# Семинар 28

## Операционное исчисление

**О.** Будем называть функцию $f(t)$, определённую при $t \in \mathbb{R}$, *оригиналом,* если

1) $f(t) = 0$ при $t < 0$;
2) $f(t)$ — кусочно-непрерывная функция на любом конечном отрезке;
3) $\exists M > 0$, $\exists a \in \mathbb{R}$: $|f(t)| \le Me^{at}$ для всех $t \in \mathbb{R}$ (функция $f(t)$ имеет ограниченную степень роста).

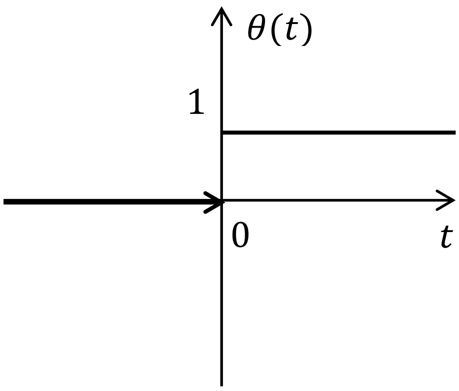
При этом точная нижняя грань $a_0$ всех таких чисел $a \in \mathbb{R}$, для которых $\exists M > 0$ такое, что выполняется неравенство $|f(t)| \le Me^{at}$ для всех $t \in \mathbb{R}$, называется *показателем роста* функции $f(t)$.

**О.** Если $f(t)$ — оригинал, то функция $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$, где $p \in \mathbb{C}$, называется *изображением* функции $f(t)$.

Этот интеграл также называется *преобразованием Лапласа.*

При $\operatorname{Re} p > a_0$, где $a_0$ — показатель роста функции $f(t)$, функция $F(p)$ существует и является аналитической.

Обозначение: $f(t) \risingdotseq F(p)$.




**Пример 1 (самостоятельно).** Найти изображение функции *Хевисайда:* $\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \ge 0. \end{cases}$

Заметим, что функция является оригиналом, и её показатель роста $a_0 = 0$.

$$\theta(t) \risingdotseq F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt = \left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}, \ \operatorname{Re} p > 0.$$

*Ответ:* $\theta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$, $\operatorname{Re} p > 0$.

## Свойства преобразования Лапласа

Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$.

**1°**. Свойство линейности: $\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

**2°.** Свойство подобия: $f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$, $\alpha > 0$.

**3°.** Изображение производной: $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0+0)$, если функция $f'(t)$ тоже является оригиналом.

Доказательство:

$$f'(t) \risingdotseq \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)\, dt = e^{-pt} f(t)\big|_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = -f(0+0) + pF(p).$$

Если функция $f''(t)$ также является оригиналом, то
$f''(t) \risingdotseq p[pF(p) - f(0+0)] - f'(0+0)$, и т. д.

**4°.** Изображение первообразной: $\int_0^t f(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.

**5°.** Теорема о дифференцировании изображения: $(-t)^n f(t) \risingdotseq F^{(n)}(p)$, $n \in \mathbb{N}$.

**6°.** Теорема смещения: $e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p - p_0),\ p_0 \in \mathbb{C}$.
**7°.** Изображение *свёртки:* $f(t) * g(t) \overset{\text{def}}{=} \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau \risingdotseq F(p)G(p)$.
**8°.** Теорема запаздывания: $f(t - t_0) \risingdotseq e^{-pt_0} F(p),\ t_0 \geq 0$.

**Пример 2 (самостоятельно).** Найти изображение функции $f(t) = e^{p_0 t}\theta(t)$, где $p_0 \in \mathbb{C}$.
Функция $f(t)$ является оригиналом, её показатель роста $a_0 = \operatorname{Re} p_0$.
Поскольку $\theta(t) \risingdotseq F(p) = \frac{1}{p}$ (пример 1), то из свойства 6° получаем
$$f(t) = e^{p_0 t}\theta(t) \risingdotseq F(p - p_0) = \frac{1}{p - p_0},\ \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0.$$
*Ответ:* $e^{p_0 t}\theta(t) \risingdotseq \frac{1}{p - p_0},\ \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$.

**Пример 3 (самостоятельно).** Найти изображение функции $f(t) = \sin \omega t \cdot \theta(t)$, где $\omega \in \mathbb{R}$.
Функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста $a_0 = 0$.
Поскольку $f(t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \cdot \theta(t)$ и $\theta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$, то по свойствам 1° и 6° получаем
$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},\ \operatorname{Re} p > 0.$$
*Ответ:* $\sin \omega t \cdot \theta(t) \risingdotseq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},\ \operatorname{Re} p > 0,\ \omega \in \mathbb{R}$.

**Пример 4 (дополнительный).** Найти изображение функции
$f(t) = \cos \omega t \cdot \theta(t)$, где $\omega \in \mathbb{R}$.
Функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста $a_0 = 0$.
Поскольку $f(t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \cdot \theta(t)$ и $\theta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$, то по свойствам 1° и 6° получаем
$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2},\ \operatorname{Re} p > 0.$$
*Ответ:* $\cos \omega t \cdot \theta(t) \risingdotseq \frac{p}{p^2 + \omega^2},\ \operatorname{Re} p > 0,\ \omega \in \mathbb{R}$.

**Пример 5 (самостоятельно).** Найти изображение функции $f(t) = t^n \cdot \theta(t)$, где $n \in \mathbb{N}$.
Функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста $a_0 = 0$.
По свойствам 1° и 5° получаем
$$f(t) = t^n \cdot \theta(t) = \frac{(-t)^n \cdot \theta(t)}{(-1)^n} \risingdotseq \frac{1}{(-1)^n}\left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} = \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{(-1)^n p^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(-1)^n p^{n+1}} =$$
$$= \frac{n!}{p^{n+1}},\ \operatorname{Re} p > 0.$$
*Ответ:* $t^n \cdot \theta(t) \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}},\ \operatorname{Re} p > 0,\ n \in \mathbb{N}$.
Можно также показать, что
$$t^\nu \cdot \theta(t) \risingdotseq \frac{\Gamma(\nu + 1)}{p^{\nu+1}},\ \operatorname{Re} p > 0, \nu > -1.$$

## Таблица основных изображений

$\theta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p}$, $\operatorname{Re} p > 0$.

$e^{at} \cdot \theta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p-a}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$.

$\sin \omega t \cdot \theta(t) \risingdotseq \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > 0, \omega \in \mathbb{R}$.

$\cos \omega t \cdot \theta(t) \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > 0, \omega \in \mathbb{R}$.

$t^n \cdot \theta(t) \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$, $\operatorname{Re} p > 0, n \in \mathbb{N}$.

$t^\nu \cdot \theta(t) \risingdotseq \dfrac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$, $\operatorname{Re} p > 0, \nu > -1$.

**Пример 6.** Решите задачу Коши

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = e^{-t}, \qquad t > 0; \\ y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Требуется найти дважды дифференцируемую неизвестную функцию $y(t)$ при $t \geq 0$.
Предположим, что $y(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$ — оригиналы. Тогда

$y(t) \risingdotseq Y(p)$.

$y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0+0) = pY(p)$.

$y''(t) \risingdotseq p\big(pY(p)\big) - y'(0+0) = p^2Y(p) - 1$.

$e^{-t} \cdot \theta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p+1}$.

(Мы продолжили функцию $e^{-t}$ на область $t < 0$ нулём, чтобы она стала оригиналом.)
Взяв преобразование Лапласа от левой и правой части дифференциального уравнения, получим

$$p^2Y - 1 + 2pY - 3Y = \frac{1}{p+1}.$$

После преобразования Лапласа дифференциальное уравнение перешло в алгебраическое. Из этого линейного алгебраического уравнения находится неизвестная функция $Y(p)$:

$$(p^2+2p-3)Y = \frac{1}{p+1} + 1 = \frac{p+2}{p+1}.$$

$$Y(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p^2+2p-3)}.$$

Теперь нужно восстановить по изображению оригинал. Для этого воспользуемся таблицей изображений. Но сначала нужно свести $Y(p)$ к комбинации табличных изображений. Для этого разложим $Y(p)$ на простейшие дроби:

$$Y(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-1)(p+3)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+3}.$$

Неизвестные коэффициенты $A$, $B$, $C$ проще всего найти методом вычёркивания. Умножив левую и правую часть тождества

$$\frac{p+2}{(p+1)(p-1)(p+3)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+3}$$

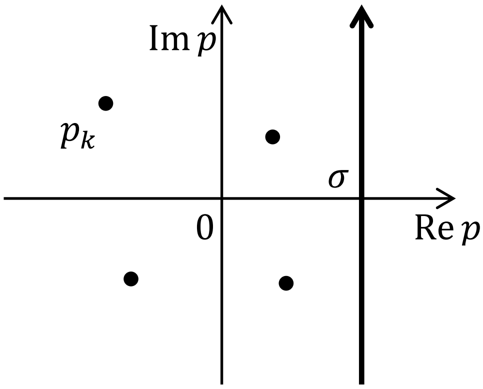
на $p+1$

$$\frac{p+2}{(p-1)(p+3)} = A + (p+1)\left(\frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+3}\right)$$
и положив $p = -1$, получим $-\frac{1}{4} = A$. Аналогично определяются $B = \frac{3}{8}$ и $C = -\frac{1}{8}$. Тогда
$$Y(p) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{p-1} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p+3}.$$
Из таблицы изображений видно, что такому изображению будет соответствовать оригинал
$$y(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}\cdot\theta(t) + \frac{3}{8}e^{t}\cdot\theta(t) - \frac{1}{8}e^{-3t}\cdot\theta(t).$$
Тогда
$$y(t) = -\frac{e^{-t}}{4} + \frac{3}{8}e^{t} - \frac{e^{-3t}}{8}, \qquad t \geq 0.$$
*Ответ:* $y(t) = -\frac{e^{-t}}{4} + \frac{3}{8}e^{t} - \frac{e^{-3t}}{8},\ t \geq 0.$

**Пример 7 (дополнительный).** Решить интегральное уравнение
$$f(t) = \cos t + \int\limits_0^t \sin(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau\,, \qquad t > 0.$$
Предполагая, что неизвестная функция $f(t)$ является оригиналом и $f(t) \risingdotseq F(p)$, взяв преобразование Лапласа от левой и правой части уравнения, по свойствам 1° и 7°, используя таблицу изображений, получим
$$F(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{F(p)}{p^2+1},$$
откуда $F(p) = \frac{1}{p}$, следовательно, $f(t) = \theta(t)$. При $t > 0$: $f(t) = 1$.
*Ответ:* $f(t) = 1$, $t > 0$.

Итак, преимущество операционного исчисления состоит в том, что оно позволяет сводить некоторые дифференциальные и интегральные уравнения (а также интегро-дифференциальные) к алгебраическим. Но тогда главная проблема состоит в том, чтобы по изображению восстановить оригинал. Если с помощью таблицы изображений и свойств преобразования Лапласа это сделать не удаётся, то надо использовать общую формулу для обратного преобразования Лапласа.

## Обратное преобразование Лапласа (формула Меллина)




Если для изображения $F(p)$ существует оригинал $f(t)$, то он удовлетворяет равенству
$$\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp \overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\cdot\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{\sigma-iA}^{\sigma+iA} e^{pt}F(p)\,dp,$$

где интеграл берётся (в смысле главного значения) по прямой $\operatorname{Re} p = \sigma$, где $\sigma \in \mathbb{R}$ — такое, что при $\operatorname{Re} p \geq \sigma$ функция $F(p)$ является аналитической (не имеет особых точек, т. е. все конечные особые точки $p_k$ расположены *слева* от прямой $\operatorname{Re} p = \sigma$). Тогда от выбора числа $\sigma$ интеграл не зависит.

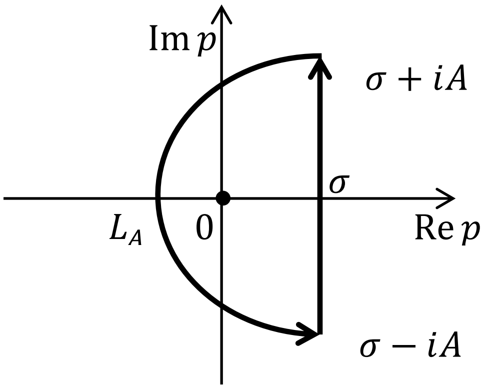
В точках непрерывности $f(t)$ имеем $f(t) = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp$.

**Пример 8.** Найти по формуле Меллина оригинал для функции $F(p) = \frac{1}{p}$.

Рассмотрим интеграл в формуле Меллина:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p}\,dp = \frac{1}{2\pi i}\cdot\lim_{A\to+\infty}\int_{\sigma-iA}^{\sigma+iA} \frac{e^{pt}}{p}\,dp.$$

Подынтегральная функция $\frac{e^{pt}}{p}$ имеет особую точку $p = 0$ (полюс первого порядка), которая должна остаться слева от контура интегрирования, поэтому здесь можно взять любое $\sigma > 0$.




Рассмотрим интеграл по конечному отрезку $\int_{\sigma-iA}^{\sigma+iA} \frac{e^{pt}}{p}\,dp$ и замкнём контур интегрирования левой полуокружностью $L_A$. При достаточно больших $A$ особая точка $p = 0$ попадает внутрь контура. По основной теореме теории вычетов

$$\int_{\sigma-iA}^{\sigma+iA} \frac{e^{pt}}{p}\,dp + \int_{L_A} \frac{e^{pt}}{p}\,dp = 2\pi i\cdot \operatorname{res}\left[\frac{e^{pt}}{p}, 0\right]. \qquad (*)$$

Вычислим вычет в особой точке:

$$\operatorname{res}\left[\frac{e^{pt}}{p}, 0\right] = \left.\frac{e^{pt}}{p'}\right|_{p=0} = \left.\frac{e^{pt}}{1}\right|_{p=0} = 1.$$

Для окружности $L_A$ справедлива лемма Жордана (один из её вариантов — для левой полуокружности).

**Лемма Жордана для левой полуокружности.** Пусть $f(z)$ — однозначная аналитическая функция при $\begin{cases} |z| > R, \\ \operatorname{Re} z \leq \sigma, \end{cases}$ и $f(z) = O^*\left(\frac{1}{z^\delta}\right)$ при $z \to \infty$, где $\delta > 0$. Тогда

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{L_A} e^{az}f(z)\,dz = 0,$$

где $L_A$ — левая полуокружность, изображённая на рисунке, и $a > 0$.

*Замечание.* Для правой полуокружности надо потребовать $a < 0$.

Тогда по лемме Жордана

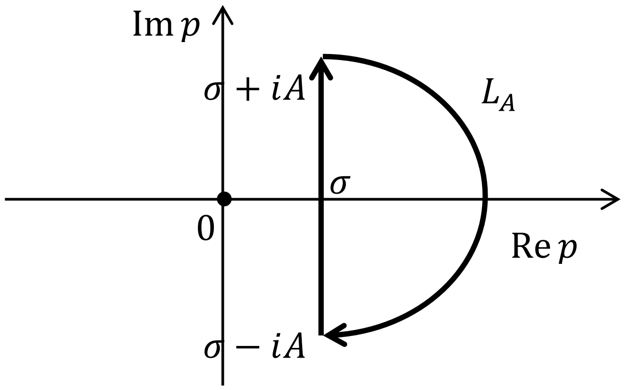
$$\lim_{A\to+\infty}\int_{L_A} \frac{e^{pt}}{p}\,dp = 0, \qquad t > 0,$$

и, переходя в равенстве (*) к пределу при $A \to +\infty$, получаем

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p}\,dp = 2\pi i.$$

Откуда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p}\,dp = 1, \qquad t > 0.$$




При $t < 0$ для применения леммы Жордана отрезок интегрирования надо замыкать правой полуокружностью, тогда внутри контура особых точек не будет, и мы получим
$f(t) = 0,\, t < 0.$
Окончательно имеем $f(t) = \theta(t)$. (В точке разрыва первого рода $t = 0$ функция однозначно не определяется; мы положили её равной 1 в этой точке.)
*Ответ:* $f(t) = \theta(t)$.

**ДЗ 28.**

**1.** Найти изображения функций:
 а) $\cos^3 t \cdot \theta(t)$;
 б) $\cos mt \cdot \cos nt \cdot \theta(t)$, где $m, n \in \mathbb{R}$;
 в) $(t+1)\sin 2t \cdot \theta(t)$;
 г) $\theta(t) \cdot \int_0^t \cos^2 \omega\tau\, d\tau$, где $\omega \in \mathbb{R}$;
 д) $e^{\alpha t}\cos^2 \beta t \cdot \theta(t)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
 е) $\theta(t) \cdot \int_0^t e^{t-\tau}\sin\tau\, d\tau$.

**2.** Найти оригиналы функций:
 а) $\frac{1}{p^2(p^2+1)}$ — по формуле Меллина;
 б) $\frac{e^{-p}}{p^2} + 2\frac{e^{-2p}}{p^3} + 6\frac{e^{-3p}}{p^4}$ — с помощью таблицы изображений и свойств преобразования Лапласа.

**3.** Используя преобразование Лапласа, решить задачи Коши:
 а) $\begin{cases} y'' + 3y' = e^t,\ t > 0; \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} y'' + y = 2\sin t\,,\ t > 0; \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$