Семинар 18

Вычеты

Пусть z_0 — ИОТ однозначной функции $f(z)$, причём $z_0 \neq \infty$. Тогда в некоторой проколотой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ раскладывается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad 0 < |z - z_0| < R.$$

О. *Вычетом* функции $f(z)$ в ИОТ $z_0 \neq \infty$ называется коэффициент ряда Лорана a_{-1}:
$\operatorname{res}[f(z), z_0] = a_{-1}$ (от «residuum» — «остаток», лат.).
Сразу можно заметить, что если точка $z_0 \neq \infty$ — УОТ, то вычет в ней равен нулю, поскольку ряд Лорана не содержит членов с отрицательными степенями $(z - z_0)$.
Если же бесконечно удалённая точка $z_0 = \infty$ — ИОТ однозначной функции $f(z)$, то в некоторой окрестности точки $z_0 = \infty$ функция $f(z)$ раскладывается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \qquad |z| > R.$$

О. *Вычетом* функции $f(z)$ в ИОТ $z_0 = \infty$ называется число $-a_{-1}$, где a_{-1} — соответствующий коэффициент ряда Лорана:
$\operatorname{res}[f(z), \infty] = -a_{-1}$.
Т. Пусть однозначная функция $f(z)$ является аналитической на всей комплексной плоскости, кроме конечного числа ИОТ: $z_1, z_2, \ldots, z_N, \infty$. Тогда

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z), z_k] + \operatorname{res}[f(z), \infty] = 0.}$$

О. Однозначная аналитическая функция $\chi(z)$ имеет в точке z_0 нуль n-го порядка, если $\chi(z_0) = 0, \chi'(z_0) = 0, \ldots, \chi^{(n-1)}(z_0) = 0$, но $\chi^{(n)}(z_0) \neq 0$.
Если однозначная аналитическая функция $\chi(z)$ имеет в точке z_0 нуль n-го порядка, то в окрестности точки z_0 функция $\chi(z)$ представима в виде $\chi(z) = (z - z_0)^n \psi(z)$, где $\psi(z)$ — однозначная аналитическая функция и $\psi(z_0) \neq 0$.

Т. (о вычете в полюсе первого порядка). Пусть $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\chi(z)}$, $z_0 \neq \infty$, причём

1) $\varphi(z)$ — однозначная аналитическая функция в окрестности точки z_0, причём $\varphi(z_0) \neq 0$;
2) $\chi(z)$ — однозначная аналитическая функция в окрестности точки z_0, которая имеет в точке z_0 нуль первого порядка.

Тогда точка z_0 — полюс первого порядка функции $f(z)$ и

$$\boxed{\operatorname{res}[f(z), z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\chi'(z_0)}.}$$

Т. (о вычете в полюсе *m*-го порядка). Пусть $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\chi(z)}$, $z_0 \neq \infty$, причём

1) $\varphi(z)$ — однозначная аналитическая функция в окрестности точки z_0, причём $\varphi(z_0) \neq 0$;
2) $\chi(z)$ — однозначная аналитическая функция в окрестности точки z_0, которая имеет в точке z_0 нуль m-го порядка.

Тогда точка z_0 — полюс m-го порядка функции $f(z)$ и

$$\boxed{\operatorname{res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)].}$$

Заметим, что эта формула верна и для $m = 1$, т. е. она является обобщением формулы для полюса первого порядка.

А именно, для полюса первого порядка получаем:

$$\boxed{\operatorname{res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} [(z-z_0) f(z)],}$$

откуда по правилу Лопиталя будет следовать выписанная выше формула

$$\operatorname{res}[f(z), z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\chi'(z_0)}.$$

Пример 1 (самостоятельно). Найти вычеты во всех ИОТ функции $f(z) = \frac{1}{z-z^3}$.

$$f(z) = \frac{1}{z-z^3} = \frac{1}{z(1-z^2)} = \frac{1}{z(1-z)(1+z)}.$$

1) $z_1 = 0$ — полюс первого порядка.
   $$\operatorname{res}[f(z), 0] = \frac{1}{(z-z^3)'}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{1-3z^2}\bigg|_{z=0} = 1.$$
2) $z_2 = 1$ — полюс первого порядка.
   $$\operatorname{res}[f(z), 1] = \frac{1}{(z-z^3)'}\bigg|_{z=1} = \frac{1}{1-3z^2}\bigg|_{z=1} = -\frac{1}{2}.$$
3) $z_3 = -1$ — полюс первого порядка.
   $$\operatorname{res}[f(z), -1] = \frac{1}{(z-z^3)'}\bigg|_{z=-1} = \frac{1}{1-3z^2}\bigg|_{z=-1} = -\frac{1}{2}.$$
4) $z_0 = \infty$.
   $$\operatorname{res}[f(z), \infty] = 0 - \operatorname{res}[f(z), 0] - \operatorname{res}[f(z), 1] - \operatorname{res}[f(z), -1] = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Ответ: $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z-z^3}, 0\right] = 1$, $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z-z^3}, \pm 1\right] = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z-z^3}, \infty\right] = 0$.

Пример 2 (самостоятельно). Найти вычеты во всех ИОТ функции $f(z) = \frac{z}{\sin z}$.

ИОТ: $z_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Точка $z = \infty$ является НОТ.

1) $z_0 = 0$ — УОТ для $f(z)$, т. к. $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} = 1$. Поэтому $\operatorname{res}[f(z), 0] = 0$.
2) $z_k = \pi k$, $k \neq 0$. Числитель дроби $f(z) = \frac{z}{\sin z}$ не обращается в нуль при $z = \pi k$, а знаменатель имеет нуль первого порядка, т. к. $\sin \pi k = 0$,
   $(\sin z)'|_{z=\pi k} = \cos \pi k = (-1)^k \neq 0$.
   Поэтому
   $$\operatorname{res}[f(z), \pi k] = \frac{z}{(\sin z)'}\bigg|_{z=\pi k} = (-1)^k \pi k.$$

Ответ: $\operatorname{res}\left[\frac{z}{\sin z}, \pi k\right] = (-1)^k \pi k$.

Пример 3 (самостоятельно). Найти вычеты во всех ИОТ функции $f(z) = \frac{\cos\sqrt{z}}{z^3}$.

ОТ: $z_1 = 0$, $z_0 = \infty$.

Функция $\sqrt{z}$ является двузначной, причём две её ветви отличаются друг от друга только знаком: если $z = \rho e^{i\varphi}$, то

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi k\right)} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \\ \sqrt{\rho} e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)} = -\sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi}{2}}. \end{array}\right.$$

Но поскольку косинус — функция чётная: $\cos(-z) \equiv \cos z$, то $\cos\sqrt{z}$ — функция однозначная, поэтому ОТ $z_1 = 0$ и $z_0 = \infty$ для функции $f(z)$ — не точки ветвления, а ИОТ.
При $|z| > 0$ справедливо разложение:

$$f(z) = \frac{1 - \frac{\left(\sqrt{z}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\sqrt{z}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\sqrt{z}\right)^6}{6!} + \cdots}{z^3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{24z} - \frac{1}{720} + \cdots$$

Тогда, по определению

$$\operatorname{res}[f(z), 0] = \frac{1}{24} \;\Rightarrow\; \operatorname{res}[f(z), \infty] = -\frac{1}{24}.$$

Ответ: $\operatorname{res}\left[\frac{\cos\sqrt{z}}{z^3}, 0\right] = \frac{1}{24}$, $\operatorname{res}\left[\frac{\cos\sqrt{z}}{z^3}, \infty\right] = -\frac{1}{24}$.

Пример 4 (самостоятельно). Найти вычеты во всех ИОТ функции $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2} = \frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2}.$$

1) $z_1 = i$ — полюс второго порядка.

$$\operatorname{res}[f(z), i] = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z+i)^2}\right) = \lim_{z\to i}\frac{2z\cdot(z+i)^2 - z^2\cdot 2(z+i)}{(z+i)^4} = \frac{-8i+4i}{16} =$$
$$= -\frac{i}{4}.$$

2) $z_2 = -i$ — полюс второго порядка.

$$\operatorname{res}[f(z), -i] = \frac{1}{1!}\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z-i)^2}\right) = \lim_{z\to -i}\frac{2z\cdot(z-i)^2 - z^2\cdot 2(z-i)}{(z-i)^4} = \frac{8i-4i}{16} = \frac{i}{4}.$$

3) $z_0 = \infty$.

$$\operatorname{res}[f(z), \infty] = -\operatorname{res}[f(z), i] - \operatorname{res}[f(z), -i] = \frac{i}{4} - \frac{i}{4} = 0.$$

Ответ: $\operatorname{res}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2}, \pm i\right] = \mp\frac{i}{4}$, $\operatorname{res}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2}, \infty\right] = 0$.

Пример 5 (самостоятельно). Найти вычеты во всех ИОТ функции $f(z) = \frac{\exp z}{z^2(z^2+9)}$.

$$f(z) = \frac{\exp z}{z^2(z^2+9)} = \frac{\exp z}{z^2(z+3i)(z-3i)}.$$

1) $z_1 = 3i$ — полюс первого порядка (т. к. $\exp(3i) \neq 0$).

$$\operatorname{res}[f(z), 3i] = \lim_{z\to z_1}[(z-z_1)f(z)] = \lim_{z\to 3i}\left[\frac{\exp z}{z^2(z+3i)}\right] = \frac{\exp(3i)}{-9\cdot 6i} = \frac{i\exp(3i)}{54}.$$

2) $z_2 = -3i$ — полюс первого порядка (т. к. $\exp(-3i) \neq 0$).

$$\operatorname{res}[f(z), -3i] = \lim_{z\to z_2}[(z-z_2)f(z)] = \lim_{z\to -3i}\left[\frac{\exp z}{z^2(z-3i)}\right] = \frac{\exp(-3i)}{9\cdot 6i} = -\frac{i\exp(-3i)}{54}.$$

3) $z_3 = 0$ — полюс второго порядка (т. к. $\exp 0 \neq 0$).

$$\operatorname{res}[f(z),0]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{\exp z}{z^2+9}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{\exp z\cdot(z^2+9)-\exp z\cdot 2z}{(z^2+9)^2}=\frac{1}{9}.$$

4) $z_0=\infty$.

$$\operatorname{res}[f(z),\infty]=-\operatorname{res}[f(z),3i]-\operatorname{res}[f(z),-3i]-\operatorname{res}[f(z),0]=$$
$$=-\frac{i\exp(3i)}{54}+\frac{i\exp(-3i)}{54}-\frac{1}{9}=\frac{e^{3i}-e^{-3i}}{2i\cdot 27}-\frac{1}{9}=\frac{\sin 3}{27}-\frac{1}{9}.$$

Ответ: $\operatorname{res}\left[\frac{\exp z}{z^2(z^2+9)},\pm 3i\right]=\pm\frac{i\exp(\pm 3i)}{54}$, $\operatorname{res}\left[\frac{\exp z}{z^2(z^2+9)},0\right]=\frac{1}{9}$, $\operatorname{res}\left[\frac{\exp z}{z^2(z^2+9)},\infty\right]=\frac{\sin 3}{27}-\frac{1}{9}$.

Пример 6 (самостоятельно). Найти $\operatorname{res}\left[\frac{\sin z}{(z-b)^5},b\right]$.

1) Пусть $\sin b\neq 0$, т. е. $b\neq\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$. Тогда точка $z_0=b$ — полюс пятого порядка.
$$\operatorname{res}\left[\frac{\sin z}{(z-b)^5},b\right]=\frac{1}{4!}\lim_{z\to b}\frac{d^4}{dz^4}(\sin z)=\frac{\sin b}{24}.$$
2) Теперь пусть $\sin b=0$, т. е. $b=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Сделаем замену: $z-\pi k=t$. Тогда
$$f(z)=\frac{\sin z}{(z-b)^5}=\frac{\sin(t+\pi k)}{t^5}=\frac{\sin t\cos\pi k+\cos t\sin\pi k}{t^5}=(-1)^k\frac{\sin t}{t^5}.$$
Разложение в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $z=b=\pi k$, т. е. при $|t|>0$:
$$f(z)=(-1)^k\frac{\sin t}{t^5}=(-1)^k\frac{t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\cdots}{t^5}=(-1)^k\left(\frac{1}{t^4}-\frac{1}{6t^2}+\frac{1}{120}-\cdots\right)=$$
$$=(-1)^k\left(\frac{1}{(z-\pi k)^4}-\frac{1}{6(z-\pi k)^2}+\frac{1}{120}-\cdots\right),\qquad |z-\pi k|>0.$$
Отсюда $\operatorname{res}[f(z),b]=a_{-1}=0$.

Ответ: $\operatorname{res}[f(z),b]=\frac{\sin b}{24}$.

ДЗ 18. Волк № 4.79, 4.81, 4.83, 4.84, 4.86, 4.96.