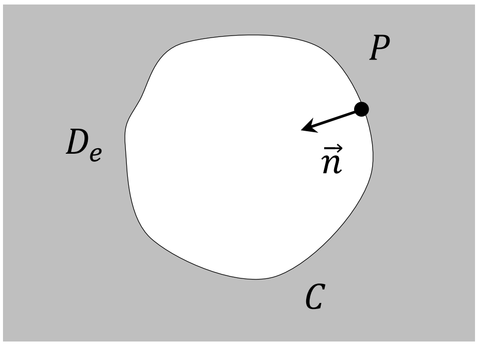
Семинар 5

Внешние краевые задачи для уравнения Лапласа на плоскости



Рассмотрим краевую задачу во внешней области $D_e \subset \mathbb{R}^2$, которая является дополнением до $\mathbb{R}^2$ некоторой ограниченной области. В неограниченной области для выделения единственного решения не достаточно поставить ГУ, необходимо также задать поведение неизвестной функции $u(x, y)$ на бесконечности. В качестве условия на бесконечности во внешних краевых задачах для уравнения Лапласа на плоскости рассмотрим условие ограниченности решения (обычно именно ограниченные решения имеют физический смысл). Тогда краевая задача во внешней области имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta\, u = 0 \text{ в } D_e, \\ \text{ГУ на } C, \\ \text{функция } u \text{ ограничена в } D_e. \end{cases}$$

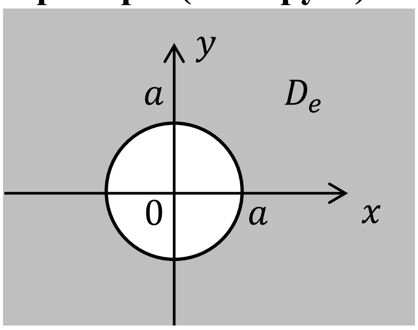
Требуется найти функцию $u(x, y)$ в $\overline{D}_e$.

Т. (существования и единственности). а) задачи Дирихле, третьего рода (с ГУ $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\Big|_C = f(P)$, где $h(P) \geq 0$, $h(P) \not\equiv 0$, $\vec{n}$ — единичная *внешняя по отношению к области* D_e нормаль), а также смешанные краевые задачи во внешней области однозначно разрешимы;

б) внешняя задача Неймана разрешима $\Leftrightarrow \int_C \frac{\partial u}{\partial n} dl = 0$. При этом её решение определено с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Замечание. Вместо условия ограниченности для решений уравнения Лапласа на плоскости можно ставить условие *регулярности на бесконечности:* $\exists \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} u(x, y) < \infty$.

Пример 1 (вне круга).



$$\begin{cases} \Delta\, u = 0,\ r > a, \\ u|_{r=a} = f(\varphi), \\ |u| < \text{const},\ r > a. \end{cases}$$

Ищем решение в виде суммы ЧР уравнения Лапласа на плоскости:

$u(r, \varphi) =$

$= C_0 + D_0 \ln r +$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\varphi + (B_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\varphi].$$

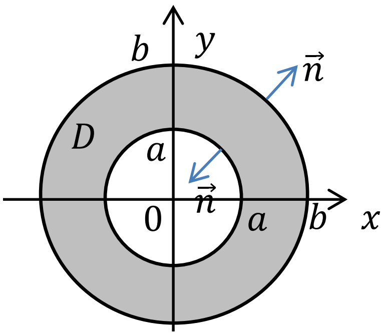
Эта функция будет удовлетворять уравнению Лапласа при $r > a$.

Поскольку функция $u(r, \varphi)$ ограничена при $r > a$, то $A_n = 0$, $B_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда:

$$u(r, \varphi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi).$$

Коэффициенты C_0, C_n, D_n находятся из ГУ: $u|_{r=a} = f(\varphi)$.

Пример 2 (в кольце).



$$\begin{cases}\Delta u = 0, \ a < r < b, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f_1(\varphi), \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = f_2(\varphi).\end{cases}$$

Это внутренняя задача Неймана. Условие разрешимости:

$$\int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n} dl = \int\limits_0^{2\pi} \left(-\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}\right) a\, d\varphi + \int\limits_0^{2\pi} \left(\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b}\right) b\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} [b f_2(\varphi) - a f_1(\varphi)]\, d\varphi = 0. \qquad (*)$$

Решение краевой задачи для уравнения Лапласа в кольце можно искать в виде:

$$u(r,\varphi) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\varphi + (B_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\varphi].$$

Неизвестные коэффициенты определяются подстановкой в ГУ.

Но система для определения коэффициентов упростится, если мы перегруппируем слагаемые (ср. краевые задачи в прямоугольнике и прямоугольном параллелепипеде). Когда мы на прошлом семинаре искали ЧР уравнения Лапласа в полярных координатах, мы записывали ОР ДУ

$$r^2 R_n''(r) + r R_n'(r) - n^2 R_n(r) = 0 \qquad (1)$$

в виде

$$R_n(r) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln r, & n = 0, \\ A_n r^n + B_n r^{-n}, & n \neq 0. \end{cases}$$

В кольце нам удобно выбрать другую ФСР. Запишем ОР ДУ (1) в виде:

$$R_n(r) = A_n R_n^{(a)}(r) + B_n R_n^{(b)}(r),$$

где функции $R_n^{(a)}(r)$, $R_n^{(b)}(r)$ удовлетворяют ДУ (1) и являются ЛНЗ, функция $R_n^{(a)}(r)$ удовлетворяет соответствующему *однородному* ГУ при $r = a$, а функция $R_n^{(b)}(r)$ удовлетворяет соответствующему *однородному* ГУ при $r = b$, т.е. в нашем случае — условиям Неймана:

$$\left.\frac{d}{dr} R_n^{(a)}\right|_{r=a} = 0, \qquad \left.\frac{d}{dr} R_n^{(b)}\right|_{r=b} = 0.$$

Найдём функцию $R_n^{(a)}(r)$ при $n \neq 0$. Поскольку она удовлетворяет ДУ (1), она имеет вид:

$$R_n^{(a)}(r) = \alpha r^n + \beta r^{-n}.$$

Подставив это выражение в ГУ $\left.\frac{d}{dr} R_n^{(a)}\right|_{r=a} = 0$, получим:

$$\alpha n a^{n-1} - \beta n a^{-n-1} = 0.$$

Отсюда $\alpha a^{2n} = \beta$. Например, возьмём $\alpha = 1$ и $\beta = a^{2n}$. Тогда

$$R_n^{(a)}(r) = r^n + a^{2n} r^{-n}, \qquad n \neq 0.$$

Аналогично найдём функцию $R_n^{(b)}(r)$, удовлетворяющую ГУ $\left.\frac{d}{dr} R_n^{(b)}\right|_{r=b} = 0$, при $n \neq 0$:

$$R_n^{(b)}(r) = r^n + b^{2n} r^{-n}, \qquad n \neq 0.$$

Очевидно, найденные функции $R_n^{(a)}(r)$ и $R_n^{(b)}(r)$ — ЛНЗ.

Пусть теперь $n = 0$. Тогда $R_0^{(a)}(r) = \alpha + \beta \ln r$. Из ГУ $\left.\frac{d}{dr} R_0^{(a)}\right|_{r=a} = 0$ имеем: $\frac{\beta}{a} = 0$. Значит, $R_0^{(a)}(r) = \alpha = \text{const}$. Аналогично из ГУ $\left.\frac{d}{dr} R_n^{(b)}\right|_{r=b} = 0$ получим, что $R_0^{(b)}(r) = \text{const}$.

Но две константы всегда ЛЗ, поэтому не образуют ФСР. Таким образом, при $n = 0$ ОР ДУ (1) придётся оставить в прежнем виде:
$R_0(r) = A_0 + B_0 \ln r$.

Для примера рассмотрим также условие Дирихле. Пусть требуется найти решение ДУ (1) $R_n^{(a)}(r)$, удовлетворяющее однородному условию Дирихле $R_n^{(a)}(a) = 0$. При $n \neq 0$ мы должны искать его в виде:
$R_n^{(a)}(r) = \alpha r^n + \beta r^{-n}$.
Подставив это выражение в ГУ $R_n^{(a)}(a) = 0$, получим:
$\alpha a^n + \beta a^{-n} = 0$,
откуда $\alpha a^{2n} = -\beta$. Например, $\alpha = 1$, $\beta = -a^{2n}$. Тогда
$R_n^{(a)}(r) = r^n - a^{2n} r^{-n}$
есть решение ДУ (1) при $n \neq 0$, удовлетворяющее однородному условию Дирихле $R_n^{(a)}(a) = 0$.
При $n = 0$ решение ДУ (1), удовлетворяющее однородному условию Дирихле $R_0^{(a)}(a) = 0$, должно иметь вид: $R_0^{(a)}(r) = \alpha + \beta \ln r$. Подставив эту функцию в ГУ, получим $\alpha = -\beta \ln a$. Например, пусть $\beta = 1$, $\alpha = -\ln a$, и
$R_0^{(a)}(r) = -\ln a + \ln r = \ln \dfrac{r}{a}$.

Итак, будем искать решение нашей краевой задачи Неймана в кольце в виде:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n(r)\Phi_n(\varphi) =$$

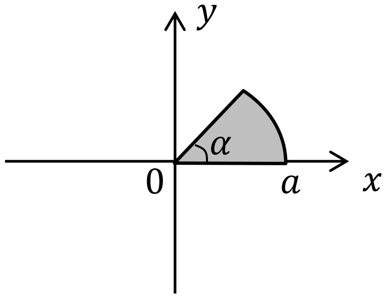
$$= A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[A_n R_n^{(a)}(r) + C_n R_n^{(b)}(r) \right] \cos n\varphi + \left[B_n R_n^{(a)}(r) + D_n R_n^{(b)}(r) \right] \sin n\varphi \right\}.$$

Неизвестные коэффициенты определяются подстановкой в ГУ
$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f_1(\varphi)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = f_2(\varphi)$. При этом надо учесть, что
$\left.\frac{d}{dr} R_n^{(a)}\right|_{r=a} = 0$, $\left.\frac{d}{dr} R_n^{(b)}\right|_{r=b} = 0$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \dfrac{B_0}{a} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left.\dfrac{d}{dr} R_n^{(b)}\right|_{r=a} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) \right] = f_1(\varphi), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = \dfrac{B_0}{b} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left.\dfrac{d}{dr} R_n^{(a)}\right|_{r=b} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \right] = f_2(\varphi). \end{cases}$$

Разложив правые части в ряды Фурье по тригонометрической системе, найдём коэффициенты B_0, A_n, B_n, C_n, D_n (с учётом условия разрешимости (*) они определяются однозначно). Коэффициент A_0 остаётся произвольным.

Пример 3 (в круговом секторе).



$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ 0 < r < a, \ 0 < \varphi < \alpha, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = 0, \\ u|_{r=a} = f(\varphi). \end{cases}$$

Внимание! ГУ по φ обязательно должны быть *однородными*, иначе данный алгоритм неприменим!

Здесь по переменной φ уже будут не периодические ГУ, а условия Неймана, поэтому надо искать решение краевой задачи в виде ряда по другим ЧР уравнения Лапласа, удовлетворяющим однородным ГУ: $\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = 0$. Найдём такие ЧР, имеющие вид:

$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0.$

Подставив это выражение в уравнение Лапласа и разделив переменные, получим:

$$\frac{r\frac{d}{dr}\left(rR'(r)\right)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda.$$

Для функции $\Phi(\varphi)$, с учётом ГУ: $\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = 0$, имеем задачу Ш.–Л.:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \qquad 0 < \varphi < \alpha, \\ \Phi'(0) = 0, \qquad \Phi'(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Её СЗ и СФ:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2, \qquad \Phi_n(\varphi) = \cos\frac{\pi n\varphi}{\alpha}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для функции $R(r)$ имеем ДУ:

$r^2R_n''(r) + rR_n'(r) - \lambda_n R_n(r) = 0.$

Его ОР имеет вид:

$$R_n(r) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln r, \qquad n = 0, \\ A_n r^{\sqrt{\lambda_n}} + B_n r^{-\sqrt{\lambda_n}}, \qquad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Таким образом, получаем ЧР уравнения Лапласа, удовлетворяющие ГУ $\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = 0$:

$$u_n(r,\varphi) = R_n(r)\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln r, \qquad n = 0, \\ \left(A_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}} + B_n r^{-\frac{\pi n}{\alpha}}\right)\cos\frac{\pi n\varphi}{\alpha}, \qquad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Решение краевой задачи в секторе ищем в виде их суммы:

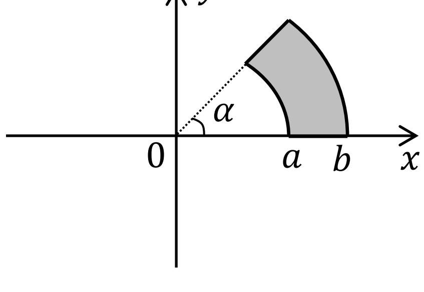
$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}} + B_n r^{-\frac{\pi n}{\alpha}}\right)\cos\frac{\pi n\varphi}{\alpha}.$$

Классическое решение краевой задачи $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ должно быть непрерывно, и, следовательно, ограничено в секторе, включая его границу (в т.ч. при $r = 0$), поэтому $B_0 = 0$, $B_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$ Тогда:

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cos\frac{\pi n\varphi}{\alpha}.$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям краевой задачи, кроме неоднородного ГУ: $u|_{r=a} = f(\varphi)$. Неизвестные коэффициенты находятся подстановкой ряда в неоднородное ГУ: $u|_{r=a} = f(\varphi)$.

Пример 4 (в кольцевом секторе).



$$\begin{cases} \Delta u = 0,\ a < r < b,\ 0 < \varphi < \alpha, \\ u|_{\varphi=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = 0, \\ u|_{r=a} = f_1(\varphi),\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = f_2(\varphi). \end{cases}$$

Внимание! ГУ по φ обязательно должны быть *однородными*, иначе данный алгоритм неприменим!

Ищем ЧР уравнения Лапласа, удовлетворяющие однородным ГУ: $u|_{\varphi=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = 0$, и представимые в виде $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0$. Разделив переменные, получим задачу Ш.–Л.:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \qquad 0 < \varphi < \alpha, \\ \Phi(0) = 0, \qquad \Phi'(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Её СЗ и СФ:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)}{\alpha}\right)^2, \qquad \Phi_n(\varphi) = \sin\frac{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)\varphi}{\alpha}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Для функции $R(r)$ имеем ДУ:

$$r^2 R_n''(r) + rR_n'(r) - \lambda_n R_n(r) = 0. \tag{2}$$

Его ОР имеет вид:

$$R_n(r) = A_n r^{\sqrt{\lambda_n}} + B_n r^{-\sqrt{\lambda_n}}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

(Заметим, что теперь все $\lambda_n \neq 0$.)

Для удобства решения краевой задачи в кольце, выберем другую ФСР, состоящую из функций $R_n^{(a)}(r)$, $R_n^{(b)}(r)$, удовлетворяющих соответствующим *однородным* ГУ при $r = a$ и $r = b$:

$$R_n^{(a)}(a) = 0, \qquad \left.\frac{d}{dr}R_n^{(b)}\right|_{r=b} = 0.$$

Аналогично примеру 2, имеем:

$$R_n^{(a)}(r) = r^{\sqrt{\lambda_n}} - a^{2\sqrt{\lambda_n}} \cdot r^{-\sqrt{\lambda_n}}, \qquad R_n^{(b)}(r) = r^{\sqrt{\lambda_n}} + b^{2\sqrt{\lambda_n}} \cdot r^{-\sqrt{\lambda_n}}.$$

Теперь ОР ДУ (2):

$$R_n(r) = A_n R_n^{(a)}(r) + B_n R_n^{(b)}(r).$$

Таким образом, получены ЧР уравнения Лапласа, удовлетворяющие однородным ГУ $u|_{\varphi=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = 0$:

$$u_n(r,\varphi) = R_n(r)\Phi_n(\varphi) = \left[A_n R_n^{(a)}(r) + B_n R_n^{(b)}(r)\right]\sin\frac{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)\varphi}{\alpha}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Решение исходной краевой задачи ищется в виде их суммы:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n R_n^{(a)}(r) + B_n R_n^{(b)}(r)\right]\sin\frac{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)\varphi}{\alpha}.$$

Неизвестные коэффициенты определяются подстановкой в неоднородные ГУ:

$$u|_{r=a} = f_1(\varphi), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = f_2(\varphi),$$

с учётом того, что $R_n^{(a)}(a) = 0$, $\left.\frac{d}{dr}R_n^{(b)}\right|_{r=b} = 0$.

ДЗ 5. БК с. 116 № 2(б,в), 3(а,г); с. 117 № 4(в), 5(в).

Дополнительный материал
Задачи с неоднородными ГУ по φ

Пример 5 (в секторе). Рассмотрим задачу, аналогичную разобранной в примере 3, но с неоднородными ГУ на всей границе:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \qquad 0 < r < a, \qquad 0 < \varphi < \alpha, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = f_1(r), \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = f_2(r), \\ u|_{r=a} = f(\varphi). \end{cases} \tag{0}$$

Будем искать решение задачи (0) в виде

$u(r,\varphi) = u_1(\varphi) + u_2(\varphi)$,

где функции $u_1(\varphi)$ и $u_2(\varphi)$ — решения следующих краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, \qquad 0 < r < a, \qquad 0 < \varphi < \alpha, \\ \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = f_1(r), \qquad \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = f_2(r), \\ u_1|_{r=a} = 0. \end{cases} \tag{I}$$

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0, \qquad 0 < r < a, \qquad 0 < \varphi < \alpha, \\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = 0, \\ u_2|_{r=a} = f(\varphi). \end{cases} \tag{II}$$

В самом деле, сумма решений задач (I) и (II) удовлетворяет всем условиям задачи (0).

Задача (II) решена в примере 3. Рассмотрим задачу (I). Найдём ЧР уравнения Лапласа, удовлетворяющие однородному ГУ $u_1|_{r=a} = 0$ и представимые в виде

$u_1(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0$.

Подставив это выражение в уравнение Лапласа и разделив переменные, получим:

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\lambda.$$

Для функции $R(r)$, с учётом ГУ $u_1|_{r=a} = 0$, получим задачу:

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + \lambda R(r) = 0, \qquad r < a, \\ R(a) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

При $\lambda < 0$ ОР ДУ (3) имеет вид:

$R(r) = Ar^{\sqrt{-\lambda}} + Br^{-\sqrt{-\lambda}}$.

В силу ограниченности при $r = 0$ имеем $B = 0$. Тогда из условия $R(a) = 0$ получаем $A = 0$. Тогда $R(r) \equiv 0$ — тривиальное решение.

При $\lambda = 0$ ОР ДУ (3) имеет вид:

$R(r) = A + B\ln r$.

В силу ограниченности при $r = 0$ имеем $B = 0$. Тогда из условия $R(a) = 0$ получаем $A = 0$. Тогда $R(r) \equiv 0$ — тривиальное решение.

При $\lambda > 0$ ОР ДУ (3) имеет вид:

$R(r) = A\cos\big(\sqrt{\lambda}\ln r\big) + B\sin\big(\sqrt{\lambda}\ln r\big)$.

Если $|A| + |B| \neq 0$, эта функция не будет иметь предела при $r = 0$, поэтому для построения классического решения краевой задачи не подходит.

Краевую задачу (0) в данном случае нужно решать с помощью функции Грина, либо сделав замену неизвестной функции, которая приводит к однородным ГУ по φ.

Пример 6 (в кольцевом секторе). Рассмотрим задачу, аналогичную разобранной в примере 4, но с неоднородными ГУ на всей границе:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \qquad a < r < b, \qquad 0 < \varphi < \alpha, \\ u|_{\varphi=0} = g_1(r), \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = g_2(r), \\ u|_{r=a} = f_1(\varphi), \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = f_2(\varphi). \end{cases} \tag{0'}$$

Будем искать решение задачи (0’) в виде

$u(r,\varphi) = u_1(\varphi) + u_2(\varphi)$,

где функции $u_1(\varphi)$ и $u_2(\varphi)$ — решения следующих краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, \qquad a < r < b, \qquad 0 < \varphi < \alpha, \\ u_1|_{\varphi=0} = g_1(r), \qquad \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = g_2(r), \\ u_1|_{r=a} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=b} = 0. \end{cases} \tag{I'}$$

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0, \qquad a < r < b, \qquad 0 < \varphi < \alpha, \\ u_2|_{\varphi=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = 0, \\ u_2|_{r=a} = f_1(\varphi), \qquad \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=b} = f_2(\varphi). \end{cases} \tag{II'}$$

В самом деле, сумма решений задач (I’) и (II’) удовлетворяет всем условиям задачи (0’). Задача (II’) решена в примере 4. Рассмотрим задачу (I’). Найдём ЧР уравнения Лапласа, удовлетворяющие однородным ГУ: $u_1|_{r=a} = 0$, $\left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=b} = 0$, и представимые в виде

$u_1(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0$.

Подставив это выражение в уравнение Лапласа и разделив переменные, получим:

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\lambda.$$

Для функции $R(r)$, с учётом ГУ $u_1|_{r=a} = 0$, $\left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=b} = 0$, получим задачу:

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + \lambda R(r) = 0, \qquad a < r < b, \\ R(a) = 0, \qquad R'(b) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Это задача Ш.–Л. на отрезке со смешанными ГУ, все её СЗ $\lambda > 0$. Тогда ОР ДУ (4) имеет вид:

$R(r) = A\cos\big(\sqrt{\lambda}\ln r\big) + B\sin\big(\sqrt{\lambda}\ln r\big)$.

Подставляем в ГУ:

$$\begin{cases} R(a) = A\cos\big(\sqrt{\lambda}\ln a\big) + B\sin\big(\sqrt{\lambda}\ln a\big) = 0, \\ R'(b) = -\dfrac{A\sqrt{\lambda}}{b}\sin\big(\sqrt{\lambda}\ln b\big) + \dfrac{B\sqrt{\lambda}}{b}\cos\big(\sqrt{\lambda}\ln b\big) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Эта однородная СЛАУ имеет нетривиальные решения при условии:

$$\begin{vmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}\ln a) & \sin(\sqrt{\lambda}\ln a) \\ -\frac{\sqrt{\lambda}}{b}\sin(\sqrt{\lambda}\ln b) & \frac{\sqrt{\lambda}}{b}\cos(\sqrt{\lambda}\ln b) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{b}\left[\cos(\sqrt{\lambda}\ln a)\cos(\sqrt{\lambda}\ln b) + \cos(\sqrt{\lambda}\ln a)\sin(\sqrt{\lambda}\ln b)\right] = \frac{\sqrt{\lambda}}{b}\cos\left(\sqrt{\lambda}\ln\frac{b}{a}\right) = 0.$$

Отсюда

$$\sqrt{\lambda_n}\ln\frac{b}{a} = \pi\left(n - \frac{1}{2}\right), \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$\lambda_n = \frac{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)}{\ln\frac{b}{a}}.$$

Определим коэффициенты A и B. Поскольку определитель однородной СЛАУ (5) равен нулю, второе уравнение является следствием первого, а одним из решений первого уравнения будет

$$A_n = -\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ln a\right), \qquad B = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\ln a\right).$$

Тогда

$$R_n(r) = -\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ln a\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\ln r\right) + \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\ln a\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ln r\right) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ln\frac{r}{a}\right).$$

Для функции $\Phi(\varphi)$ имеем ДУ:

$$\Phi_n''(\varphi) - \lambda_n\Phi(\varphi) = 0,$$

общее решение которого, с учётом ГУ по φ, удобно записать в виде

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\varphi + B_n \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}(\varphi - \alpha), \qquad n = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$u_1^{(n)}(r, \varphi) = R_n(r)\Phi_n(\varphi) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ln\frac{r}{a}\right)\left[A_n \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\varphi + B_n \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}(\varphi - \alpha)\right].$$

Эти функции удовлетворяют уравнению Лапласа в кольцевом секторе и однородным ГУ:

$$u_1|_{r=a} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=b} = 0.$$

Тогда решение краевой задачи (I’) будем искать в виде:

$$u_1(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(1)}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ln\frac{r}{a}\right)\left[A_n \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\varphi + B_n \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}(\varphi - b)\right].$$

Неизвестные коэффициенты определяются подстановкой в неоднородные ГУ:

$$u_1|_{\varphi=0} = g_1(r), \qquad \left.\frac{\partial u_1}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = g_2(r).$$