Семинар 22

Несобственные интегралы с параметром

1. *Несобственный интеграл I рода.* Пусть для каждого значения параметра p из множества P сходится несобственный интеграл I рода

$$I(p)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,p)\,dx\,, \qquad p\in P.$$

Тогда $I(p)$ — несобственный интеграл I рода, зависящий от параметра p.
О. Интеграл $I(p)$ сходится *равномерно* на множестве P, если

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists A=A(\varepsilon)>a\colon\ \ \forall R>A, \forall p\in P\quad \left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,p)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Замечание. Здесь число A не должно зависеть от p.
Равномерная сходимость означает, что $I(p)$ сходится одинаково быстро для всех $p\in P$.
Непосредственно из определения равномерной сходимости следует
Практический критерий равномерной сходимости несобственного интеграла I рода. Рассмотрим интеграл с переменным нижним пределом интегрирования A:

$$J(p,A)=\int\limits_A^{+\infty} f(x,p)\,dx\,, \qquad A\geq a, \qquad p\in P.$$

Интеграл $I(p)$ сходится равномерно на множестве $P \Leftrightarrow \lim\limits_{A\to+\infty}\sup\limits_{p\in P}|J(p,A)|=0.$

Замечание. Обратите внимание на порядок действий: надо сначала взять супремум по p, а затем перейти к пределу при $A\to+\infty$.
2. *Несобственный интеграл II рода.* Пусть для каждого значения параметра p из множества P сходится несобственный интеграл II рода

$$I(p)=\int\limits_a^{b} f(x,p)\,dx\,, \qquad p\in P,$$

где $x=a$ — единственная особая точка функции $f(x,p)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда $I(p)$ — несобственный интеграл II рода, зависящий от параметра p.
О. Интеграл $I(p)$ сходится *равномерно* на множестве P, если

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\colon\ \forall\sigma\in(0;\ \delta), \forall p\in P\quad \left|\int\limits_a^{a+\sigma} f(x,p)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Замечание. Здесь число δ не должно зависеть от p.
Непосредственно из определения равномерной сходимости следует
Практический критерий равномерной сходимости несобственного интеграла II рода. Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом интегрирования $a+\delta$:

$$J(p,\delta)=\int\limits_a^{a+\delta} f(x,p)\,dx\,, \qquad 0<\delta\leq b-a, \qquad p\in P.$$

Интеграл $I(p)$ сходится равномерно на множестве $P \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta\to0+0}\sup\limits_{p\in P}|J(p,\delta)|=0.$

Замечание. Обратите внимание на порядок действий: надо сначала взять супремум по p, а затем перейти к пределу при $\delta \to 0+0$.
Аналогично рассматривается случай, когда $x = b$ — единственная особая точка функции $f(x,p)$ на отрезке $[a;b]$.
Отметим, что для применения практических критериев равномерной сходимости интегралов нужно уметь вычислять в явном виде функции $J(p,A)$ и $J(p,\delta)$ (или каким-то образом оценивать их поведение).

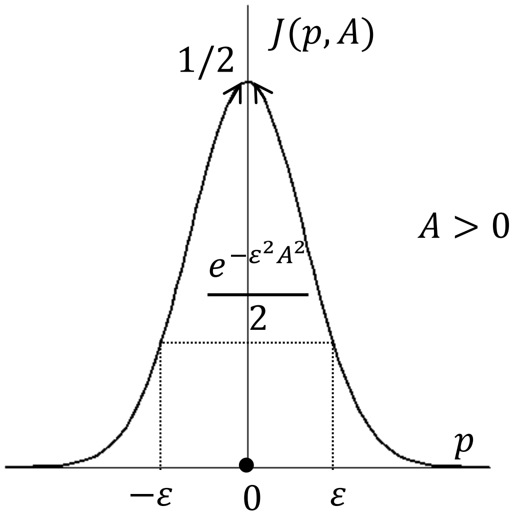
Пример 1 (самостоятельно). Исследовать на равномерную сходимость интеграл $I(p) = \int_0^{+\infty} p^2 x e^{-p^2x^2}\,dx$ на множестве: а) $p \in \mathbb{R}$, б) $|p| > \varepsilon > 0$. Вычислить $I(p)$.
Будем использовать практический критерий равномерной сходимости. Рассмотрим

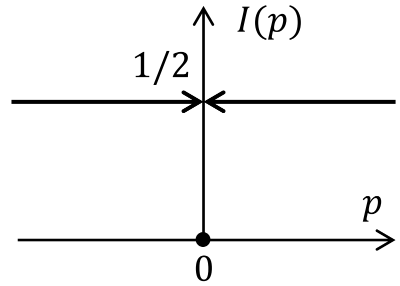
$$J(p,A) = \int\limits_A^{+\infty} p^2 x e^{-p^2x^2}\,dx.$$

Сделаем замену (при $p \neq 0$): $p^2x^2 = t$, $dt = 2p^2x\,dx$.
Тогда

$$J(p,A) = \frac{1}{2}\int\limits_{p^2A^2}^{+\infty} e^{-t}\,dt = -\frac{e^{-t}}{2}\bigg|_{p^2A^2}^{+\infty} = \frac{e^{-p^2A^2}}{2}.$$

При $p = 0$: $J(0,A) = 0$.
Построим график зависимости $J(p,A)$ от p при фиксированном $A > 0$. Из графика видно, что





а) $\sup\limits_{p\in\mathbb{R}}|J(p,A)| = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{A\to+\infty}\sup\limits_{p\in\mathbb{R}}|J(p,A)| = \frac{1}{2}$.
Поэтому равномерной сходимости нет.

б) $\sup\limits_{|p|>\varepsilon}|J(p,A)| = \frac{e^{-\varepsilon^2A^2}}{2}$, $\lim\limits_{A\to+\infty}\sup\limits_{|p|>\varepsilon}|J(p,A)| = 0$.
Поэтому равномерная сходимость есть.

Теперь вычислим $I(p)$: $I(p) = J(p,0) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & p \neq 0; \\ 0, & p = 0. \end{cases}$

Ответ: $I(p) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & p \neq 0; \\ 0, & p = 0; \end{cases}$ сходится равномерно на множестве $|p| > \varepsilon > 0$, сходится неравномерно на множестве $p \in \mathbb{R}$.

Признак Вейерштрасса. Если $|f(x,p)| \leq F(x)$ при $p \in P$, $x \geq a$ и мажорантный интеграл $\int_a^{+\infty} F(x)\,dx$ сходится, то интеграл $I(p) = \int_a^{+\infty} f(x,p)\,dx$ сходится абсолютно и равномерно на множестве P.
Замечание. Здесь функция $F(x)$ не должна зависеть от p.
Аналогично признак Вейерштрасса формулируется для несобственных интегралов II рода.

Замечание. Поскольку признак Вейерштрасса даёт абсолютную сходимость, не получится его использовать для условно сходящихся интегралов. В этом случае нужно использовать признак Дирихле (см. далее) или практический критерий равномерной сходимости.

Пример 2 (самостоятельно). Исследовать на равномерную сходимость интеграл $I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin px}{x^{3/2}+1} dx$ на $\mathbb{R}$.
Практический критерий сходимости мы не можем здесь применить, т. к. интеграл с переменным пределом интегрирования от такой функции мы вычислить не можем.
Применим признак Вейерштрасса:

$$|f(x,p)| = \left|\frac{\sin px}{x^{3/2}+1}\right| \leq \frac{1}{x^{3/2}+1} = F(x) \ \ \forall p \in \mathbb{R}, \forall x \geq 0.$$

Мажорантный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}+1}$ сходится (т. к. $\frac{1}{x^{3/2}+1} = O^*\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ при $x \to +\infty$), поэтому интеграл $I(p)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$.
Ответ: сходится равномерно.

Признак Дирихле. Рассмотрим интеграл $I(p) = \int_a^{+\infty} f(x,p)g(x,p)\,dx$. Пусть

1) $\exists C$: $\left|\int_a^A f(x,p)\,dx\right| \leq C \ \forall A > a, \forall p \in P$;
2) функция $g(x,p)$ *монотонна* по x при всех достаточно больших положительных x (при каждом фиксированном $p \in P$);
3) $g(x,p) \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$, $p \in P$ (функция $g(x,p)$ стремится к нулю при $x \to +\infty$ *равномерно* относительно параметра $p \in P$, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sup\limits_{p\in P}|g(x,p)| = 0$).

Тогда интеграл $I(p) = \int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится равномерно на множестве P.
Замечание. Здесь число C не должно зависеть ни от A, ни от p.
В третьем условии сначала надо взять супремум по всем $p \in P$, а затем перейти к пределу при $x \to +\infty$.
Для несобственных интегралов II рода признака Дирихле нет.
Замечание. Не стоит использовать признак Дирихле для абсолютно сходящихся интегралов. В этом случае удобнее использовать признак Вейерштрасса.

Пример 3 (самостоятельно). Исследовать на равномерную сходимость интеграл $I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x\cos xp}{x^{3/2}+1} dx$ на множестве $|p| > 0{,}01$.
Заметим, что признак Вейерштрасса не работает:

$$\left|\frac{x\cos xp}{x^{3/2}+1}\right| \leq \frac{x}{x^{3/2}+1},$$

но мажорантный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^{3/2}+1} dx$ расходится, т. к. $\frac{x}{x^{3/2}+1} = O^*\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ при $x \to +\infty$.
Практический критерий равномерной сходимости мы также не можем использовать, т. к. интеграл мы вычислить не можем.
Применим признак Дирихле. Пусть $f(x,p) = \cos xp$, $g(x,p) = \frac{x}{x^{3/2}+1}$.

1) $\left|\int_0^A \cos xp\,dx\right| = \left|\frac{\sin xp}{p}\Big|_{x=0}^{x=A}\right| = \left|\frac{\sin Ap}{p}\right| \leq \frac{1}{|p|} < 100 = C \ \ \forall p > 0{,}01, \ \forall A \geq 0;$

2) $g_x(x,p) = \left(\frac{x}{x^{3/2}+1}\right)' = \frac{x^{3/2}+1-\frac{3}{2}x^{3/2}}{\left(x^{3/2}+1\right)^2} = \frac{1-\frac{x^{3/2}}{2}}{\left(x^{3/2}+1\right)^2} < 0$ при всех достаточно больших положительных x, т. е. функция $g(x,p)$ монотонно убывает по x при всех достаточно больших положительных x;

3) $\sup\limits_{|p|>0{,}01} |g(x,p)| = \frac{x}{x^{3/2}+1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sup\limits_{|p|>0{,}01} |g(x,p)| = 0$.

Тогда по признаку Дирихле интеграл $I(p)$ сходится равномерно на множестве $|p| > 0{,}01$.
Заметим, что неравенство $|p| > 0{,}01$ позволило нам сделать подходящую оценку в условии 1), которая на множестве $p \in \mathbb{R}$ была бы невозможна.
Ответ: сходится равномерно.

Критерий Коши (равномерной сходимости несобственного интеграла I рода).
Интеграл $I(p) = \int_a^{+\infty} f(x,p)\,dx$ сходится равномерно на множестве $P \Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists A = A(\varepsilon) > a$: $\forall R_1 > A, \forall R_2 > A, \forall p \in P\ \left|\int_{R_1}^{R_2} f(x,p)\,dx\right| < \varepsilon$.
Замечание. Здесь число A не должно зависеть от p.
Как правило, критерий Коши используется, когда надо доказать отсутствие равномерной сходимости.
Аналогично критерий Коши формулируется для несобственного интеграла II рода.

Пример 4. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $I(p) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ на множестве $p > 0$.
Ранее (семинар 12, пример 3) мы установили сходимость этого интеграла при $p > 0$.
Заметим, что в элементарных функциях интеграл от $\frac{\sin x}{x^p}$ не вычисляется, равномерную сходимость по признакам Вейерштрасса и Дирихле доказать не получается (по признаку Дирихле — поскольку не выполнено третье условие: $\sup\limits_{p>0}\frac{1}{x^p} = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sup\limits_{p>0}\frac{1}{x^p}=1$).
Используя критерий Коши, докажем, что интеграл не сходится равномерно на множестве $p > 0$. Для этого покажем, что
$\exists\varepsilon > 0$: $\forall A > 1\ \exists R_1, R_2 > A, \exists p > 0$: $\left|\int_{R_1}^{R_2} \frac{\sin x}{x^p}\,dx\right| \geq \varepsilon$.
Возьмём $R_1 = 2\pi n + \frac{\pi}{4}$, $R_2 = 2\pi n + \frac{3\pi}{4}$. Путём выбора подходящего числа $n \in \mathbb{N}$ всегда можно сделать R_1, R_2 бóльшими любого наперёд заданного числа $A > 1$.
Тогда на отрезке $[R_1, R_2]$: $\sin x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Далее, выберем параметр $p > 0$ таким образом, чтобы на отрезке $[R_1, R_2]$ выполнялось неравенство $\frac{1}{x^p} \geq \frac{1}{2}$, т. е. $x^p \leq 2$. Поскольку x^p монотонно возрастает по переменной x, достаточно взять p: $R_2^p \leq 2$, т. е. $p \leq \log_{R_2} 2$; например, $p = \log_{R_2} 2 > 0$.
Тогда $\int_{R_1}^{R_2} \frac{\sin x}{x^p}\,dx \geq \int_{R_1}^{R_2} \frac{dx}{2\sqrt{2}} = \frac{R_2 - R_1}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \varepsilon > 0$.
Итак,
$\exists\varepsilon = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} > 0$: $\forall A > 1\ \ \exists R_1, R_2 > A$ ($R_1 = 2\pi n + \frac{\pi}{4}$, $R_2 = 2\pi n + \frac{3\pi}{4}$, $n \in \mathbb{N}$ — достаточно большое), $\exists p = \log_{R_2} 2 > 0$: $\left|\int_{R_1}^{R_2} \frac{\sin x}{x^p}\,dx\right| \geq \varepsilon$.
Что и доказывает отсутствие равномерной сходимости интеграла $I(p)$ на множестве $p > 0$.
Ответ: сходится неравномерно.

ДЗ 22. Демидович 1997 г. (2003 г.) № 3754, 3755.1 (3755.2), 3755.2 (3756 а), 3756 (3756 б), 3758, 3760 (3760 а), 3760.1 (3760 б), 3761, 3762, 3767.