Семинар 4

Оператор Гамильтона

$\vec{\nabla}=\left\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\}=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ — оператор Гамильтона («набла»: арфа треугольной формы (греч.)).

Стрелку над ∇ в книгах не ставят, но студентам первое время рекомендуется её ставить, чтобы не забывать, что ∇ — это *вектор*.

С помощью $\vec{\nabla}$ можно записать различные дифференциальные операции.

$$\vec{\nabla}u=\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u=\vec{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}=\operatorname{grad}u.$$

Пусть $\vec{l}$ — единичный вектор: $|\vec{l}|=1$. Тогда

$\frac{\partial u}{\partial l}=(\vec{l},\operatorname{grad}u)=(\vec{l},\vec{\nabla}u)=(\vec{l},\vec{\nabla})u$ — производная по направлению $\vec{l}$.

$\frac{\partial\vec{a}}{\partial l}=(\vec{l},\vec{\nabla})\vec{a}$ — производная по направлению $\vec{l}$ от векторного поля $\vec{a}$. Производная берётся покомпонентно. Пусть $\vec{a}=\{P,Q,R\}$. Тогда $\frac{\partial\vec{a}}{\partial l}=\left\{\frac{\partial P}{\partial l},\frac{\partial Q}{\partial l},\frac{\partial R}{\partial l}\right\}=\left\{(\vec{l},\vec{\nabla})P,(\vec{l},\vec{\nabla})Q,(\vec{l},\vec{\nabla})R\right\}$.

Далее, имеем

$$(\vec{\nabla},\vec{a})=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\operatorname{div}\vec{a},$$

$$[\vec{\nabla},\vec{a}]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=\operatorname{rot}\vec{a}.$$

Итак, основные операции:

$$\boxed{\begin{array}{ll}\operatorname{grad}u=\vec{\nabla}u, & \operatorname{div}\vec{a}=(\vec{\nabla},\vec{a}),\\ \frac{\partial u}{\partial l}=(\vec{l},\vec{\nabla})u, & \operatorname{rot}\vec{a}=[\vec{\nabla},\vec{a}],\\ & \frac{\partial\vec{a}}{\partial l}=(\vec{l},\vec{\nabla})\vec{a}.\end{array}}$$

Свойства $\vec{\nabla}$

1. Линейность:
   $\vec{\nabla}(\lambda_1F_1+\lambda_2F_2)=\lambda_1\vec{\nabla}F_1+\lambda_2\vec{\nabla}F_2$, где λ_1, λ_2 — числа, F_1, F_2 — скалярные или векторные функции.
2. *По умолчанию* (если не указано иное) $\vec{\nabla}$ действует на выражение, которое стоит *справа* от неё. Если хотят явно указать, на что именно действует $\vec{\nabla}$, ставят сверху стрелку: $\vec{\nabla}u=\vec{\nabla}\overset{\downarrow}{u}=\overset{\downarrow}{u}\vec{\nabla}$.
3. Действие на произведение (любое — скалярное, векторное и др.) по правилу дифференцирования:
   $\vec{\nabla}(F_1F_2)=\vec{\nabla}(\overset{\downarrow}{F_1}F_2)+\vec{\nabla}(F_1\overset{\downarrow}{F_2})$.

Для примера, выясним, почему $\boxed{(\vec{l},\vec{\nabla})u \neq (\vec{\nabla},\vec{l})u.}$ В первом выражении $\vec{\nabla}$ действует только на u, а во втором — на u и на $\vec{l}$:

$$(\vec{\nabla},\vec{l})u = (\vec{\nabla},\overset{\downarrow}{\vec{l}})\overset{\downarrow}{u} = (\vec{\nabla},\overset{\downarrow}{\vec{l}})u + (\vec{\nabla},\vec{l})\overset{\downarrow}{u} = u\,\mathrm{div}\,\vec{l} + (\vec{l},\vec{\nabla})u.$$

Основные формулы векторного анализа, которые часто используются в физике:

$$\boxed{\begin{gathered}
\mathrm{grad}(u+v) = \mathrm{grad}\,u + \mathrm{grad}\,v\\
\mathrm{div}(\vec{a}+\vec{b}) = \mathrm{div}\,\vec{a} + \mathrm{div}\,\vec{b}\\
\mathrm{rot}(\vec{a}+\vec{b}) = \mathrm{rot}\,\vec{a} + \mathrm{rot}\,\vec{b}\\
\mathrm{grad}(uv) = v\,\mathrm{grad}\,u + u\,\mathrm{grad}\,v\\
\mathrm{grad}\,f(u) = f'(u)\,\mathrm{grad}\,u\\
\mathrm{grad}\frac{u}{v} = \frac{v\,\mathrm{grad}\,u - u\,\mathrm{grad}\,v}{v^2}\\
\mathrm{grad}(\vec{a},\vec{b}) = [\vec{b},\mathrm{rot}\,\vec{a}] + [\vec{a},\mathrm{rot}\,\vec{b}] + (\vec{b},\vec{\nabla})\vec{a} + (\vec{a},\vec{\nabla})\vec{b}\\
\mathrm{div}(u\vec{a}) = (\mathrm{grad}\,u\,,\vec{a}) + u\,\mathrm{div}\,\vec{a}\\
\mathrm{div}[\vec{a},\vec{b}] = (\vec{b},\mathrm{rot}\,\vec{a}) - (\vec{a},\mathrm{rot}\,\vec{b})\\
\mathrm{rot}(u\vec{a}) = [\mathrm{grad}\,u\,,\vec{a}] + u\,\mathrm{rot}\,\vec{a}\\
\mathrm{rot}[\vec{a},\vec{b}] = \vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{b} - \vec{b}\,\mathrm{div}\,\vec{a} + (\vec{b},\vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a},\vec{\nabla})\vec{b}
\end{gathered}}$$

Часть из них удобно доказывать, используя оператор $\vec{\nabla}$.

Пример 1 (МАВЗ гл. XV § 1 пример 11, самостоятельно). Доказать формулу $\mathrm{grad}(uv) = v\,\mathrm{grad}\,u + u\,\mathrm{grad}\,v$.

Решение:

$$\mathrm{grad}(uv) = \vec{\nabla}(uv) = \vec{\nabla}(\overset{\downarrow}{u}v) + \vec{\nabla}(u\overset{\downarrow}{v}) = v\vec{\nabla}\overset{\downarrow}{u} + u\vec{\nabla}\overset{\downarrow}{v} = v\,\mathrm{grad}\,u + u\,\mathrm{grad}\,v.$$

Пример 2 (МАВЗ гл. XV § 1 пример 12, самостоятельно). Доказать формулу $\mathrm{div}(u\vec{a}) = (\mathrm{grad}\,u\,,\vec{a}) + u\,\mathrm{div}\,\vec{a}$.

Решение:

$$\mathrm{div}(u\vec{a}) = (\vec{\nabla},u\vec{a}) = (\vec{\nabla},\overset{\downarrow}{u}\vec{a}) + (\vec{\nabla},u\overset{\downarrow}{\vec{a}}) = (\vec{\nabla}\overset{\downarrow}{u},\vec{a}) + u(\vec{\nabla},\overset{\downarrow}{\vec{a}}) = (\mathrm{grad}\,u\,,\vec{a}) + u\,\mathrm{div}\,\vec{a}.$$

Пример 3 (МАВЗ гл. XV § 1, самостоятельно). Доказать формулу $\mathrm{div}[\vec{a},\vec{b}] = (\vec{b},\mathrm{rot}\,\vec{a}) - (\vec{a},\mathrm{rot}\,\vec{b})$.

Решение:

$$\mathrm{div}[\vec{a},\vec{b}] = (\vec{\nabla},[\vec{a},\vec{b}]) = (\vec{\nabla},[\overset{\downarrow}{\vec{a}},\vec{b}]) + (\vec{\nabla},[\vec{a},\overset{\downarrow}{\vec{b}}]) = ([\vec{\nabla},\overset{\downarrow}{\vec{a}}],\vec{b}) + (\vec{\nabla},[-\overset{\downarrow}{\vec{b}},\vec{a}]) =$$

$$= (\mathrm{rot}\,\vec{a}\,,\vec{b}) + (-[\vec{\nabla},\overset{\downarrow}{\vec{b}}],\vec{a}) = (\vec{b},\mathrm{rot}\,\vec{a}) + (-\mathrm{rot}\,\vec{b}\,,\vec{a}) = (\vec{b},\mathrm{rot}\,\vec{a}) - (\vec{a},\mathrm{rot}\,\vec{b}).$$

Использовано свойство смешанного произведения: $(\vec{A},[\vec{B},\vec{C}]) = ([\vec{A},\vec{B}],\vec{C})$.

Пример 4 (МАВЗ гл. XV § 1 пример 14, самостоятельно). Доказать формулу $\operatorname{rot}[\vec a,\vec b]=\vec a\operatorname{div}\vec b-\vec b\operatorname{div}\vec a+(\vec b,\vec\nabla)\vec a-(\vec a,\vec\nabla)\vec b$.
Решение:

$$\operatorname{rot}[\vec a,\vec b]=\left[\vec\nabla,[\vec a,\vec b]\right]=\left[\vec\nabla,[\overset{\downarrow}{\vec a},\vec b]\right]+\left[\vec\nabla,[\vec a,\overset{\downarrow}{\vec b}]\right]=\overset{\downarrow}{\vec a}(\vec\nabla,\vec b)-\vec b(\vec\nabla,\overset{\downarrow}{\vec a})+\vec a(\vec\nabla,\overset{\downarrow}{\vec b})-\overset{\downarrow}{\vec b}(\vec\nabla,\vec a)=$$

$$=(\vec b,\vec\nabla)\overset{\downarrow}{\vec a}-\vec b\operatorname{div}\vec a+\vec a\operatorname{div}\vec b-(\vec a,\vec\nabla)\overset{\downarrow}{\vec b}=(\vec b,\vec\nabla)\vec a-\vec b\operatorname{div}\vec a+\vec a\operatorname{div}\vec b-(\vec a,\vec\nabla)\vec b.$$

Использовано свойство двойного векторного произведения:
$\left[\vec A,[\vec B,\vec C]\right]=\vec B(\vec A,\vec C)-\vec C(\vec A,\vec B)$.

Пример 5 (МАВЗ гл. XV § 1 пример 15, самостоятельно). Доказать формулу $\operatorname{grad}(\vec a,\vec b)=[\vec b,\operatorname{rot}\vec a]+[\vec a,\operatorname{rot}\vec b]+(\vec b,\vec\nabla)\vec a+(\vec a,\vec\nabla)\vec b$.
Решение:

$$\operatorname{grad}(\vec a,\vec b)=\vec\nabla(\vec a,\vec b)=\vec\nabla(\overset{\downarrow}{\vec a},\vec b)+\vec\nabla(\vec a,\overset{\downarrow}{\vec b}).$$

Будем использовать формулу $\vec B(\vec A,\vec C)=\left[\vec A,[\vec B,\vec C]\right]+\vec C(\vec A,\vec B)$.

$\vec\nabla(\overset{\downarrow}{\vec a},\vec b)=\left[\overset{\downarrow}{\vec a},[\vec\nabla,\vec b]\right]+\vec b(\overset{\downarrow}{\vec a},\vec\nabla)=?$ — Непонятно, что дальше делать с векторным произведением.

Со вторым слагаемым проще:

$$\vec\nabla(\vec a,\overset{\downarrow}{\vec b})=\left[\vec a,[\vec\nabla,\overset{\downarrow}{\vec b}]\right]+\overset{\downarrow}{\vec b}(\vec a,\vec\nabla)=[\vec a,\operatorname{rot}\vec b]+(\vec a,\vec\nabla)\vec b.$$

Попробуем с первым слагаемым поступить по-другому:

$$\vec\nabla(\overset{\downarrow}{\vec a},\vec b)=\vec\nabla(\vec b,\overset{\downarrow}{\vec a})=\left[\vec b,[\vec\nabla,\overset{\downarrow}{\vec a}]\right]+\overset{\downarrow}{\vec a}(\vec b,\vec\nabla)=[\vec b,\operatorname{rot}\vec a]+(\vec b,\vec\nabla)\vec a.$$

Отсюда
$\operatorname{grad}(\vec a,\vec b)=[\vec a,\operatorname{rot}\vec b]+(\vec a,\vec\nabla)\vec b+[\vec b,\operatorname{rot}\vec a]+(\vec b,\vec\nabla)\vec a$.

Дифференциальные операции 2-го порядка

$$\vec\nabla^2=(\vec\nabla,\vec\nabla)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\Delta.$$

$$\Delta u=(\vec\nabla,\vec\nabla)u=(\vec\nabla,\vec\nabla u)=\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Если $\vec a=\{P,Q,R\}$, то $\Delta\vec a=\{\Delta P,\Delta Q,\Delta R\}$.
$\operatorname{rot}\operatorname{grad}u=[\vec\nabla,\vec\nabla u]=[\vec\nabla,\vec\nabla]u=\vec 0$, т. к. в векторном произведении два одинаковых сомножителя.
$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec a=\left(\vec\nabla,[\vec\nabla,\vec a]\right)=0$, т. к. в смешанном произведении два одинаковых сомножителя.

$$\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right) = \Delta$$
$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \vec{0}$$
$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}$$
$$\operatorname{div}(u\operatorname{grad} v) = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + u\Delta v$$
$$\Delta(uv) = v\Delta u + u\Delta v + 2(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)$$

Пример 6 (МАВЗ гл. XV § 2 пример 3, самостоятельно). Доказать формулу $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}$.

Решение:

$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{a}\right]\right] = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla},\vec{a}\right) - \left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}$.

Использовано свойство двойного векторного произведения:

$\left[\vec{A},\left[\vec{B},\vec{C}\right]\right] = \vec{B}\left(\vec{A},\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A},\vec{B}\right)$.

Пример 7 (МАВЗ гл. XV § 2 пример 1, самостоятельно). Доказать формулу $\operatorname{div}(u\operatorname{grad} v) = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + u\Delta v$.

Обозначим $\operatorname{grad} v = \vec{a}$. Тогда

$\operatorname{div}(u\operatorname{grad} v) = \operatorname{div}(u\vec{a}) = (\operatorname{grad} u, \vec{a}) + u\operatorname{div}\vec{a} = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + u\operatorname{div}\operatorname{grad} v =$
$= (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + u\Delta v$.

Мы использовали формулу из примера 2:

$\operatorname{div}(u\vec{a}) = (\operatorname{grad} u, \vec{a}) + u\operatorname{div}\vec{a}$.

Пример 8 (МАВЗ гл. XV § 2 пример 2, самостоятельно). Доказать формулу $\Delta(uv) = v\Delta u + u\Delta v + 2(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)$.

Решение:

$\Delta(uv) = \operatorname{div}\operatorname{grad}(uv) = \operatorname{div}(v\operatorname{grad} u + u\operatorname{grad} v) = \operatorname{div}(u\operatorname{grad} v) + \operatorname{div}(v\operatorname{grad} u) =$
$= (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + u\Delta v + (\operatorname{grad} v, \operatorname{grad} u) + v\Delta u = v\Delta u + u\Delta v + 2(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)$.

Мы использовали формулу из примера 1

$\operatorname{grad}(uv) = v\operatorname{grad} u + u\operatorname{grad} v$

и формулу из примера 7

$\operatorname{div}(u\operatorname{grad} v) = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + u\Delta v$.

ДЗ 4. Доказать все оставшиеся формулы в рамочках; МАВЗ гл. XV № 12(г), 13, 19, 36.