Семинар 11

Несобственные интегралы

До сих пор мы рассматривали определённый интеграл (Римана) от функций, заданных на отрезке $[a, b]$. Сейчас мы сделаем обобщение этого понятия — введём интеграл по полупрямой $[a, +\infty)$.
Пусть функция $f(x)$ определена при $x \geq a$ и интегрируема на любом отрезке вида $[a, A]$, где $A > a$. Тогда
$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx$ — *несобственный* интеграл *первого рода.*
Если существует *конечный* предел, то интеграл *сходится,* иначе — *расходится.*
Аналогично определяется несобственный интеграл первого рода по полупрямой $(-\infty, a]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty} \int\limits_{B}^{a} f(x)\,dx.$$

Тогда по определению

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

По определению считают, что интеграл, стоящий в левой части, сходится тогда и только тогда, когда сходятся *оба* интеграла, стоящие в правой части.
Замечание. Условие $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ **не является НУС** несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Например, интеграл Френеля $\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$ сходится, как мы докажем на следующем семинаре.
Пусть функция $f(x)$ определена при $x \in (a, b]$ и интегрируема на любом отрезке вида $[a+\varepsilon, b] \subset (a, b]$, но $f(x)$ не ограничена в окрестности точки a (тогда будем говорить, что $x = a$ — *особая* точка функции $f(x)$). Заметим, что неограниченная функция $f(x)$ не интегрируема в обычном смысле (по Риману) на отрезке $[a, b]$. Введём
$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ — *несобственный* интеграл *второго рода.*
Если существует *конечный* предел, то интеграл *сходится,* иначе — *расходится.*
Например: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
Аналогично определяется несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ в случае, когда $x = b$ — особая точка функции $f(x)$: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\delta\to0+0} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$.
Например: $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$.
Если у функции $f(x)$ две особые точки: $x = a$ и $x = b$, то по определению
$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$ где $c \in (a, b)$ — промежуточная точка отрезка $[a, b]$.
По определению считают, что интеграл, стоящий в левой части, сходится тогда и только тогда, когда сходятся *оба* интеграла, стоящие в правой части.
Несобственный интеграл второго рода сводится к несобственному интегралу первого рода заменой переменной. Например, если $x = a$ — особая точка функции $f(x)$, то сделаем замену

$y = \dfrac{1}{x-a} \;\Rightarrow\; x = a + \dfrac{1}{y}, \qquad dx = -\dfrac{dy}{y^2},$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(a + \frac{1}{y}\right)\frac{dy}{y^2}$ — несобственный интеграл первого рода.

Поэтому мы будем в основном рассматривать несобственные интегралы первого рода.

Для несобственных интегралов справедливы формулы Ньютона–Лейбница, замены переменных и интегрирования по частям (в предельном смысле).

Пример 1. Исследовать сходимость интеграла: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

Это несобственный интеграл первого рода:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^p}.$$

Мы уже исследовали его сходимость в семинаре 6 (пример 6) — по интегральному признаку сходимости она эквивалентна сходимости обобщённого гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Ответ: сходится при $p > 1$, расходится при $p \le 1$.

Запомним этот важный результат.

Пример 2 (самостоятельно). Исследовать сходимость интеграла: $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$.

Особая точка подынтегральной функции: $x = a$. Это несобственный интеграл второго рода.

При $p \ne 1$ имеем:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon\to0+0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon\to0+0} \left.\frac{(x-a)^{-p+1}}{-p+1}\right|_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon\to0+0}\left[\frac{(b-a)^{-p+1}}{1-p} - \frac{\varepsilon^{-p+1}}{1-p}\right] =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{-p+1}}{1-p}, & p < 1, \\ \infty, & p > 1. \end{cases}$$

Отдельно рассмотрим $p = 1$:

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to0+0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to0+0} \ln(x-a)|_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon\to0+0} [\ln(b-a) - \ln\varepsilon] = \infty.$$

Ответ: сходится при $p < 1$, расходится при $p \ge 1$.

То же можно сказать и о сходимости интеграла $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$.

Запомним этот важный результат.

Пример 3 (Демидович № 2335, самостоятельно). Вычислить интеграл (если он сходится): $\int_0^1 \ln x\,dx$.

Здесь $x = 0$ — особая точка подынтегральной функции. Это несобственный интеграл второго рода:

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to0+0} \int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to0+0}\left(x\ln x|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{x}{x}\,dx \right) = \lim_{\varepsilon\to0+0} (-\varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon).$$

Для вычисления предела от $\varepsilon \ln \varepsilon$ применим правило Лопиталя, представив предел в виде неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \varepsilon \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\ln \varepsilon}{1/\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \varepsilon = 0.$$

Таким образом, $\int_0^1 \ln x \, dx = -1$.

Ответ: -1.

Признаки сравнения.

1. Пусть $|f(x)| \le F(x)$ при всех достаточно больших положительных x ($\forall x > x_0$). Тогда
$$\exists \int_a^{+\infty} F(x)\, dx \;\Rightarrow\; \exists \int_a^{+\infty} |f(x)| dx \;\Rightarrow\; \exists \int_a^{+\infty} f(x)\, dx.$$
А из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ и $\int_a^{+\infty} F(x)\, dx$.
Аналогично для несобственных интегралов второго рода.
2. Пусть $g(x) > 0$ при всех достаточно больших положительных x и
$f(x) = O^*\big(g(x)\big)$ при $x \to +\infty$
($f(x)$ и $g(x)$ — величины одного порядка при $x \to +\infty$),
т. е. $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \ne 0$ — конечный предел.
Тогда интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ сходятся или расходятся одновременно.
Аналогично для несобственных интегралов второго рода.
3. Пусть $f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right)$ при $x \to +\infty$.
Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится при $p > 1$, расходится при $p \le 1$.
4. Пусть $f(x) = O^*\left(\frac{1}{(x-a)^p}\right)$ при $x \to a + 0$.
Тогда $\int_a^{b} f(x)\, dx$ сходится при $p < 1$, расходится при $p \ge 1$.
Аналогично для $f(x) = O^*\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right)$ при $x \to b - 0$.

Пример 4 (Демидович № 2370 б). Исследовать на сходимость: $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$.

Здесь особенность при $x = 0$ и бесконечный предел интегрирования. Разобьём интеграл на сумму интегралов («разнесём особенности»):

$$I = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}}_{I_2}.$$

1) Рассмотрим I_1. Это несобственный интеграл второго рода, $x = 0$ — особая точка подынтегральной функции.
При $x \to 0 + 0$:
$$\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\to 1}} = O^*\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$
Тогда I_1 сходится по признаку сравнения 4.

2) Рассмотрим I_2. Это несобственный интеграл первого рода.
   При $x \to +\infty$:
   $$\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} = \frac{1}{x^{3/2} \cdot \underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}_{\to 1}} = O^*\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$
   Тогда I_2 сходится по признаку сравнения 3.

Тогда и $I = I_1 + I_2$ тоже сходится.
Ответ: сходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость: $I = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2}\, dx$.
Здесь две особенности: функция разрывна в нуле и предел интегрирования — бесконечный. Разобьём интеграл на сумму интегралов:
$$I = \underbrace{\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2}\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2}\, dx}_{I_2}.$$

1) В I_1 подынтегральная функция непрерывна на $(0,1]$, а при $x \to 0+0$ имеет конечный предел:
   $$\lim_{x\to 0+0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} = 1.$$
   Значит, её можно доопределить в точке $x = 0$ по непрерывности, и получится интеграл от непрерывной на $[0,1]$ функции, который существует в обычном смысле (по Риману).
2) Рассмотрим I_2. Это несобственный интеграл первого рода. Справедливо неравенство
   $$\left|\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2}\right| < \frac{\pi}{2x^2} \quad \forall x \geq 1,$$
   а поскольку интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то сходится и I_2 (по признаку сравнения 1).

Таким образом, и интеграл I как сумма двух существующих интегралов тоже существует (сходится).
Ответ: сходится.

Выпишем полезные **вспомогательные оценки** (также см. семинар 7, пример 1).
Мы знаем, что
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \ \ \forall a > 0.$$
Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists A = A(\varepsilon)$: $\forall x > A\ \ \left|\frac{\ln x}{x^a}\right| < \varepsilon$.
Также мы знаем, что
$$\lim_{x\to 0+0} x^a \ln x = 0 \ \ \forall a > 0.$$
Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$: $\forall x \in (0,\delta)\ \ |x^a \ln x| < \varepsilon$.
Таким образом, получаем оценки $\forall a > 0$, $\forall \varepsilon > 0$:

$\lvert\ln x\rvert < \frac{\varepsilon}{x^a}$ при всех достаточно малых положительных x,
$\ln x < \varepsilon x^a$ при всех достаточно больших положительных x.

Аналогичные оценки при необходимости можно сделать для e^x и для других функций.

Пример 6. Исследовать на сходимость: $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)} dx$.

Подынтегральная функция имеет особенности при $x = 0$, $x = 1$, и бесконечный предел интегрирования. Разобьём интеграл на сумму интегралов:

$$I = \underbrace{\int_0^{1/2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{1/2}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)} dx}_{I_2} + \underbrace{\int_1^{2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)} dx}_{I_3} + \underbrace{\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)} dx}_{I_4}.$$

Если *хотя бы один* из интегралов I_1, I_2, I_3, I_4 *расходится*, то *не существует* и интеграл I.

1) Рассмотрим $I_1 = \int_0^{1/2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)} dx$. Это несобственный интеграл второго рода.
   $x = 0$ — особая точка подынтегральной функции.
   Для любых $a > 0$, $\varepsilon > 0$ справедлива оценка:
   $$\left| \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)} \right| < \frac{\varepsilon}{x^{\frac{1}{2}+a}(1-x)}$$
   при всех достаточно малых положительных x (см. формулу в рамке выше).
   Кроме того, $\frac{\varepsilon}{x^{\frac{1}{2}+a}(1-x)} = O^*\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}+a}}\right)$ при $x \to 0+0$.
   Здесь число $a > 0$ мы можем брать какое угодно. Возьмём его настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{2} + a < 1$. Тогда будет сходиться мажорантный интеграл $\int_0^{1/2} \frac{\varepsilon}{x^{\frac{1}{2}+a}} dx$, и интеграл I_1 будет сходиться по признаку сравнения 1.
2) Рассмотрим $I_2 = \int_{1/2}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)} dx$.
   Подынтегральная функция разрывна при $x = 1$.
   Сделаем замену $y = 1 - x$. Тогда
   $$I_2 = \int_0^{1/2} \frac{\ln(1-y)}{\sqrt{1-y} \cdot y} dy.$$
   Теперь подынтегральная функция разрывна при $y = 0$.
   Исследуем поведение подынтегральной функции при $y \to 0+0$:
   $$\frac{\ln(1-y)}{\sqrt{1-y} \cdot y} = \frac{-y + o(y)}{\sqrt{1-y} \cdot y} = \frac{-1 + \frac{o(y)}{y}}{\sqrt{1-y}} \to -1.$$
   Подынтегральная функция имеет конечный предел, и, следовательно, ограничена в окрестности точки $y = 0$. Значит, I_2 на самом деле не является несобственным интегралом. Подынтегральную функцию можно доопределить в точке $x = 0$ по непрерывности и получится обычный (собственный) интеграл (по Риману) от непрерывной на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ функции, т. е. I_2 существует в обычном смысле.
3) Рассмотрим $I_3 = \int_1^{2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)} dx$. Здесь всё аналогично I_2. Интеграл I_3 тоже существует.
4) Рассмотрим $I_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)} dx$. Это несобственный интеграл первого рода.

Для любых $a > 0$, $\varepsilon > 0$ справедлива оценка:
$\left|\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)}\right| < \frac{\varepsilon x^a}{\sqrt{x}(x-1)}$ при всех достаточно больших положительных x (см. формулу в рамке на с. 4).

Далее, при $x \to +\infty$: $\frac{\varepsilon x^a}{\sqrt{x}(x-1)} = O^*\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}-a}}\right)$.

Возьмём число $a > 0$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $\frac{3}{2} - a > 1$.

Тогда из признаков сравнения 3 и 1 следует сходимость интеграла I_4.

Таким образом, интеграл $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ сходится.

Ответ: сходится.

ДЗ 11. Демидович 1997 г. (2003 г.) № 2337, 2338, 2346–2348, 2360, 2361, 2363–2365, 2369, 2372, 2374.