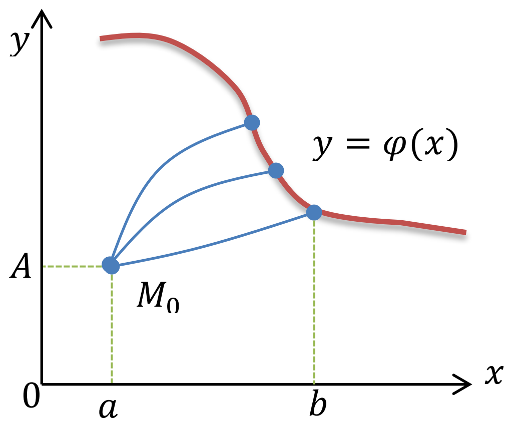
Семинар 18

Вариационная задача с подвижной границей



Будем искать экстремум функционала

$$V[y] = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$$

на кривых $y = y(x)$, у которых один или оба конца не закреплены, а могут перемещаться по заданным линиям. Например, пусть левый конец закреплён (в ке $M_0(a;\ A)$), а правый скользит вдоль линии $y = \varphi(x)$. Тогда имеем граничные условия:

$y(a) = A, \qquad y(b) = \varphi(b).$

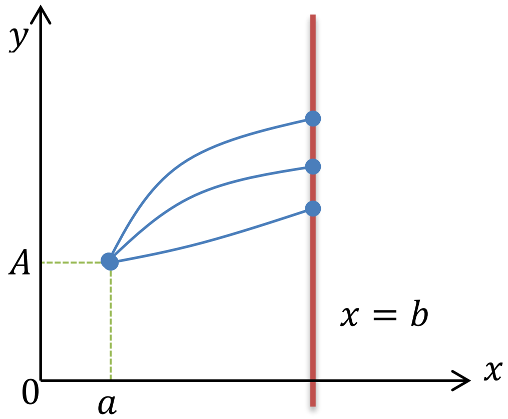
Здесь абсцисса b правого конца заранее неизвестна (это подвижный конец). Требуется найти такое b и такую функцию $y(x)$, чтобы функционал $V[y]$ принимал наибольшее или наименьшее значение.

НУЭ в задаче с подвижной границей:

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0, & \text{(уравнение Эйлера)} \\ y(a) = A, & \\ y(b) = \varphi(b), & \\ \left(F + (\varphi' - y')F_{y'}\right)\Big|_{x=b} = 0. & \text{(условие \textit{трансверсальности})} \end{cases}$$

ОР уравнения Эйлера, вообще говоря, содержит две произвольные константы, которые вместе с неизвестным b определяются из трёх дополнительных условий.

Замечание 1. Если подвижен левый конец, а правый — закреплён, то условие трансверсальности ставится на левом конце. Если подвижны оба конца, то условие трансверсальности ставится на обоих концах.



Замечание 2. Если конец скользит по вертикальной прямой $x = b$, т.е. координата x правого конца кривой известна: $x = b$, а $y(b)$ — произвольная (*свободный* конец), то $\varphi' = \infty$, и условие трансверсальности принимает вид: $F_{y'}\big|_{x=b} = 0$.

ДУЭ мы рассматривать не будем.

Пример 1. Найти минимальное расстояние от точки $M_0(a;\ A)$ до кривой $y = \varphi(x)$.

Эту задачу, конечно, проще было бы решать без использования функционалов (минимизируя обычную функцию — расстояние от точки до кривой), но мы решим её методами вариационного исчисления, чтобы проиллюстрировать геометрический смысл задачи с подвижной границей и условия трансверсальности.

Рассмотрим функционал $V[y]$, представляющий собой длину кривой $y = y(x)$, $x \in [a; b]$:

$$V[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

Тогда искомое расстояние — это минимальная длина кривой, соединяющей точку M_0 с кривой $y = \varphi(x)$. Значит, требуется найти экстремум функционала $V[y]$ при условии, что один конец закреплён, а другой скользит вдоль кривой $y = \varphi(x)$:

$$y(a) = A, \qquad y(b) = \varphi(b).$$

Поскольку подынтегральная функция $F(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$ зависит только от y' и не является линейной, то ОР уравнения Эйлера имеет вид (см. семинар 12):

$$y = C_1 x + C_2.$$

Это прямые, как и следовало ожидать. Условие трансверсальности принимает вид:

$$\left(F + (\varphi' - y')F_{y'}\right)\Big|_{x=b} = \left(\sqrt{1 + (y')^2} + (\varphi' - y')\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}\right)\Bigg|_{x=b} =$$

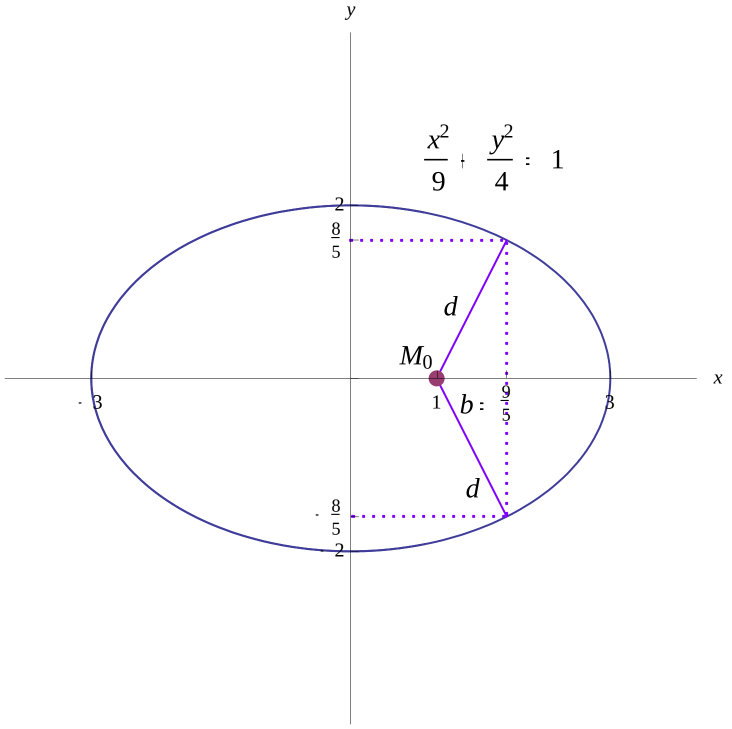
$$= \left(\frac{1 + (y')^2 + \varphi' y' - (y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}}\right)\Bigg|_{x=b} = 0,$$

т.е.

$$(\varphi' y')|_{x=b} = -1.$$

Это условие ортогональности кривых $y(x)$ и $\varphi(x)$ в точке $x = b$. Таким образом, минимальное расстояние достигается на прямой $y = C_1 x + C_2$, которая пересекает кривую $y = \varphi(x)$ под прямым углом (к её касательной). Неизвестные величины C_1, C_2, b определяются из дополнительных условий:

$$\begin{cases} y(a) = A, \\ y(b) = \varphi(b), \\ \varphi'(b) y'(b) = -1. \end{cases} \qquad (1)$$



Например, найдём минимальное расстояние от точки $M_0(1; 0)$ до эллипса

$$4x^2 + 9y^2 = 36.$$

Пусть на эллипсе $y = \varphi(x)$, тогда функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$4x^2 + 9\varphi^2(x) = 36. \qquad (2)$$

Продифференцировав по x, получим выражение, определяющее $\varphi'(x)$ на эллипсе:

$$4x + 9\varphi(x)\varphi'(x) = 0. \qquad (3)$$

Запишем для функции $y = C_1 x + C_2$ систему (1) с уравнениями (2), (3), определяющими φ и φ' в точке $x = b$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 b + C_2 = \varphi(b), \\ \varphi'(b) C_1 = -1, \\ 4b^2 + 9\varphi^2(b) = 36, \\ 4b + 9\varphi(b)\varphi'(b) = 0. \end{cases}$$

Из первых трёх уравнений выразим $C_2 = -C_1$, $\varphi(b) = C_1(b-1)$, $\varphi'(b) = -\frac{1}{C_1}$ (при $C_1 = 0$ имеем $C_2 = 0$, и прямая, соединяющая точку M_0 с эллипсом, горизонтальна; она пересекает эллипс в левой и правой вершинах (при этом $\varphi'(b) = \infty$), что соответствует локальным максимумам расстояния, а мы ищем минимум) и подставим в последнее уравнение:
$4b - 9(b-1) = 0.$
Отсюда $b = \frac{9}{5}$. Из уравнения эллипса $4b^2 + 9\varphi^2(b) = 36$ находим:

$$\varphi(b) = \pm 2\sqrt{1 - \frac{b^2}{9}} = \pm 2\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm\frac{8}{5}.$$

Значит, прямая $y = y(x)$ пересекает эллипс в точке $\left(\frac{9}{5}; -\frac{8}{5}\right)$ или в точке $\left(\frac{9}{5}; \frac{8}{5}\right)$. Тогда минимальное расстояние от точки $M_0(1;0)$ до эллипса равно

$$d = \sqrt{(b-1)^2 + (\varphi(b) - 0)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{64}{25}} = \sqrt{\frac{80}{25}} = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $d = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Условный экстремум функционала
Изопериметрическая задача

Требуется найти экстремум функционала:

$$V[y] = \int_a^b F(x, y, y')\,dx,$$

с закреплёнными концами:
$y(a) = A, \qquad y(b) = B,$
и дополнительным условием связи (изопериметрическим условием):

$$J[y] = \int_a^b G(x, y, y')\,dx = l = \text{const}.$$

Задача на условный экстремум состоит в том, что среди всех функций $y(x)$, удовлетворяющих КУ $y(a) = A$, $y(b) = B$ и условию связи $J[y] = l$, нужно найти такие, на которых значение функционала $V[y]$ будет наибольшим или наименьшим.
Т. (НУЭ). Если на функции $y(x) \in C^{(2)}[a;\, b]$ достигается условный экстремум, причём $F, G \in C^{(2)}$, то существует $\lambda = \text{const}$ такая, что функция $y(x)$ является экстремалью функционала $L[y] = V[y] + \lambda J[y]$ (т.е. функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера для функционала $L[y]$).
Таким образом, изопериметрическая задача сводится к задаче на безусловный экстремум для вспомогательного функционала $L[y]$.
ДУЭ мы рассматривать не будем.

Пример 2. *Задача Дидоны.* Среди кривых $y = y(x)$ с концами в точках $(-1;\ 0)$ и $(1;\ 0)$, имеющих заданную длину π, найти такую, которая ограничивает вместе с осью Ox область максимальной площади.
По легенде, основательница города Карфагена Дидона купила у местного царя участок земли, «который можно охватить одной воловьей шкурой», разрезала эту шкуру на тонкие полоски и охватила большой участок земли у моря, на котором был построен город Карфаген.
В нашей задаче уже имеется верёвка длины π, концы которой закреплены в двух точках $(-1;\ 0)$ и $(1;\ 0)$ на берегу моря. Какую форму нужно придать верёвке, чтобы она ограничивала участок максимальной площади?
Мы ищем максимум функционала, который равен площади под графиком кривой $y = y(x)$ (для определённости будем считать, что кривая расположена в верхней полуплоскости, т.е. нижняя полуплоскость — это море):

$$V[y] = \int_{-1}^{1} y\,dx,$$

с закреплёнными концами:

$$y(-1) = 0, \qquad y(1) = 0,$$

и дополнительным изопериметрическим условием:

$$J[y] = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \pi.$$

Составим вспомогательный функционал:

$$L[y] = V[y] + \lambda J[y] = \int_{-1}^{1} y\,dx + \lambda \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \left(y + \lambda\sqrt{1 + (y')^2}\right) dx.$$

Нам надо найти его экстремали, т.е. решить уравнение Эйлера. Подынтегральная функция имеет вид:
$H(y, y') = y + \lambda\sqrt{1 + (y')^2}$ — не зависит явным образом от x.
Уравнение Эйлера в этом случае можно один раз проинтегрировать и представить в виде (см. семинар 12):

$$H - y'H_{y'} = C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.$$

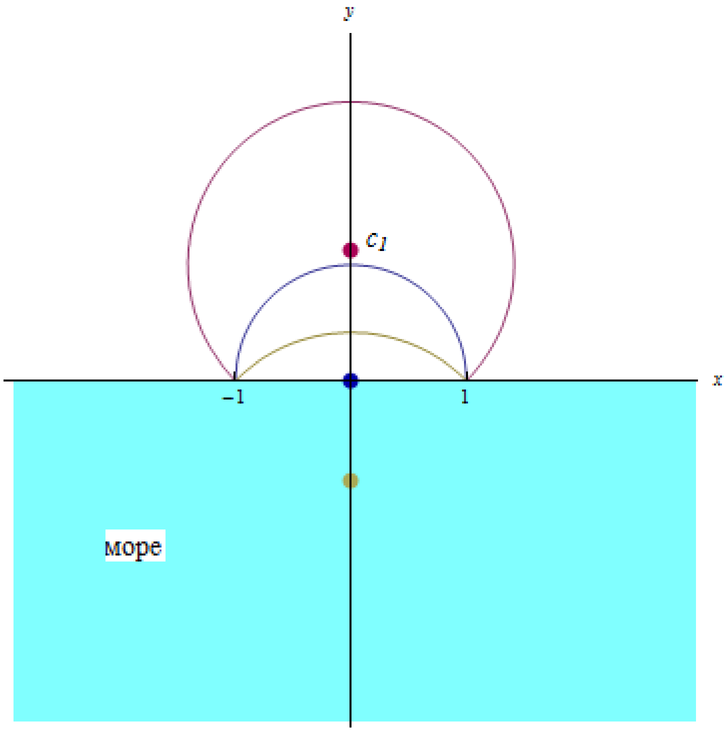
Тогда

$$y + \lambda\sqrt{1 + (y')^2} - \frac{\lambda (y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C_1.$$

$$y + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C_1.$$

$$y' = \pm\sqrt{\left(\frac{\lambda}{C_1 - y}\right)^2 - 1} = \pm\sqrt{\left(\frac{\lambda}{C_1 - y}\right)^2 - 1} = \pm\frac{\sqrt{\lambda^2 - (y - C_1)^2}}{y - C_1}.$$

(При делении теряется решение $y = \mathrm{const}$; но в этом случае из КУ получим $y = 0$, и длина кривой будет равна 2, а площадь под графиком — 0, поэтому такое решение нас не интересует.)
Разделим переменные:

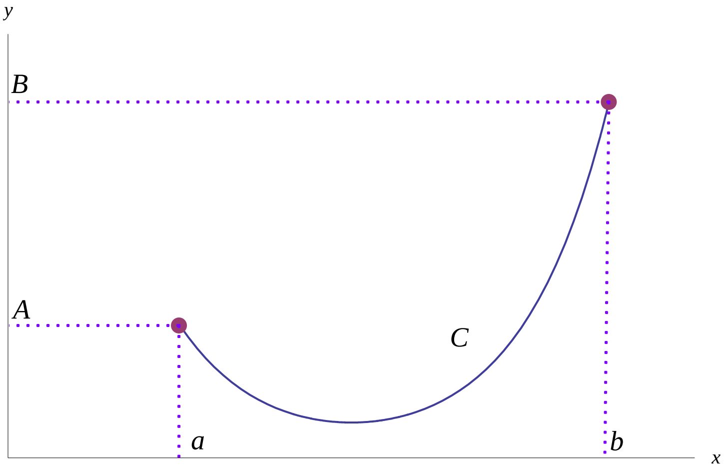
$$\frac{(y - C_1)dy}{\sqrt{\lambda^2 - (y - C_1)^2}} = \pm dx.$$
$$\sqrt{\lambda^2 - (y - C_1)^2} = \mp(x - C_2), \qquad C_2 \in \mathbb{R}.$$
$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2.$$
Это уравнение окружности. Таким образом, экстремалью является дуга окружности. Из краевых условий $y(-1) = 0$, $y(1) = 0$ получим:
$$\begin{cases}(1 + C_2)^2 + C_1^2 = \lambda^2,\\(1 - C_2)^2 + C_1^2 = \lambda^2.\end{cases}$$


Вычтя одно уравнение из другого, получим: $(1 + C_2)^2 - (1 - C_2)^2 = 4C_2 = 0$.
Тогда любое из уравнений даёт $\lambda^2 = 1 + C_1^2$.
Получаем уравнение кривой, соединяющей точки $(-1; 0)$ и $(1; 0)$:
$x^2 + (y - C_1)^2 = 1 + C_1^2$.
Константа C_1 определяется из условия равенства длины кривой π. Очевидно, при $C_1 = 0$ получается полуокружность длины π. Таким образом, функционал $V[y]$ принимает максимальное значение на дуге $y = \sqrt{1 - x^2}$. Если увеличивать или уменьшать длину кривой, то получим другие дуги окружностей, проходящих через точки $(-1; 0)$ и $(1; 0)$ (с центром в точке $(0; C_1)$ и радиусом $\sqrt{1 + C_1^2}$, см. рисунок).
Ответ: $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Замечание. Если концы кривой не закреплены, а могут двигаться вдоль оси Ox, то на них ставятся условия трансверсальности. С учётом их получим, что при фиксированной длине кривой максимальная площадь под ней будет достигаться в случае полуокружности.

Разобрать изопериметрическую задачу, сводящуюся к задаче Ш.—Л.!

Пример 3 (дополнительный). *Задача о цепной линии.* Однородная цепочка C линейной плотности ρ_0 и длины l закреплена на концах. Какую форму она принимает под действием силы тяжести?



Если цепочка находится в равновесии, то её центр масс должен находиться максимально низко (условие устойчивого равновесия — минимум потенциальной энергии). Высота центра масс однородной кривой $y = y(x)$ даётся функционалом

$$V[y] = \frac{\int_C y\rho_0\,dl}{\int_C \rho_0\,dl} = \frac{\int_C y\,dl}{\int_C dl} = \frac{\int_C y\,dl}{l} =$$

$$= \frac{1}{l}\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx,$$

который должен принимать минимальное значение при условии

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = l,$$

которое означает, что цепочка имеет длину l.

Пусть $a \neq b$ (концы не лежат на одной вертикали). Будем считать, что длина цепочки больше расстояния между её концами: $l > \sqrt{(b-a)^2 + (B-A)^2}$, т.е. цепочка провисает между закреплёнными концами.

Составим вспомогательный функционал:

$$L[y] = V[y] + \lambda J[y] = \frac{1}{l}\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx + \lambda\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{l}\int_a^b \Bigl(y + \underbrace{\lambda l}_{\lambda_0}\Bigr)\sqrt{1+(y')^2}\,dx = \frac{1}{l}\int_a^b (y+\lambda_0)\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Постоянный множитель $\frac{1}{l}$ перед интегралом не повлияет на условия достижения экстремума, поэтому можно исследовать на экстремум сам интеграл.

Подынтегральная функция $H(y, y') = (y+\lambda_0)\sqrt{1+(y')^2}$ не зависит явным образом от x, поэтому уравнение Эйлера можно записать в виде (см. семинар 12):

$H - y'H_{y'} = C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.$

$$(y+\lambda_0)\sqrt{1+(y')^2} - \frac{(y+\lambda_0)(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1.$$

$$\frac{y+\lambda_0}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1.$$

$$\sqrt{1+(y')^2} = \frac{y+\lambda_0}{C_1}.$$

(Если $C_1 = 0$, то $y = -\lambda_0 = \text{const}$. Это означает, что цепочка натянута горизонтально, что невозможно, поскольку мы предположили, что её длина превышает расстояние между закреплёнными концами.)

$$y' = \pm\sqrt{\left(\frac{y+\lambda_0}{C_1}\right)^2 - 1}.$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y+\lambda_0}{C_1}\right)^2 - 1}} = \pm\, dx.$$

Сделаем замену: $\frac{y+\lambda_0}{C_1} = \operatorname{ch} t$, где $t > 0$. Тогда $dy = C_1 \operatorname{sh} t\, dt$,

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y+\lambda_0}{C_1}\right)^2 - 1}} = \int \frac{C_1 \operatorname{sh} t\, dt}{\operatorname{sh} t} = C_1 t + \mathrm{const} = C_1 \operatorname{arch} \frac{y+\lambda_0}{c_1} + \mathrm{const},$$

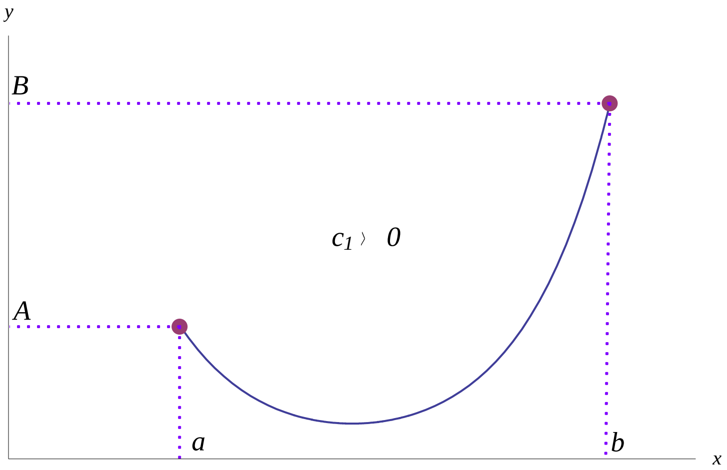
$$C_1 \operatorname{arch} \frac{y+\lambda_0}{C_1} = \pm(x + C_2), \qquad C_2 \in \mathbb{R}.$$

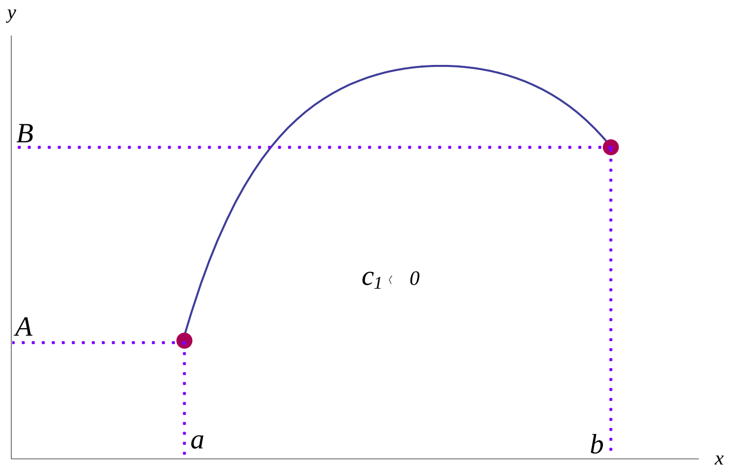
$$y = C_1 \operatorname{ch} \frac{x+C_2}{C_1} - \lambda_0.$$

Это и есть уравнение цепной линии.

Неизвестные константы C_1, C_2 и λ_0 определяются из дополнительных условий:

$$\begin{cases} y(a) = A, \\ y(b) = B, \\ \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = l. \end{cases}$$





При определении C_1 получится два возможных ответа: $C_1 < 0$, что соответствует наивысшему положению центра масс (максимум потенциальной энергии) и поэтому не подходит, и $C_1 > 0$, что соответствует самому низкому положению центра масс и даёт ответ к задаче.

Задача Лагранжа

Требуется найти экстремум функционала, зависящего от двух функций $y(x)$ и $z(x)$:

$$V[y,z] = \int\limits_a^b F(x, y, z, y', z')\, dx,$$

с закреплёнными концами:

$$y(a) = A_1, \qquad y(b) = B_1, \qquad z(a) = A_2, \qquad z(b) = B_2,$$

и дополнительным условием связи:

$$\Phi(x, y, z, y', z') = 0.$$

Если функция Φ не зависит от y', z', то связь называется *голономной*, в противном случае — *неголономной*.
Задача на условный экстремум состоит в том, что среди всех функций $y(x)$, $z(x)$ удовлетворяющих КУ $y(a) = A_1,\ y(b) = B_1,\ z(a) = A_2,\ z(b) = B_2$ и условию связи $\Phi(x, y, z, y', z') = 0$, нужно найти такие, на которых значение функционала $V[y, z]$ будет наибольшим или наименьшим.
Т. (НУЭ). Пусть на функциях $y(x), z(x) \in C^{(2)}[a;\ b]$ достигается условный экстремум функционала $V[y, z]$, причём $F, \Phi \in C^{(2)}$ и $\Phi_{y'}^2 + \Phi_{z'}^2 \neq 0$ (в случае голономной связи, т.е. когда $\Phi = \Phi(x, y, z)$, последнее условие заменяется на $\Phi_y^2 + \Phi_z^2 \neq 0$). Тогда существует *функция* $\lambda(x)$ такая, что для вспомогательного функционала
$L[y, z] = \int_a^b H(x, y, z, y', z')\,dx$, где $H = F + \lambda(x)\Phi$, выполняется система уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} H_y - \dfrac{d}{dx}\left(H_{y'}\right) = 0, \\ H_z - \dfrac{d}{dx}\left(H_{z'}\right) = 0. \end{cases}$$

Т.е. для функционала $L[y, z]$ выполняется необходимое условие безусловного экстремума.
ДУЭ мы рассматривать не будем.
Изопериметрическая задача является частным случаем задачи Лагранжа
(при $z(x) = \int_a^x G(x, y, y')\,dx$).
Задачи Лагранжа возникают, например, в теоретической механике при исследовании движения систем со связями. Также к задачам Лагранжа относится задача об отыскании геодезической линии — кривой минимальной длины на поверхности $\Phi(x, y, z) = 0$, соединяющей две заданные точки.

Пример 4. Найти экстремали функционала $V[y, z] = \int_0^1 ((y')^2 + 2(z')^2 + z^2)\,dx$ при условиях $y - z' = 0$, $y(0) = -2$, $y(1) = -\frac{1}{e}$, $z(0) = 1$, $z(1) = 0$.
Здесь $F(x, y, z, y', z') = (y')^2 + 2(z')^2 + z^2$, $\Phi(x, y, z, y', z') = y - z'$. Тогда
$H = F + \lambda(x)\Phi = (y')^2 + 2(z')^2 + z^2 + \lambda(x)(y - z')$.
Система уравнений Эйлера принимает вид:

$$\begin{cases} H_y - \dfrac{d}{dx}\left(H_{y'}\right) = \lambda(x) - \dfrac{d}{dx}(2y') = 0, \\ H_z - \dfrac{d}{dx}\left(H_{z'}\right) = 2z - \dfrac{d}{dx}\left(4z' - \lambda(x)\right) = 0. \end{cases}$$

С учётом условия связи имеем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \lambda = 2y'', \\ 4z'' - \lambda' - 2z = 0, \\ y = z'. \end{cases}$$

Подставив λ и y, выраженные из первого и третьего уравнения, соответственно, во второе уравнение, получим:
$z^{IV} - 2z'' + z = 0$.
ОР этого уравнения:
$z = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$.
Тогда
$y = z' = (C_1 + C_2)e^x + C_2 x e^x + (-C_3 + C_4)e^{-x} - C_4 x e^{-x}$.

Подставляем в краевые условия:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 - C_3 + C_4 = -2, \\ y(1) = (C_1 + 2C_2)e - \dfrac{C_3}{e} = -\dfrac{1}{e}, \\ z(0) = C_1 + C_3 = 1, \\ z(1) = (C_1 + C_2)e + \dfrac{C_3 + C_4}{e} = 0. \end{cases}$$

Выразив из третьего уравнения C_3, подставив его в первое уравнение, выразив C_4 и подставив это в оставшиеся два уравнения, получим:

$$\begin{cases} C_3 = 1 - C_1, \\ C_4 = -1 - 2C_1 - C_2, \\ \left(e + \dfrac{1}{e}\right) C_1 + 2eC_2 = 0, \\ \left(e - \dfrac{3}{e}\right) C_1 + \left(e - \dfrac{1}{e}\right) C_2 = 0. \end{cases}$$

Последние два уравнения — линейные однородные уравнения относительно двух неизвестных констант, при этом определитель

$$\begin{vmatrix} e + \dfrac{1}{e} & 2e \\ e - \dfrac{3}{e} & e - \dfrac{1}{e} \end{vmatrix} = e^2 - \frac{1}{e^2} - 2e^2 + 6 = -e^2 - \frac{1}{e^2} + 6 = \frac{-e^4 - 1 + 6e^2}{e^2}$$

отличен от нуля (иначе бы число e было решением алгебраического уравнения $-e^4 - 1 + 6e^2 = 0$ с целыми коэффициентами, т.е. не было бы трансцендентным числом), поэтому есть только тривиальное решение: $C_1 = C_2 = 0$.

Тогда получим:

$C_3 = 1, C_4 = -1.$

Теперь выпишем экстремали:

$y = (x - 2)e^{-x}, \qquad z = (1 - x)e^{-x}.$

Ответ: $y = (x - 2)e^{-x},\ z = (1 - x)e^{-x}.$

ДЗ 18. Волков, Ягола «Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Методы решения задач» (есть на сайте кафедры), задачи для самостоятельного решения (в конце каждой темы) № 9.5, 9.6, 9.9, 9.10, 9.12, 10.1(а,б), 10.2(а), 10.3(б).