}J'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) - J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a)\right]N_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}b) = \left[2a\sqrt{\lambda}N'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) - N_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a)\right]J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}b).} \tag{2}$$

СЗ $\lambda_k^{(n)}$ являются пожительными корнями этого уравнения, $k = 1, 2, \dots$

При $\lambda = \lambda_k^{(n)}$ система (1) является вырожденной, первое уравнение является следствием второго. Второе же уравнение нам даёт:

$$AJ_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) + BN_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) = 0.$$

Тогда один из коэффициентов A, B — произволен, а другой выражается через него с помощью данного уравнения. Поскольку мы ищем СФ с точностью до постоянного множителя, положим

$$A = N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right).$$

Тогда

$$B = -J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right).$$

Теперь имеем

$$v_{nk}(r) = N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right) - J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right),$$

и

$$R_{nk}(r) = \frac{v_{nk}(r)}{\sqrt{r}}.$$

А соответствующие СФ задачи Ш.–Л. в шаровом слое имеют вид:

$$u_{nk\pm m}(r, \theta, \varphi) = R_{nk}(r)Y_n^{(\pm m)}(\theta, \varphi).$$

Можно показать, что они образуют полную ортонормированную систему в шаровом слое, поэтому других СФ нет.

Теперь вычислим квадрат их нормы.

$$\left\|u_{nk\pm m}\right\|^2 = \int\limits_a^b r^2\,dr \int\limits_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^{2\pi} u_{nk\pm m}^2(r,\theta,\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \underbrace{\int\limits_a^b r^2 R_{nk}^2(r)\,dr}_{\|R_{nk}\|^2} \underbrace{\int\limits_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^{2\pi} \left[Y_n^{(\pm m)}(\theta,\varphi)\right]^2 d\varphi}_{\left\|Y_n^{(\pm m)}\right\|^2} = \|R_{nk}\|^2 \left\|Y_n^{(\pm m)}\right\|^2,$$

$$\|R_{nk}\|^2 = \int\limits_a^b r^2 R_{nk}^2(r)\,dr = \int\limits_a^b r v_{nk}(r)\,dr \overset{\left(t=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)}{=} \frac{1}{\lambda_k^{(n)}} \int\limits_{a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}^{b\sqrt{\lambda_k^{(n)}}} t v_{nk}^2\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\right)dt.$$

Заметим, что

$$v_{nk}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\right) = N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)J_{n+\frac{1}{2}}(t) - J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)N_{n+\frac{1}{2}}(t)$$

является цилиндрической функцией порядка $n+\frac{1}{2}$, поэтому для неё справедлива формула

$$\int tZ_\nu^2(t)\,dt = \frac{t^2}{2}\left[{Z'_\nu}^2(t) + \left(1-\frac{\nu^2}{t^2}\right)Z_\nu^2(t)\right] + \mathrm{const},$$

где $\nu = n+\frac{1}{2}$, $Z_\nu(t) = v_{nk}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\right)$.

Воспользовавшись этой формулой, получим:

$$\|R_{nk}\|^2 =$$

$$= \frac{b^2}{2}\left[\frac{{v'_{nk}}^2(b)}{\lambda_k^{(n)}} + \left(1-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\lambda_k^{(n)}b^2}\right)v_{nk}^2(b)\right] - \frac{a^2}{2}\left[\frac{{v'_{nk}}^2(a)}{\lambda_k^{(n)}} + \left(1-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)v_{nk}^2(a)\right].$$

(Здесь учтено, что $Z'_\nu(t) = \frac{d}{dt}v_{nk}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}v'_{nk}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\right)$.)

Из ГУ имеем:

$v_{nk}(b) = 0, \qquad v_{nk}(a) = 2av'_{nk}(a).$

Тогда

$$\|R_{nk}\|^2 = \frac{b^2{v'_{nk}}^2(b)}{2\lambda_k^{(n)}} - \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{\lambda_k^{(n)}} + \left(1-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)4a^2\right]{v'_{nk}}^2(a) =$$

$$= \frac{b^2{v'_{nk}}^2(b)}{2\lambda_k^{(n)}} - \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\lambda_k^{(n)}} + 4a^2 - \frac{4n^2}{\lambda_k^{(n)}} - \frac{4n}{\lambda_k^{(n)}} - \frac{1}{\lambda_k^{(n)}}\right){v'_{nk}}^2(a) =$$

$$= \frac{b^2{v'_{nk}}^2(b)}{2\lambda_k^{(n)}} - 2a^2\left(a^2 - \frac{n(n+1)}{\lambda_k^{(n)}}\right){v'_{nk}}^2(a).$$

Вычислим $v'_{nk}(b)$, $v'_{nk}(a)$.

$$v'_{nk}(b) = \sqrt{\lambda_k^{(n)}}\left[N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) - J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)\right] =$$

$$= -\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\begin{vmatrix} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) & N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) \\ J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) & N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) \end{vmatrix} = -\sqrt{\lambda_k^{(n)}}W\left[J_{n+\frac{1}{2}}(t), N_{n+\frac{1}{2}}(t)\right]\Big|_{t=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b} =$$

$$= -\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\left(\frac{2}{\pi t}\right)\Big|_{t=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b} = -\frac{2}{\pi b}.$$

$$v'_{nk}(a) = \sqrt{\lambda_k^{(n)}}\left[N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) - J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\right].$$

Из уравнения (2) выразим:

$$N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) = \frac{2a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) - N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{2a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) - J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right).$$

Подставив это в выражение для $v'_{nk}(a)$, получим:

$$v'_{nk}(a) =$$

$$= \sqrt{\lambda_k^{(n)}}\left[\frac{2a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) - N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{2a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) - J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) -\right.$$

$$\left. - J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\right] =$$

$$= \sqrt{\lambda_k^{(n)}}\underbrace{\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)}{2a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) - J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}}_{\sigma}\left[2a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) -\right.$$

$$- N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) - 2a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) +$$

$$\left. + J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\right] =$$

$$= \sqrt{\lambda_k^{(n)}}\sigma\left[J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) - N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\right] =$$

$$= \sqrt{\lambda_k^{(n)}}\sigma W\left[J_{n+\frac{1}{2}}(t), N_{n+\frac{1}{2}}(t)\right]\Big|_{t=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a} = \sqrt{\lambda_k^{(n)}}\sigma\left(\frac{2}{\pi t}\right)\Big|_{t=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a} = \frac{2\sigma}{\pi a}.$$

Подставим найденные $v'_{nk}(b)$, $v'_{nk}(a)$ в выражение для $\|R_{nk}\|^2$:

$$\|R_{nk}\|^2=\frac{b^2{v'_{nk}}^2(b)}{2\lambda_k^{(n)}}-2a^2\left(a^2-\frac{n(n+1)}{\lambda_k^{(n)}}\right){v'_{nk}}^2(a)=\frac{2}{\pi^2\lambda_k^{(n)}}-\frac{8\sigma^2}{\pi^2}\left(a^2-\frac{n(n+1)}{\lambda_k^{(n)}}\right).$$

Окончательно получим:

$$\left\|u_{nk\pm m}\right\|^2=\|R_{nk}\|^2\left\|Y_n^{(\pm m)}\right\|^2=\frac{4(1+\delta_{m0})}{(2n+1)\pi}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\left[\frac{1}{\lambda_k^{(n)}}-4\sigma^2\left(a^2-\frac{n(n+1)}{\lambda_k^{(n)}}\right)\right].$$

Ответ: $\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения

$$\left[2a\sqrt{\lambda}J'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a)-J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a)\right]N_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}b)=\left[2a\sqrt{\lambda}N'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a)-N_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a)\right]J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}b),$$

$k=1,2,\ldots,$

$u_{nk\pm m}(r,\theta,\varphi)=$

$$=\frac{N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)-J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)N_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)}{\sqrt{r}}Y_n^{(\pm m)}(\theta,\varphi),$$

$n=0,1,\ldots,m=0,1,\ldots,n,$

$$\left\|u_{nk\pm m}\right\|^2=\frac{4(1+\delta_{m0})}{(2n+1)\pi}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\left[\frac{1}{\lambda_k^{(n)}}-4\sigma^2\left(a^2-\frac{n(n+1)}{\lambda_k^{(n)}}\right)\right],$$

$$\sigma=\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)}{2a\sqrt{\lambda_k^{(n)}}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)-J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}.$$

ДЗ 10. Найти СЗ, СФ и квадрат нормы СФ: БК с. 64 № 10(а,б,в).