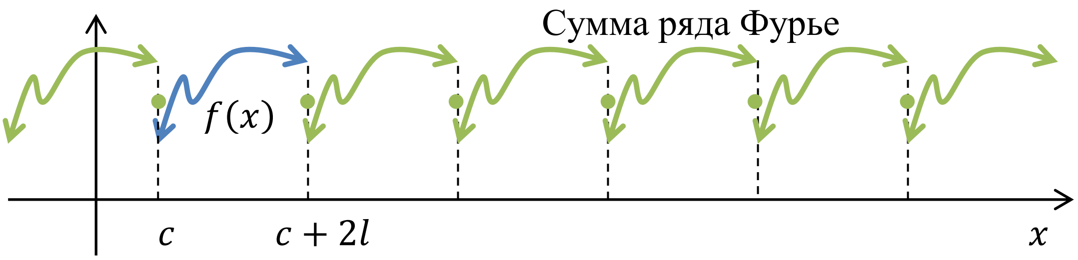
Семинар 25

Тригонометрические ряды Фурье

Пусть $f(x)$ — кусочно-гладкая функция, заданная на отрезке $[c;\, c+2l]$. Т. е. функция $f(x)$ и её производная $f'(x)$ непрерывны во всех точках отрезка $[c;\, c+2l]$, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва (устранимого или первого рода).
Тогда на интервале $(c, c+2l)$ функция $f(x)$ представима тригонометрическим рядом Фурье
$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right)$ в точках непрерывности $f(x)$, (*)
где

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_c^{c+2l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_c^{c+2l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

— коэффициенты ряда Фурье.
В точках разрыва функции $f(x)$ ряд Фурье сходится к $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. В граничных точках отрезка $[c; c+2l]$ ряд также может сходиться не к $f(x)$.
Поскольку все члены ряда Фурье — $2l$-периодические функции, то ряд Фурье сходится не только на интервале $(c;\, c+2l)$, но и на всей вещественной оси. Он сходится к $2l$-периодическому продолжению функции $f(x)$ на всю вещественную ось (в точках непрерывности этой продолженной функции, а в точках её разрыва ряд сходится к полусумме предельных значений слева и справа).



Ряд Фурье можно почленно интегрировать (дифференцировать — не всегда).
Тригонометрические ряды Фурье широко применяются в физике (особенно в радиофизике: разложение в ряд Фурье позволяет получить спектр сигнала).
Равенство Парсеваля (Ляпунова):

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l}\int\limits_c^{c+2l} f^2(x)\,dx.$$

Для комплекснозначных функций вещественного аргумента x чаще используется ряд Фурье в комплексной форме:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp\left(\frac{inx}{l}\right), \qquad A_n = \frac{1}{2l}\int\limits_c^{c+2l} f(x)\exp\left(-\frac{inx}{l}\right)dx.$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$, $x \in [0;\ \pi]$. Нарисовать график его суммы.

Поскольку $[c; c + 2l] = [0; \pi]$, то $c = 0$, $l = \frac{\pi}{2}$, и ряд Фурье имеет вид:

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos 2nx + b_n \sin 2nx), \qquad x \in (0; \pi),$$

где

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos 2nx\, dx, \qquad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin 2nx\, dx.$$

Тогда

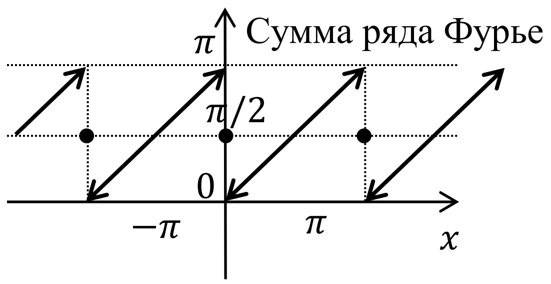
$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x \sin 2nx}{2n} \bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{2n} \int_0^{\pi} \sin 2nx\, dx \right) = \frac{\cos 2nx}{2\pi n^2} \bigg|_0^{\pi} = 0, \qquad n \neq 0,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{x^2}{\pi} \bigg|_0^{\pi} = \pi,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x \cos 2nx}{2n} \bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{2n} \int_0^{\pi} \cos 2nx\, dx \right) = -\frac{1}{n} + \frac{\sin 2nx}{2\pi n^2} \bigg|_0^{\pi} = -\frac{1}{n}.$$

Теперь имеем разложение:

$$x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 2nx}{n}, \qquad x \in (0; \pi).$$



Сумма ряда Фурье является π-периодическим продолжением функции $f(x)$ на всю вещественную ось.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 2nx}{n}$, $x \in (0;\ \pi)$.

Запишем равенство Парсеваля для полученного ряда Фурье:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2\, dx.$$

Отсюда

$$\frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3} \bigg|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Тогда получаем замечательный результат:

$$\boxed{\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Если функция $f(x)$ — $2l$-периодическая, то коэффициенты ряда Фурье не зависят от выбора начальной точки c отрезка $[c; c+2l]$. В частности, если положить $c=-l$, то

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx\,, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx.$$

Отсюда видно, что если $f(x)$ — чётная функция, то $b_n = 0\ \forall n$; если $f(x)$ — нечётная функция, то $a_n = 0\ \forall n$.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \cos^2 x$. Нарисовать график его суммы.
Функция $f(x)$ — 2π-периодическая, значит, она раскладывается в ряд Фурье вида

$$\cos^2 x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx). \qquad (1)$$

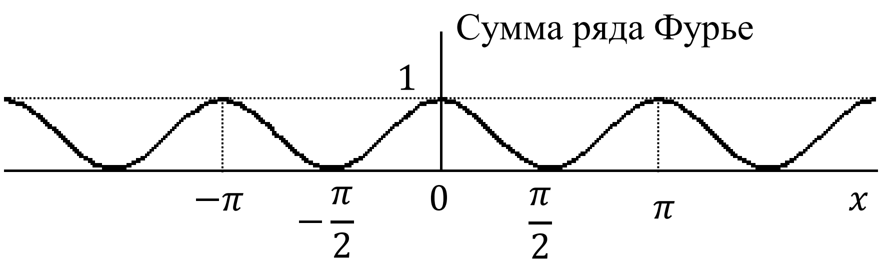
Коэффициенты ряда Фурье можно находить по стандартным формулам ($b_n = 0$ в силу чётности)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\cos nx\,dx\,, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\sin nx\,dx = 0, \qquad (2)$$

но в данном случае можно поступить проще:

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Это и есть искомый ряд Фурье. Его коэффициенты: $a_0 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, а все остальные коэффициенты равны нулю.



Заметим, что разложение функции в ряд Фурье вида (1) единственно, поэтому коэффициенты, посчитанные по формулам (2), оказались бы такими же.
Ряд сходится к $f(x)$ во всех точках, т. к. $f(x)$ не имеет точек разрыва.

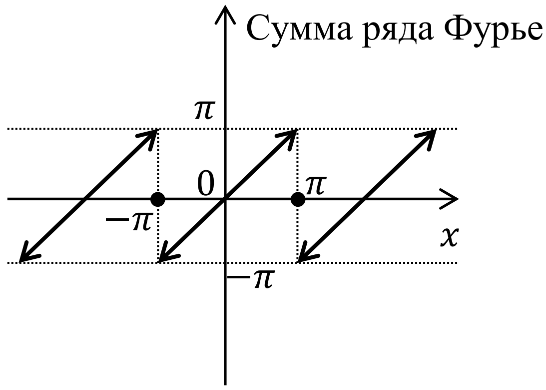
Ответ: $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$.

Пример 3 (из задач к экзамену). Функцию $f(x) = x$, $x \in [0;\ \pi]$, разложить в ряд Фурье по $\sin nx$. Нарисовать график его суммы.
Непрерывную функцию $f(x)$ требуется разложить на интервале $(0;\ \pi)$ в ряд Фурье вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

где все $a_n = 0$, т. е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx\,, \qquad x\in(0;\ \pi).$$



Тогда сумма ряда Фурье для $f(x)$ является нечётной и 2π-периодической функцией на всей вещественной оси, совпадает с $f(x)$ на интервале $(0;\,\pi)$, и равна полусумме предельных значений в точках разрыва.
Исходя из этого, нарисуем график суммы ряда Фурье для функции $f(x)$ — нечётного 2π-периодического продолжения функции $f(x)$ на всю вещественную ось. (Сначала строим нечётное продолжение функции $f(x)$ на интервал $(-\pi;0)$, а затем 2π-периодическое продолжение на всю вещественную ось.)

Таким образом, мы должны построить ряд Фурье для функции $f(x)$, продолженной нечётным образом на отрезок $[-\pi;\pi]$.
Найдём коэффициенты b_n, воспользовавшись нечётностью продолженной функции:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos n\pi}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\bigg|_0^{\pi}\right)=-2\frac{(-1)^n}{n}=2\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$f(x)=x=\sum_{n=1}^{+\infty}2\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\qquad x\in(0;\,\pi).$$

Ответ: $x=\sum_{n=1}^{+\infty}2\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\ x\in(0;\,\pi)$.

Суммирование тригонометрических рядов

Пример 4. Вычислить $S_0(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$.
Это ряд Фурье для некоторой функции. Требуется восстановить функцию по её ряду Фурье.
Заметим, что функция $S_0(x)$ — 2π-периодическая, поэтому достаточно вычислить её на любом отрезке длиной 2π, а дальше периодически продолжить на всю вещественную ось.
Из примера 1 имеем:

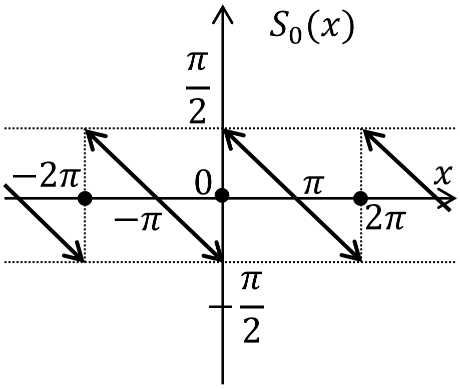
$$\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin 2nx}{n}=\begin{cases}x, & 0<x<\pi,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\pi.\end{cases}$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin 2nx}{n}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-x, & 0<x<\pi,\\ 0, & x=0,\pi.\end{cases}$$

Сделаем замену $2x=t$. Тогда

$$S_0(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nt}{n}=\begin{cases}\dfrac{\pi-t}{2}, & 0<t<2\pi,\\ 0, & t=0,2\pi.\end{cases}$$



Дальше мы можем 2π-периодическим образом продолжить функцию на всю вещественную ось (см. график). Заметим, что ряд из непрерывных функций $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ сходится к функции разрывной. Это говорит о том, что ряд сходится неравномерно в окрестности точек $x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. (Если бы ряд сходился равномерно, он бы сходился к непрерывной функции, согласно теореме о непрерывности суммы функционального ряда.)

Ответ: $S_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n} = \begin{cases}\frac{\pi - x}{2}, & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & x = 0, 2\pi.\end{cases}$

Пример 5. Вычислить $S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n \cos nx$, $S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} q^n \sin nx$, где $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$.
Заметим, что $S_2(x)$ можно записать и в виде $S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n \sin nx$, т. к. $q^0 \sin 0x = 0$.
Рассмотрим

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n(\cos nx + i \sin nx).$$

Тогда $S_1(x) = \operatorname{Re} S(x)$, $S_2(x) = \operatorname{Im} S(x)$.
Заметим, что

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n e^{inx} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(qe^{ix}\right)^n.$$

Обозначим $t = qe^{ix}$, причём $|t| = |q| \cdot \left|e^{ix}\right| = |q| < 1$. Тогда $S(x)$ представляет собой сходящийся степенной ряд:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1-qe^{ix}}.$$

Представим $S(x)$ в алгебраической форме, чтобы выделить вещественную и мнимую части $S_1(x)$ и $S_2(x)$:

$$S(x) = \frac{1-qe^{-ix}}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})} = \frac{1-qe^{-ix}}{1-qe^{ix}-qe^{-ix}+q^2} = \frac{1-q\cos x + iq\sin x}{1-2q\cos x + q^2}.$$

$$S_1(x) = \operatorname{Re} S(x) = \frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}, \qquad S_2(x) = \operatorname{Im} S(x) = \frac{q \sin x}{1-2q\cos x + q^2}.$$

Ответ: $S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n \cos nx = \frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$, $S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} q^n \sin nx = \frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$, $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$.

Пример 6. Вычислить $S_3(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^n \cos nx}{n}$, где $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$.
Продифференцировав ряд по x, получим:

$$S_3'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} q^n \sin nx = -S_2(x) = -\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}.$$

Обоснование возможности почленного дифференцирования по x при $x \in \mathbb{R}$:

1) ряд $S_3(x)$ сходится: $\left|\frac{q^n \cos nx}{n}\right| \le |q|^n$, мажорантный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}|q|^n$ сходится при $|q| < 1$;

2) все члены ряда $\frac{q^n \cos nx}{n}$ дифференцируемы по x;
3) ряд из производных $-\sum_{n=1}^{+\infty} q^n \sin nx$ сходится равномерно на $x \in \mathbb{R}$ — по признаку Вейерштрасса: $|q^n \sin nx| \leq |q|^n$,
мажорантный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |q|^n$ сходится при $|q| < 1$.

Далее,

$$S_3(x) = -\int \frac{q \sin x}{1 - 2q\cos x + q^2} dx = \int \frac{d(q\cos x)}{1 - 2q\cos x + q^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1 - 2q\cos x + q^2)}{1 - 2q\cos x + q^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1 - 2q\cos x + q^2) + C.$$

Полученное выражение верно и для $q = 0$, т. к. в этом случае подынтегральная функция тождественно равна нулю.

Чтобы определить значение C, подставим $x = 0$:

$$S_3(0) = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2q + q^2) + C = -\frac{1}{2}\ln(1-q)^2 + C = -\ln(1-q) + C.$$

С другой стороны, как мы получили в семинаре 8, пример 3:

$$S_3(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{n} = -\ln(1-q).$$

Сравнив эти два выражения, придём к выводу, что $C = 0$. Окончательно:

$$S_3(x) = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2q\cos x + q^2) = \ln\frac{1}{\sqrt{1 - 2q\cos x + q^2}}.$$

Ответ: $S_3(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n \cos nx}{n} = \ln\frac{1}{\sqrt{1-2q\cos x+q^2}}$, $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$.

Пример 7. Вычислить $S_4(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n}$.

Заметим, что **при каждом фиксированном $\boldsymbol{x \neq 2\pi k}$**, $k \in \mathbb{Z}$, ряд $S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n \cos nx}{n}$ сходится равномерно **по параметру $\boldsymbol{q}$** на множестве $0 < q \leq 1$ (в левой полуокрестности точки $q = 1$). Это доказывается по признаку Дирихле:

$a_n = \cos nx$, $b_n = \frac{q^n}{n}$,

1) $\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} \cos nx\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$ $\forall N$, $\forall q \in (0,1]$;
2) $b_n = \frac{q^n}{n}$ монотонно убывает по n при каждом фиксированном $q \in (0,1]$;
$b_n \rightrightarrows 0$ при $n \to +\infty$, $|q| \in (0,1]$, т. к.
$\sup\limits_{0<q\leq 1} |b_n| = \sup\limits_{0<q\leq 1} \frac{q^n}{n} = \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Поскольку ряд S_3 сходится равномерно по $q \in (0,1]$, то можно переходить к пределу при $q \to 1-0$ почленно:

$$S_4(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{q\to 1-0} \frac{q^n \cos nx}{n} = \lim_{q\to 1-0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n \cos nx}{n} = \lim_{q\to 1-0} S_3 =$$

$$= \lim_{q\to 1-0} \ln\frac{1}{\sqrt{1 - 2q\cos x + q^2}} = \ln\frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos x}} = \ln\frac{1}{\sqrt{4\sin^2\frac{x}{2}}} = \ln\frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, \qquad x \neq 2\pi k.$$

При $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, ряд $S_4(x)$ расходится.

Ответ: $S_4(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}=\ln\frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|},\ x\neq 2\pi k.$

Пример 8. Вычислить $S_5(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^n\sin nx}{n}$, где $q\in\mathbb{R}$, $|q|<1$.

Сумма ряда представляет собой нечётную 2π-периодическую (по x) функцию.

Продифференцировав ряд по x, получим:

$$S_5'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}q^n\cos nx=S_1(x)-1=\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}-1=\frac{q\cos x-q^2}{1-2q\cos x+q^2}.$$

Обоснование возможности почленного дифференцирования по x при $x\in\mathbb{R}$:

1) ряд $S_5(x)$ сходится: $\left|\frac{q^n\sin nx}{n}\right|\leq|q|^n$, мажорантный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}|q|^n$ сходится при $|q|<1$;
2) все члены ряда $\frac{q^n\sin nx}{n}$ дифференцируемы по x;
3) ряд из производных $\sum_{n=1}^{+\infty}q^n\cos nx$ сходится равномерно на $x\in\mathbb{R}$ — по признаку Вейерштрасса: $|q^n\cos nx|\leq|q|^n$,
   мажорантный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}|q|^n$ сходится при $|q|<1$.

Далее,

$$S_5(x)=\int\frac{q\cos x-q^2}{1-2q\cos x+q^2}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1-2q\cos x+q^2+q^2-1}{1-2q\cos x+q^2}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1-q^2}{2}\int\frac{dx}{1-2q\cos x+q^2}=-\frac{x}{2}+\frac{1-q^2}{2}\int\frac{dx}{1-2q\cos x+q^2}.$$

Сделаем замену переменной в последнем интеграле (универсальная тригонометрическая подстановка):

$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x=2\operatorname{arctg}t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$.

$$\frac{1-q^2}{2}\int\frac{dx}{1-2q\cos x+q^2}=\frac{1-q^2}{2}\int\frac{1}{1-2q\frac{1-t^2}{1+t^2}+q^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=$$

$$=(1-q^2)\int\frac{dt}{1+t^2-2q(1-t^2)+q^2(1+t^2)}=(1-q^2)\int\frac{dt}{(1+q)^2t^2+(1-q)^2}=$$

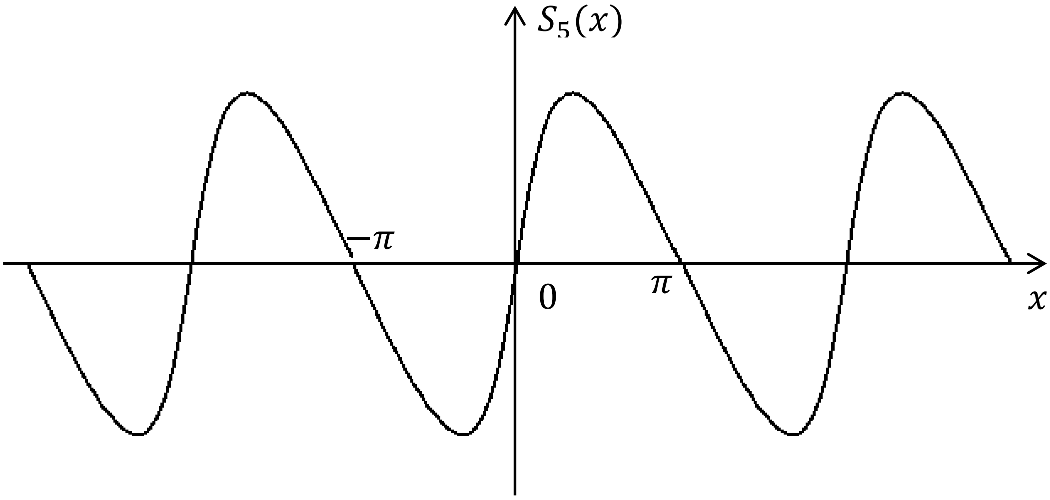
$$=\frac{1+q}{1-q}\int\frac{dt}{1+\left(\frac{1+q}{1-q}t\right)^2}=\int\frac{d\left(\frac{1+q}{1-q}t\right)}{1+\left(\frac{1+q}{1-q}t\right)^2}=\operatorname{arctg}\left(\frac{1+q}{1-q}t\right)+C=\operatorname{arctg}\left(\frac{1+q}{1-q}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

$$S_5(x)=-\frac{x}{2}+\operatorname{arctg}\left(\frac{1+q}{1-q}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.\qquad(3)$$

Будем рассматривать $x\in(-\pi;\ \pi)$. На этом интервале функция $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ непрерывна, и сама функция $S_5(x)$ непрерывна (т. к. у неё есть производная в каждой точке) и представима в виде (3), т. е. константа C должна быть одна и та же во всех точках $x\in(-\pi;\ \pi)$.

При $x=0$: $S_5(0)=0$, откуда $C=0$. Тогда

$$S_5(x)=-\frac{x}{2}+\operatorname{arctg}\left(\frac{1+q}{1-q}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right),\qquad x\in(-\pi;\ \pi).$$



При $x = \pm\pi$:
$S_5(\pm\pi) = 0$.
Затем продолжим функцию $S_5(x)$ 2π-периодически на всю вещественную ось (см. график).

Ответ: $S_5(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n \sin nx}{n} = \begin{cases} -\frac{x}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+q}{1-q} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right), & x \in (-\pi;\ \pi), \\ 0, & x = \pm\,\pi, \end{cases} \quad q \in \mathbb{R}, |q| < 1.$

Эталонные суммы (все они — 2π-периодические функции)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \cos nx = \frac{1 - q\cos x}{1 - 2q\cos x + q^2}, \qquad q \in \mathbb{R}, |q| < 1;$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n \sin nx = \frac{q\sin x}{1 - 2q\cos x + q^2}, \qquad q \in \mathbb{R}, |q| < 1;$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n \cos nx}{n} = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2q\cos x + q^2}}, \qquad q \in \mathbb{R}, |q| < 1;$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n \sin nx}{n} = \begin{cases} -\frac{x}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+q}{1-q} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right), & x \in (-\pi;\ \pi), \\ 0, & x = \pm\,\pi, \end{cases} \quad q \in \mathbb{R}, |q| < 1;$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n} = \ln \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, \qquad x \neq 2\pi k;$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & x = 0, 2\pi. \end{cases}$$

ДЗ 25. Сделать те примеры, которые не успели решить на семинаре.
Демидович № 2936, 2938, 2940, 2942, 2961–2963.