Семинар 13

Теория устойчивости

Рассмотрим *автономное* ОДУ 1-го порядка (функция f не зависит явно от t):

$$\dot{x}(t) = f(x). \tag{1}$$

Пусть x_0 — корень уравнения $f(x) = 0$. Тогда $x(t) = x_0$ — решение уравнения (1), т. к. $\dot{x}(t) = 0$, $f(x) = 0$. Такое решение (постоянное) называется *положением равновесия.* Положений равновесия может быть несколько, если уравнение $f(x) = 0$ имеет несколько корней.

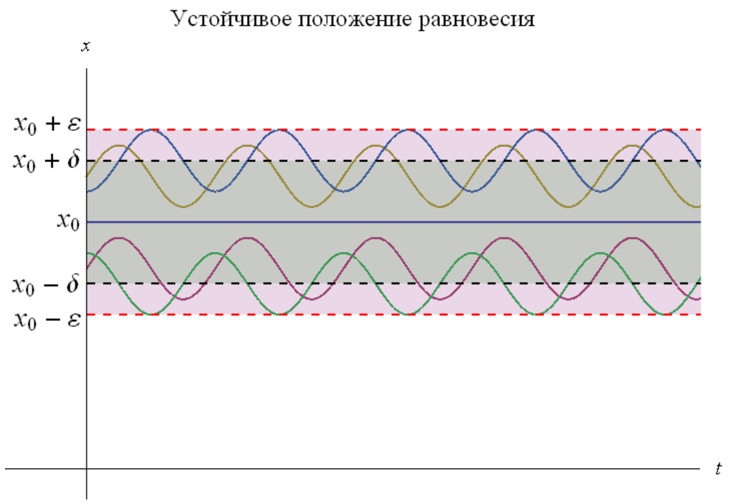
В физических задачах бывает важно знать, что будет происходить при малых отклонениях от положения равновесия: будет ли система возвращаться в положение равновесия или нет.

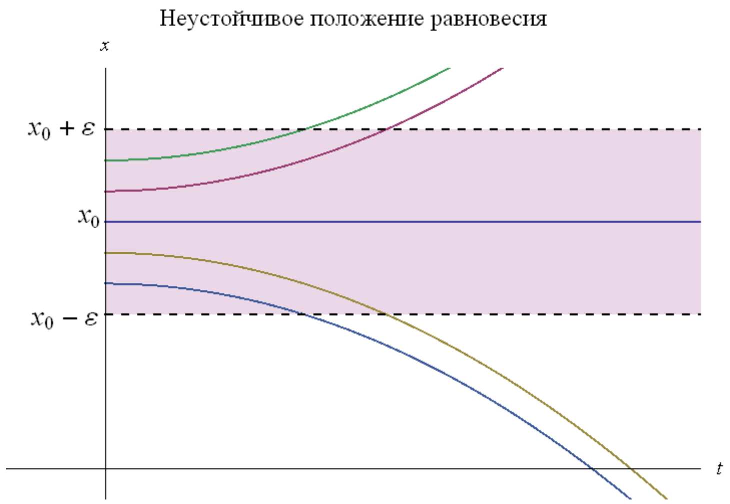
О. Положение равновесия $x = x_0$ уравнения (1) называется *устойчивым* (по Ляпунову), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: для любого $x(t)$ — решения уравнения (1) такого, что $|x(0) - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|x(t) - x_0| < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$.

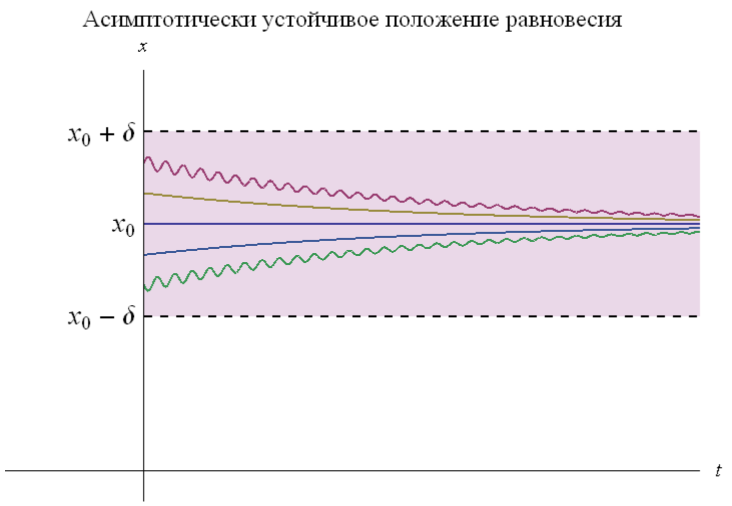
Это означает, что малым начальным отклонениям от положения равновесия отвечают малые отклонения от него в любой момент времени.

Построив отрицание к этому определению, получим

О. Положение равновесия $x = x_0$ уравнения (1) называется *неустойчивым* (по Ляпунову), если $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall \delta > 0\ \exists x(t)$ — решение уравнения (1): $|x(0) - x_0| < \delta$, но $\exists t \geq 0$: $|x(t) - x_0| \geq \varepsilon$.







Т. е. сколь угодно малым начальным отклонениям могут соответствовать не малые отклонения в последующие моменты времени.

О. Положение равновесия $x = x_0$ уравнения (1) называется *асимптотически устойчивым,* если *оно устойчиво* и $\exists\delta > 0$: для любого $x(t)$ — решения уравнения (1) такого, что $|x(0) - x_0| < \delta$, выполняется $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x_0$.

Исследование устойчивости по первому приближению

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, где x_0 — положение равновесия. Тогда
$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{0} + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \qquad \Delta x = x - x_0 \to 0.$

Поскольку $\Delta\dot{x}(t) = \dot{x}(t)$, уравнение (1) можно записать в виде:
$\Delta\dot{x} = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$

Тогда можно предположить, что при малых Δx решения последнего уравнения будут близки к решениям *линеаризованного* уравнения:

$$\Delta\dot{x} = \underbrace{f'(x_0)}_{\lambda}\Delta x. \qquad (2)$$

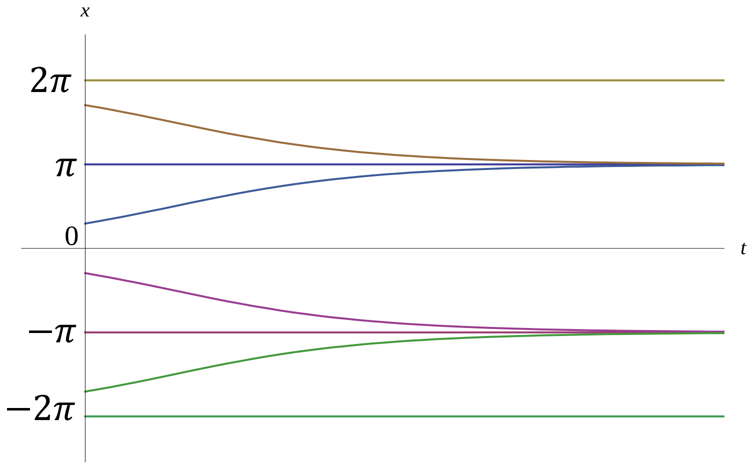
ОР уравнения (2) с разделяющимися переменными:
$\Delta x(t) = Ce^{\lambda t}$, чему соответствует $x(t) = x_0 + \Delta x(t) = x_0 + Ce^{\lambda t}$.

Тогда при $\lambda = f'(x_0) < 0$: $|x(t) - x_0| = |Ce^{\lambda t}| \leq |C| = |x(0) - x_0|$ $\forall t \geq 0$ $\Rightarrow$ положение равновесия устойчиво, и $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x_0$ $\Rightarrow$ положение равновесия асимптотически устойчиво.

При $\lambda = f'(x_0) > 0$: $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \infty \Rightarrow$ положение равновесия неустойчиво.

При $\lambda = f'(x_0) = 0$ главную роль будут играть члены более высокого порядка малости, и об устойчивости *по первому приближению* ничего сказать нельзя.

Пример 1 (задача к общему зачёту № 70). Найти положения равновесия ОДУ и исследовать их на устойчивость: $\dot{x} = \sin x$.



Положения равновесия — это корни уравнения $f(x) = \sin x = 0$.

Получаем $x_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. При этом $f'(x_n) = \cos x_n = \cos \pi n = (-1)^n$.

При $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, имеем $f'(x_n) = 1 > 0$ $\Rightarrow$ положение равновесия неустойчиво.

При $n = 2k + 1$ имеем $f'(x_n) = -1 < 0 \Rightarrow$ положение равновесия асимптотически устойчиво.

При $t \to +\infty$ решения ОДУ будут приближаться к устойчивым положениям равновесия и удаляться от неустойчивых положений равновесия (см. рис.)

Ответ: $x = 2\pi k$ — неустойчивые положения равновесия, $x = 2\pi k + 1$ — асимптотически устойчивые положения равновесия, где $k \in \mathbb{Z}$.

Теперь рассмотрим автономную систему ОДУ:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \qquad (3)$$

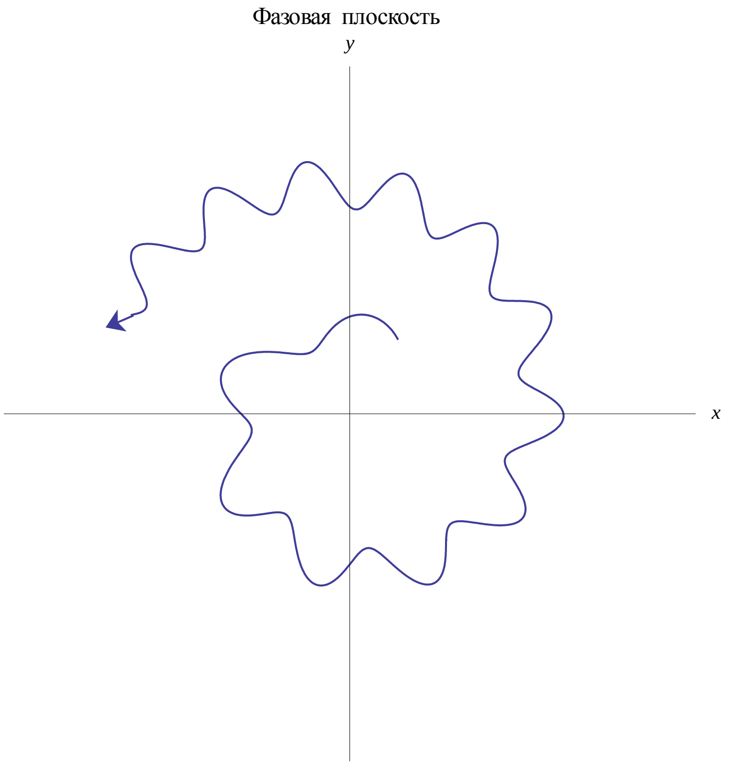
Каждое её решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ задаёт в параметрическом виде некоторую кривую на *фазовой плоскости* Oxy. Если t — это время, то уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$ описывают траекторию движения частицы на фазовой плоскости — *фазовую траекторию*. Тогда $\{\dot{x}, \dot{y}\}$ — это вектор скорости.

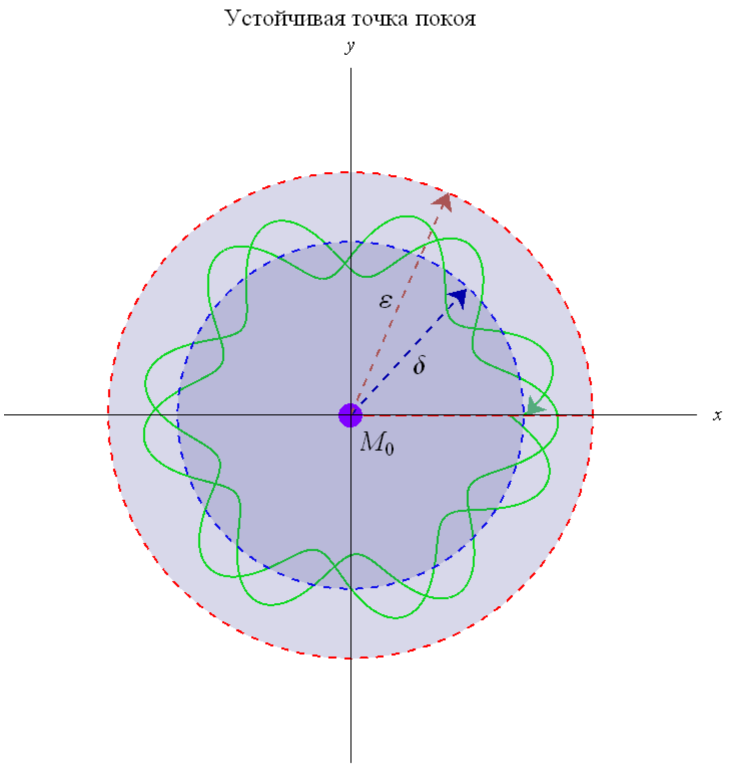
Если в точке $M_0(x_0;\ y_0)$: $f(x_0, y_0) = 0$, $g(x_0, y_0) = 0$, то точка M_0 называется *точкой покоя* (положением равновесия, *стационарной точкой, особой точкой*) системы (3). Заметим, что тогда $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ — постоянное решение системы (3). Если частица в начальный момент времени находится в точке покоя, то она там и останется. Тогда фазовая траектория будет состоять из одной точки.

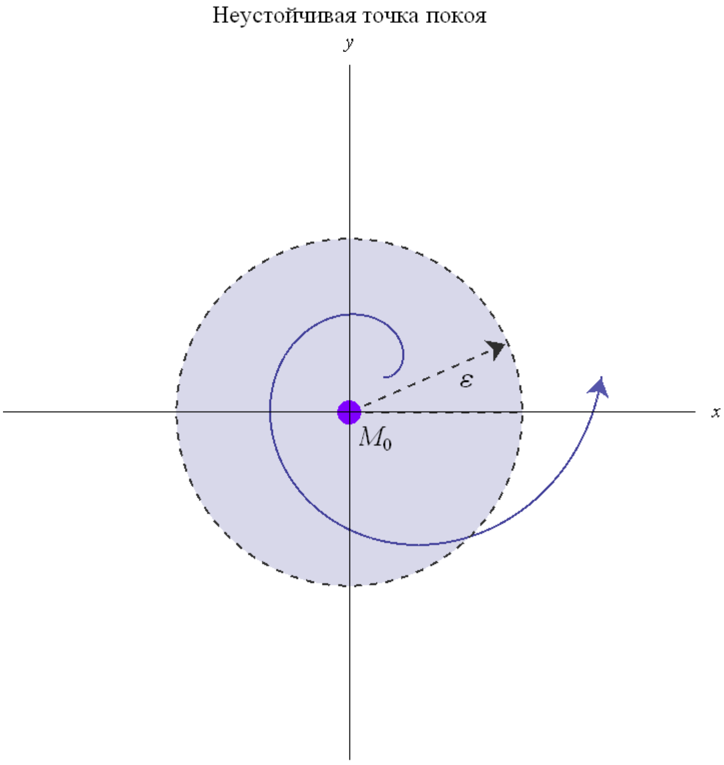
О. Точка покоя $M_0(x_0;\ y_0)$ системы (3) называется *устойчивой* (по Ляпунову), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: любая фазовая траектория, лежащая в δ-окрестности точки M_0 в начальный момент времени $t = 0$, остаётся в ε-окрестности точки M_0 $\forall t \geq 0$.

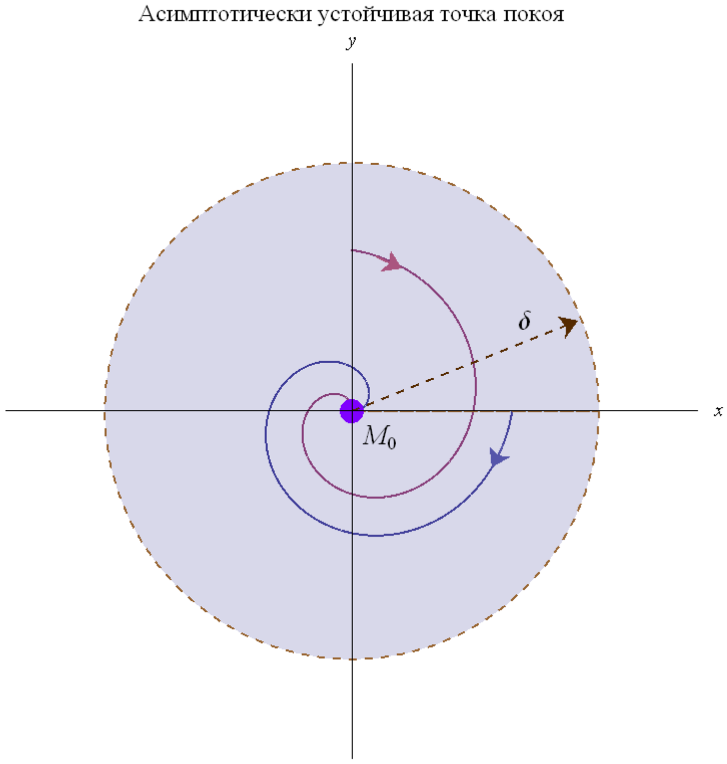
О. Точка покоя $M_0(x_0;\ y_0)$ системы (3) называется *неустойчивой* (по Ляпунову), если $\exists \varepsilon > 0$: $\forall \delta > 0$ существует фазовая траектория, лежащая в δ-окрестности точки M_0 в начальный момент времени $t = 0$, которая выходит за ε-окрестность точки M_0 в некоторый момент времени $t \geq 0$.

О. Точка покоя $M_0(x_0;\ y_0)$ системы (3) называется *асимптотически устойчивой,* если *она устойчива* и $\exists \delta > 0$: любая фазовая траектория, лежащая в δ-окрестности точки M_0 в начальный момент времени $t = 0$, неограниченно приближается к точке M_0 при $t \to +\infty$.









Пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ — точка покоя системы (3) и функции $f(x,y)$, $g(x,y)$ дифференцируемы в точке M_0. Тогда

$$f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{0} + \underbrace{f_x(x_0,y_0)}_{a_{11}}\Delta x + \underbrace{f_y(x_0,y_0)}_{a_{12}}\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right), \qquad \Delta x = x - x_0 \to 0,$$

$\Delta y = y - y_0 \to 0.$

$$g(x,y) = \underbrace{g(x_0,y_0)}_{0} + \underbrace{g_x(x_0,y_0)}_{a_{21}}\Delta x + \underbrace{g_y(x_0,y_0)}_{a_{22}}\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right), \qquad \Delta x, \Delta y \to 0.$$

Тогда систему (3) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \Delta\dot{x} = a_{11}\Delta x + a_{12}\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right), \\ \Delta\dot{y} = a_{21}\Delta x + a_{22}\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right). \end{cases}$$

Можно предположить, что при малых Δx, Δy решения этой системы будут близки к решениям линеаризованной системы:

$$\begin{cases} \Delta\dot{x} = a_{11}\Delta x + a_{12}\Delta y, \\ \Delta\dot{y} = a_{21}\Delta x + a_{22}\Delta y. \end{cases} \tag{4}$$

Точка покоя $M_0(x_0; y_0)$ системы (3) соответствует точке покоя $(\Delta x;\ \Delta y) = (0;\ 0)$ системы (4).

Пусть λ_1, λ_2 — корни ХУ линеаризованной системы (4) (они могут быть совпадающими): $\det(A - \lambda E) = 0$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Т. (Ляпунова об устойчивости по первому приближению). Если $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$ *и* $\operatorname{Re}\lambda_2 < 0$, то точка покоя M_0 исходной системы (3) асимптотически устойчива. Если $\operatorname{Re}\lambda_1 > 0$ *или* $\operatorname{Re}\lambda_2 > 0$, то точка покоя M_0 исходной системы (3) неустойчива.

В остальных случаях поведение решений системы (3) будет определяться членами более высокого порядка малости, и об устойчивости по первому приближению ничего сказать нельзя.

Замечание. Автономное ОДУ 2-го порядка $\ddot{x} = g(x, \dot{x})$ можно свести к автономной системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

для этой системы найти точки покоя и исследовать их на устойчивость.

Пример 2 (Филиппов № 918). Найти положения равновесия и исследовать их на устойчивость: $\begin{cases} \dot{x} = \ln(-x + y^2), \\ \dot{y} = x - y - 1. \end{cases}$

Положения равновесия находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} f(x, y) = \ln(-x + y^2) = 0, \\ g(x, y) = x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение можно записать в виде $-x + y^2 = 1$ и сложить со вторым, тогда получится

$y^2 - y - 1 = 1.$

$y^2 - y - 2 = 0.$

$y_1 = 2, \qquad y_2 = -1.$

$x_1 = y_1 + 1 = 3, \qquad x_2 = y_2 + 1 = 0.$

Есть два положения равновесия: $M_1(3;\ 2)$ и $M_2(0;\ -1)$.

1) Делаем линеаризацию вблизи точки $M_1(3;\ 2)$.

$$a_{11} = f_x(3,2) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\ln(-x + y^2)\right]\Bigg|_{\substack{x=3\\y=2}} = -\frac{1}{-x + y^2}\Bigg|_{\substack{x=3\\y=2}} = -1.$$

$$a_{12} = f_y(3,2) = \left[\frac{\partial}{\partial y}\ln(-x + y^2)\right]\Bigg|_{\substack{x=3\\y=2}} = \frac{2y}{-x + y^2}\Bigg|_{\substack{x=3\\y=2}} = 4.$$

$$a_{21} = g_x(3,2) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - y - 1)\right]\Bigg|_{\substack{x=3\\y=2}} = 1.$$

$$a_{22} = g_y(3,2) = \left[\frac{\partial}{\partial y}(x - y - 1)\right]\Bigg|_{\substack{x=3\\y=2}} = -1.$$

Тогда $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 4 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 + \lambda)^2 - 4 = 0.$

$(1 + \lambda)^2 = 4.$

$1 + \lambda = \pm 2.$

$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -3.$

$\operatorname{Re}\lambda_1 > 0,\ \operatorname{Re}\lambda_2 < 0.$

Положение равновесия неустойчиво.

2) Делаем линеаризацию вблизи точки $M_2(0;\ -1)$.

$$a_{11} = f_x(0,-1) = -\frac{1}{-x + y^2}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=-1}} = -1.$$

$$a_{12} = f_y(0,-1) = \frac{2y}{-x + y^2}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=-1}} = -2.$$

$a_{21} = g_x(0,-1) = 1.$

$a_{22} = g_y(0,-1) = -1.$

Тогда $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 + 2 = 0.$

$(1+\lambda)^2 = -2.$

$1 + \lambda = \pm i\sqrt{2}.$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2}.$

$\operatorname{Re}\lambda_1 < 0,\ \operatorname{Re}\lambda_2 < 0.$

Положение равновесия асимптотически устойчиво.

Ответ: $M_1(3;\ 2)$ неустойчиво, $M_2(0;\ -1)$ асимптотически устойчиво.

ДЗ 13. Найти положения равновесия и исследовать их на устойчивость:

а) $\dot{x} = \cos x$,

б) $\dot{x} = x(x+1)(x-2)$.

Филиппов № 889, 915, 917, 919–922.