Семинар 17

Квазилинейные УрЧП 1-го порядка

В простейшем случае, когда неизвестная функция z зависит от двух переменных x, y, *квазилинейное* (т.е. линейное относительно производных) УрЧП 1-го порядка выглядит так:

$$a_1(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = b(x,y,z). \tag{1}$$

(В частном случае получается линейное относительно z уравнение: однородное и неоднородное.)

Будем искать решение уравнения (1) в неявном виде:

$$\Phi(x,y,z) = 0,$$

где Φ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция (пока неизвестная нам). Как мы помним с первого курса, в этом случае

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}.$$

Подставив это в уравнение (1), получим

$$-a_1(x,y,z)\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}} - a_2(x,y,z)\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}} = b(x,y,z),$$

откуда

$$a_1(x,y,z)\frac{\partial \Phi}{\partial x} + a_2(x,y,z)\frac{\partial \Phi}{\partial y} + b(x,y,z)\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Таким образом, квазилинейное уравнение (1) относительно функции z двух ных x, y свелось к линейному однородному уравнению (2) относительно функции Φ трёх переменных x, y, z. Ему соответствует характеристическая система из двух уравнений

$$\frac{dx}{a_1(x,y,z)} = \frac{dy}{a_2(x,y,z)} = \frac{dz}{b(x,y,z)},$$

которая имеет два независимых первых интеграла:

$$\begin{cases} \Psi_1(x,y,z) = C_1, \\ \Psi_2(x,y,z) = C_2. \end{cases}$$

Тогда ОР уравнения (2) имеет вид:

$$\Phi(x,y,z) = F\big(\Psi_1(x,y,z), \Psi_2(x,y,z)\big),$$

где F — произвольная непрерывно дифференцируемая функция двух аргументов, а ОР уравнения (1) $z(x,y)$ задаётся неявно формулой:

$$F\big(\Psi_1(x,y,z), \Psi_2(x,y,z)\big) = 0.$$

Аналогично решается квазилинейное УрЧП 1-го порядка для функции n переменных.

Чтобы решить задачу Коши, нужно найти ОР УрЧП и подставить его в условие Коши.

Пример 1 (Филиппов № 1175, самостоятельно). Решить уравнение:
$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=x^2y+z.$
Характеристическая система:
$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{2y}=\frac{dz}{x^2y+z}.$$
Нужно найти два независимых первых интеграла.
Сначала рассмотрим уравнение:
$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{2y}.$$
Проинтегрировав, получим:
$$2\ln|x|=\ln|y|+\tilde{C},$$
$$x^2=C_1y,$$
$$\frac{x^2}{y}=C_1,$$
откуда
$$\boxed{\Psi_1(x,y,z)=\frac{x^2}{y}.}$$
Ещё один первый интеграл получим, рассмотрев уравнение
$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{x^2y+z}$$
с учётом $y=\frac{x^2}{C_1}$:
$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{\frac{x^4}{C_1}+z}.$$
$$\frac{x^4\,dx}{C_1}+z\,dx=x\,dz.$$
$$\frac{x^4\,dx}{C_1}=x\,dz-z\,dx.$$
$$\frac{x^2\,dx}{C_1}=\frac{x\,dz-z\,dx}{x^2}=d\left(\frac{z}{x}\right).$$
$$\frac{x^3}{3C_1}=\frac{z}{x}+C_2.$$
Подставив $C_1=\frac{x^2}{y}$, получим
$$\frac{xy}{3}-\frac{z}{x}=C_2.$$
Тогда
$$\boxed{\Psi_2(x,y,z)=\frac{xy}{3}-\frac{z}{x}.}$$
ОР УрЧП имеет вид:
$$F(\Psi_1,\Psi_2)=F\left(\frac{x^2}{y},\frac{xy}{3}-\frac{z}{x}\right)=0,$$
где F — произвольная непрерывно дифференцируемая функция двух аргументов.

В данном случае (поскольку z входит только в один из аргументов функции F) уравнение можно разрешить относительно z. В самом деле, если выражение $F(a,b)=0$ задаёт неявно функциональную зависимость b от a, то b есть некоторая функция от a: $b=f(a)$. Тогда

$$\frac{xy}{3}-\frac{z}{x}=f\left(\frac{x^2}{y}\right),$$

где f — произвольная непрерывно дифференцируемая функция одного аргумента. Отсюда

$$z=\frac{x^2y}{3}-xf\left(\frac{x^2}{y}\right).$$

Ответ: $z=\frac{x^2y}{3}-xf\left(\frac{x^2}{y}\right)$, $f\in C^{(1)}$.

Пример 2 (самостоятельно). Решить задачу Коши: $\begin{cases} x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=x^2y+z, \\ z|_{x=1}=y. \end{cases}$

Геометрический смысл: найти поверхность $z=z(x,y)$, проходящую через прямую Г, заданную уравнениями $\begin{cases} x=1, \\ z=y. \end{cases}$

ОР УрЧП получено в примере 1: $z=\frac{x^2y}{3}-xf\left(\frac{x^2}{y}\right)$. Подставляем его в условие Коши:

$$z|_{x=1}=\frac{y}{3}-f\left(\frac{1}{y}\right)=y,$$

откуда

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=-\frac{2}{3}y.$$

Обозначим $t=\frac{1}{y}$. Тогда

$$f(t)=-\frac{2}{3t}.$$

Функция f найдена в явном виде. Получаем решение задачи Коши:

$$z=\frac{x^2y}{3}-xf\left(\frac{x^2}{y}\right)=\frac{x^2y}{3}+\frac{2y}{3x}.$$

Ответ: $z=\frac{x^2y}{3}+\frac{2y}{3x}$.

Пример 3 (Филиппов № 1201, самостоятельно). Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $z\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz$ и проходящую через кривую Г: $\begin{cases} x+y=2, \\ yz=1. \end{cases}$

Сначала найдём ОР УрЧП. Его характеристическая система:

$$\frac{dx}{z}=-\frac{dy}{xy}=\frac{dz}{2xz}.$$

Надо найти два независимых первых интеграла.

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{2xz}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$2x\,dx=dz,$$

$$x^2-z=C_1,$$

откуда

$\boxed{\Psi_1(x,y,z)=x^2-z.}$

Теперь рассмотрим уравнение:

$$-\frac{dy}{xy}=\frac{dz}{2xz}.$$

Сократим на x, умножим на 2 и проинтегрируем:

$$-2\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z},$$

$$-2\ln|y|=\ln|z|+\tilde{C},$$

$$zy^2=C_2,$$

откуда

$\boxed{\Psi_2(x,y,z)=zy^2.}$

Тогда ОР УрЧП имеет вид:

$$F(\Psi_1,\Psi_2)=F(x^2-z,zy^2)=0,\qquad F\in C^{(1)}.$$

Т.к. z входит в оба аргумента функции F, отсюда нельзя найти z в явном виде. Поэтому будем искать решение задачи Коши тоже в неявном виде. Из условия Коши прохождения поверхности $z=z(x,y)$ через кривую Г нужно определить вид функции $F(\Psi_1,\Psi_2)$. На кривой Г имеем:

$$\begin{cases}x+y=2,\\ yz=1,\\ \Psi_1=x^2-z,\\ \Psi_2=zy^2.\end{cases}$$

Из этой системы надо исключить x, y, z, тогда получится искомая связь между Ψ_1, Ψ_2 вида $F(\Psi_1,\Psi_2)=0$. В самом деле, из первых двух равенств выразим x и z через y и подставим в третье и четвёртое равенства:

$$\begin{cases}x=2-y,\\ z=\dfrac{1}{y},\\ \Psi_1=(2-y)^2-\dfrac{1}{y},\\ \Psi_2=y.\end{cases}$$

Исключив из последних двух равенств переменную y, получим:

$$\Psi_1=(2-\Psi_2)^2-\frac{1}{\Psi_2},$$

т.е.

$$\Psi_1-(2-\Psi_2)^2+\frac{1}{\Psi_2}=0.$$

Это и есть искомая функциональная связь между Ψ_1, Ψ_2, которая выполняется всюду на кривой Г: $F(\Psi_1,\Psi_2)=0$.

Значит, $F(\Psi_1,\Psi_2)=\Psi_1-(2-\Psi_2)^2+\frac{1}{\Psi_2}$. Функциональная зависимость $F(\Psi_1,\Psi_2)=0$ должна выполняться и вне кривой Г (поскольку любое решение УрЧП имеет такой вид). Таким образом, решение задачи Коши вне кривой Г задаётся неявно выражением:

$$F(\Psi_1,\Psi_2)=F(x^2-z,zy^2)=x^2-z-(2-zy^2)^2+\frac{1}{zy^2}=0.$$

Ответ: $x^2-z-(2-zy^2)^2+\frac{1}{zy^2}=0.$

Пример 4 (Филиппов № 1206, самостоятельно). Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = y$ и проходящую через линию Г: $\begin{cases} y = 2z, \\ x + 2y = z. \end{cases}$

Сначала найдём ОР УрЧП. Надо найти два независимых первых интеграла характеристической системы:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$$

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$y\,dy = z\,dz,$$

$$y^2 - z^2 = C_1,$$

откуда

$$\boxed{\Psi_1(x, y, z) = y^2 - z^2.}$$

Чтобы найти ещё один первый интеграл, рассмотрим равенство, которое следует из характеристической системы:

$$\frac{dy + dz}{z + y} = \frac{dx}{x}.$$

$$\frac{d(y + z)}{y + z} = \frac{dx}{x}.$$

$$\ln|y + z| = \ln|x| + \tilde{C}.$$

$$\frac{y + z}{x} = C_2.$$

Отсюда

$$\boxed{\Psi_2(x, y, z) = \frac{y + z}{x}.}$$

ОР УрЧП:

$$F(\Psi_1, \Psi_2) = F\left(y^2 - z^2, \frac{y + z}{x}\right) = 0, \qquad F \in C^{(1)}.$$

На кривой Г:

$$\begin{cases} y = 2z, \\ x + 2y = z, \\ \Psi_1 = y^2 - z^2, \\ \Psi_2 = \dfrac{y + z}{x}. \end{cases}$$

Из этой системы надо исключить x, y, z, чтобы осталось уравнение вида $F(\Psi_1, \Psi_2) = 0$. Из первых двух равенств выразим y и x через z и подставим в последние два равенства:

$$\begin{cases} y = 2z, \\ x = -3z, \\ \Psi_1 = 3z^2, \\ \Psi_2 = -1. \end{cases}$$

Теперь из последних двух равенств надо исключить z. Получим

$$\Psi_2 = -1,$$

откуда

$$\Psi_2 + 1 = 0.$$

Это и есть искомая функциональная зависимость между Ψ_1 и Ψ_2, т.е.
$F(\Psi_1, \Psi_2) = \Psi_2 + 1 = 0.$
Решение задачи Коши вне кривой Г в неявном виде:
$$F(\Psi_1, \Psi_2) = \frac{y+z}{x} + 1 = 0.$$
Отсюда можно найти z в явном виде:
$z = -x - y.$
Ответ: $z = -x - y.$

Замечание. Уравнение $F\left(y^2 - z^2, \frac{y+z}{x}\right) = 0$ нельзя разрешить относительно z, но можно разрешить относительно x: $x = \frac{y+z}{f(y^2-z^2)}$. И это выражение можно подставить в условие Коши. Но при этом могут быть потеряны решения исходного уравнения вида $z = z(x, y)$, которые нельзя представить в виде $x = x(y, z)$, например, функции вида $z = g(y)$.

Пример 5 (Филиппов № 1210, самостоятельно). Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$ и проходящую через линию Г: $\begin{cases} x = y, \\ z = x^2. \end{cases}$
Сначала найдём ОР УрЧП. Характеристическая система:
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2xy}.$$
Из уравнения $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ находим первый интеграл: $\boxed{\Psi_1(x, y, z) = \frac{x}{y}.}$
Из равенства
$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 2\frac{dz}{2xy}$$
получим
$y\,dx + x\,dy = dz,$
$xy - z = C_2,$
откуда
$$\boxed{\Psi_2(x, y, z) = xy - z.}$$
Тогда ОР УрЧП:
$$F(\Psi_1, \Psi_2) = F\left(\frac{x}{y}, xy - z\right) = 0, \qquad F \in C^{(1)}.$$
Отсюда получим решение в явном виде:
$$xy - z = f\left(\frac{x}{y}\right), \qquad f \in C^{(1)}.$$
$$z = xy - f\left(\frac{x}{y}\right).$$
Подставляем в условие Коши:
$z|_{x=y} = x^2 - f(1) = x^2,$
откуда $f(1) = 0$. Значит, решение задачи Коши:
$$z = xy - f\left(\frac{x}{y}\right),$$
где $f \in C^{(1)}$ и $f(1) = 0$. Оно не единственно. Это связано с тем, что кривая Г: $\begin{cases} x = y, \\ z = x^2, \end{cases}$ является характеристикой.

Ответ: $z = xy - f\left(\frac{x}{y}\right)$, где $f \in C^{(1)}$ и $f(1) = 0$.

ДЗ 17. Филиппов № 1172, 1176, 1179, 1181, 1186, 1194–1196, 1198, 1209.