Семинар 23

Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

Рассмотрим НИ первого рода

$$I(p)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,p)\,dx\,,\qquad p\in[c;\ d].$$

Т. (о непрерывной зависимости несобственного интеграла от параметра). Пусть

1) функция $f(x,p)$ непрерывна при $x\geq a, p\in[c;d]$,
2) интеграл $I(p)$ сходится равномерно на отрезке $[c;\ d]$.

Тогда функция $I(p)$ непрерывна на отрезке $[c;\ d]$.

Следствие. При условиях предыдущей теоремы

$$\lim_{p\to p_0}\int\limits_a^{+\infty} f(x,p)\,dx=\int\limits_a^{+\infty} f(x,p_0)\,dx\,,\qquad p_0\in[c;\ d].$$

Замечание. Из предыдущей теоремы следует, что если зависящий от параметра несобственный интеграл от непрерывной функции сходится к разрывной функции, то он сходится неравномерно.

Т. (о дифференцировании несобственного интеграла по параметру). Пусть

1) функции $f(x,p)$ и $f_p(x,p)$ непрерывны при $x\geq a, p\in[c;d]$,
2) интеграл $I(p)$ сходится хотя бы для одного значения $p\in[c;\ d]$,
3) интеграл $\int_a^{+\infty} f_p(x,p)\,dx$ сходится равномерно на отрезке $[c;\ d]$.

Тогда

$$\exists I'(p)=\frac{d}{dp}\int\limits_a^{+\infty} f(x,p)\,dx=\int\limits_a^{+\infty} f_p(x,p)\,dx\,,\qquad p\in[c;\ d].$$

Замечание. Данные теоремы останутся справедливы, если заменить отрезок $[c;\ d]$ на интервал $(c;\ d)$, а также при бесконечных c или (и) d.

Т. (об интегрировании несобственного интеграла по параметру). Пусть

1) функция $f(x,p)$ непрерывна при $x\geq a, p\in[c;\ d]$,
2) интеграл $I(p)$ сходится равномерно на отрезке $[c;\ d]$.

Тогда

$$\exists\int\limits_c^d I(p)\,dp=\int\limits_c^d dp\int\limits_a^{+\infty} f(x,p)\,dx=\int\limits_a^{+\infty} dx\int\limits_c^d f(x,p)\,dp.$$

Это верно только для *конечных* $c,\ d$! (О несобственном интегрировании несобственных интегралов по параметру см. Ильин, Позняк «Основы мат. анализа», ч. II, гл. 9, § 2, теорема 9.12.)

Замечание. Аналогичные теоремы справедливы и для несобственных интегралов II рода.

Пример 1 (самостоятельно). Вычислить $\lim\limits_{p\to 0+0} I(p)$, где $I(p)=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-px}}{(1+x^2)^2}\,dx$.

Докажем, что интеграл $I(p)$ сходится равномерно на множестве $p\geq 0$. Воспользуемся признаком Вейерштрасса:

$$|f(x,p)| = \frac{xe^{-px}}{(1+x^2)^2} \le \frac{x}{(1+x^2)^2} = F(x), \qquad p \ge 0,$$

мажорантный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(1+x^2)}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

сходится, поэтому интеграл $I(p)$ сходится равномерно на множестве $p \ge 0$.

Поскольку подынтегральная функция $f(x,p) = \frac{xe^{-px}}{(1+x^2)^2}$ непрерывна при $x \ge 0, p \ge 0$, то по теореме о непрерывной зависимости НИ от параметра функция $I(p)$ непрерывна на множестве $p \ge 0$. Тогда

$$\lim_{p\to 0+0} I(p) = I(0) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 1/2.

Пример 2. Найти область существования и исследовать на непрерывность функцию $I(p) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p}\,dx$.

Поскольку логарифм растёт на бесконечности медленнее любой положительной степени x, то мы можем предположить, что интеграл $I(p)$ сходится и расходится одновременно с интегралом $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, т. е. сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

1. Докажем, что интеграл $I(p)$ расходится при $p \le 1$. При всех достаточно больших положительных x: $\ln x \ge 1$, значит, $\frac{\ln x}{x^p} \ge \frac{1}{x^p}$, а минорантный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ расходится при $p \le 1$, значит, и интеграл $I(p)$ расходится при $p \le 1$.

2. Докажем, что интеграл $I(p)$ сходится при $p > 1$.

Известна оценка (см. семинар 11): $\forall \varepsilon > 0$, $\forall a > 0$, для всех достаточно больших положительных x: $0 < \ln x < \varepsilon x^a$, откуда $0 < \frac{\ln x}{x^p} < \frac{\varepsilon}{x^{p-a}}$.

Для каждого $p > 1$ можно подобрать число $a > 0$ настолько малое, что $p - a > 1$.

Тогда мажорантный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\varepsilon\,dx}{x^{p-a}}$ сходится, откуда следует сходимость ла $I(p)$.

Итак, область существования $I(p)$: $p > 1$.

3. Докажем равномерную сходимость $I(p)$ на множестве $p \ge p_0 > 1$.

Воспользуемся признаком Вейерштрасса. Сделаем оценку:

$$|f(x,p)| = \frac{\ln x}{x^p} \le \frac{\ln x}{x^{p_0}} = F(x), \qquad x \ge 1, \qquad p \ge p_0.$$

Мажорантный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{p_0}}\,dx$ сходится при $p_0 > 1$, как показано в п. 2. Поэтому $I(p)$ сходится равномерно на множестве $p \ge p_0$.

Поскольку подынтегральная функция $f(x,p) = \frac{\ln x}{x^p}$ непрерывна при $x \ge 1$, $p \ge p_0$, то по теореме о непрерывной зависимости НИ от параметра функция $I(p)$ непрерывна при $p \ge p_0$.

В силу того что число $p_0 > 1$ — произвольное, его можно брать сколь угодно близким к 1, получим непрерывность функции $I(p)$ на множестве $p > 1$, т. е. на всей области существования.

Ответ: функция $I(p)$ существует и непрерывна при $p > 1$.

Пример 3 (Демидович № 3812). *«Апофеоз матанализа»* (ср. картину Верещагина «Апофеоз войны», Государственная Третьяковская галерея). Вычислить $D(b)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x}\,dx$ — интеграл *Дирихле.*

1. Заметим, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{x}=b$, т. е. $x=0$ — точка устранимого разрыва для подынтегральной функции, значит, её можно доопределить в этой точке по непрерывности, тогда $x=0$ не является её особой точкой, и интеграл Дирихле является несобственным интегралом I рода. Для каждого фиксированного $b\neq 0$ он сходится по признаку Дирихле (а для $b=0$ его сходимость очевидна).

2. Во многих случаях НИ можно вычислить с помощью дифференцирования по параметру под знаком интеграла (если после дифференцирования получается более простой интеграл). Естественно, возможность такого дифференцирования нужно обосновывать.

Попробуем (формально) продифференцировать $D(b)$ по параметру b под знаком интеграла:

$D'(b)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\sin bx}{x}\right)dx=\int_0^{+\infty}\cos bx\,dx=\frac{\sin bx}{b}\Big|_0^{+\infty}$ — расходится.

Мы видим, что после дифференцирования получился более простой интеграл, который берётся в элементарных функциях, но, увы, расходится. Значит, дифференцировать $D(b)$ по параметру *под знаком интеграла* нельзя. Однако это не значит, что $D'(b)$ не существует.

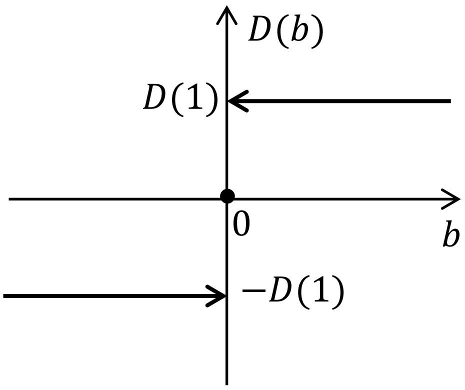
3. В самом деле, сделаем в $D(b)$ замену (при $b>0$) $bx=t$:

$$D(b)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x}dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{bx}d(bx)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=D(1).$$

При $b<0$, в силу нечётности подынтегральной функции относительно параметра b, получаем:

$D(b)=D(-|b|)=-D(|b|)=-D(1).$

Таким образом,



$$D(b)=\begin{cases}D(1), & b>0,\\ 0, & b=0,\\ -D(1), & b<0,\end{cases}=D(1)\operatorname{sgn}b. \qquad (*)$$

Отсюда $D'(b)=0$ при $b\neq 0$.

Значит, производная по параметру b (почти всюду) существует, хотя и не может быть вычислена с помощью дифференцирования под знаком интеграла!

4. Таким образом, чтобы вычислить интеграл ле $D(b)$, нам остаётся найти $D(1)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

5. Для этого введём дополнительный параметр и рассмотрим интеграл

$$I(p)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin x}{x}dx, \qquad p\geq 0.$$

При этом $I(0)=D(1)$.

6. Вычислим $I(p)$ с помощью дифференцирования по параметру p под знаком интеграла (при этом интеграл упростится). Сначала сделаем это формально, а потом обоснуем возможность дифференцирования.

$$I'(p)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}\left(e^{-px}\frac{\sin x}{x}\right)dx=-\int\limits_0^{+\infty}e^{-px}\sin x\,dx=-\int\limits_0^{+\infty}e^{-px}\operatorname{Im}(e^{ix})\,dx=$$
$$=-\operatorname{Im}\int\limits_0^{+\infty}e^{-px}e^{ix}\,dx=-\operatorname{Im}\int\limits_0^{+\infty}e^{(-p+i)x}\,dx=-\operatorname{Im}\left(\frac{e^{(-p+i)x}}{-p+i}\bigg|_0^{+\infty}\right)=-\operatorname{Im}\frac{1}{p-i}=$$
$$=-\operatorname{Im}\frac{p+i}{p^2+1}=-\operatorname{Im}\left(\frac{p}{p^2+1}+i\frac{1}{p^2+1}\right)=-\frac{1}{p^2+1},\qquad p>0.$$
Для разнообразия, мы вычислили интеграл $\int_0^{+\infty}e^{-px}\sin x\,dx$ не с помощью интегрирования по частям (дважды), а путём перехода от $\sin x$ к e^{ix}.
Заметим, что при $p=0$ последний интеграл расходится.
Пояснение, почему $e^{(-p+i)x}\to 0$ при $x\to+\infty$:
$e^{(-p+i)x}=e^{-px}\cdot e^{ix}$.
$\left|e^{ix}\right|=|\cos x+i\sin x|=\sqrt{\cos^2 x+\sin^2 x}=1$,
т. е. e^{ix} — ограниченная функция.
А $e^{-px}\to 0$ при $x\to+\infty$, т. е. e^{-px} — бесконечно малая функция при $x\to+\infty$.
Произведение ограниченной функции на бесконечно малую — бесконечно малая функция:
$e^{-px}\cdot e^{ix}\to 0$ при $x\to+\infty$.

7. Теперь обоснуем возможность дифференцирования $I(p)$ по параметру p под знаком интеграла при $p>0$:

1) функция $f(x,p)=e^{-px}\frac{\sin x}{x}$ непрерывна при $p>0$, $x\geq 0$ (при $x=0$ доопределим функцию её предельным значением 1); функция $f_p(x,p)=-e^{-px}\sin x$ тоже непрерывна;
2) интеграл $I(p)$ сходится при $p>0$ (ибо при $x\neq 0$ справедливо неравенство $\left|\frac{\sin x}{x}\right|<1$, откуда $\left|e^{-px}\frac{\sin x}{x}\right|<e^{-px}$, а мажорантный интеграл $\int_0^{+\infty}e^{-px}\,dx=\frac{1}{p}$ сходится при $p>0$);
3) интеграл $\int_0^{+\infty}f_p(x,p)\,dx=\int_0^{+\infty}e^{-px}\sin x\,dx$ сходится равномерно на множестве $p\geq p_0>0$ — задача № 3756 (3756 б) из Демидовича (ДЗ 22).

Значит, $I'(p)=-\frac{1}{p^2+1}$ при $p\geq p_0$, а в силу произвольности числа $p_0>0$ — при $\forall p>0$.

8. Отсюда $I(p)=-\operatorname{arctg}p+C$ при $p>0$.

9. Неизвестную константу C найдём из следующих соображений. Заметим, что
$|I(p)|=\left|\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin x}{x}dx\right|\leq\int_0^{+\infty}\left|e^{-px}\frac{\sin x}{x}\right|dx<\int_0^{+\infty}e^{-px}\,dx=\frac{1}{p}\to 0$ при $p\to+\infty$.
Значит, $\lim\limits_{p\to+\infty}I(p)=\lim\limits_{p\to+\infty}(-\operatorname{arctg}p+C)=-\frac{\pi}{2}+C=0$, откуда $C=\frac{\pi}{2}$.
Итак, $I(p)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}p$ при $p>0$.

10. Кроме того, интеграл $I(p)$ сходится равномерно на множестве $p\geq 0$ (Демидович № 3760 (3760 а) из ДЗ 22), поэтому функция $I(p)$ непрерывна при $p\geq 0$.
Тогда $I(0)=\lim\limits_{p\to 0+0}I(p)=\lim\limits_{p\to 0+0}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}p\right)=\frac{\pi}{2}=D(1)$.

11. Окончательно имеем:

$$\boxed{D(b)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} b\,.}$$

Запомним этот важный результат.

Ответ: $\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} b$.

ДЗ 23. Демидович 1997 г. (2003 г.) № 3777 (3777.2), 3779, 3780, 3784, 3804, 3806, 3809, 3810 (3810 а), 3815, 3816.