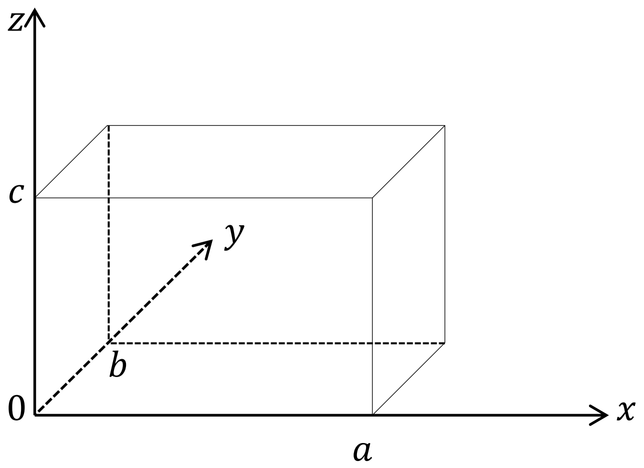
Семинар 4

Пример 1 (прямоугольный параллелепипед).



$$
\begin{cases}
\Delta\, u = 0, 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c, \\
u|_{x=0} = \varphi_1(y,z), \qquad u|_{x=a} = \varphi_2(y,z), \\
u|_{y=0} = \psi_1(x,z), \qquad u|_{y=b} = \psi_2(x,z), \\
u|_{z=0} = \chi_1(x,y), \qquad u|_{z=c} = \chi_2(x,y).
\end{cases} \tag{0}
$$

Будем искать решение задачи (0) в виде:
$u = u_1 + u_2 + u_3$,
где функции u_1, u_2 и u_3 являются решениями следующих краевых задач:

$$
\begin{cases}
\Delta\, u_1 = 0, \qquad 0 < x < a, \qquad 0 < y < b, \qquad 0 < z < c, \\
u_1|_{x=0} = \varphi_1(y,z), \qquad u_1|_{x=a} = \varphi_2(y,z), \\
u_1|_{y=0} = 0, \qquad u_1|_{y=b} = 0, \\
u_1|_{z=0} = 0, \qquad u_1|_{z=c} = 0.
\end{cases} \tag{I}
$$

$$
\begin{cases}
\Delta\, u_2 = 0, \qquad 0 < x < a, \qquad 0 < y < b, \qquad 0 < z < c, \\
u_2|_{x=0} = 0, \qquad u_2|_{x=a} = 0, \\
u_2|_{y=0} = \psi_1(x,z), \qquad u_2|_{y=b} = \psi_2(x,z), \\
u_2|_{z=0} = 0, \qquad u_2|_{z=c} = 0.
\end{cases} \tag{II}
$$

$$
\begin{cases}
\Delta\, u_3 = 0, \qquad 0 < x < a, \qquad 0 < y < b, \qquad 0 < z < c, \\
u_3|_{x=0} = 0, \qquad u_3|_{x=a} = 0, \\
u_3|_{y=0} = 0, \qquad u_3|_{y=b} = 0, \\
u_3|_{z=0} = \chi_1(x,y), \qquad u_3|_{z=c} = \chi_2(x,y).
\end{cases} \tag{III}
$$

В самом деле, если функции u_1, u_2, u_3 являются решениями задач (I), (II), (III), соответственно, то функция $u = u_1 + u_2 + u_3$ удовлетворяет всем условиям исходной задачи (0).

Рассмотрим задачу (I). Сначала найдём ЧР уравнения Лапласа $\Delta\, u_1 = 0$ в прямоугольном параллелепипеде, удовлетворяющие однородным ГУ: $u_1|_{y=0} = 0$, $u_1|_{y=b} = 0$, $u_1|_{z=0} = 0$, $u_1|_{z=c} = 0$, и представимые в виде:
$u_1(x,y,z) = X(x) \cdot v(y,z) \not\equiv 0$.
Тогда уравнение Лапласа $\Delta\, u_1 = 0$ принимает вид:
$\Delta\, u_1 = (u_1)_{xx} + (u_1)_{yy} + (u_1)_{zz} = X''(x)v(y,z) + X(x)\, \Delta_{yz}\, v(y,z) = 0$,
где $\Delta_{yz} = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$. Разделим переменные:

$$
\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{\Delta_{yz}\, v(y,z)}{v(y,z)} = \lambda.
$$

С учётом однородных ГУ: $u_1|_{y=0} = 0$, $u_1|_{y=b} = 0$, $u_1|_{z=0} = 0$, $u_1|_{z=c} = 0$, для функции $v(y,z)$ получим задачу Ш.–Л. в прямоугольнике:

$$
\begin{cases}
\Delta_{yz}\, v(y,z) + \lambda v(y,z) = 0, \qquad 0 < y < b, \qquad 0 < z < c, \\
v|_{y=0} = 0, \qquad v|_{y=b} = 0, \\
v|_{z=0} = 0, \qquad v|_{z=c} = 0.
\end{cases}
$$

Путём разделения переменных эта задача сводится к двум задачам Ш.–Л. на отрезках (по y и по z) с условиями Дирихле. Её СЗ и СФ:

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{c}\right)^2, \qquad v_{nm}(y,z) = \sin\frac{\pi n y}{b}\cdot\sin\frac{\pi m z}{c},$$

$$\|v_{nm}\|^2 = \int_0^b dy \int_0^c v_{nm}^2(y,z)\,dz = \int_0^b dy \int_0^c \sin^2\frac{\pi n y}{b}\sin^2\frac{\pi m z}{c}\,dz =$$

$$= \int_0^b \sin^2\frac{\pi n y}{b}\,dy \int_0^c \sin^2\frac{\pi m z}{c}\,dz = \left\|\sin\frac{\pi n y}{b}\right\|^2\cdot\left\|\sin\frac{\pi m z}{c}\right\|^2 = \frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2} = \frac{bc}{4}, \qquad n,m = 1,2,\ldots$$

Для функции $X(x)$ имеем ДУ:

$$X''_{nm}(x) - \lambda_{nm}X_{nm}(x) = 0, \qquad 0 < x < a. \tag{1}$$

Заметим, что в данном случае все $\lambda_{nm} > 0$.

С учётом замечания, сделанного в конце семинара 3, удобно записать ОР ДУ (1) в виде:

$$X_{nm}(x) = A_{nm}X_{nm}^{(1)}(x) + B_{nm}X_{nm}^{(2)}(x),$$

где функции $X_{nm}^{(1)}(x)$, $X_{nm}^{(2)}(x)$ удовлетворяют ДУ (1), являются ЛНЗ, функция $X_{nm}^{(1)}(x)$ удовлетворяет соответствующему *однородному* ГУ при $x = 0$, а функция $X_{nm}^{(2)}(x)$ удовлетворяет соответствующему *однородному* ГУ при $x = a$, т.е. в нашем случае — условиям Дирихле:

$$X_{nm}^{(1)}(0) = 0, \qquad X_{nm}^{(2)}(a) = 0.$$

Легко проверить, что функции

$$X_{nm}^{(1)}(x) = \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}x, \qquad X_{nm}^{(2)}(x) = \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}(x-a)$$

удовлетворяют всем перечисленным выше условиям.

Таким образом, имеем ЧР уравнения Лапласа, удовлетворяющие однородным ГУ $u_1|_{y=0} = 0,\ u_1|_{y=b} = 0, u_1|_{z=0} = 0,\ u_1|_{z=c} = 0$:

$$u_1^{(n,m)}(x,y,z) = X_{nm}(x)v_{nm}(y,z) = \left[A_{nm}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}x + B_{nm}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}(x-a)\right]v_{nm}(y,z).$$

Ищем решение задачи (I) в виде их суммы:

$$u_1(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_1^{(n,m)}(x,y,z) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[A_{nm}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}x + B_{nm}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}(x-a)\right]v_{nm}(y,z). \tag{*}$$

Функция (*) (при условии, что ряд можно дифференцировать почленно два раза) удовлетворяет всем условиям задачи (I), кроме неоднородных ГУ:

$$u_1|_{x=0} = \varphi_1(y,z), \qquad u_1|_{x=a} = \varphi_2(y,z).$$

Коэффициенты A_n и B_n определяются подстановкой ряда (*) в неоднородные ГУ:

$$\begin{cases} u_1|_{x=0} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} B_{nm}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}a\,v_{nm}(y,z) = \varphi_1(y,z), \\ u_1|_{x=a} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} A_{nm}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}a\,v_{nm}(y,z) = \varphi_2(y,z). \end{cases} \tag{2}$$

Разложим функции $\varphi_1(y,z)$, $\varphi_2(y,z)$ в ряд Фурье по СФ $v_{nm}(y,z)$ задачи Ш.–Л. в прямоугольнике:

$$\varphi_1(y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{nm}v_{nm}(y,z)\,,\qquad \varphi_2(y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}D_{nm}v_{nm}(y,z)\,,$$

$$C_{nm}=\frac{1}{\|v_{nm}\|^2}\int_0^b dy\int_0^c \varphi_1(y,z)v_{nm}(y,z)\,dz\,,$$

$$D_{nm}=\frac{1}{\|v_{nm}\|^2}\int_0^b dy\int_0^c \varphi_2(y,z)v_{nm}(y,z)\,dz.$$

Тогда, приравнивая соответствующие коэффициенты рядов Фурье в уравнениях (2), получим:

$$A_{nm}=\frac{D_{nm}}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}a},\qquad B_{nm}=-\frac{C_{nm}}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_{nm}}a},\qquad n,m=1,2,\ldots$$

Подставив найденные коэффициенты в ряд (*), получим решение задачи (I). В силу теоремы существования и единственности, других решений нет.

Задачи (II) и (III) решаются аналогично. Решение исходной задачи (I) есть сумма решений задач (I), (II), (III):

$u=u_1+u_2+u_3.$

Замечание: в случае задачи Неймана исходная задача (0) может быть разрешима, а задачи (I), (II), (III) могут быть неразрешимы. Тогда описанный алгоритм для решения задачи (0) не подходит.

Уравнение Лапласа в полярных координатах

От декартовых координат (x,y) на плоскости перейдём к полярным координатам (r,φ): $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$. При этом оператор Лапласа преобразуется следующим образом (дома проверить):

$$\Delta\,u=u_{xx}+u_{yy}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Найдём ЧР уравнения Лапласа на плоскости, представимые в полярных координатах в виде:

$u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)\not\equiv 0.$

Подставим это выражение в уравнение Лапласа $\Delta\,u=0$:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)\Phi(\varphi)+\frac{R(r)}{r^2}\Phi''(\varphi)=0.$$

Умножим уравнение на $\frac{r^2}{R(r)\Phi(\varphi)}$ и разделим переменные:

$$\frac{r\frac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)}{R(r)}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\lambda.$$

Для функции $\Phi(\varphi)$ получим задачу Ш.–Л. с периодическими ГУ:

$$\begin{cases}\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0, & \varphi\in\mathbb{R},\\ \Phi(\varphi+2\pi)\equiv\Phi(\varphi).\end{cases}$$

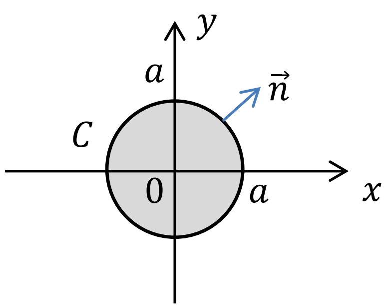
Её СЗ и СФ (см. семинар 2 и таблицу из семинара 3):

$$\lambda_n=n^2,\qquad \Phi_n(\varphi)=\begin{cases}\cos n\varphi\,, & n\ge 0,\\ \sin n\varphi\,, & n<0,\end{cases}\ \|\Phi_n\|^2=\pi(1+\delta_{n0}),\qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Для функции $R(r)$ получим ДУ:

$$r\frac{d}{dr}\left(rR_n'(r)\right) - \lambda_n R_n(r) = 0.$$
$$r^2R_n''(r) + rR_n'(r) - n^2R_n(r) = 0.$$
Это уравнение Эйлера. Его ОР имеет вид (дома проверить):
$$R_n(r) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln r\,, & n = 0, \\ A_n r^n + B_n r^{-n}, & n \neq 0. \end{cases}$$
Таким образом, мы получили ЧР уравнения Лапласа на плоскости:
$$u_n(r,\varphi) = R_n(r)\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln r\,, & n = 0, \\ (A_n r^n + B_n r^{-n})\cos n\varphi\,, & n = 1, 2, \dots, \\ (A_n r^n + B_n r^{-n})\sin n\varphi\,, & n = -1, -2, \dots \end{cases}$$
Заметим, что функции $\ln r$ и r^{-n} при $n > 0$ неограничены при $r = 0$.

Пример 2 (в круге).



$$\begin{cases} \Delta\, u = 0,\ r < a, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=a} = f(\varphi). \end{cases}$$
Здесь $\vec{n}$ — единичная внешняя нормаль к кругу.
Имеем задачу Неймана, она разрешима $\Leftrightarrow$
$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} dl = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, a\, d\varphi = 0,$ т.е. $\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = 0.$
При этом решение определено с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Заметим, что с учётом направления внешней нормали ГУ Неймана можно переписать в виде:
$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi).$$
Ищем решение в виде суммы найденных выше частных решений уравнения Лапласа на плоскости:
$$u(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(r,\varphi) =$$
$$= A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(A_n r^n + C_n r^{-n})\cos n\varphi + (B_n r^n + D_n r^{-n})\sin n\varphi\right].$$
Функция $u(r,\varphi)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа *внутри* круга, значит, она непрерывна и, следовательно, ограничена в круге; тогда $B_0 = 0$, $C_n = 0$, $D_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$
Значит,
$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \qquad (**)$$
Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа в круге (при условии, что ряд можно дважды дифференцировать почленно).
Подставляем в ГУ:
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} n a^{n-1}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f(\varphi). \qquad (3)$$

Разложим функцию $f(\varphi)$ в ряд Фурье по тригонометрической системе функций $\Phi_n(\varphi)$:

$$f(\varphi) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(E_n \cos n\varphi + F_n \sin n\varphi),$$

где $E_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = 0$ (в силу условия разрешимости),

$$E_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi\,, \qquad F_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$$

Подставляем этот ряд в уравнение (3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}(E_n \cos n\varphi + F_n \sin n\varphi).$$

Приравняв коэффициенты при соответствующих членах ряда Фурье, получим:

$$A_n = \frac{E_n}{na^{n-1}}, \qquad B_n = \frac{F_n}{na^{n-1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Подставив найденные коэффициенты в ряд (**), получим решение задачи Неймана в круге. Коэффициент A_0 остаётся произвольным.

Например, пусть $f(\varphi) = 3\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 2$. Это выражение преобразуется к виду $f(\varphi) = \cos 2\varphi$. Проверим условие разрешимости:

$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\,d\varphi = 0$ — выполнено.

Функция уже разложена в ряд Фурье по тригонометрической системе, который состоит из одного слагаемого. Подставим её в уравнение (3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \cos 2\varphi.$$

Приравнивая коэффициенты, находим:

$$A_2 = \frac{1}{2a};\ \ A_n = 0, n = 1, 3, 4, \ldots;\ \ B_n = 0, n = 1, 2, \ldots$$

Решение краевой задачи имеет вид (**):

$$u(r,\varphi) = A_0 + \frac{r^2}{2a}\cos 2\varphi,$$

где A_0 — произвольная константа.

ДЗ 4. БК с. 117 № 7, с. 116 № 1(б,в,г).