Семинар 8

Уравнение Лапласа в сферических координатах

В сферических координатах (r, θ, φ):
$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta,$
уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ запишется в виде:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi} u = 0,$$

где

$$\Delta_{\theta\varphi} u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

(Дома получить!)
Найдём ЧР уравнения Лапласа в пространстве, представимые в виде:
$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi) \not\equiv 0.$
Подставив это выражение в уравнение Лапласа, получим:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 R'(r)\right)Y(\theta,\varphi) + \frac{R(r)}{r^2}\Delta_{\theta\varphi} Y(\theta,\varphi) = 0.$$

Разделим переменные: умножим уравнение на r^2 и поделим на $R(r)Y(\theta,\varphi) \not\equiv 0$. Получим:

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2 R'(r)\right)}{R(r)} = -\frac{\Delta_{\theta\varphi} Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} = \lambda.$$

Для функции $Y(\theta,\varphi)$ имеем ДУ:
$\Delta_{\theta\varphi} Y(\theta,\varphi) + \lambda Y(\theta,\varphi) = 0.$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2} + \lambda Y(\theta,\varphi) = 0.$$

Найдём ЧР этого уравнения, представимые в виде:
$Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi) \not\equiv 0.$
Подставив это выражение в уравнение, получим:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\Theta'(\theta)\right)\Phi(\varphi) + \frac{\Theta(\theta)}{\sin^2\theta}\Phi''(\varphi) + \lambda\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = 0.$$

Разделим переменные: умножим уравнение на $\sin^2\theta$ и поделим на $\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \not\equiv 0$. Получим:

$$\frac{\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\Theta'(\theta)\right)}{\Theta(\theta)} + \lambda\sin^2\theta = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu.$$

Теперь для функции $\Phi(\varphi)$ имеем задачу Ш.–Л.:

$$\begin{cases}\Phi''(\varphi) + \nu\Phi(\varphi) = 0,\\ \Phi(\varphi + 2\pi) \equiv \Phi(\varphi).\end{cases}$$

Её СЗ и СФ:
$\nu_m = m^2,$
$\Phi_0(\varphi) = 1, \qquad \Phi_m(\varphi) = \cos m\varphi, \qquad \Phi_{-m}(\varphi) = \sin m\varphi, \qquad m = 1, 2, \ldots$
Тогда для функции $\Theta(\theta)$ имеем ДУ:

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) + (\lambda\sin^2\theta - m^2)\Theta(\theta) = 0.$$

(Здесь без ограничения общности можно считать, что $m \geq 0$.)
Поделим уравнение на $\sin^2\theta$:
$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta)=0.$$
Сделаем замену: $t=\cos\theta$. Тогда $-1 \leq t \leq 1$. Также имеем
$$\frac{d}{d\theta}=\frac{dt}{d\theta}\frac{d}{dt}=-\sin\theta\frac{d}{dt},$$
откуда
$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}=-\frac{d}{dt}.$$
ДУ принимает вид:
$$-\frac{d}{dt}\left(-\sin^2\theta\frac{d\Theta}{dt}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0.$$
Окончательно:
$$\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{d\Theta}{dt}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-t^2}\right)\Theta=0.$$
Это уравнение должно выполняться при $-1 \leq t \leq 1$. Но $t=\pm 1$ — особые точки для данного уравнения, в них решение может быть неограниченным. Тогда мы должны дополнительно потребовать ограниченности решения в этих точках. Получится задача Ш.–Л. с условиями ограниченности решения в особых точках:
$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left((1-t^2)\dfrac{d\Theta}{dt}\right)+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{1-t^2}\right)\Theta=0, \qquad -1<t<1,\\ |\Theta|\big|_{t=\pm 1}<\infty.\end{cases}$$
На лекциях показано, что нетривиальные ограниченные при $t=\pm 1$ решения существуют $\Leftrightarrow\ \lambda=\lambda_n=n(n+1),\ n=m, m+1, \ldots$
При этом (с точностью до произвольного множителя) эти ограниченные решения имеют вид: $\Theta_n^{(m)}=P_n^{(m)}(t)$ — *присоединённые функции Лежандра.*

Основные свойства присоединённых функций Лежандра $\boldsymbol{P_n^{(m)}(t)}$:

1) функции $P_n^{(m)}(t)$ ортогональны на отрезке $[-1;\ 1]$ при одинаковых m и разных n:
$$\int_{-1}^{1} P_{n_1}^{(m)}(t)P_{n_2}^{(m)}(t)\,dt=0, \qquad \text{если } n_1 \neq n_2;$$
2) при каждом фиксированном m функции $P_n^{(m)}(t)$, $n=m, m+1, \ldots$, образуют полную ортогональную систему на отрезке $[-1;\ 1]$;
3) $P_n^{(m)}(t)=(1-t^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dt^m}P_n(t),\ \ n=m, m+1, \ldots,$ (1)
где $P_n(t)$ — *полиномы Лежандра,*
$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left[(t^2-1)^n\right]$ *(формула Родрига),* (2)
в частности, $P_n^{(0)}(t)=P_n(t)$;
4) $\left\|P_n^{(m)}\right\|^2=\int_{-1}^{1}\left[P_n^{(m)}(t)\right]^2dt=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!},\ n=m, m+1, \ldots$

Вернувшись к переменной θ, получим:
$$\Theta_n^{(m)}(\theta)=P_n^{(m)}(\cos\theta).$$

Эти функции представляют собой тригонометрические многочлены. В самом деле, из формул (1), (2) видно, что функция $P_n^{(m)}(t)$ является многочленом от переменных
$t = \cos\theta$ и $(1-t^2)^{\frac{1}{2}} = \sin\theta$.
Итак, мы получили функции
$Y_n^{(\pm m)}(\theta,\varphi) = \Theta_n^{(m)}(\theta)\Phi_{\pm m}(\varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\Phi_{\pm m}(\varphi), \qquad n = 0, 1, \dots, \qquad m = 0, 1, \dots, n.$
Они называются *сферическими функциями* и являются СФ задачи Ш.–Л. на единичной сфере

$$\begin{cases} \Delta_{\theta\varphi} Y(\theta,\varphi) + \lambda Y(\theta,\varphi) = 0, \\ Y(\theta,\varphi+2\pi) \equiv Y(\theta,\varphi), \\ |Y(\theta,\varphi)|\big|_{\theta=0,\pi} < \infty, \end{cases}$$

отвечающими СЗ $\lambda_n = n(n+1)$ (таким образом, одному СЗ соответствует несколько ЛНЗ СФ; а именно, $2n+1$).

Основные свойства сферических функций $\boldsymbol{Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)}$:

1) Сферические функции образуют полную ортогональную систему на единичной сфере. Поэтому других ЛНЗ СФ у задачи Ш.–Л. нет.
2) $\left\|Y_n^{(\pm m)}\right\|^2 = \left\|P_n^{(m)}\right\|^2 \cdot \left\|\Phi_{\pm m}\right\|^2$, где $\left\|\Phi_{\pm m}\right\|^2 = \pi(1+\delta_{m0})$, $\left\|P_n^{(m)}\right\|^2 = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$.

Выпишем, для примера, несколько первых сферических функций.
Поскольку $P_n^{(0)}(t) = P_n(t)$, то $Y_n^{(0)}(\theta,\varphi) = P_n^{(0)}(\cos\theta)\Phi_0(\varphi) = P_n(\cos\theta)$. Из формулы Родрига (2) получим:

$$P_0(t) = 1 \ \Rightarrow \ Y_0^{(0)}(\theta,\varphi) = P_0(\cos\theta) = 1,$$

$$P_1(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(t^2-1) = t \ \Rightarrow \ Y_1^{(0)}(\theta,\varphi) = P_1(\cos\theta) = \cos\theta,$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dt^2}[(t^2-1)^2] = \frac{1}{8}\frac{d^2}{dt^2}(t^4-2t^2+1) = \frac{12t^2-4}{8} = \frac{3t^2-1}{2} \ \Rightarrow$$

$$Y_2^{(0)}(\theta,\varphi) = P_2(\cos\theta) = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2},$$

Теперь вычислим $Y_1^{(1)}(\theta,\varphi)$. Согласно формуле (1):

$$P_1^{(1)}(t) = (1-t^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}P_1(t) = (1-t^2)^{\frac{1}{2}} \ \Rightarrow \ P_1^{(1)}(\cos\theta) = \sin\theta \ \Rightarrow$$

$$Y_1^{(1)}(\theta,\varphi) = P_1^{(1)}(\cos\theta)\Phi_1(\varphi) = \sin\theta\cos\varphi,$$

$$Y_1^{(-1)}(\theta,\varphi) = P_1^{(1)}(\cos\theta)\Phi_{-1}(\varphi) = \sin\theta\sin\varphi.$$

Заметим также, что из формул (1), (2) следует, что

$$P_n^{(n)}(t) = (1-t^2)^{\frac{n}{2}}\frac{d^n}{dt^n}P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}(1-t^2)^{\frac{n}{2}}\frac{d^{2n}}{dt^{2n}}[(t^2-1)^n] = \frac{(2n)!}{2^n n!}(1-t^2)^{\frac{n}{2}} \ \Rightarrow$$

$$P_n^{(n)}(\cos\theta) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sin^n\theta \ \Rightarrow \ Y_n^{(n)}(\theta,\varphi) = P_n^{(n)}(\cos\theta)\Phi_n(\varphi) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sin^n\theta\cos n\varphi,$$

$$Y_n^{(-n)}(\theta,\varphi) = P_n^{(n)}(\cos\theta)\Phi_{-n}(\varphi) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sin^n\theta\sin n\varphi.$$

Запишем вычисленные нами сферические функции в виде таблицы:

$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$					
$m \backslash n$	0	1	2	3	n
$-n$				вычислить дома	$\frac{(2n)!}{2^n n!}\sin^n\theta\sin n\varphi$
-2			вычислить дома	вычислить дома	
-1		$\sin\theta\sin\varphi$	вычислить дома	вычислить дома	
0	1	$\cos\theta$	$\frac{3\cos^2\theta-1}{2}$	вычислить дома	$P_n(\cos\theta)$
1		$\sin\theta\cos\varphi$	вычислить дома	вычислить дома	
2			вычислить дома	вычислить дома	
n				вычислить дома	$\frac{(2n)!}{2^n n!}\sin^n\theta\cos n\varphi$

Далее, для функции $R(r)$ имеем ДУ:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2R_n'(r)\right)-n(n+1)R_n(r)=0.$$

$$r^2R_n''(r)+2rR_n'(r)-n(n+1)R_n(r)=0.$$

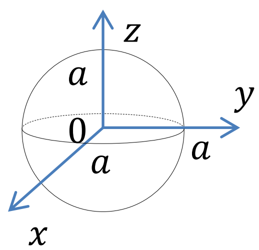
Это уравнение Эйлера. Его ОР имеет вид (дома получить):

$$R_n(r)=Ar^n+\frac{B}{r^{n+1}}.$$

Итак, мы построили ЧР уравнения Лапласа вида:

$$u_n^{(m)}(r,\theta,\varphi)=\left(A_n^{(m)}r^n+\frac{B_n^{(m)}}{r^{n+1}}\right)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi),\qquad n=0,1,\dots,\qquad m=0,\pm1,\dots,\pm n.$$

Пример 1 (в шаре).



$$\begin{cases}\Delta u=0, & 0\le r<a,\\ u|_{r=a}=f(\theta,\varphi).\end{cases}$$

Будем искать решение в виде суммы найденных ранее ЧР уравнения Лапласа в сферических координатах:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}u_n^{(m)}(r,\theta,\varphi)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(A_n^{(m)}r^n+\frac{B_n^{(m)}}{r^{n+1}}\right)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

В силу ограниченности решения при $r=0$ нужно положить все $B_n^{(m)}=0$. Тогда

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_n^{(m)}r^nY_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа в шаре. Подставим её в ГУ:

$$u|_{r=a}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_n^{(m)}a^nY_n^{(m)}(\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi).$$

Для определения неизвестных коэффициентов разложим известную функцию $f(\theta,\varphi)$ в ряд Фурье по сферическим функциям $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ — СФ задачи Ш.–Л. на единичной сфере:

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_n^{(m)}Y_n^{(m)}(\theta,\varphi),$$

$$C_n^{(m)}=\frac{1}{\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)f(\theta,\varphi)\,d\varphi,$$

и приравняем коэффициенты при соответствующих членах.

Например, пусть $f(\theta,\varphi)=\cos^2\theta$. Разложим эту функцию в ряд Фурье по сферическим функциям. Функция $\cos^2\theta$ не зависит от φ, поэтому ряд Фурье будет содержать только сферические функции, не зависящие от φ, т.е. $Y_n^{(0)}(\theta,\varphi)=P_n(\theta)$. Из таблицы видно, что функция $\cos^2\theta$ является ЛК функций $Y_2^{(0)}(\theta,\varphi)=\frac{3\cos^2\theta-1}{2}$ и $Y_0^{(0)}(\theta,\varphi)=1$:

$$f(\theta,\varphi)=\cos^2\theta=\frac{2}{3}Y_2^{(0)}(\theta,\varphi)+\frac{1}{3}Y_0^{(0)}(\theta,\varphi).$$

Таким образом, ГУ запишется в виде:

$$u|_{r=a}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_n^{(m)}a^nY_n^{(m)}(\theta,\varphi)=\frac{2}{3}Y_2^{(0)}(\theta,\varphi)+\frac{1}{3}Y_0^{(0)}(\theta,\varphi),$$

откуда

$$A_2^{(0)}=\frac{2}{3a^2},\qquad A_0^{(0)}=\frac{1}{3},$$

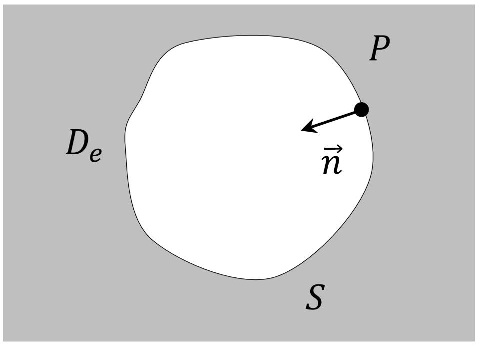
а все остальные коэффициенты $A_n^{(m)}$ равны нулю. Тогда

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_n^{(m)}r^nY_n^{(m)}(\theta,\varphi)=A_0^{(0)}Y_0^{(0)}(\theta,\varphi)+A_2^{(0)}r^2Y_2^{(0)}(\theta,\varphi)=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{r^2}{a^2}\frac{3\cos^2\theta-1}{2}.$$

Ответ: $u(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{r^2}{a^2}\frac{3\cos^2\theta-1}{2}$.

Внешние краевые задачи для уравнения Лапласа в пространстве



В трёхмерном случае на бесконечности ставится условие равномерного (по направлению) стремления решения к нулю:

$$\begin{cases}\Delta\,u=0 \text{ в } D_e\subset\mathbb{R}^3,\\ \text{ГУ на } S,\\ u\rightrightarrows 0 \text{ при } r\to\infty.\end{cases}$$

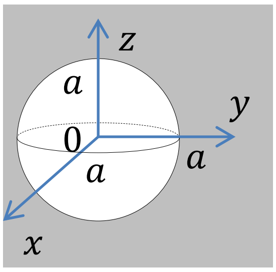
$u\rightrightarrows 0$ при $r\to\infty$ означает, что

$$M(r)=\sup_{\theta,\varphi}|u(r,\theta,\varphi)|\to 0 \text{ при } r\to\infty.$$

Т. (существования и единственности). Задачи Дирихле, Неймана, третьего рода (с ГУ $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right)\right|_S=f(P)$, где $h(P)\geq 0$, $\vec{n}$ — единичная *внешняя по отношению к области* D_e

нормаль), а также смешанные краевые задачи во внешней трёхмерной области однозначно разрешимы.

Пример 2 (вне шара).



$$\begin{cases} \Delta\, u = 0,\ r > a, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\theta,\varphi), \\ u \rightrightarrows 0 \text{ при } r \to \infty. \end{cases}$$

Это задача Неймана для уравнения Лапласа, но в трёхмерном случае она однозначно разрешима. Будем искать решение в виде суммы найденных ранее ЧР уравнения Лапласа в сферических координатах:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(A_n^{(m)} r^n + \frac{B_n^{(m)}}{r^{n+1}}\right) Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Из условия равномерного стремления решения к нулю при $r \to \infty$ следует, что все коэффициенты $A_n^{(m)} = 0$. Тогда

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{B_n^{(m)}}{r^{n+1}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа вне шара и условию на бесконечности. Подставим её в ГУ:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} -\frac{(n+1)B_n^{(m)}}{r^{n+2}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} -\frac{(n+1)B_n^{(m)}}{a^{n+2}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi).$$

Остаётся разложить известную функцию $f(\theta,\varphi)$ в ряд Фурье по сферическим функциям $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ и приравнять соответствующие коэффициенты.

Например, пусть $f(\theta,\varphi) = \sin\theta \sin\varphi$. Тогда

$f(\theta,\varphi) = \sin\theta\sin\varphi = \sin\theta\,\Phi_{-1}(\varphi) = P_1^{(1)}(\cos\theta)\Phi_{-1}(\varphi) = Y_1^{(-1)}(\theta,\varphi).$

(При разложении подобных функций в ряд Фурье по сферическим функциям удобно сначала разложить множители, зависящие от φ, по $\Phi_m(\varphi)$ и тем самым определить m, а затем часть, зависящую от θ, разложить по $P_n^{(m)}(\cos\theta)$ при данном m.)

ГУ запишется в виде:

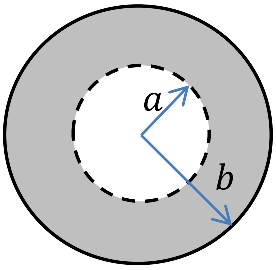
$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} -\frac{(n+1)B_n^{(m)}}{a^{n+2}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = Y_1^{(-1)}(\theta,\varphi).$$

Отсюда $B_1^{(-1)} = -\frac{a^3}{2}$, а все остальные коэффициенты $B_n^{(m)}$ равны нулю. Тогда решение краевой задачи имеет вид:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{B_n^{(m)}}{r^{n+1}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = \frac{B_1^{(-1)}}{r^2} Y_1^{(-1)}(\theta,\varphi) = -\frac{a^3}{2r^2}\sin\theta\sin\varphi.$$

Ответ: $u(r,\theta,\varphi) = -\frac{a^3}{2r^2}\sin\theta\sin\varphi.$

Пример 3 (в шаровом слое).



$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ a < r < b, \\ u|_{r=a} = f_1(\theta,\varphi), \ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = f_2(\theta,\varphi). \end{cases}$$

Можно искать решение в виде суммы найденных ранее ЧР уравнения Лапласа в сферических координатах:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(A_n^{(m)}r^n + \frac{B_n^{(m)}}{r^{n+1}}\right)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Неизвестные коэффициенты определяются подстановкой в ГУ.

Но удобнее искать решение в другой форме. Запишем ОР ДУ для функции $R(r)$

$$r^2R_n''(r) + 2rR_n'(r) - n(n+1)R_n(r) = 0 \tag{3}$$

не в виде

$$R_n(r) = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}, \tag{4}$$

а в виде

$$R_n(r) = AR_n^{(a)}(r) + BR_n^{(b)}(r),$$

где функции $R_n^{(a)}(r)$ и $R_n^{(b)}(r)$ — два ЛНЗ решения уравнения (3), удовлетворяющие соответствующим *однородным* ГУ при $r = a, r = b$:

$$R_n^{(a)}(a) = 0, \qquad \left.\frac{d}{dr}R_n^{(b)}\right|_{r=b} = 0.$$

Исходя из общего вида (4) решений ДУ (3), легко получить, что (с точностью до постоянного множителя)

$$R_n^{(a)}(r) = r^n - \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}}, \qquad R_n^{(b)}(r) = (n+1)r^n + \frac{nb^{2n+1}}{r^{n+1}}.$$

(Дома получить!)

Таким образом, будем искать решение краевой задачи в шаровом слое в виде:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[A_n^{(m)}R_n^{(a)}(r) + B_n^{(m)}R_n^{(b)}(r)\right]Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа в шаровом слое. Подставив её в ГУ, с учётом равенств $R_n^{(a)}(a) = 0$, $\left.\frac{d}{dr}R_n^{(b)}\right|_{r=b} = 0$, получим:

$$u|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} B_n^{(m)}R_n^{(b)}(a)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = f_1(\theta,\varphi).$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_n^{(m)}\left(\left.\frac{d}{dr}R_n^{(a)}\right|_{r=b}\right)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = f_2(\theta,\varphi).$$

Остаётся разложить известные функции $f_1(\theta,\varphi)$, $f_2(\theta,\varphi)$ в ряды Фурье по сферическим функциям $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ и приравнять соответствующие коэффициенты.

ДЗ 8. БК с. 119 № 15(в), 16(а); с. 120 № 17(в), 18(б), 19(а,г).