Семинар 20

Уравнение Гельмгольца

Уравнением Гельмгольца (однородным) называется следующее уравнение:
$\Delta u(M) + cu(M) = 0,$
где $c \neq 0$ — заданный коэффициент. Мы будем рассматривать только $c = \mathrm{const}$.
Если $c > 0$, то уравнение Гельмгольца называется волновым и записывается в виде:
$\Delta u(M) + k^2 u(M) = 0, \qquad k > 0.$
Если $c < 0$, то уравнение Гельмгольца называется неволновым и записывается в виде:
$\Delta u(M) - \varkappa^2 u(M) = 0, \qquad \varkappa > 0.$

Вывод уравнения Гельмгольца

Посмотрим, в каких задачах возникает уравнение Гельмгольца.
Если искать решение однородного уравнения колебаний
$\tilde{u}_{tt} = a^2 \Delta \tilde{u}$
в виде установившихся колебаний частоты ω:
$\tilde{u}(M,t) = u(M)e^{i\omega t},$
то при подстановке в уравнение колебаний получим:
$-\omega^2 u(M)e^{i\omega t} = a^2 \Delta u(M)e^{i\omega t},$
и после сокращения на $e^{i\omega t}$ будет

$$\Delta u(M) + \underbrace{\frac{\omega^2}{a^2}}_{k^2>0} u(M) = 0$$

— волновое уравнение Гельмгольца. Ему удовлетворяет амплитуда установившихся колебаний.
Теперь рассмотрим процесс диффузии, который, как мы знаем, описывается уравнением теплопроводности:
$u_t = d \Delta u + f,$
где $d > 0$ — коэффициент диффузии, $f(M,t)$ — удельная мощность источников вещества, $u(M,t)$ — концентрация вещества.
В качестве диффундирующего вещества рассмотрим неустойчивый (радиоактивный) газ. Он распадается со скоростью, пропорциональной концентрации:
$f = -\gamma u, \qquad \gamma > 0.$
Тогда
$u_t = d \Delta u - \gamma u.$
Предположим, что концентрация стабилизировалась (стационарный процесс диффузии), т.е. $u_t = 0$. Тогда
$d \Delta u - \gamma u = 0,$
откуда

$$\Delta u - \underbrace{\frac{\gamma}{d}}_{\varkappa^2>0} u = 0$$

— неволновое уравнение Гельмогольца, описывающее стационарную диффузию неустойчивого газа.

Внутренние задачи для уравнения Гельмгольца

Мы будем решать краевые задачи для уравнения Гельмгольца методом разделения переменных. Сначала находятся ЧР уравнения Гельмгольца в данной области (методом разделения переменных, подобно тому, как мы это делали для уравнения Лапласа), а затем решение краевой задачи ищется в виде суммы всех найденных ЧР с неизвестными коэффициентами, которые определяются из ГУ.
Для примера выпишем ЧР уравнения Гельмгольца в круге, кольце, шаре и шаровом слое.

I. ЧР уравнения Гельмгольца в круге и кольце (в полярных координатах).

1. Волновое уравнение Гельмгольца: $\Delta u + k^2 u = 0$.
   Если обозначить $\lambda = k^2$, то мы получим
   $\Delta u + \lambda u = 0$
   — уравнение такого же вида, как и в задаче Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа (причем $\lambda > 0$). Отличие от задачи Штурма–Лиувилля в том, что коэффициент k^2 в уравнении Гельмгольца задан изначально, а в задаче Штурма–Лиувилля коэффициент λ требуется найти.
   Мы уже получили ЧР такого ДУ в полярных координатах на семинаре 6:
   $$\boxed{u_{\pm n}(r,\varphi) = \Bigg[A_{\pm n} \underbrace{J_n(kr)}_{\text{огр. при } r\to 0} + B_{\pm n} \underbrace{N_n(kr)}_{\text{неогр. при } r\to 0}\Bigg] \Phi_{\pm n}(\varphi), \qquad n = 0, 1, \ldots,} \qquad (1)$$
   где
   $\Phi_0(\varphi) = 1, \qquad \Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi, \qquad \Phi_{-n}(\varphi) = \sin n\varphi, \qquad n = 1, 2, \ldots$
   В кольце ($a < r < b$) ЧР волнового уравнения Гельмгольца имеют вид (1), в круге ($0 \le r < a$) надо положить $B_{\pm n} = 0$.
2. Неволновое уравнение Гельмгольца: $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$.
   Если обозначить $\lambda = \varkappa^2$, то мы получим
   $\Delta u - \lambda u = 0$
   — уравнение такого же вида, какой получается при решении уравнения Лапласа в цилиндре (см. семинар 12), причём $\lambda > 0$. Его ЧР:
   $$\boxed{u_{\pm n}(r,\varphi) = \Bigg[A_{\pm n} \underbrace{I_n(\varkappa r)}_{\text{огр. при } r\to 0} + B_{\pm n} \underbrace{K_n(\varkappa r)}_{\text{неогр. при } r\to 0}\Bigg] \Phi_{\pm n}(\varphi), \qquad n = 0, 1, \ldots} \qquad (2)$$
   В кольце ($a < r < b$) ЧР неволнового уравнения Гельмгольца имеют вид (2), в круге ($0 \le r < a$) надо положить $B_{\pm n} = 0$.

II. ЧР уравнения Гельмгольца в шаре и шаровом слое (в сферических координатах).

1. Волновое уравнение Гельмгольца: $\Delta u + k^2 u = 0$
   — уравнение такого же вида, как в задаче Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа. Его ЧР в сферических координатах имеют вид (см. семинар 9):
   $$u_{nm}(r,\theta,\varphi) = \Bigg[A_n \underbrace{\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}}_{\text{огр. при } r\to 0} + B_n \underbrace{\frac{N_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}}_{\text{неогр. при } r\to 0}\Bigg] Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \qquad n = 0, 1, \ldots,$$
   $m = 0, \pm 1, \ldots, \pm n,$ (3)
   где $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ — сферические функции.
   В шаровом слое ($a < r < b$) ЧР волнового уравнения Гельмгольца имеют вид (3), в шаре ($0 \le r < a$) надо положить $B_n = 0$.

2. Неволновое уравнение Гельмгольца: $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$.

Аналогично:

$$u_{nm}(r,\theta,\varphi) = \left[A_n \underbrace{\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r)}{\sqrt{r}}}_{\text{огр. при } r\to 0} + B_n \underbrace{\frac{K_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r)}{\sqrt{r}}}_{\text{неогр. при } r\to 0} \right] Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \qquad n = 0, 1, \dots,$$

$m = 0, \pm 1, \dots, \pm n$. (4)

В шаровом слое ($a < r < b$) ЧР волнового уравнения Гельмгольца имеют вид (4), в шаре ($0 \le r < a$) надо положить $B_n = 0$.

Пример 1 (задача Дирихле в круге для волнового уравнения Гельмгольца). Решить краевую задачу для волнового уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, \qquad 0 \le r < a, \\ u|_{r=a} = f(\varphi). \end{cases}$$

Будем искать решение задачи в виде суммы выписанных выше ЧР волнового уравнения Гельмгольца в полярных координатах, ограниченных при $r \to 0$:

$$u(r,\varphi) = A_0 J_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(kr)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Подставим в ГУ:

$$u|_{r=a} = A_0 J_0(ka) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ka)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f(\varphi) =$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi),$$

где

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi, \qquad C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi, \qquad D_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi,$$

$n = 1, 2, \dots$

Приравняв соответствующие коэффициенты при $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$, получим систему уравнений:

$A_0 J_0(ka) = C_0, \qquad A_n J_n(ka) = C_n, \qquad B_n J_n(ka) = D_n, \qquad n = 1, 2, \dots$ (5)

Рассмотрим два случая.

1) Пусть k^2 не является СЗ задачи Ш.–Л. в круге:

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v = 0, \qquad 0 \le r < a, \\ v|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

Тогда $J_n(ka) \ne 0$ при всех n, и коэффициенты определяются однозначно:

$$A_0 = \frac{C_0}{J_0(ka)}, \qquad A_n = \frac{C_n}{J_n(ka)}, \qquad B_n = \frac{D_n}{J_n(ka)}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

В этом случае исходная краевая задача для уравнения Гельмгольца имеет единственное решение:

$$u(r,\varphi) = C_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(kr)}{J_n(ka)}(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi).$$

2) Пусть k^2 совпадает с одним из СЗ задачи Ш.–Л. в круге:

$$\begin{cases}\Delta\, v + \lambda v = 0, & 0 \le r < a,\\ v|_{r=a} = 0.\end{cases}$$
СФ, отвечающие этому СЗ, имеют вид: $J_{n_0}(kr)\cos n_0\varphi$, $J_{n_0}(kr)\sin n_0\varphi$ для некоторого номера n_0, причём $J_{n_0}(ka) = 0$.
Тогда из системы (5) однозначно определяются коэффициенты A_n, B_n для всех n, кроме n_0. При $n = n_0$ имеем:
$$A_{n_0}\underbrace{J_{n_0}(ka)}_{0} = C_{n_0}, \qquad B_{n_0}\underbrace{J_{n_0}(ka)}_{0} = D_{n_0}.$$
Здесь есть два варианта.

а) $C_{n_0} = D_{n_0} = 0$. Тогда коэффициенты A_{n_0} и B_{n_0} остаются произвольными, и исходная краевая задача имеет бесконечно много решений:
$$u(r,\varphi) =$$
$$= C_0\frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} + \sum_{\substack{n=1\\ n\ne n_0}}^{\infty}\frac{J_n(kr)}{J_n(ka)}(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi) +$$
$$+ J_{n_0}(kr)\big(A_{n_0}\cos n_0\varphi + B_{n_0}\sin n_0\varphi\big).$$

б) Если $C_{n_0} \ne 0$ или $D_{n_0} \ne 0$, то исходная краевая задача *не имеет решений.*

Пример 2 (задача Дирихле в круге для неволнового уравнения Гельмгольца). Решить краевую задачу для неволнового уравнения Гельмгольца в круге:
$$\begin{cases}\Delta\, u - \varkappa^2 u = 0, & 0 \le r < a,\\ u|_{r=a} = f(\varphi).\end{cases}$$
Будем искать решение задачи в виде суммы выписанных выше ЧР неволнового уравнения Гельмгольца в полярных координатах, ограниченных при $r \to 0$:
$$u(r,\varphi) = A_0 I_0(\varkappa r) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\varkappa r)(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi).$$
Подставим в ГУ:
$$u|_{r=a} = A_0 I_0(\varkappa a) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\varkappa a)(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) = f(\varphi) =$$
$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi),$$
где
$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi\,, \qquad C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi\,, \qquad D_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi\,,$$
$n = 1, 2, \dots$

Приравняв коэффициенты при $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$, получим систему уравнений:
$$A_0 I_0(\varkappa a) = C_0, \qquad A_n I_n(\varkappa a) = C_n, \qquad B_n I_n(\varkappa a) = D_n, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{6}$$
Могут ли здесь числа $I_n(\varkappa a)$ оказаться равны нулю? Предположим, что для некоторого номера n_0 число $I_{n_0}(\varkappa a)$ оказалось равно нулю. Тогда функции $I_{n_0}(\varkappa a)\sin n_0\varphi$ и $I_{n_0}(\varkappa a)\cos n_0\varphi$ являются СФ задачи Ш.–Л. в круге
$$\begin{cases}\Delta\, v + \lambda v = 0, & 0 \le r < a,\\ v|_{r=a} = 0,\end{cases}$$

отвечающими СЗ $\lambda = -\varkappa^2$. Но это невозможно, т.к. все СЗ задачи Дирихле положительны. Полученное противоречие доказывает, что $I_n(\varkappa a) \neq 0,\ n = 0, 1, \dots$
Тогда из системы (6) неизвестные коэффициенты определяются однозначно:

$$A_0 = \frac{C_0}{I_0(\varkappa a)}, \qquad A_n = \frac{C_n}{I_n(\varkappa a)}, \qquad B_n = \frac{D_n}{I_n(\varkappa a)}, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

и в этом случае исходная краевая задача имеет единственное решение:

$$u(r,\varphi) = C_0 \frac{I_0(\varkappa r)}{I_0(\varkappa a)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(\varkappa r)}{I_n(\varkappa a)} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi).$$

Пример 3 (дополнительный, самостоятельно). Решить краевую задачу для волнового уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta\, u + k^2 u = 0, & 0 \le r < a, \\ u|_{r=a} = \sin^3 \varphi\,, \end{cases}$$

где $k^2 = \lambda_1^{(0)}$ — первый положительный корень уравнения $J_0\big(\sqrt{\lambda} a\big) = 0$.
Будем искать решение задачи в виде:

$$u(r,\varphi) = A_0 J_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(kr)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Подставим в ГУ:

$$u|_{r=a} = A_0 \underbrace{J_0(ka)}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ka)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \sin^3 \varphi = \frac{3\sin\varphi - \sin 3\varphi}{4},$$

откуда

$$B_1 = \frac{3}{4J_1(ka)}, \qquad B_3 = -\frac{1}{4J_3(ka)}, \qquad A_0 \text{ — произвольное,}$$

а остальные коэффициенты равны нулю.
(Мы будем пользоваться без доказательства тем фактом, что функции Бесселя разного порядка не имеют совпадающих корней, поэтому $J_1(ka) \neq 0$ и $J_3(ka) \neq 0$, если $J_0(ka) = 0$.)
Таким образом, решение исходной краевой задачи:

$$\boxed{u(r,\varphi) = \frac{3J_1(kr)}{4J_1(ka)} \sin\varphi - \frac{J_3(kr)}{4J_3(ka)} \sin 3\varphi + A_0 J_0(kr).}$$

ДЗ20. Решить краевые задачи для уравнения Гельмгольца:

1) в круге

$$\begin{cases} \Delta\, u + k^2 u = 0, & 0 \le r < 1, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \sin\varphi + \cos^2 \varphi\,, \end{cases}$$

где $k^2 = \lambda_1^{(3)}$ — первый положительный корень уравнения $J_3'\big(\sqrt{\lambda}\big) = 0$;

2) в круге

$$\begin{cases} \Delta\, u - \varkappa^2 u = 0, & 0 \le r < a, \\ u|_{r=a} = \operatorname{sgn} \varphi\,, & -\pi < \varphi \le \pi; \end{cases}$$

3) в круговом секторе

$$\begin{cases} \Delta u - \varkappa^2 u = 0, \qquad 0 < r < a, \qquad 0 < \varphi < \pi, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 1, \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\pi} = 0; \end{cases}$$

4) в кольце

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, \qquad a < r < b, \\ u|_{r=a} = \cos\varphi, \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = 0; \end{cases}$$

5) в шаре

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, \qquad 0 \le r < a, \\ u|_{r=a} = \cos 2\theta + \sin\theta \sin\varphi; \end{cases}$$

6) в шаровом слое

$$\begin{cases} \Delta u - \varkappa^2 u = 0, \qquad a < r < b, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = 1. \end{cases}$$

В след. раз — к/р.