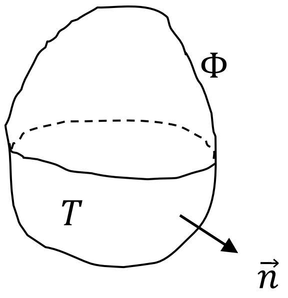
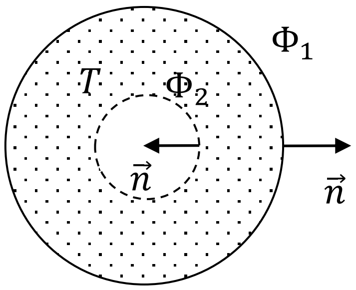
Семинар 2

Формула Остроградского



Пусть ограниченная область T в $\mathbb{R}^3$ имеет границу — кусочно гладкую двустороннюю *замкнутую* поверхность Φ с единичной *внешней* (по отношению к области T) нормалью $\vec{n}$,
$\vec{a} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ — векторное поле, заданное в замкнутой области $\bar{T}$ (т. е. в каждой точке задан вектор).
Пусть функции $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в $\bar{T}$. Тогда
$\boxed{\iint_\Phi (\vec{a}, \vec{n})\, dS = \iiint_T \operatorname{div} \vec{a}\, dV}$ — <u>формула Остроградского</u>, где
$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ — *дивергенция* вектора $\vec{a}$ («расходимость»), $dV = dx\, dy\, dz$ — элемент объёма,
т. е. поток вектора $\vec{a}$ через *внешнюю* сторону замкнутой поверхности Φ равен тройному интегралу от $\operatorname{div} \vec{a}$ по области T.



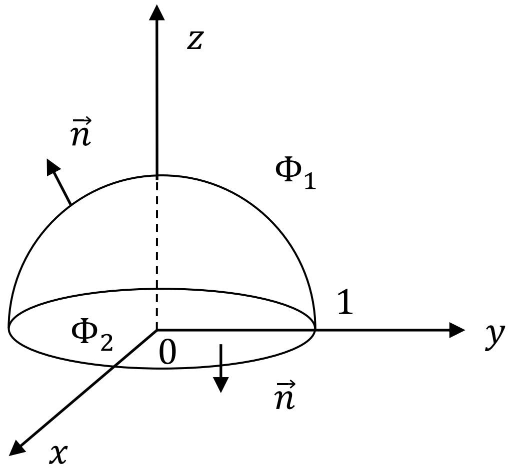
Если T — область «с дырками», т. е. граница области T состоит из нескольких замкнутых поверхностей $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N$, то поток берётся по *полной* границе с учётом направления внешней (по отношению к области T) нормали $\vec{n}$: $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \dots \cup \Phi_N$.
Формулу Остроградского также часто называют формулой *Гаусса* (особенно за рубежом), *Остроградского–Гаусса* или *Гаусса–Остроградского*. Дело в том, что сначала её получил Гаусс в частном случае (электростатика: поток вектора электрической напряжённости через замкнутую поверхность равен полному заряду, расположенному внутри поверхности, с точностью до постоянного множителя, зависящего от выбора системы единиц), а затем Остроградский — в общем случае: для произвольного векторного поля в n-мерном пространстве.
Формулу Остроградского также можно записать в развёрнутой форме:

$$\boxed{\iint\limits_{\Phi_{\text{внешн}}} P\, dy\, dz + Q\, dx\, dz + R\, dx\, dy = \iiint\limits_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz\,.}$$

Формула Остроградского связывает тройной интеграл по области с поверхностным интегралом по её границе и нужна для упрощения вычисления интегралов.

Пример 1 (самостоятельно). Вычислить интеграл I=$\iint_\Phi (z+1)\, dx\, dy$ по внешней стороне сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Интеграл представляет собой поток вектора $\vec{a} = \{0, 0, z+1\}$ через внешнюю сторону сферы. По формуле Остроградского:
$I = \iiint_T \operatorname{div} \vec{a}\, dV = \iiint_T 1\, dV$, где T — шар, ограниченный сферой. Таким образом, $I = \frac{4}{3}\pi$.
Ответ: $\frac{4}{3}\pi$.

Пример 5. Вычислить I=$\iint_{\Phi_1} (z+1)\, dx\, dy$ по верхней стороне полусферы:
$x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.



Чтобы использовать формулу Гаусса, дополним полусферу Φ_1 до замкнутой поверхности, добавив круг Φ_2 в плоскости Oxy («дно»). Пусть $\vec{n}$ — единичная внешняя нормаль к замкнутой поверхности $\Phi_1 \cup \Phi_2$. Тогда поток через полусферу:

$$\Pi_1 = \iint\limits_{\Phi_1} (\vec{a}, \vec{n})\, dS = \underbrace{\iint\limits_{\Phi_1 \cup \Phi_2} (\vec{a}, \vec{n})\, dS}_{\Pi} - \underbrace{\iint\limits_{\Phi_2} (\vec{a}, \vec{n})\, dS}_{\Pi_2} =$$

$$= \Pi - \Pi_2.$$

Поток через внешнюю сторону полной поверхности $\Phi_1 \cup \Phi_2$ найдём по формуле Остроградского:

$$\Pi = \iiint\limits_T \operatorname{div} \vec{a}\ dV = \iiint\limits_T 1\, dV = \frac{2}{3}\pi.$$

Поток через круг Φ_2 (нормаль направлена вертикально вниз: $\vec{n} = \{0, 0, -1\}$):

$$\Pi_2 = \iint\limits_{\Phi_2} (\vec{a}, \vec{n})\, dS = \iint\limits_{\Phi_2} -(z+1)\, dS = -\iint\limits_{\Phi_2} 1\, dS = -\pi.$$

Тогда: $\Pi_1 = \Pi - \Pi_2 = \boxed{\frac{5}{3}\pi}$.

Пример 6 (МАВЗ гл. XV § 3 пример № 3, дополнительный). Вычислить поток напряжённости электрического поля $\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ точечного заряда q, помещённого в начало координат, через внешнюю сторону замкнутой поверхности Φ, не проходящей через начало координат. Здесь k — коэффициент, зависящий от выбора системы единиц, r — расстояние до начала координат (длина радиус-вектора).

Если выполнены условия применимости формулы Остроградского, то:

$\Pi_\Phi = \iint_\Phi (\vec{E}, \vec{n})\, dS = \iiint_T \operatorname{div} \vec{E}\ dV$, где T — область, заключённая внутри поверхности Φ, $\vec{n}$ — единичная внешняя нормаль к поверхности Φ.

Вычислим $\operatorname{div} \vec{E}$ при $r \neq 0$:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{kqx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] = kq\,\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x \cdot \frac{3}{2} \cdot (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^3} ==$$

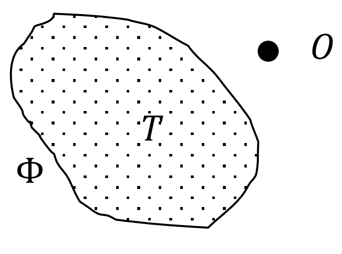
$$= kq\,\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \qquad \frac{\partial E_y}{\partial y} = kq\,\frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = kq\,\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$

$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 0$ при $r \neq 0$.

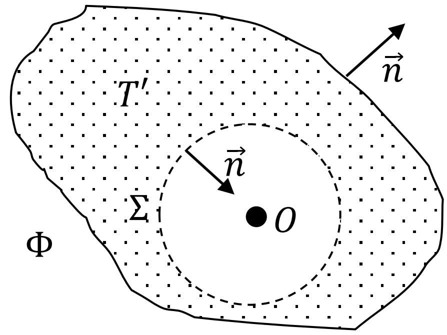
Рассмотрим два случая.

1) Поверхность Φ не охватывает начало координат O.

Тогда везде в области T: $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, поэтому $\boxed{\Pi_\Phi = 0}$.



2) Поверхность Φ охватывает начало координат O. Тогда формула Остроградского в области T неприменима, поскольку векторное поле $\vec{E}$ *разрывно*. В этом случае окружим точку O поверхностью Σ, целиком лежащей внутри поверхности Φ, и применим формулу Остроградского к области T', заключённой между Σ и Φ:



$$\iint_{\Phi\cup\Sigma}(\vec{E},\vec{n})\,dS = \iiint_{T'} \operatorname{div}\vec{E}\,dV = 0 = \underbrace{\iint_{\Phi}(\vec{E},\vec{n})\,dS}_{\Pi_\Phi} +$$

$$+ \underbrace{\iint_{\Sigma}(\vec{E},\vec{n})\,dS}_{\Pi_\Sigma},\ \text{откуда } \Pi_\Phi = -\Pi_\Sigma.$$

Выберем поверхность Σ такую, чтобы поток через неё легко считался. Пусть Σ — это сфера радиуса ε с центром в начале координат O. Тогда на сфере Σ единичная нормаль $\vec{n}$, внешняя по отношению к области T', будет направлена к центру: $\vec{n} = -\frac{\vec{r}}{r}$. Вычислим поток через сферу в направлении нормали $\vec{n}$:

$$\Pi_\Sigma = \iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{kq\vec{r}}{r^3}, -\frac{\vec{r}}{r}\right) dS = -kq\iint\limits_{\Sigma}\frac{(\vec{r},\vec{r})}{r^4}\,dS = -kq\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{r^2} = -kq\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{\varepsilon^2} = -\frac{kq}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma}dS = $$

$$= -\frac{kq}{\varepsilon^2}\cdot 4\pi\varepsilon^2 = -4\pi kq,$$

откуда $\Pi_\Phi = -\Pi_\Sigma = \boxed{4\pi kq.}$

Таким образом, получилась известная формула Гаусса для электростатики.

Соленоидальное поле

О. Векторное поле $\vec{a}$ называется *соленоидальным* в области T, если $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ в области T.

Выше мы убедились, что для поля точечного заряда $\vec{E} = \frac{kq\vec{r}}{r^3}$: $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ везде, кроме точки, где расположен заряд. В этой точке $\operatorname{div}\vec{E}$ имеет разрыв. Дивергенция характеризует плотность источников поля: в точке, где расположен заряд, плотность бесконечна, а в остальных точках она равна нулю.

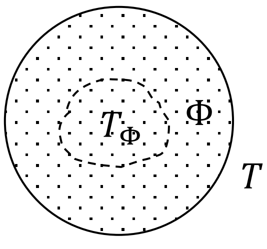
Таким образом, соленоидальное поле — это поле, у которого нет источников в данной области.

Пример: электрическое поле $\vec{E}$ в области вне зарядов, магнитное поле $\vec{B}$ в любой области.

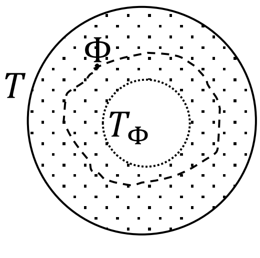
О. Область $T \subset \mathbb{R}^3$ называется *объёмно односвязной,* если для любой кусочно-гладкой замкнутой поверхности $\Phi \subset T$ (без самопересечений) её «внутренность» (т. е. область, ограниченная поверхностью Φ) T_Φ целиком содержится в T.

Эквивалентное определение: область называется объёмно-односвязной, если любую замкнутую поверхность, лежащую в этой области, можно стянуть в точку.

Примеры: шар, куб, тор. Не является объёмно односвязной областью шаровой слой, т. е. область, заключённая между двумя концентрическими сферами.



шар



шаровой слой

По теореме Остроградского в *объёмно односвязной* области поток непрерывно дифференцируемого соленоидального поля через любую кусочно-гладкую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\iint\limits_{\Phi} (\vec{a},\vec{n})\, dS = \iiint\limits_{T_\Phi} \operatorname{div}\vec{a}\, dV = 0.$$

Таким образом: $\vec{a}$ соленоидально $\Rightarrow$ поток через любую замкнутую поверхность равен нулю (только в *объёмно односвязной* области).

Обратное тоже верно: поток через любую замкнутую поверхность равен нулю $\Rightarrow$ непрерывно дифференцируемое поле $\vec{a}$ соленоидально (в любой области).

Введём операцию *ротора* векторного поля. Если $\vec{b} = \{P, Q, R\}$, то

$$\operatorname{rot}\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left\{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\}$$

— ротор векторного поля $\vec{b}$ («вихрь»).

Если дифференцируемое поле $\vec{a}$ в области T представимо в виде $\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}$, то поле $\vec{a}$ соленоидально в T. В самом деле, пусть $\vec{b} = \{P, Q, R\}$, тогда

$$\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{b} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$$

При этом $\vec{b}$ называется *векторным потенциалом* поля $\vec{a}$.

Обратное, вообще говоря, неверно, т. е. не во всех областях существует векторный потенциал для данного соленоидального поля. (Хотя в МАВЗе разобран пример нахождения векторного потенциала для произвольного соленоидального поля: гл. XV § 1 пример № 10, однако, нетрудно убедиться, что такие рассуждения проходят не для всех областей, а только для прямоугольного параллелепипеда.)

Попутно мы доказали формулу $\boxed{\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{b} = 0}$ для произвольного дважды дифференцируемого векторного поля $\vec{b}$.

Пример 7. Убедиться, что поле $\vec{a} = \left\{\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 0\right\}$ является соленоидальным при $x^2 + y^2 \neq 0$, и найти его векторный потенциал в этой области.

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

Поле соленоидально. Попробуем найти его векторный потенциал. Это нетривиально. Пусть $\vec{b} = \{P, Q, R\}$ — векторный потенциал поля $\vec{a}$. Тогда

$$\operatorname{rot}\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left\{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\} = \vec{a} = \left\{\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 0\right\},$$

т. е. получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2+y^2}, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Поскольку нам достаточно подобрать одно решение системы, попробуем положить $R = 0$. Тогда первым двум уравнениям удовлетворяют функции $Q = -\frac{xz}{x^2+y^2}$, $P = \frac{yz}{x^2+y^2}$, и последнее уравнение выполняется автоматически в силу того, что $\operatorname{div}\vec{a} = 0$.

Итак, искомый векторный потенциал $\boxed{\vec{b} = \left\{\frac{yz}{x^2+y^2}, -\frac{xz}{x^2+y^2}, 0\right\}.}$ Заметим, что он определяется неоднозначно.

ДЗ 2. МАВЗ гл. XIV № 24(а–з); гл. XV № 16, 18(а).
Читать теорию и отвечать на контрольные вопросы: гл. XIV § 4 ; гл. XV § 1–3.