Семинар 6

Признаки сходимости знакопостоянных рядов

Рассмотрим знакопостоянный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Пусть, для определённости, его члены неотрицательны: $a_n \geq 0$ (начиная с некоторого номера).

Признак сравнения. Рассмотрим два ряда:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (I) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (II).

Пусть $0 \leq a_n \leq b_n$ $\forall n \geq n_0$ (т. е. начиная с некоторого номера n_0). Ряд (II) называется *мажорантным* для ряда (I), а ряд (I) называется *минорантным* для ряда (II). Тогда

а) если (II) сходится $\Rightarrow$ (I) сходится,

б) если (I) расходится $\Rightarrow$ (II) расходится.

Пример 1 (Демидович № 2559). Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}.$$

Прежде всего, проверим НУС $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (поскольку оно проверяется легко, а если оно не выполняется, то дальнейшее исследование не нужно). Нетрудно видеть, что НУС выполнено: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$. Ряд *может* сходиться. Значит, требуется дальнейшее исследование.

Далее, сделаем для общего члена ряда *оценку снизу*:

$$\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} > 0.$$

Оба ряда, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, являются рядами с положительными членами. *Минорантный* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (т. к. расходится гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, см. пример 5 семинара 5) $\Rightarrow$ исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ тоже расходится (по признаку сравнения).

Ответ: расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{2^n}$.

НУС выполнено: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{2^n} = 0 \Rightarrow$ ряд может сходиться.

Сделаем для общего члена ряда *оценку сверху:*

$$0 < \frac{\operatorname{arctg} n}{2^n} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Мажорантный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^n}\right) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ — сходится (геометрическая прогрессия) $\Rightarrow$ исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{2^n}$ тоже сходится (по признаку сравнения).

Ответ: сходится.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Признак Коши. Пусть $a_n \geq 0$ (начиная с некоторого номера).

1. Пусть $\exists \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q}$ (конечный или бесконечный предел). Тогда

   а) $q > 1 \Rightarrow$ ряд расходится,

б) $q < 1 \Rightarrow$ ряд сходится,
в) $q = 1 \Rightarrow$ неизвестно.

2. Пусть $\boxed{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q}$ (конечный или бесконечный верхний предел). Тогда
а) $q > 1 \Rightarrow$ ряд расходится,
б) $q < 1 \Rightarrow$ ряд сходится,
в) $q = 1 \Rightarrow$ неизвестно.
3. Пусть
а) $\exists \boxed{\alpha < 1}$: $\boxed{\sqrt[n]{a_n} \le \alpha}$ $\forall n \ge n_0 \Rightarrow$ ряд сходится,
б) $\boxed{\sqrt[n]{a_n} \ge 1}$ $\forall n \ge n_0 \Rightarrow$ ряд расходится.

Признак Даламбера. Пусть $a_n > 0$ (начиная с некоторого номера).

1. Пусть $\exists \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q}$ (конечный или бесконечный предел). Тогда
а) $q > 1 \Rightarrow$ ряд расходится,
б) $q < 1 \Rightarrow$ ряд сходится,
в) $q = 1 \Rightarrow$ неизвестно.
2. Пусть $\boxed{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q}$ (конечный или бесконечный верхний предел). Тогда
а) $q < 1 \Rightarrow$ ряд сходится,
б) $q \ge 1 \Rightarrow$ неизвестно.
3. Пусть
а) $\exists \boxed{\alpha < 1}$: $\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \alpha}$ $\forall n \ge n_0 \Rightarrow$ ряд сходится,
б) $\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1}$ $\forall n \ge n_0 \Rightarrow$ ряд расходится.

Пример 3 (Демидович № 2586). Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/n}}{2+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2\frac{\ln n}{n}}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ ряд сходится по признаку Коши (п. 1б).
Ответ: сходится.

Пример 4 (Демидович № 2579). Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \cdots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!\,n!}{(2n!)}, \qquad a_{n+1} = \frac{\big((n+1)!\big)^2}{\big(2(n+1)\big)!} = \frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n)!\,(n+1)!\,(n+1)!}{n!\,n!\,(2n+2)!} = \frac{\cancel{(2n)!}\,\cancel{n!}\,(n+1)\cancel{n!}\,(n+1)}{\cancel{n!}\,\cancel{n!}\,\cancel{(2n)!}\,(2n+1)(2n+2)} = \frac{(n+1)\cancel{(n+1)}}{(2n+1)2\cancel{(n+1)}} =$$

$$= \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2\left(2+\frac{1}{n}\right)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{4}<1$$
$\Rightarrow$ ряд сходится по признаку Даламбера (п. 1б).
Ответ: сходится.

Пример 5 (самостоятельно). Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{e}{n}\right)^n$.

$$a_n=n!\left(\frac{e}{n}\right)^n,\qquad a_{n+1}=(n+1)!\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1},$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!\,e^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}n!\,e^n}=\frac{\cancel{n!}(n+1)en^n}{(n+1)^{n+1}\cancel{n!}}=\frac{en^n}{(n+1)^n}=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ — из этого ничего не следует.

Но $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\uparrow$ (доказали на первом курсе при выводе второго замечательного предела), поэтому $\frac{a_{n+1}}{a_n}\downarrow\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}>1\ \forall n\Rightarrow$ ряд расходится по признаку Даламбера (п. 3б).

Замечание. Если бы мы знали формулу *Стирлинга:* $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ при $n\to\infty$ (будет доказана на лекциях позже), то мы бы сразу установили расходимость ряда (не выполнено необходимое условие сходимости). Напомним, что последовательности называются эквивалентными: $a_n\sim b_n$ при $n\to\infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$.

Ответ: расходится.

Интегральный признак.
Пусть $f(x)$ — непрерывная и *монотонная* функция при $\forall x\geq n_0$. Тогда
$\sum_{n=n_0}^{\infty}f(n)$ сходится $\Leftrightarrow\exists\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{n_0}^{A}f(x)\,dx$ (*конечный* предел).
Замечание: требование монотонности существенно.

Пример 6. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ — *обобщённый гармонический ряд.*

При $\alpha=1$ получается гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится (см. пример 5 семинара 5).

$f(x)=\frac{1}{x^\alpha}>0$ — непрерывная и монотонная функция при $x\geq 1$.

$\int_1^A f(x)\,dx=\int_1^A\frac{dx}{x^\alpha}=\int_1^A x^{-\alpha}dx=\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^A=\frac{1}{1-\alpha}(A^{1-\alpha}-1)$ при $\alpha\neq 1$.

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_1^A f(x)\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}, & 1-\alpha<0,\\ \infty, & 1-\alpha>0.\end{cases}$$
$\Rightarrow$ по интегральному признаку при $\alpha>1$ ряд сходится, при $\alpha\leq 1$ ряд расходится. Запомним этот важный результат.
Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha>1$, расходится при $\alpha\leq 1$.

Специальный признак сравнения.

1. Если $\boxed{a_n>0, b_n>0}$ (начиная с некоторого номера) и $b_n\sim a_n$ при $n\to\infty$ (последовательности эквивалентны), т. е.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

2. Если $a_n \sim \frac{c}{n^{\alpha}}$ при $n\to\infty$, где $c\neq 0$ (т. е. последовательности a_n и $\frac{1}{n^{\alpha}}$ имеют одинаковый порядок $n\to\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{1/n^{\alpha}}=c\neq 0$, это ещё записывают в виде $a_n=O^*\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$
   а) сходится при $\alpha>1$,
   б) расходится при $\alpha\leq 1$.

Пример 7. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^{\alpha}}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$.

По формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано:
$\operatorname{arctg}x=x+o(x)$ при $x\to 0$, т. е. $\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$ при $n\to\infty$.

Также имеем: $\ln(1+x)=x+o(x)$ при $x\to 0$, т. е. $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{n^2}$ при $n\to\infty$.

А также: $\sqrt{n+1}=\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}\sim n^{1/2}$ при $n\to\infty$.

Тогда при $n\to\infty$:

$$a_n=\frac{\sqrt{n+1}}{n^{\alpha}}\cdot\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\sim\frac{n^{1/2}}{n^{\alpha}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{n^{\alpha-3/2}},$$

поэтому, согласно специальному признаку сравнения, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится при $\alpha-\frac{3}{2}>1$, т. е. $\alpha>\frac{5}{2}$, и расходится при $\alpha-\frac{3}{2}\leq 1$, т. е. $\alpha\leq\frac{5}{2}$.

Ответ: сходится при $\alpha>\frac{5}{2}$, расходится при $\alpha\leq\frac{5}{2}$.

ДЗ 6. Демидович 1997 г. (2003 г.) № 2558, 2560, 2564, 2581, 2589.2 (2589 в), 2595, 2597 (2597 а), 2608–2610, 2619 (2619 а), 2626, 2636.