Семинар 12

Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов

Рассмотрим несобственные интегралы первого рода:
$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (I) и $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$. (II)
Если (II) сходится, то (I) тоже сходится. Тогда говорят, что (I) сходится *абсолютно.*
Если (I) сходится, а (II) — расходится, то говорят, что (I) сходится *условно.*
Аналогично для несобственных интегралов второго рода.
Для исследования абсолютной сходимости используются признаки сравнения. Когда абсолютной сходимости нет, можно использовать признак Дирихле.

Признак Дирихле. Рассмотрим интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$. Пусть

1) функция $f(x)$ имеет ограниченную первообразную $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, т. е. $\exists C\colon |F(x)| \le C\ \forall x > a$;
2) функция $g(x)$ монотонна при всех достаточно больших положительных x и $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится.
Замечание 1. Здесь число C не должно зависеть от x.
Замечание 2. Для несобственных интегралов второго рода аналогичного признака нет. Для доказательства неабсолютной сходимости таких интегралов их надо сводить к несобственным интегралам первого рода с помощью замены переменной.
Замечание 3. Не стоит использовать признак Дирихле для интегралов, сходящихся абсолютно. В этом случае более удобно использовать признаки сравнения.

Пример 1. Доказать сходимость интеграла Френеля $I = \int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$.
Сделаем замену переменной: $x^2 = t$. Тогда $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$.
Но чтобы после замены переменной подынтегральная функция не оказалась разрывной, предварительно разобьём интеграл на сумму интегралов:

$$I = \underbrace{\int_0^1 \sin x^2\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \sin x^2\,dx}_{I_2}.$$

Интеграл I_1 существует как собственный интеграл (по Риману) от непрерывной функции на отрезке $[0;\ 1]$, а интеграл I_2 является несобственным интегралом первого рода, который мы будем исследовать на сходимость. В нём и сделаем замену переменной. Тогда

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \sin t\,\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Пусть $f(t) = \sin t$, $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

1) Первообразная для $f(t) = \sin t$: $F(t) = \int_1^t \sin y\,dy = -\cos y|_1^t = \cos 1 - \cos t$ ограничена: $|\cos 1 - \cos t| \le |\cos 1| + |-\cos t| \le 2\ \forall t > 1$.
Здесь мы использовали *неравенство треугольника:* $|a + b| \le |a| + |b|\ \forall a, b$.
2) Функция $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ монотонно убывает и $g(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Тогда интеграл I_2 сходится по признаку Дирихле.
Значит, интеграл Френеля $I = I_1 + I_2$ сходится.
Замечание 1: аналогично можно показать, что сходится другой интеграл Френеля $\int_0^{+\infty} \cos x^2 \, dx$. Ближе к концу семестра мы покажем, что

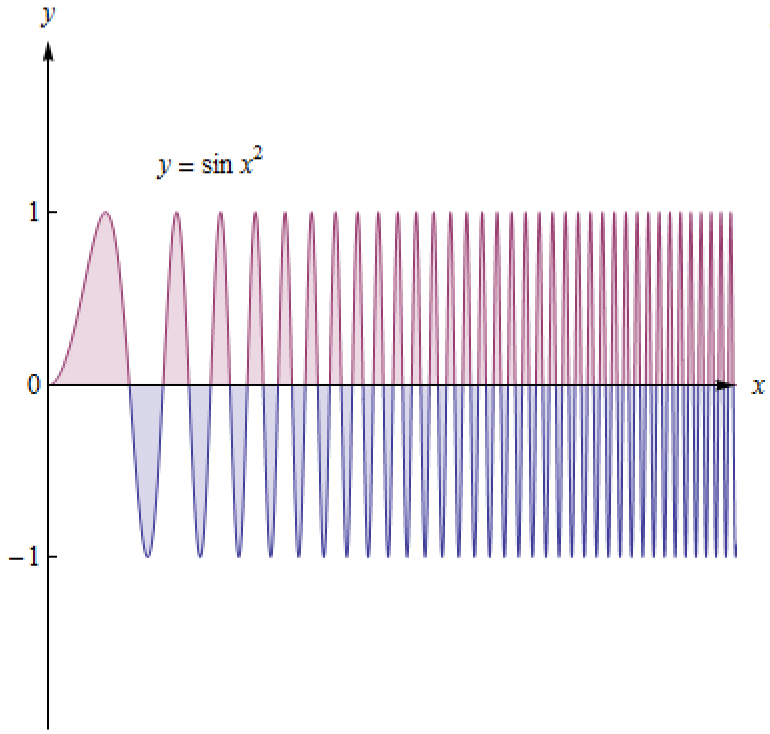
$$\int_0^{+\infty} \sin t^2 \, dt = \int_0^{+\infty} \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

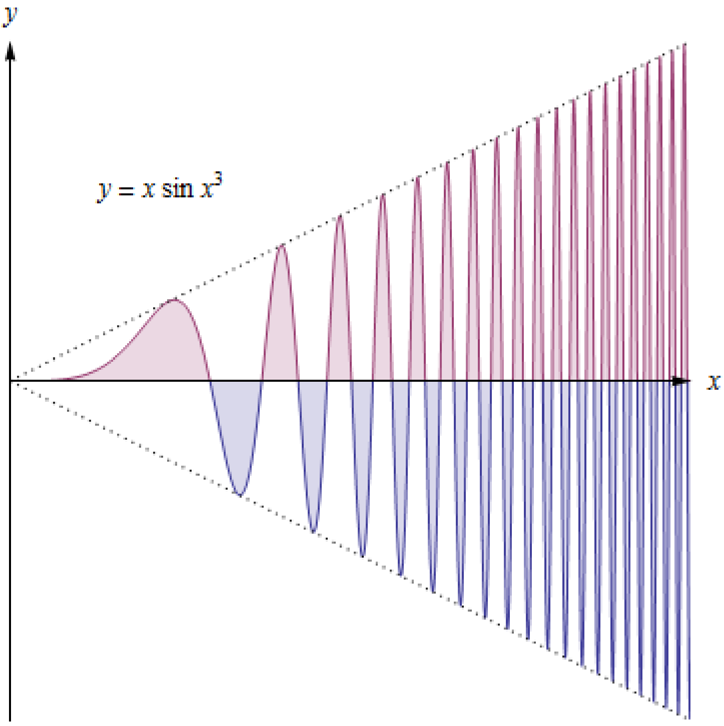
Замечание 2: как мы уже говорили на предыдущем семинаре, сходимость интеграла Френеля показывает, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ не является необходимым условием сходимости несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$.

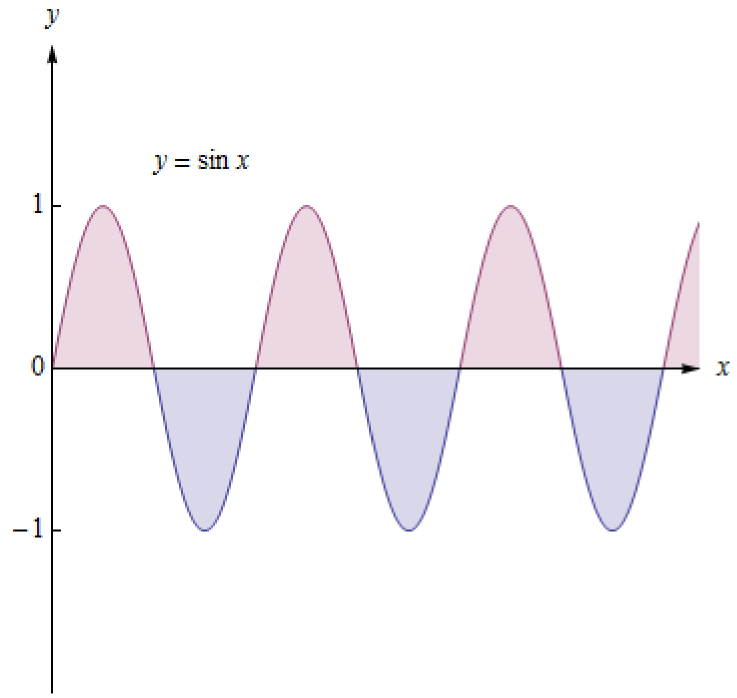
Замечание 3: аналогично можно доказать, что сходится интеграл $\int_0^{+\infty} x \sin x^3 \, dx$ (докажите дома), т. е. даже ограниченность подынтегральной функции не является необходимым условием сходимости несобственного интеграла первого рода.

Замечание 4: однако интеграл $\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$, как ни странно, расходится — это можно проверить непосредственно по определению.

Если вспомнить геометрический смысл определённого интеграла — площадь под графиком, которая берётся со знаком «+», если функция положительна, и со знаком «–», если она отрицательна, то из графиков функций будет видно, почему интегралы $\int_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx$ и $\int_0^{+\infty} x \sin x^3 \, dx$ могут сходиться, а интеграл $\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$ — не может. В первых двух случаях площадь может иметь конечный предел (т. к. период колебаний подынтегральной функции уменьшается при увеличении x), а в третьем случае — не может.







Пример 2. При каких p сходится интеграл $I = \int_1^{+\infty} x^p \sin e^x \, dx$?

Сделаем замену: $e^x = t$, $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$.

$$I = \int\limits_e^{+\infty} \frac{\ln^p t}{t} \sin t \; dt.$$

Пусть $f(t) = \sin t$, $g(t) = \frac{\ln^p t}{t}$.

1) Как мы уже знаем, функция $f(t) = \sin t$ имеет ограниченную первообразную: $F(t) = \int_e^t \sin y \, dy = \cos e - \cos t$, $|F(t)| \le 2 \; \forall t > e$.
2) При $\forall p$: $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln^p t}{t} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$. Докажем монотонность:
$$g'(t) = \frac{\frac{p\ln^{p-1} t}{t} \cdot t - \ln^p t}{t^2} = \frac{\ln^{p-1} t \,(p - \ln t)}{t^2} < 0$$
при всех достаточно больших положительных t (при $t > e^p$). Значит, функция $g(t)$ монотонно убывает при всех достаточно больших положительных t.

По признаку Дирихле интеграл I сходится при всех p.

Ответ: сходится при всех $p \in \mathbb{R}$.

Критерий Коши (необходимое и достаточное условие сходимости несобственного интеграла). $\exists \int_a^{+\infty} f(x) \, dx \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists A > a \colon \forall a_1, a_2 > A \; \left| \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$.

Аналогично для несобственного интеграла второго рода.

Замечание. Критерий Коши чаще всего используется для доказательства расходимости интеграла, т. к. для доказательства сходимости удобнее использовать признаки сходимости.

Пример 3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$.

1. Используем признак сравнения: $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \le \frac{1}{x^p}\ \forall x$, мажорантный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$. Значит, при $p > 1$ мы можем доказать (по признаку сравнения 1), что I сходится абсолютно.
2. Используем признак Дирихле: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x^p}$.
   Функция $f(x) = \sin x$ имеет ограниченную первообразную:
   $\left|\int_1^x \sin t\, dt\right| = |\cos 1 - \cos x| \le 2\ \forall x > 1$.
   Функция $g(x) = \frac{1}{x^p} \to 0$ при $x \to +\infty$, если $p > 0$.
   Кроме того, если $p > 0$, то $g(x) \downarrow$ при $\forall x \ge 1$.
   Значит, интеграл I сходится (по признаку Дирихле), если $p > 0$.
3. Докажем, что при $0 < p \le 1$ интеграл I сходится условно, т. е. нет абсолютной сходимости. Для этого рассмотрим интеграл $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| dx$ и докажем, что он расходится.
   Справедлива оценка:
   $$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \ge \frac{\sin^2 x}{x^p} = \frac{1 - \cos 2x}{2x^p} = \frac{1}{2x^p} - \frac{\cos 2x}{2x^p}.$$
   Докажем, что минорантный интеграл $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2x^p} - \frac{\cos 2x}{2x^p}\right) dx$ расходится.
   Так же, как и для рядов, можно доказать от противного, что
   сумма (разность) сходящегося и расходящегося интеграла расходится.
   Но при $0 < p \le 1$ интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^p}$ *расходится*, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p} dx$ *сходится* (по признаку Дирихле, аналогично п. 2). Поэтому интеграл $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2x^p} - \frac{\cos 2x}{2x^p}\right) dx$ расходится. Тогда и интеграл $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| dx$ расходится при $0 < p \le 1$ (по признаку сравнения 1).
   Таким образом, при $0 < p \le 1$ интеграл I сходится условно.
4. Докажем, что при $p \le 0$ интеграл I расходится. Будем использовать критерий Коши. Согласно ему, $\exists \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists A > 1\colon \forall a_1, a_2 > A\ \ \left|\int_{a_1}^{a_2} \frac{\sin x}{x^p} dx\right| < \varepsilon$.
   Запишем отрицание:
   $\nexists \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall A > 1\ \exists a_1, a_2 > A\colon\ \left|\int_{a_1}^{a_2} \frac{\sin x}{x^p} dx\right| \ge \varepsilon$.
   Рассмотрим $a_1 = 2\pi n + \frac{\pi}{4}$, $a_2 = 2\pi n + \frac{3\pi}{4}$.
   Каким бы ни было число A, всегда можно подобрать такое натуральное число n, чтобы выполнялись неравенства $a_1 > A$, $a_2 > A$.
   При всех $x \in [a_1, a_2]$ выполняется неравенство $\sin x \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$.
   С другой стороны, при $p \le 0$: $\frac{1}{x^p} \ge 1$ для всех $x \ge 1$.
   Значит, $\frac{\sin x}{x^p} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$ при всех $x \in [a_1, a_2]$.
   Тогда получаем оценку: $\int_{a_1}^{a_2} \frac{\sin x}{x^p} dx \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{a_1}^{a_2} dx = \frac{a_2 - a_1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.
   Возьмём $\varepsilon = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Тогда
   $\exists \varepsilon = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} > 0\ \forall A > 1\ \exists a_1 = 2\pi n + \frac{\pi}{4} > A, \exists a_2 = 2\pi n + \frac{3\pi}{4} > A$:

$$\left|\int_{a_1}^{a_2} \frac{\sin x}{x^p}\,dx\right| \geq \varepsilon = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Таким образом, из критерия Коши следует расходимость интеграла I при $p \leq 0$.
Ответ: сходится абсолютно при $p > 1$, сходится условно при $0 < p \leq 1$, расходится при $p \leq 0$.
Запомним этот важный результат.
Очевидно, то же самое справедливо и для интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,dx$.

Главное значение несобственного интеграла (по Коши)

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{+A} f(x)\,dx.$$

v. p. — “valeur principale” («главное значение» — франц.)
Например, $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ не существует, т. к. $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_0^{+\infty} x\,dx$, а интегралы $\int_{-\infty}^{0} x\,dx$ и $\int_0^{+\infty} x\,dx$ расходятся. Однако

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{+A} x\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-A}^{A} = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2}\right) = 0.$$

Аналогично, если $c \in (a, b)$ — особая точка функции $f(x)$, то

$$\text{v. p.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right].$$

Например, $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ не существует, т. к. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x}$, а интегралы $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x}$ и $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ расходятся. Однако (проверить дома — Демидович № 2390 а):

$$\text{v. p.} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0.$$

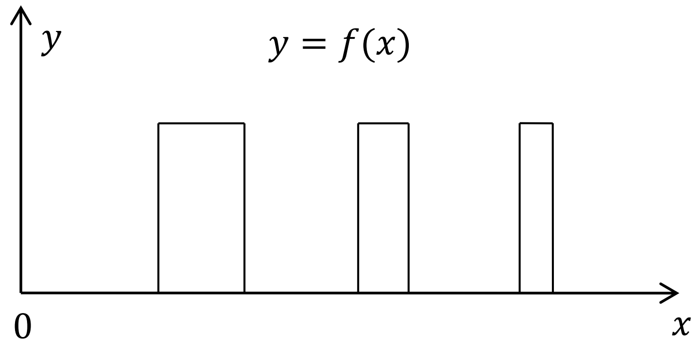
Замечание: если интеграл сходится, то он равен своему главному значению.

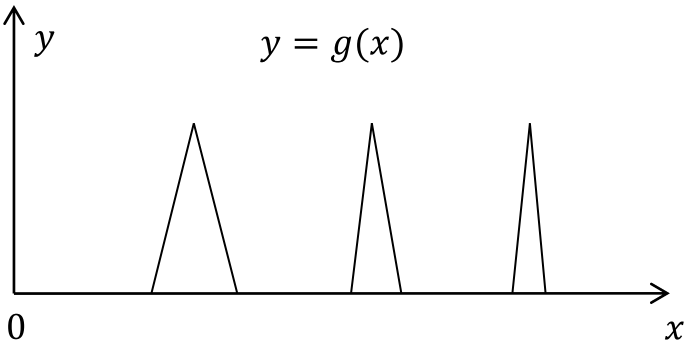
ДЗ 12. Демидович 1997 г. (2003 г.) № 2379, 2380 (2380 а), 2380.1 (2380 б), 2380.2 (2380 в), 2381, 2387*, 2390, 2392–2395.
В след. раз — к/р.

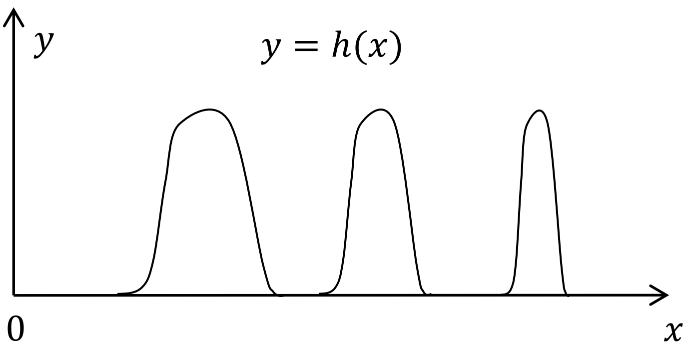
Дополнительный материал

Можно показать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ не является необходимым условием даже *абсолютной* сходимости несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[n, n + \frac{1}{n^2}\right], \\ 0, & x \notin \left[n, n + \frac{1}{n^2}\right], \end{cases} \text{ где } n = 1, 2, 3, \ldots$$







Эта функция не стремится к нулю при $x \to +\infty$. Вычислим интеграл от этой функции — он равен площади под её графиком:
$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$ — сходится абсолютно.
Правда, построенная функция $f(x)$ не является непрерывной. Но можно построить и непрерывную функцию $g(x)$, график которой состоит из треугольников такой же площади.
Можно пойти ещё дальше и «сгладить» профиль функции $g(x)$, не изменяя площади под графиком. Так можно получить дифференцируемую функцию $h(x)$ (и даже бесконечно дифференцируемую функцию) со сходящимся абсолютно интегралом, при этом $h(x) \nrightarrow 0$ при $x \to +\infty$.
Таким образом, для абсолютной сходимости несобственного интеграла первого рода не требуется стремление к нулю подынтегральной функции.