Семинар 7

Система линейных однородных ОДУ 1-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $x_1(t)$, …, $x_n(t)$ — неизвестные функции, a_{ij} — постоянные коэффициенты, $\dot{x}_k = \frac{dx_k}{dt}$.

Методы решения системы (1).

1. Исключение неизвестных функций. Путём последовательного исключения неизвестных функций систему сводят к одному уравнению n-го порядка с одной неизвестной функцией или к нескольким уравнениям меньшего порядка, каждое из которых содержит только одну неизвестную функцию.

Пример 1 (Филиппов № 857). Решить систему: $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = -2x - y + 2z, \\ \dot{z} = -3x - 2y + 3z. \end{cases}$

Выразив функцию z из первого уравнения, подставим её во второе и третье уравнение:

$$\begin{cases} z = \dfrac{\dot{x}}{2} + \dfrac{x}{2} + y, \\ \dot{y} = -x + y + \dot{x}, \\ \dfrac{\ddot{x}}{2} + \dot{y} = -\dfrac{3x}{2} + y + \dot{x}. \end{cases}$$

Теперь исключим функцию y, вычтя из третьего уравнения второе:

$$\begin{cases} z = \dfrac{\dot{x}}{2} + \dfrac{x}{2} + y, \\ \dot{y} - \dot{x} = y - x, \\ \dfrac{\ddot{x}}{2} = -\dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

Третье уравнение $\ddot{x} + x = 0$ имеет общее решение

$x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Найденную функцию $x(t)$ можно подставить во второе уравнение и определить $y(t)$. Но в данном случае удобнее поступить иначе. Сделаем во втором уравнении замену

$y - x = u(t)$. Тогда оно принимает вид $\dot{u} = u$, откуда

$u(t) = C_3 e^t, \qquad C_3 \in \mathbb{R},$

т. е. $y - x = C_3 e^t$, и

$y(t) = x + C_3 e^t = C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3 e^t.$

Теперь из первого уравнения:

$$z(t) = \frac{\dot{x}}{2} + \frac{x}{2} + y = \frac{C_1}{2}(\cos t + 3\sin t) + \frac{C_2}{2}(3\cos t - \sin t) + C_3 e^t.$$

Ответ: $\begin{cases} x = C_1 \sin t + C_2 \cos t, \\ y = C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3 e^t, \\ z = \frac{C_1}{2}(\cos t + 3\sin t) + \frac{C_2}{2}(3\cos t - \sin t) + C_3 e^t, \end{cases} \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

2. Построение ФСР.

Запишем однородную систему (1) в матричном виде:

$$\boxed{\dot{X} = AX,} \qquad (2)$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных функций, $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — постоянная матрица.

Решения системы (2) образуют ЛП размерности n, поэтому ОР системы (2) имеет вид:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k X_k(t), \qquad C_k \in \mathbb{R},$$

где $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ — ФСР (ФСР образуют любые n ЛНЗ решений системы (2)).

Пусть $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ — некоторые решения системы (2). На столбцах $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ можно построить определитель $W(t)$ — вронскиан.

Т. Если n решений системы (2) — ЛЗ, то $W(t) \equiv 0$. Если они ЛНЗ, то $W(t) \neq 0$ во всех точках.

Чтобы построить ФСР, будем искать ЧР системы (2) в виде $X(t) = Te^{\lambda t}$, где T — постоянный ненулевой столбец. Подставив в (2), получим

$$\lambda T e^{\lambda t} = AT e^{\lambda t},$$

откуда

$$AT = \lambda T.$$

Таким образом, T — СВ матрицы A, а λ — её СЗ, т. е. корни ХУ:

$$\det(A - \lambda E) = 0. \qquad (3)$$

Случай простых корней. Пусть все корни λ_j — простые. Тогда каждому корню λ_j соответствует ЧР системы (2) вида $X_j(t) = T_j e^{\lambda_j t}$, где T_j — некоторый СВ матрицы A, соответствующий СЗ λ_j:

$$\left(A - \lambda_j E\right) T_j = \theta, \qquad T_j \neq \theta.$$

Всего получится n ЛНЗ ЧР, которые образуют ФСР.

Если есть комплексно сопряжённые корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то им соответствуют комплексно сопряжённые ЧР:

если $X_+(t)$ — решение для $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, то

$X_-(t)$ — решение для $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, где

$\operatorname{Re} X_- = \operatorname{Re} X_+$, $\operatorname{Im} X_- = -\operatorname{Im} X_+$.

Тогда два ЛНЗ *вещественных* решения, соответствующих корням ХУ $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, можно взять в виде:

$X_1(t) = \operatorname{Re} X_+(t)$, $X_2(t) = \operatorname{Im} X_+(t)$.

Пример 2. Решим систему из примера 1: $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = -2x - y + 2z, \\ \dot{z} = -3x - 2y + 3z. \end{cases}$

Запишем её в матричном виде:

$\dot{X} = AX$, где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Найдём корни ХУ:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & -2 & 2\\ -2 & -1-\lambda & 2\\ -3 & -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1+\lambda & 0\\ -2 & -1-\lambda & 2\\ -3 & -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=$$
$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ -2 & -1-\lambda & 2\\ -3 & -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ -2 & -3-\lambda & 2\\ -3 & -5 & 3-\lambda\end{vmatrix}=$$
$$=-(\lambda-1)[(-3-\lambda)(3-\lambda)+10]=-(\lambda-1)(\lambda^2+1)=0.$$
$\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=\pm i.$

Все корни имеют кратность 1.

1) Найдём ЧР, отвечающее $\lambda_1=1$. Это $X_1(t)=T_1e^{\lambda_1 t}$, где $T_1=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$ — СВ:

   $(A-\lambda_1 E)T_1=\theta.$
   $$\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 2\\ -3 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$
   Решим ОСЛАУ методом Гаусса:
   $$\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 2\\ -3 & -2 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$
   $$\begin{cases}b_1=0,\\ b_2=b_3.\end{cases}$$
   ОР: $b_3=C,b_1=0,b_2=C.$

   Тогда все СВ, отвечающие СЗ $\lambda_1=1$, имеют вид:
   $$T_1=C\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\qquad C\neq 0.$$
   Пусть $C=1$, тогда $T_1=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, и получим ЧР:
   $$X_1(t)=T_1e^t=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}e^t.$$

2) Для комплексно сопряжённых корней $\lambda_{2,3}=\pm i$ имеем ЧР: $X_2(t)=\operatorname{Re}X_+(t)$, $X_3(t)=\operatorname{Im}X_+(t)$, где $X_+(t)=T_+e^{it}$, $T_+=\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{pmatrix}$ — СВ, отвечающий $\lambda_2=i$:

   $(A-iE)T_+=\theta.$
   $$\begin{pmatrix}-1-i & -2 & 2\\ -2 & -1-i & 2\\ -3 & -2 & 3-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$
   $$\begin{pmatrix}-1-i & -2 & 2\\ -2 & -1-i & 2\\ -3 & -2 & 3-i\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1-i & -2 & 2\\ 1 & 1-i & -1+i\\ -3 & -2 & 3-i\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1-i & -1+i\\ -1-i & -2 & 2\\ -3 & -2 & 3-i\end{pmatrix}\sim$$
   $$\sim\begin{pmatrix}1 & 1-i & -1+i\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-3i & 2i\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1-i & -1+i\\ 0 & 1-3i & 2i\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1-i & -1+i\\ 0 & 1 & \dfrac{-3+i}{5}\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{-3+i}{5} \\ 0 & 1 & \dfrac{-3+i}{5} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} d_1 = \dfrac{3-i}{5} d_3, \\ d_2 = \dfrac{3-i}{5} d_3. \end{cases}$$

ОР: $d_3 = C$, $d_1 = \frac{3-i}{5} C$, $b_2 = \frac{3-i}{5} C$.

Тогда все СВ, отвечающие СЗ $\lambda_2 = i$, имеют вид:

$$T_+ = C\begin{pmatrix} \dfrac{3-i}{5} \\ \dfrac{3-i}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C \neq 0.$$

Пусть $C = 5$, тогда $T_+ = \begin{pmatrix} 3-i \\ 3-i \\ 5 \end{pmatrix}$, и соответствующее ЧР:

$$X_+(t) = T_+ e^{it} = \begin{pmatrix} 3-i \\ 3-i \\ 5 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 3-i \\ 3-i \\ 5 \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cos t - i\cos t + 3i \sin t + \sin t \\ 3\cos t - i\cos t + 3i \sin t + \sin t \\ 5\cos t + 5i \sin t \end{pmatrix},$$

$$X_2(t) = \operatorname{Re} X_+(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t + \sin t \\ 3\cos t + \sin t \\ 5\cos t \end{pmatrix}, \qquad X_3(t) = \operatorname{Im} X_+(t) = \begin{pmatrix} -\cos t + 3\sin t \\ -\cos t + 3\sin t \\ 5\sin t \end{pmatrix}.$$

Проверим линейную независимость решений $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$. Для этого вычислим вронскиан:

$$W(t) = \begin{vmatrix} 0 & 3\cos t + \sin t & -\cos t + 3\sin t \\ e^t & 3\cos t + \sin t & -\cos t + 3\sin t \\ e^t & 5\cos t & 5\sin t \end{vmatrix} = -5e^t \neq 0.$$

Значит, решения $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$ — ЛНЗ и образуют ФСР. Тогда ОР системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$, где $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3\cos t + \sin t \\ 3\cos t + \sin t \\ 5\cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -\cos t + 3\sin t \\ -\cos t + 3\sin t \\ 5\sin t \end{pmatrix}$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Ответ совпадает с полученным в примере 1 с точностью до обозначения произвольных констант.

Случай кратных корней. Если есть кратные корни ХУ (3), то для построения ФСР каждому корню должно соответствовать такое количество ЛНЗ ЧР, какова кратность корня.

1) Пусть λ — корень ХУ (3) кратности p. Если ему соответствует p ЛНЗ СВ $T_1, \ldots, T_p$, т. е. геометрическая кратность СЗ λ совпадает с алгебраической, то получаем p ЛНЗ ЧР: $T_1 e^{\lambda t}, \ldots, T_p e^{\lambda t}$.
2) Пусть λ — корень ХУ (3) кратности p, но ему соответствует $s < p$ ЛНЗ СВ, т. е. геометрическая кратность СЗ λ меньше алгебраической. В этом случае СВ не хватает

для построения p ЛНЗ ЧР. Тогда можно строить ЧР методом неопределённых коэффициентов в виде

$$X(t) = \begin{pmatrix} P_{p-s}(t) \\ Q_{p-s}(t) \\ \vdots \\ R_{p-s}(t) \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

где $P_{p-s}(t)$, $Q_{p-s}(t)$, …, $R_{p-s}(t)$ — многочлены степени $p-s$.

После подстановки этого столбца в систему (2) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях t должна получиться система уравнений для определения коэффициентов многочленов, общее решение которой зависит от p произвольных констант, что и даёт нам p ЛНЗ ЧР уравнения (2).

Пример 3. Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

Здесь $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найдём корни ХУ:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -2\lambda + \lambda^2 + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Имеем единственный корень $\lambda = 1$ кратности $p = 2$. Определим количество ЛНЗ СВ. Если T — СВ, то он удовлетворяет уравнению

$$(A - \lambda E)T = \theta,$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} T = \theta.$$

Поскольку ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ равен $r = 1$, то число ЛНЗ СВ равно $n - r = 2 - 1 = 1$.

Значит, геометрическая кратность СЗ $\lambda = 1$ равна $s = 1$, и мы должны искать ЧР в виде

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ Q_1(t) \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \end{pmatrix} e^t.$$

Подставив $x(t) = (at + b)e^t$, $y(t) = (ct + d)e^t$ в исходную систему ОДУ, получим:

$$\begin{cases} (at + a + b)e^t = 2(at + b)e^t - (ct + d)e^t, \\ (ct + c + d)e^t = (at + b)e^t. \end{cases}$$

Сократив на e^t и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t, получим систему:

$$\begin{cases} a = 2a - c, \\ a + b = 2b - d, \\ c = a, \\ c + d = b, \end{cases}$$

которая имеет ОР: $c = a$, $b = a + d$, a и d — произвольные. При $a = 1$, $d = 0$ получаем ЧР

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} t + 1 \\ t \end{pmatrix} e^t,$$

при $a = 0$, $d = 1$ получаем ЧР

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

ФСР системы состоит из двух ЛНЗ ЧР: $X_1(t)$, $X_2(t)$. Тогда ОР исходной системы:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} t + 1 \\ t \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} C_1 t + C_1 + C_2 \\ C_1 t + C_2 \end{pmatrix} e^t,$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ответ: $\begin{cases} x = (C_1 t + C_1 + C_2)e^t, \\ y = (C_1 t + C_2)e^t, \end{cases}$ $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

3. Для нахождения ОР системы (2) также можно воспользоваться следующей формулой (это особенно удобно в случае кратных корней). Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — корни ХУ (3) кратности $p_1, \dots, p_m$, соответственно. Тогда ОР системы (2) имеет вид

$$X(t) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{p_j-1} \left(\frac{t^k}{k!} B_j^k\right) T_j e^{\lambda_j t}, \tag{4}$$

где $B_j = A - \lambda_j E$, T_j — ОР уравнения $B_j^{p_j} T_j = \theta$ (*корневой вектор* матрицы A). Заметим, что в случае $p_j = 1$ корневой вектор T_j удовлетворяет уравнению $(A - \lambda_j E)T_j = \theta$, т. е. T_j состоит из собственных векторов и нулевого вектора.

Пример 4. Решим систему из примера 3: $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x, \end{cases}$ с помощью формулы (4).

ХУ имеет единственный корень $\lambda = 1$ кратности $p = 2$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

корневой вектор $T = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

которое имеет общее решение $T = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, где b_1, b_2 — произвольные. Тогда ОР исходной системы ДУ:

$X(t) = \frac{t^0}{0!} \underbrace{B^0}_{E} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^t + \frac{t^1}{1!} B^1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^t + t\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} b_1 + b_1 t - b_2 t \\ b_2 + b_1 t - b_2 t \end{pmatrix} e^t$,

$b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Это решение совпадает с решением, полученным в примере 3, с точностью до обозначения произвольных констант.

Ответ: $\begin{cases} x = (C_1 + C_1 t - C_2 t)e^t, \\ y = (C_2 + C_1 t - C_2 t)e^t, \end{cases}$ $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

4. Операционный метод (преобразование Лапласа).

ДЗ 7. Филиппов № 786, 802, 803, 805, 808, 811, 812, 858.

Дополнение

5. Матричная экспонента. Рассмотрим однородную систему (2). Её общим решением является функция

$$X(t) = e^{tA} C. \tag{5}$$

Здесь $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$ — столбец произвольных констант, e^{tA} — матричная экспонента. Она определяется как сумма ряда:

$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k = E + tA + \frac{1}{2}(tA)^2 + \cdots,$
где каждое слагаемое — матрица размера $n \times n$. Тогда e^{tA} — тоже матрица размера $n \times n$.
Можно показать, что она обладает основными свойствами экспоненты:
$e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1 A} e^{t_2 A} = e^{t_2 A} e^{t_1 A},$
$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA},$$
$e^{0 \cdot A} = E.$
Из равенства $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$ следует, что функция (5) действительно является решением системы (2).
Для того чтобы вычислить матричную экспоненту e^{tA}, не нужно суммировать бесконечный ряд. Дело в том, что ЛП матриц размера $n \times n$ конечномерно: его размерность n^2, поэтому среди матриц E, A, A^2, A^3, … есть не более n^2 ЛНЗ матриц, а остальные можно выразить через них. На самом деле их не более n, и из теоремы Гамильтона—Кэли следует формула (см. Э. Б. Винберг. Курс алгебры):
$e^{tA} = P(A),$
где P — *интерполяционный многочлен* степени не выше $n-1$ с n неизвестными коэффициентами. Его коэффициенты определяются из условий:
$$\left[\frac{d^k}{d\lambda^k}\left(e^{t\lambda}\right)\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_j} = P^{(k)}(\lambda_j), \qquad j = 1, \dots, m, \qquad k = 0, \dots, p_j - 1,$$
где λ_1, …, λ_m — корни ХУ (3) кратности p_1, …, p_m, соответственно.

Пример 5. Решим систему из примеров 1, 2:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = i, \qquad \lambda_3 = -i, \qquad p_1 = p_2 = p_3 = 1, \qquad n = 3.$$
Интерполяционный многочлен ищем в виде:
$P(\lambda) = \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma.$
Коэффициенты α, β, γ находятся из условий:
$e^{t\lambda_j} = P(\lambda_j), \qquad j = 1, 2, 3.$
$$\begin{cases} e^t = \alpha + \beta + \gamma, \\ e^{it} = -\alpha + \beta i + \gamma, \\ e^{-it} = -\alpha - \beta i + \gamma. \end{cases}$$
Отсюда
$$\begin{cases} e^t = \alpha + \beta + \gamma, \\ \cos t = \gamma - \alpha, \\ \sin t = \beta. \end{cases}$$
Окончательно:
$\beta = \sin t, \gamma = \frac{e^t + \cos t - \sin t}{2}, \alpha = \frac{e^t - \cos t - \sin t}{2}.$
$e^{tA} = P(A) = \alpha A^2 + \beta A + \gamma A^0 = \alpha A^2 + \beta A + \gamma E.$
$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$e^{tA} =$

$$= \frac{e^t - \cos t - \sin t}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} + \frac{e^t + \cos t - \sin t}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & -2\sin t & 2\sin t \\ -e^t + \cos t - \sin t & e^t - 2\sin t & 2\sin t \\ -e^t + \cos t - 2\sin t & e^t - \cos t - 3\sin t & \cos t + 3\sin t \end{pmatrix}.$$

ОР исходной системы:

$$X(t) = e^{tA}C = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & -2\sin t & 2\sin t \\ -e^t + \cos t - \sin t & e^t - 2\sin t & 2\sin t \\ -e^t + \cos t - 2\sin t & e^t - \cos t - 3\sin t & \cos t + 3\sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1\cos t + (2C_3 - C_1 - 2C_2)\sin t \\ (C_2 - C_1)e^t + C_1\cos t + (2C_3 - C_1 - 2C_2)\sin t \\ (C_2 - C_1)e^t + (C_1 - C_2 + C_3)\cos t + (3C_3 - 2C_1 - 3C_2)\sin t \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Оно совпадает с полученными в примерах 1, 2 с точностью до обозначения произвольных констант.

Ответ: $X(t) = \begin{pmatrix} C_1\cos t + (2C_3 - C_1 - 2C_2)\sin t \\ (C_2 - C_1)e^t + C_1\cos t + (2C_3 - C_1 - 2C_2)\sin t \\ (C_2 - C_1)e^t + (C_1 - C_2 + C_3)\cos t + (3C_3 - 2C_1 - 3C_2)\sin t \end{pmatrix}$,

$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Пример 6. Решим систему из примеров 3, 4:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = 1, \qquad p = 2, \qquad n = 2.$$

Интерполяционный многочлен ищем в виде:

$P(\lambda) = \alpha\lambda + \beta$.

Коэффициенты α, β определяются из условий:

$$\begin{cases} e^t = P(1), \\ \left[\dfrac{d}{d\lambda}\left(e^{t\lambda}\right)\right]\Big|_{\lambda=1} = P'(1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^t = \alpha + \beta, \\ te^t = \alpha. \end{cases}$$

Отсюда $\alpha = te^t$, $\beta = (1-t)e^t$.

$$e^{tA} = P(A) = \alpha A + \beta E = te^t\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (1-t)e^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)e^t & -te^t \\ te^t & (1-t)e^t \end{pmatrix}.$$

ОР исходной системы:

$$X(t) = e^{tA}C = \begin{pmatrix} (1+t)e^t & -te^t \\ te^t & (1-t)e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C_1 + C_1t - C_2t)e^t \\ (C_2 + C_1t - C_2t)e^t \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Оно совпадает с полученным в примере 4.

Ответ: $X(t) = \begin{pmatrix} (C_1 + C_1t - C_2t)e^t \\ (C_2 + C_1t - C_2t)e^t \end{pmatrix}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.