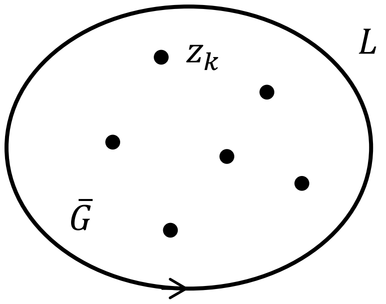
Семинар 19

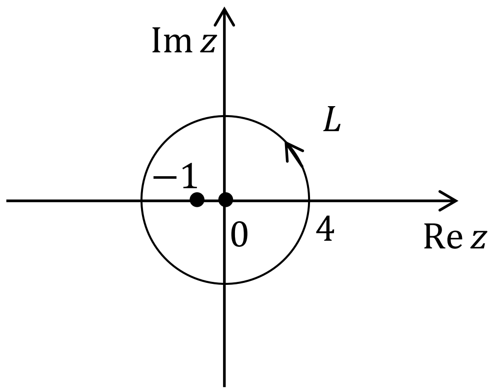
Вычисление интегралов с помощью вычетов



Т. (основная теорема теории вычетов). Пусть $f(z)$ — однозначная функция, аналитическая в ограниченной замкнутой области $\bar{G}$ всюду, кроме конечного числа ИОТ $z_1, z_2, \dots, z_N \in G$. Пусть кусочно-гладкий замкнутый контур L является границей области G. Тогда

$$\boxed{\oint\limits_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z), z_k].}$$

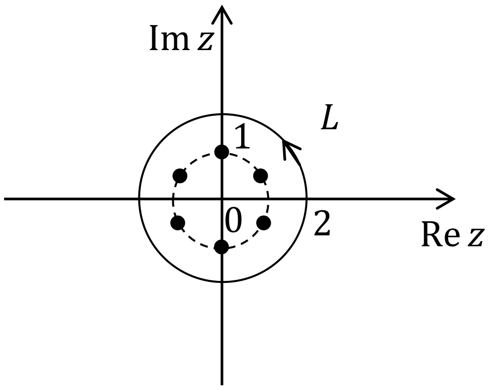
Замечание: область G может быть неодносвязной. Интеграл, стоящий в левой части, берётся по полной границе области G в положительном направлении обхода.
Эта теорема позволяет вычислять интегралы по замкнутым контурам на комплексной плоскости при помощи вычетов.



Пример 1 (самостоятельно). Вычислить
$$I = \oint\limits_{|z|=4} \frac{\exp z - 1}{z^2 + z}\,dz.$$
Рассмотрим подынтегральную функцию
$$f(z) = \frac{\exp z - 1}{z^2 + z} = \frac{\exp z - 1}{z(z+1)}.$$
Внутри контура $|z| = 4$ подынтегральная функция имеет две ИОТ: $z_1 = -1$ и $z_2 = 0$.

1) При $z_1 = -1$ числитель не обращается в нуль: $\exp(-1) - 1 \neq 0$, поэтому точка $z_1 = -1$ — полюс первого порядка. Тогда
$$\operatorname{res}[f(z), -1] = \left.\frac{\exp z - 1}{(z^2 + z)'}\right|_{z=-1} = \left.\frac{\exp z - 1}{2z + 1}\right|_{z=-1} = 1 - \frac{1}{e}.$$
2) При $z_2 = 0$ и числитель, и знаменатель дроби $f(z) = \frac{\exp z - 1}{z(z+1)}$ обращаются в нуль, поэтому сразу не ясно, какого типа эта ИОТ. Найдём предел функции по правилу Лопиталя:
$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\exp z - 1}{z^2 + z} = \lim_{z\to 0} \frac{\exp z}{2z + 1} = 1.$$
Таким образом, точка $z_2 = 0$ является УОТ. Поэтому функция $f(z)$ раскладывается в её проколотой окрестности в степенной ряд, в котором нет члена с $(z - z_2)$ в минус первой степени, т. е. $\operatorname{res}[f(z), 0] = a_{-1} = 0$.

Теперь применим основную теорему теории вычетов:
$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{\exp z - 1}{z^2 + z}\,dz = 2\pi i\{\operatorname{res}[f(z), -1] + \operatorname{res}[f(z), 0]\} = 2\pi i \left(1 - \frac{1}{e}\right).$$
Ответ: $2\pi i \left(1 - \frac{1}{e}\right)$.



Пример 2 (самостоятельно). Вычислить

$$I = \oint\limits_{|z|=2} \frac{z^5+3}{z^6+1}\,dz.$$

Внутри контура $|z| = 2$ подынтегральная функция $f(z) = \frac{z^5+3}{z^6+1}$ имеет шесть особых точек:

$z_k = \sqrt[6]{-1} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{6}\right)}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Все они лежат на окружности $|z| = 1$. Других конечных ОТ функция $f(z)$ не имеет.

Вместо того чтобы считать вычеты отдельно в шести точках и складывать их, удобнее найти вычет в бесконечно удалённой точке. Тогда

$$I = 2\pi i \sum_{k=0}^{5} \operatorname{res}[f(z), z_k] = 2\pi i\{-\operatorname{res}[f(z), \infty]\}.$$

Вычет в бесконечно удалённой точке найдём, разложив функцию в ряд Лорана в области $|z| > 1$. Причём нас интересует только один член этого разложения, содержащий z^{-1}.

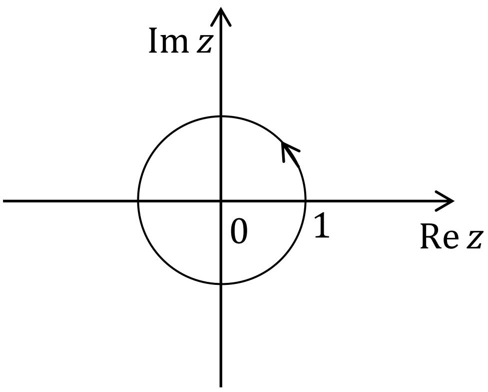
Сделаем замену переменной: $z = \frac{1}{t}$, $|t| < 1$,

$$f(z) = \frac{\frac{1}{t^5}+3}{\frac{1}{t^6}+1} = \frac{t+3t^6}{1+t^6} = (t+3t^6)\cdot\frac{1}{1-(-t^6)} = (t+3t^6)(1-t^6+t^{12}-\cdots) =$$

$$= \left(\frac{1}{z}+\frac{3}{z^6}\right)\left(1-\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^{12}}-\cdots\right) = \frac{1}{z}+\frac{3}{z^6}-\frac{1}{z^7}-\frac{3}{z^{12}}+\frac{1}{z^{13}}+\frac{3}{z^{18}}+\cdots, \qquad |z| > 1.$$

Тогда $\operatorname{res}[f(z), \infty] = -a_{-1} = -1$. Откуда $I = 2\pi i$.

Ответ: $2\pi i$.



Очень здорово, что с помощью вычетов можно вычислять и некоторые вещественные определённые интегралы, сводя их к контурным интегралам на комплексной плоскости с помощью замены переменной и других приёмов.

Например, рассмотрим определённый интеграл вида

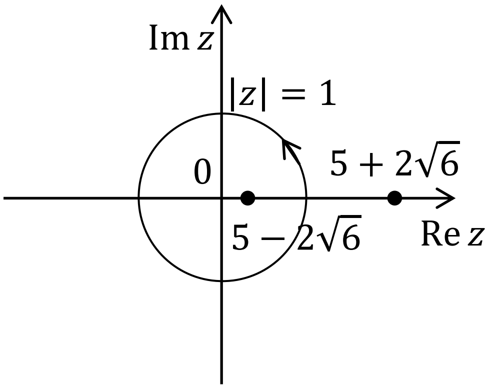
$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi.$$

Поскольку $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$, то удобно сделать замену

$e^{i\varphi} = z$, $dz = ie^{i\varphi}\,d\varphi$, $d\varphi = \frac{dz}{ie^{i\varphi}} = \frac{dz}{iz}$.

Тогда $|z| = 1$ и интеграл по отрезку $[0, 2\pi]$ переходит в интеграл по единичной окружности на комплексной плоскости в положительном направлении:

$$I = \oint\limits_{|z|=1} f\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}.$$



Пример 3 (самостоятельно). Вычислить $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi - 5}$.

Заметим, что подынтегральная функция — вещественная и отрицательная, значит, в ответе должно получиться вещественное отрицательное число. Если получится что-либо иное, то в решении есть ошибка.

Сделав замену $e^{i\varphi} = z$, получим

$$I = \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - 5} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 10z + 1}.$$

Заметим, что на контуре интегрирования и в области, лежащей внутри него, подынтегральная функция является аналитической везде, за исключением нулей знаменателя. Найдём их:

$z^2 - 10z + 1 = 0.$

$\mathcal{D} = 100 - 4 = 96 = 6 \cdot 16.$

$$z = \frac{10 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6}.$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 10z + 1} = \frac{1}{\left(z - \left(5 + 2\sqrt{6}\right)\right)\left(z - \left(5 - 2\sqrt{6}\right)\right)}.$$

Итак, подынтегральная функция $f(z)$ имеет два полюса первого порядка, оба на вещественной оси. Причём один из них, $z_1 = 5 + 2\sqrt{6} > 1$, лежит снаружи контура интегрирования. А другой, $z_2 = 5 - 2\sqrt{6}$, лежит внутри, т. к. $2 < \sqrt{6} < 3$, и поэтому

$-1 < 5 - 2\sqrt{6} < 1.$

Тогда, согласно основной теореме теории вычетов,

$$I = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{res}\left[f(z), 5 - 2\sqrt{6}\right] = 4\pi \cdot \operatorname{res}\left[f(z), 5 - 2\sqrt{6}\right].$$

$$\operatorname{res}\left[f(z), 5 - 2\sqrt{6}\right] = \lim_{z \to 5 - 2\sqrt{6}} \left[\left(z - \left(5 - 2\sqrt{6}\right)\right) f(z)\right] = \lim_{z \to 5 - 2\sqrt{6}} \left(\frac{1}{z - \left(5 + 2\sqrt{6}\right)}\right) = -\frac{1}{4\sqrt{6}}.$$

Значит, $I = -\frac{\pi}{\sqrt{6}}$. Как мы и предполагали, интеграл равен вещественному отрицательному числу.

Ответ: $-\frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

Теперь рассмотрим несобственный интеграл вида

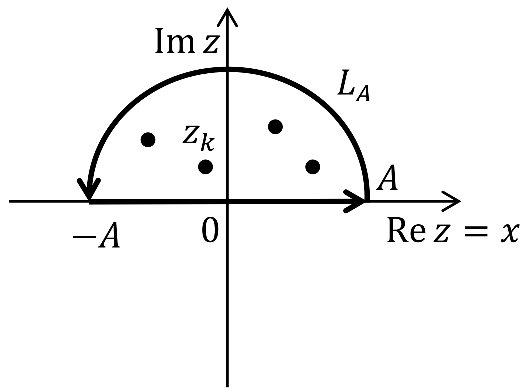
$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx,$$

где функция $f(x)$ непрерывна на всей вещественной оси. Пусть известно, что этот интеграл сходится, тогда он будет равен своему главному значению:

$$I = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\, dx.$$

Рассмотрим интеграл по конечному отрезку вещественной оси $[-A;\ A]$: $\int_{-A}^{A} f(x)\, dx$.

Предположим, что функция $f(x)$ допускает *аналитическое продолжение* с вещественной оси в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости, т. е. существует однозначная функция комплексной переменной $f(z)$, аналитическая при $\operatorname{Im} z \geq 0$, за исключением, быть может, конечного числа ИОТ $z_1, z_2, \dots, z_N$, лежащих в области $\operatorname{Im} z > 0$, и эта функция совпадает с $f(x)$ при $z = x \in \mathbb{R}$.



Отрезок вещественной оси $[-A;\ A]$ можно замкнуть полуокружностью L_A радиуса A с центром в нуле, расположенной в верхней полуплоскости.

При достаточно больших A все ИОТ функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, попадут внутрь замкнутого контура, составленного из отрезка вещественной оси $[-A;\ A]$ и полуокружности L_A.

Интеграл по замкнутому контуру вычисляется по основной теореме теории вычетов:

$$\int_{-A}^{A} f(x)\,dx + \int_{L_A} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z), z_k].$$

Перейдём в этом равенстве к пределу при $A \to +\infty$:

$$\underbrace{\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx}_{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx} + \lim_{A\to+\infty} \int_{L_A} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z), z_k].$$

Чтобы найти предел от интеграла по полуокружности $\int_{L_A} f(z)\,dz$, можно использовать следующую лемму.

Лемма. Пусть $f(z)$ — однозначная аналитическая функция при $|z| > R$ и $f(z) = O^*\left(\frac{1}{z^{1+\delta}}\right)$ при $z \to \infty$, где $\delta > 0$. Тогда

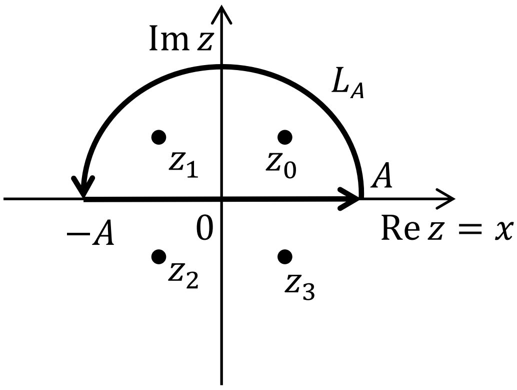
$$\lim_{A\to+\infty} \int_{L_A} f(z)\,dz = 0,$$

где L_A — любая дуга окружности радиуса A с центром в начале координат.

При выполнении условий леммы окончательно получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z), z_k].$$

Очевидно, что вместо верхней полуокружности можно было бы замыкать отрезок вещественной оси нижней полуокружностью, если подынтегральная функция допускает аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость.



Пример 4 (Волковыский № 4.140). Вычислить $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

При $x \to +\infty$ подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{1+x^4} = O^*\left(\frac{1}{x^4}\right)$, поэтому интеграл сходится. Его можно было бы вычислить методами матанализа первого курса, но это долго (через бета-функцию, правда, он выражается легко). Попробуем решить задачу методами ТФКП — этот способ более общий, он сгодится и тогда, когда интеграл через бета-функцию не выражается.

Заметим, что в ответе должно получиться вещественное положительное число, а если получится что-либо иное, то в решении допущена ошибка.

Поскольку подынтегральная функция — чётная, то

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Аналитическим продолжением подынтегральной функции в верхнюю полуплоскость является функция $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$. Замкнув отрезок $[-A;\ A]$ верхней полуокружностью L_A, получим интеграл по замкнутому контуру, который вычисляется по основной теореме теории вычетов:

$$\int\limits_{-A}^{A} \frac{dx}{1+x^4} + \int\limits_{L_A} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z), z_k],$$

где $z_1, z_2, \dots, z_N$ — ИОТ функции $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$, расположенные в верхней полуплоскости.

Найдём ОТ функции $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$, лежащие в верхней полуплоскости:

$z^4 = -1.$

$z_k = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{4}\right)}, k = 0, 1, 2, 3.$

$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \qquad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}, \qquad z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}}.$

В верхней полуплоскости лежат только z_0 и z_1, только они попадают внутрь контура.

Каждая из этих точек — ИОТ, нуль первого порядка для знаменателя, т. е. полюс первого порядка функции $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$.

Тогда

$$\int\limits_{-A}^{A} \frac{dx}{1+x^4} + \int\limits_{L_A} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \left(\operatorname{res}\left[\frac{1}{1+z^4}, e^{i\frac{\pi}{4}}\right] + \operatorname{res}\left[\frac{1}{1+z^4}, e^{i\frac{3\pi}{4}}\right]\right).$$

$$\operatorname{res}\left[\frac{1}{1+z^4}, e^{i\frac{\pi}{4}}\right] = \left.\frac{1}{(1+z^4)'}\right|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{4} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}.$$

$$\operatorname{res}\left[\frac{1}{1+z^4}, e^{i\frac{3\pi}{4}}\right] = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}} = \frac{e^{-i\frac{9\pi}{4}}}{4} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}.$$

Отсюда

$$\int_{-A}^{A} \frac{dx}{1+x^4} + \int_{L_A} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \left(\frac{-1-i}{4\sqrt{2}} + \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$\underbrace{\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \frac{dx}{1+x^4}}_{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}} + \lim_{A\to+\infty} \int_{L_A} \frac{dz}{1+z^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Согласно лемме, поскольку $f(z) = \frac{1}{1+z^4} = O^*\left(\frac{1}{z^4}\right)$ при $z \to \infty$, то $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_{L_A} \frac{dz}{1+z^4} = 0$.

Окончательно получаем

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

ДЗ 19. Волк № 4.116, 4.117, 4.120, 4.131, 4.141, 4.143.