Семинар 9

Т. (о почленном переходе к пределу). Пусть
1) функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на множестве X,
2) a — предельная точка множества X и
3) $\exists \lim\limits_{x\to a} a_n(x) = c_n \ \forall n$ (конечные пределы).

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится и

$$\boxed{\exists \lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\lim_{x\to a} a_n(x)}_{c_n}.}$$

Замечание: теорема верна и для односторонних пределов.

Т. (о непрерывности суммы ряда, состоящего из непрерывных функций). Если все функции $a_n(x)$ непрерывны (по x) на множестве X и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на X, то и функция $S(x)$ непрерывна на X.

Пример 1 (самостоятельно). Вычислить $\lim\limits_{x\to 0+0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 x}}{2^n + x}$.

Чтобы можно было перейти к пределу почленно, надо доказать равномерную сходимость ряда на некотором множестве, для которого 0 является предельной точкой.

1) Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 x}}{2^n + x}$ сходится равномерно на множестве $x \ge 0$. В самом деле, $\left|\frac{e^{-n^2 x}}{2^n + x}\right| \le \frac{1}{2^n}$ при $x \ge 0$, мажорантный *числовой* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ сходится (геом. прогрессия), поэтому функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 x}}{2^n + x}$ сходится равномерно на множестве $x \ge 0$ (по признаку Вейерштрасса).
2) Число 0 является предельной точкой множества $x \ge 0$.
3) Все члены ряда имеют в нуле предел справа: $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{e^{-n^2 x}}{2^n + x} = \frac{1}{2^n}$.

Тогда в сумме ряда можно перейти к пределу почленно:

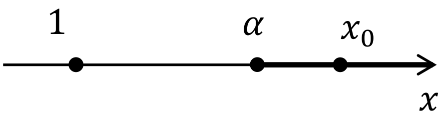
$$\lim_{x\to 0+0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 x}}{2^n + x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 0+0} \frac{e^{-n^2 x}}{2^n + x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1.$$

Пример 2. Найти область существования функции и исследовать её на непрерывность: $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ — *дзета-функция Римана.*

Область существования функции $\zeta(x)$ — это область сходимости ряда. Как мы знаем, обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ сходится только при $x > 1$. Это и есть область существования функции $\zeta(x)$.

Для того чтобы доказать непрерывность функции $\zeta(x)$, достаточно доказать равномерную сходимость. Однако доказать равномерную сходимость на множестве $x > 1$ не удастся (возможно, её и нет). В самом деле, если мы попытаемся использовать признак Вейерштрасса: $\left|\frac{1}{n^x}\right| \le \sup\limits_{x>1} \left|\frac{1}{n^x}\right| = \frac{1}{n}$, то мажорантный *числовой* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, значит, признак Вейерштрасса применять нельзя. Можно ли как-то применить признак Дирихле, вообще непонятно.

Тогда докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ сходится равномерно на множестве $x \geq \alpha$, где α — произвольное (но фиксированное) число, большее 1.
Имеем: $\left|\frac{1}{n^x}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}\ \forall x \geq \alpha$, мажорантный *числовой* ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$, поэтому функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ сходится равномерно на множестве $x \geq \alpha$ (по признаку Вейерштрасса).
Т.к. все члены ряда — непрерывные функции, то отсюда следует, что функция
$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ непрерывна при $x \geq \alpha$.



Однако поскольку α — произвольное число, большее 1, то $\zeta(x)$ непрерывна при всех $x > 1$. В самом деле, какое бы мы ни взяли число $x_0 > 1$, всегда найдётся число α: $1 < \alpha < x_0$. Тогда, как мы уже доказали, $\zeta(x)$ непрерывна при $x \geq \alpha$, а значит и при $x = x_0$ (причём непрерывна и слева, и справа).
Ответ: функция $\zeta(x)$ существует и непрерывна при $x > 1$.

Т. (о почленном интегрировании). Пусть
1) функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ и
2) все функции $a_n(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$.
Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n(x)\,dx$ сходится и

$$\boxed{\exists \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n(x)\,dx\,.}$$

Замечание: вместо равномерной сходимости (условие 1) достаточно сходимости ряда среднем на отрезке $[a, b]$.

Пример 3 (самостоятельно). Вычислить $\int_0^\pi S(x)\,dx$, где $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\ln^2 n}$.

1) Докажем, что ряд сходится равномерно на отрезке $[0, \pi]$. В самом деле, $\left|\frac{\cos nx}{n\ln^2 n}\right| \leq \frac{1}{n\ln^2 n}$, $x \in [0, \pi]$, мажорантный *числовой* ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ сходится по интегральному признаку (см. Демидович № 2619 (2619а) из ДЗ 6). Тогда функциональный ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\ln^2 n}$ сходится равномерно на отрезке $[0, \pi]$ по признаку Вейерштрасса.
2) Все члены ряда $a_n(x) = \frac{\cos nx}{n\ln^2 n}$ интегрируемы на отрезке $[0, \pi]$:
$$\int_0^\pi a_n(x)\,dx = \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n\ln^2 n}\,dx = \frac{1}{n\ln^2 n}\int_0^\pi \cos nx\,dx = \frac{1}{n\ln^2 n}\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^\pi = 0.$$

Поэтому ряд можно интегрировать почленно:
$$\int_0^\pi S(x)\,dx = \int_0^\pi \left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\ln^2 n}\right] dx = \sum_{n=2}^{\infty}\int_0^\pi \frac{\cos nx}{n\ln^2 n}\,dx = \sum_{n=2}^{\infty} 0 = 0.$$

Т. (о почленном дифференцировании). Пусть
1) функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке отрезка $[a, b]$,
2) все функции $a_n(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a, b]$,
3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ тоже сходится равномерно на $[a,b]$ и

$$\boxed{\exists \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x) \ \forall x \in [a,b].}$$

Замечание 1: обратите внимание, что равномерная сходимость требуется от ряда из производных, а не от исходного ряда.
Замечание 2: теорема справедлива и для интервала (a,b).
Замечание 3: аналогичные теоремы (о почленном переходе к пределу, непрерывности, почленном интегрировании и дифференцировании) справедливы и для функциональных последовательностей. Все эти теоремы и для рядов, и для последовательностей являются достаточными, но не необходимыми условиями.

Пример 4 (Демидович № 2792, самостоятельно). Найти область существования, исследовать на непрерывность, дифференцируемость и непрерывность производной:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

1) Чтобы применять теорему о почленном дифференцировании, нужно доказать, что ряд сходится хотя бы в одной точке. Возьмём точку $x = 0$. В ней ряд, очевидно, сходится.
2) Все члены ряда $a_n(x) = \frac{\sin nx}{n^3}$ дифференцируемы на $\mathbb{R}$: $a_n'(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$.
3) Ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ (по признаку Вейерштрасса):
   $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \ \forall x \in \mathbb{R}$, мажорантный *числовой* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

Поэтому сумма ряда $S(x)$ имеет на $\mathbb{R}$ производную, которую можно находить почленно:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Причём эта производная также будет непрерывна на $\mathbb{R}$, поскольку все члены полученного ряда — непрерывные на $\mathbb{R}$ функции и ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$ (как мы только что доказали в п. 3).
Из существования функции $S'(x)$ на $\mathbb{R}$ следует существование и непрерывность функции $S(x)$ на $\mathbb{R}$.
Ответ: функция существует, непрерывна и непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$.

Пример 5 (дополнительный). Доказать, что функция $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$ бесконечное число раз дифференцируема на $\mathbb{R}$.

1) Чтобы применять теорему о почленном дифференцировании, нужно доказать, что ряд сходится хотя бы в одной точке. Возьмём точку $x = 2\pi$. Тогда

   $$S(2\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

   Такой ряд сходится по признаку Даламбера:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

   Значит, в точке $x = 2\pi \in \mathbb{R}$ ряд сходится.

2) Все члены ряда $a_n(x) = \frac{\cos nx}{n!}$ дифференцируемы на $\mathbb{R}$: $a_n'(x) = -\frac{n \sin nx}{n!}$.
3) Ряд из производных $\sum_{n=0}^{\infty} a_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{n \sin nx}{n!} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{n!} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{(n-1)!}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ (по признаку Вейерштрасса), т.к. $\left|\frac{\sin nx}{(n-1)!}\right| \le \frac{1}{(n-1)!}$, мажорантный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$ сходится по признаку Даламбера (аналогично п. 1).

Из этого следует, что сумма ряда $S(x)$ имеет на $\mathbb{R}$ производную, которую можно находить почленно:

$$S'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{(n-1)!}.$$

Докажем по индукции, что существует бесконечно много производных функции $S(x)$ на $\mathbb{R}$.

Пусть на $\mathbb{R}$ существует $S^{(k-1)}(x)$, которую можно находить почленно. Докажем, что тогда на $\mathbb{R}$ существует и $S^{(k)}(x)$, которую можно находить почленно.

В самом деле,
1) ряд $S^{(k-1)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{(k-1)}(x)$ сходится на $\mathbb{R}$ (по предположению),
2) существуют $\frac{d}{dx} a^{(k-1)}(x) = a^{(k)}(x) = \frac{n^k \cos\left(nx + \frac{\pi k}{2}\right)}{n!}$ $\forall k, x \in \mathbb{R}$,
3) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a^{(k)}(x)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ (по признаку Вейерштрасса), т.к. $\left|a^{(k)}(x)\right| = \left|\frac{n^k \cos\left(nx + \frac{\pi k}{2}\right)}{n!}\right| \le \frac{n^k}{n!}$, мажорантный числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$ сходится по признаку Даламбера:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k n!}{(n+1)!\, n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k = 0 < 1.$$

Из этого следует, что на $\mathbb{R}$ существует $S^{(k)}(x)$ и

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k \cos\left(nx + \frac{\pi k}{2}\right)}{n!}.$$

Итак, по индукции доказано существование производной любого порядка.

Пример 6 (дополнительный). Исследовать на дифференцируемость $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{3/2}}$ при $x \ne 2\pi k$.

Поскольку функция 2π-периодическая, то достаточно исследовать её на интервале $(0, 2\pi)$.
1) Ряд, очевидно, сходится при $x = \pi$.
2) Все члены ряда $a_n(x) = \frac{\sin nx}{n^{3/2}}$ дифференцируемы при любых x: $a_n'(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$.
3) Рассмотрим ряд из производных: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$.

   Попробуем доказать его равномерную сходимость по признаку Дирихле. Пусть $u_n(x) = \cos nx$, $v_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Рассмотрим $\left|\sum_{n=1}^{N}\cos nx\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$. На интервале $(0, 2\pi)$ сделать оценку сверху невозможно. Сделаем её на отрезке $[\alpha, 2\pi-\alpha]$, где α — произвольное число, такое что $0<\alpha<\pi$. Тогда

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\cos nx\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} = C \quad \forall N, \forall x \in [\alpha, 2\pi-\alpha].$$

Далее, последовательность $v_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ монотонно убывает и равномерно сходится к 0 на $[\alpha, 2\pi-\alpha]$ (сходимость равномерная, т. к. последовательность не зависит от x).

Это доказывает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ сходится равномерно на $[\alpha, 2\pi-\alpha]$.

Таким образом, существует $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ на $[\alpha, 2\pi-\alpha]$. В силу произвольности числа α, существует $S'(x)$ на $(0, 2\pi)$ (см. пример 2). И в силу периодичности существует $S'(x)$ при $x \ne 2\pi k$.

Ответ: дифференцируема при $x \ne 2\pi k$.

ДЗ 9. Найти область существования и исследовать на непрерывность: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^x}$.
Демидович 1997 г. (2003 г.) № 2795в, 2801–2803, 2807, 2808 (2808а), 2809, 2810.