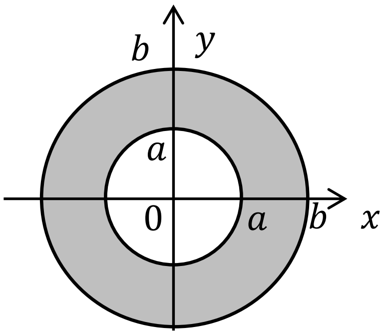
Семинар 7

Пример 1 (в кольце). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.:



$$\begin{cases} \triangle u + \lambda u = 0, \ a < r < b, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = 0. \end{cases}$$

Поскольку это задача Неймана, все её СЗ $\lambda \geq 0$.

Будем искать СФ в виде:

$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0.$

Подставив в ДУ и разделив переменные, получим:

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu.$$

Для функции $\Phi(\varphi)$ имеем задачу Ш.–Л.:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \nu\Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) \equiv \Phi(\varphi). \end{cases}$$

Её СЗ и СФ:

$\nu_n = n^2,$

$\Phi_0(\varphi) = 1, \qquad \Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi, n = 1, 2, \ldots, \qquad \Phi_{-n}(\varphi) = \sin n\varphi, n = 1, 2, \ldots$

Для функции $R(r)$ получим ДУ:

$r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0.$

Его ОР имеет вид:

$$R(r) = \begin{cases} A + B\ln r, & \lambda = n = 0, \\ Ar^n + Br^{-n}, \quad \lambda = 0, & n > 0, \\ AJ_n\big(\sqrt{\lambda}r\big) + BN_n\big(\sqrt{\lambda}r\big), \quad \lambda > 0, & n \geq 0. \end{cases}$$

Из ГУ получаем:

$R'(a) = 0, \qquad R'(b) = 0.$

а) При $\lambda = n = 0$ из ГУ имеем $B = 0$. Тогда с точностью до произвольного множителя получим

$R_{00}(r) = 1,$

$u_{00}(r,\varphi) = R_{00}(r)\Phi_0(\varphi) = 1$ — СФ, отвечающая СЗ $\lambda_0^{(0)} = 0;$

$\|u_{00}\|^2 = \pi(b^2 - a^2).$

б) При $\lambda = 0$, $n > 0$ с учётом ГУ получим только тривиальное решение (дома проверить).

в) При $\lambda > 0$ ГУ принимают вид:

$$\begin{cases} R'(a) = A\sqrt{\lambda}J_n'\big(\sqrt{\lambda}a\big) + B\sqrt{\lambda}N_n'\big(\sqrt{\lambda}a\big) = 0, \\ R'(b) = A\sqrt{\lambda}J_n'\big(\sqrt{\lambda}b\big) + B\sqrt{\lambda}N_n'\big(\sqrt{\lambda}b\big) = 0. \end{cases}$$

После сокращения на $\sqrt{\lambda}$ получим систему:

$$\begin{cases} AJ_n'\big(\sqrt{\lambda}a\big) + BN_n'\big(\sqrt{\lambda}a\big) = 0, \\ AJ_n'\big(\sqrt{\lambda}b\big) + BN_n'\big(\sqrt{\lambda}b\big) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Эта ОСЛАУ (относительно неизвестных констант A и B) будет иметь нетривиальные решения $\Leftrightarrow$ её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} J_n'\big(\sqrt{\lambda}a\big) & N_n'\big(\sqrt{\lambda}a\big) \\ J_n'\big(\sqrt{\lambda}b\big) & N_n'\big(\sqrt{\lambda}b\big) \end{vmatrix} = 0,$$

т.е.

$$\boxed{J_n'(\sqrt{\lambda}a)N_n'(\sqrt{\lambda}b) - J_n'(\sqrt{\lambda}b)N_n'(\sqrt{\lambda}a) = 0.} \qquad (2)$$

Можно показать, что это уравнение имеет счётное число положительных корней:

$\lambda_k^{(n)}, \qquad k = 1, 2, \ldots$

Все они будут являться СЗ задачи Ш.–Л.

При $\lambda = \lambda_k^{(n)}$ система (1) вырождена, и константы A, B определяются из любого из двух уравнений. Например, из первого:

$$AJ_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) + BN_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) = 0.$$

Тогда $B = -\frac{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}A$, где $A \neq 0$ — произвольное. Получим

$$R_{nk}(r) = A\left[J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right) - \frac{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\right].$$

Помня, что СФ всегда определяются с точностью до произвольного множителя, положим $A = N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)$. Тогда

$$\boxed{R_{nk}(r) = N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right) - J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right).}$$

Соответствующие СФ имеют вид:

$$\boxed{\begin{aligned}
&u_{0k}(r,\varphi) = R_{0k}(r)\Phi_0(\varphi) = N_0'\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}a\right)J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r\right) - J_0'\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}a\right)N_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r\right),\\
&u_{nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_n(\varphi) =\\
&= \left[N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right) - J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\right]\cos n\varphi, \qquad n = 1, 2, \ldots,\\
&u_{-nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_{-n}(\varphi) =\\
&= \left[N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right) - J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\right]\sin n\varphi, \qquad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}}$$

Вычислим квадрат нормы СФ:

$$\|u_{nk}\|^2 = \int_a^b r\,dr \int_0^{2\pi} u_{nk}^2(r,\varphi)\,d\varphi = \underbrace{\int_a^b rR_{nk}^2(r)\,dr}_{\|R_{nk}\|^2}\underbrace{\int_0^{2\pi} \Phi_n^2(\varphi)\,d\varphi}_{\|\Phi_n\|^2} = \|R_{nk}\|^2 \cdot \|\Phi_n\|^2 =$$

$$= \|R_{nk}\|^2 \cdot \pi(1 + \delta_{n0}).$$

Найдём

$$\|R_{nk}\|^2 = \int_a^b rR_{nk}^2(r)\,dr.$$

Сделаем замену: $\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r = t$. Тогда

$$\|R_{nk}\|^2 = \frac{1}{\lambda_k^{(n)}} \int\limits_{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a}^{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b} t R_{nk}^2\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\right) dt.$$

Обозначим $R_{nk}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\right) = Z_n(t)$. Заметим, что функция

$$Z_n(t) = N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J_n(t) - J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N_n(t)$$

является цилиндрической функцией n-го порядка (как линейная комбинация функций $J_n(t)$ и $N_n(t)$) по переменной t, поэтому для неё справедлива формула (см. пред. семинар):

$$\int tZ_n^2(t)\,dt = \frac{t^2}{2}\left[{Z_n'}^2(t) + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right)Z_n^2(t)\right] + \mathrm{const}.$$

Отсюда получаем:

$$\|R_{nk}\|^2 = \frac{1}{\lambda_k^{(n)}} \int\limits_{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a}^{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b} tZ_n^2(t)\,dt =$$

$$= \frac{b^2}{2}\left[{Z_n'}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}b^2}\right)Z_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)\right] -$$

$$-\frac{a^2}{2}\left[{Z_n'}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)Z_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\right] =$$

$$= \frac{b^2}{2}\left[\frac{{R_{nk}'}^2(b)}{\lambda_k^{(n)}} + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}b^2}\right)R_{nk}^2(b)\right] - \frac{a^2}{2}\left[\frac{{R_{nk}'}^2(a)}{\lambda_k^{(n)}} + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)R_{nk}^2(a)\right].$$

(Поскольку $Z_n'(t) = \frac{dZ_n}{dt} = \frac{d}{dt}R_{nk}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}R_{nk}'\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\right)$.)

С учётом условий Неймана $R_{nk}'(a) = 0$, $R_{nk}'(b) = 0$ получим

$$\|R_{nk}\|^2 = \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}b^2}\right)R_{nk}^2(b) - \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)R_{nk}^2(a).$$

Вычислим $R_{nk}(a)$:

$$R_{nk}(a) = N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) - J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) & N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) \\ J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) & N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) \end{vmatrix} = W[J_n(t), N_n(t)]\Big|_{t=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a}.$$

На лекциях был получен вронскиан

$$\boxed{W[J_n(t), N_n(t)] = \frac{2}{\pi t}.}$$

Поэтому

$$R_{nk}(a) = \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a}.$$

Теперь вычислим $R_{nk}(b)$:

$$R_{nk}(b) = N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) - J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right).$$

Из уравнения (2)

$$J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) - J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) = 0$$

выразим

$$N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) = \frac{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)}N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right).$$

Тогда

$$R_{nk}(b) = \frac{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)}N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) - J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) =$$

$$= \frac{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)}\left[N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right) - J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)\right] =$$

$$= \frac{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)}W[J_n(t), N_n(t)]\Big|_{t=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b} = \frac{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)} \cdot \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b}$$

Окончательно имеем:

$$\boxed{\|R_{nk}\|^2 = \frac{2}{\pi^2\lambda_k^{(n)}}\left[\frac{J_n'^{\,2}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{J_n'^{\,2}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)}\left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}b^2}\right) - \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)\right].}$$

Ответ: $\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения

$J_n'(\sqrt{\lambda}a)N_n'(\sqrt{\lambda}b) - J_n'(\sqrt{\lambda}b)N_n'(\sqrt{\lambda}a) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots,$

$\lambda_0^{(0)} = 0;$

$$u_{0k}(r,\varphi) = N_0'\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}a\right)J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r\right) - J_0'\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}a\right)N_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r\right),$$

$$u_{nk}(r,\varphi) = \left[N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right) - J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\right]\cos n\varphi\,, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

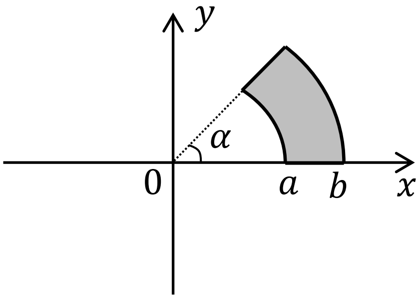
$$u_{-nk}(r,\varphi) = \left[N_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right) - J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)N_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\right]\sin n\varphi\,, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

$u_{00}(r,\varphi) = 1;$

$$\|u_{nk}\|^2 = \frac{2(1+\delta_{n0})}{\pi\lambda_k^{(n)}}\left[\frac{J_n'^{\,2}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)}{J_n'^{\,2}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b\right)}\left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}b^2}\right) - \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)\right], \qquad k = 1, 2, \dots,$$

$\|u_{00}\|^2 = \pi(b^2 - a^2).$

Пример 2 (в кольцевом секторе). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.:



$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \qquad a < r < b, \qquad 0 < \varphi < \alpha, \\ \text{однородные ГУ при } r = a, r = b, \varphi = 0, \varphi = \alpha. \end{cases}$$

Будем искать СФ в виде:

$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0.$

Подставив в ДУ и разделив переменные, получим:

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu.$$

Для функции $\Phi(\varphi)$ имеем задачу Ш.–Л.:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \nu\Phi(\varphi) = 0, \qquad 0 < \varphi < \alpha, \\ \text{однородные ГУ при } \varphi = 0, \varphi = \alpha. \end{cases}$$

Она имеет СЗ ν_n и СФ $\Phi_n(\varphi)$.

Для функции $R(r)$ получим ДУ:

$r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \nu_n)R(r) = 0.$

Его ОР имеет вид:

$$R(r) = \begin{cases} A + B\ln r\,, \qquad \lambda = \nu_n = 0, \\ Ar^{\sqrt{\nu_n}} + Br^{-\sqrt{\nu_n}}, \qquad \lambda = 0, \qquad \nu_n > 0, \\ AJ_{\sqrt{\nu_n}}\big(\sqrt{\lambda}r\big) + BN_{\sqrt{\nu_n}}\big(\sqrt{\lambda}r\big), \qquad \lambda > 0, \qquad \nu_n \geq 0. \end{cases}$$

СЗ $\lambda_k^{(n)}$ и неизвестные коэффициенты A, B находятся из однородных ГУ при $r = a$, $r = b$.

Квадраты норм СФ находятся аналогично случаю кольца.

ДЗ 7. БК с. 63 № 4, 5(а,в,д) (найти СЗ, СФ и $\|u_{nk}\|^2$).

В след. раз — к/р.