Семинар 5

Числовые ряды

Пусть $\{a_n\}$ — произвольная числовая последовательность. Тогда выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (*)$$

называется *числовым рядом.*

a_n — *члены* ряда.

$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ — *частичная сумма* ряда.

$\{S_N\}$ — последовательность частичных сумм.

Если $\exists\, S = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$ (*конечный* предел), то ряд (*) *сходится.* В противном случае ряд (*) *расходится.*

S — *сумма* ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, и наоборот, т. е. *конечное* число членов ряда на сходимость не влияют.

Числовые ряды используются для различных приближённых вычислений, приближённого решения уравнений и др.

Пример 1 (Демидович № 2550). Доказать, что ряд сходится, и найти его сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Разложим общий член ряда на простые дроби:

$$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1}.$$

Коэффициенты A и B находим методом вычёркивания (или любым другим способом):

$$A = \left.\frac{1}{3n+1}\right|_{n=\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}.$$

$$B = \left.\frac{1}{3n-2}\right|_{n=-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}.$$

$$a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right).$$

Теперь найдём частичную сумму ряда:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10}-\frac{1}{13}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3N-2}-\frac{1}{3N+1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3N+1}\right).$$

Вычислим предел последовательности частичных сумм:

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3N+1}\right) = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, ряд сходится и его сумма $S = \frac{1}{3}$.

Ответ: $S = \frac{1}{3}$.

Из критерия Коши для последовательностей следует критерий Коши для рядов:

Критерий Коши (необходимое и достаточное условие сходимости). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}\ \ \left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$.

Из критерия Коши следует (если взять $p = 1$)

Необходимое условие сходимости (НУС): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Оно *не является достаточным*. Например, *гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

— расходится (см. ниже пример 5), хотя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Т. е. для сходимости ряда его члены должны не просто стремиться к нулю, а стремиться к нулю *достаточно быстро*.

Пример 2 (Демидович № 2561, все вместе). Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \cdots + \frac{n}{2n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}.$$

Проверим выполнение НУС:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится.

Ответ: расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость и найти сумму $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ — бесконечной *геометрической прогрессии* (здесь $q \in \mathbb{R}$ — параметр: *знаменатель* геометрической прогрессии).

Сначала проверим выполнение НУС:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 \text{ при } |q| < 1, \\ \infty \text{ при } |q| > 1, \\ 1 \text{ при } q = 1, \\ \nexists \text{ при } q = -1. \end{cases}$$

Значит, при $|q| \geq 1$ ряд расходится. При $|q| < 1$ он *может* сходиться (но может и расходиться — требуется дальнейшее исследование).

Докажем, что ряд сходится при $|q| < 1$. Вычислим его частичную сумму:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} q^n = q\,\frac{1-q^N}{1-q}.$$

Эта формула выводится следующим образом:

$S_N = q + q^2 + \cdots + q^N$,

$qS_N = q^2 + q^3 + \cdots + q^{N+1}$, откуда

$S_N - qS_N = q - q^{N+1}$, т. е.

$S_N = \frac{q-q^{N+1}}{1-q} = q\,\frac{1-q^N}{1-q}$.

Следовательно,

$\lim\limits_{N\to\infty} S_N = \lim\limits_{N\to\infty} q\,\frac{1-q^N}{1-q} = \frac{q}{1-q} \Rightarrow$ ряд сходится и его сумма равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}.$$

Итак, бесконечная геометрическая прогрессия $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ при $|q| < 1$ сходится к $\frac{q}{1-q}$, при $|q| \geq 1$ — расходится. Запомним этот важный результат.

Ответ: при $|q| < 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$, при $|q| \geq 1$ расходится.

Пример 4 (задача к общему зачёту № 9.2 б). Пользуясь критерием Коши, докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}$ сходится.

Нам нужно доказать, что

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$ $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$.

Сделаем оценку сверху:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos x^k}{k^2}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left|\frac{\cos x^k}{k^2}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k-1)} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $N = N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \varepsilon,$$

ч. т. д.

Пример 5 (задача к общему зачёту № 9.3 в). Пользуясь критерием Коши, докажите, что гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Согласно критерию Коши, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится $\Leftrightarrow$ $\exists\varepsilon>0$: $\forall N$ $\exists n>N$, $\exists p\in\mathbb{N}$: $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|\geq\varepsilon$.

Сделаем оценку снизу:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}\right|=\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\geq$$

$$\geq\underbrace{\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+p}+\cdots+\frac{1}{n+p}}_{p\text{ штук}}=\frac{p}{n+p}.$$

Выберем $p=n$, тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}\right|\geq\frac{p}{n+p}=\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2}.$$

Итак,

$\exists\varepsilon=\frac{1}{2}>0$: $\forall N$ $\exists n>N$, $\exists p=n\in\mathbb{N}$: $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}\right|\geq\frac{1}{2}=\varepsilon$, ч. т. д.

В качестве n можно взять любое натуральное число, большее N.

Продемонстрировать расходимость гармонического ряда можно и “на пальцах”:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)}_{>\frac{1}{2}}+\cdots>$$

$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty.$$

ДЗ 5. Демидович 1997 г. (2003 г.) № 2549, 2552, 2556, 2557, 2574, 2577 (2577 а).