Семинар 12

Вариационное исчисление

О. Если каждой функции $y(x)$ (из некоторого нормированного пространства вещественнозначных функций N) поставлено в соответствие некоторое (вещественное) число V, то говорят, что задан *функционал* $V[y]$.

Примеры:

а) $V[y] = \int_a^b y(x)\,dx$,

б) $V[y] = y(0)$ — дельта-функция,

в) $V[y] = \max\limits_{x\in[a;\,b]} |y(x)| = \|y\|_{C[a;\,b]}$,

г) $V[q] = \int_{t_1}^{t_2} L\big(t, q(t), \dot q(t)\big)\,dt$ — действие (интеграл от функции Лагранжа по времени).

Функционал является обобщением понятия функции (это «функция, которая действует не на число, а на функцию»).

Пусть $y(x)$ и $\delta y(x)$ — функции, α — число. Тогда при *фиксированных* $y(x)$ и $\delta y(x)$ функционал $V[y + \alpha\cdot\delta y]$ будет функцией от числа α.

О. $\delta V[y, \delta y] = \left(\frac{d}{d\alpha} V[y + \alpha\cdot\delta y]\right)\Big|_{\alpha=0}$ — *вариация* функционала $V[y]$.

Вариация функционала является аналогом дифференциала функции.

Пример 1. Найти вариацию функционала $V[y] = \int_a^b y^2(x)\,dx$, где $y \in C[a;\ b]$.

$$\delta V[y, \delta y] = \left(\frac{d}{d\alpha} V[y + \alpha\,\delta y]\right)\Bigg|_{\alpha=0} = \left(\frac{d}{d\alpha}\int\limits_a^b (y + \alpha\,\delta y)^2\,dx\right)\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \left(\int\limits_a^b \frac{d}{d\alpha}\big((y + \alpha\,\delta y)^2\big)\,dx\right)\Bigg|_{\alpha=0} = \left(\int\limits_a^b 2(y + \alpha\,\delta y)\delta y\,dx\right)\Bigg|_{\alpha=0} = 2\int\limits_a^b y\,\delta y\,dx.$$

Ответ: $\delta V[y, \delta y] = 2\int_a^b y\,\delta y\,dx$.

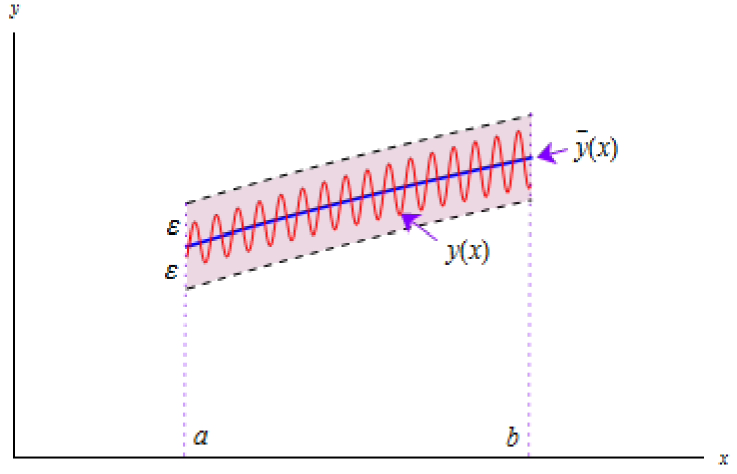
Аналогично понятию экстремума функции можно ввести понятие экстремума функционала.

Рассмотрим две нормы:

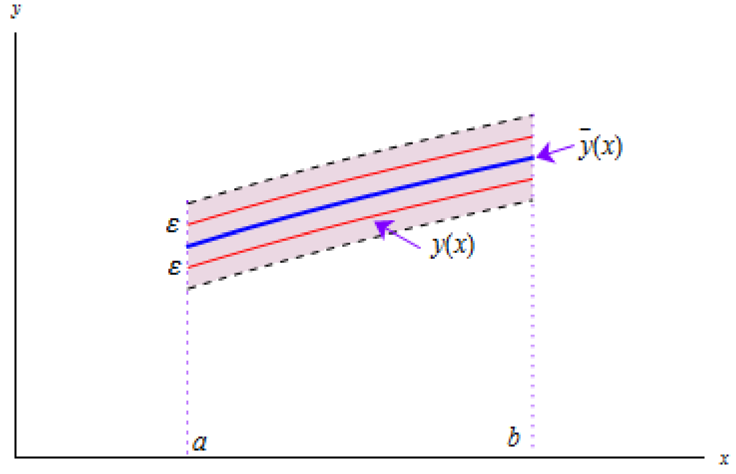
$\|y\|_0 = \|y\|_{C[a;\,b]} = \max\limits_{x\in[a;\,b]} |y(x)|$,

$\|y\|_1 = \|y\|_{C^{(1)}[a;\,b]} = \max\limits_{x\in[a;\,b]} |y(x)| + \max\limits_{x\in[a;\,b]} |y'(x)|$.

Сильная и слабая ε-окрестности функции $\bar{y}(x)$



сильная ε-окрестность функции $\bar{y}(x)$ состоит из всех функций $y(x)$ таких, что
$\|y-\bar{y}\|_0 < \varepsilon$



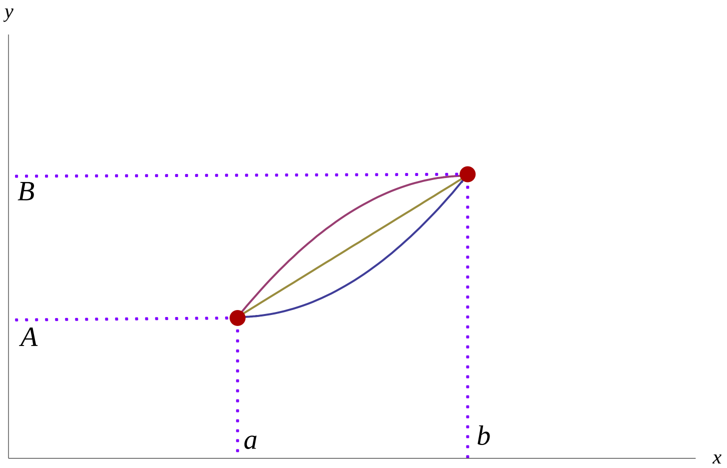
слабая ε-окрестность функции $\bar{y}(x)$ состоит из всех функций $y(x)$ таких, что
$\|y-\bar{y}\|_1 < \varepsilon$

В сильную ε-окрестность функции $\bar{y}(x)$ входят все функции, значения которых во всех точках близки к значениям функции $\bar{y}(x)$. В слабую ε-окрестность функции $\bar{y}(x)$ входят все функции, у которых не только близки к $\bar{y}(x)$ значения во всех точках, но и производная тоже близка во всех точках к $\bar{y}'(x)$.

О. Функционал $V[y]$ достигает сильного (слабого) локального максимума {минимума} на функции $\bar{y}(x)$, если $\exists \varepsilon > 0$ такое, что для любой функции $y(x)$ из сильной (слабой) ε-окрестности функции $\bar{y}(x)$ выполняется:
$V[y] \le V[\bar{y}]$ $\{V[y] \ge V[\bar{y}]\}$.
Поскольку слабая ε-окрестность целиком содержится в сильной ε-окрестности, то сильный экстремум (максимум или минимум) является также и слабым экстремумом (обратное неверно).
Вариационное исчисление изучает необходимые и достаточные условия локального экстремума функционалов.
Необходимое условие экстремума (НУЭ) (не достаточное!). Если функционал $V[y]$ достигает локального экстремума на функции $\bar{y}$ и $\exists\ \delta V[\bar{y}, \delta y]$, то
$\boxed{\delta V[\bar{y}, \delta y] = 0}\ \forall\ \delta y$.
(Это аналог НУЭ функции f: $df = 0$.)

Вариационная задача с закреплёнными концами

Простейшая задача вариационного исчисления — задача с закреплёнными концами.
Рассмотрим функционал
$$V[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx,$$
где $F \in C^{(2)}$, $y(x) \in C^{(2)}[a;\ b]$,
$y(a) = A$, $y(b) = B$.



Среди всех функций $y(x) \in C^{(2)}[a;b]$, удовлетворяющих КУ $y(a) = A$, $y(b) = B$, требуется выбрать такую, на которой функционал $V[y]$ достигает локального экстремума.
НУЭ
$\delta V[y, \delta y] = 0 \ \forall \ \delta y$
приводится к виду:

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0, \qquad x \in (a;\ b).$$

Это уравнение называется уравнением *Эйлера*. В общем случае это ОДУ 2-го порядка. Функции $y(x)$, ему удовлетворяющие, называются *экстремалями*. Здесь $\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)$ означает *полную* производную по x от функции $F_{y'}(x, y, y')$, с учётом того, что $y = y(x)$.
С учётом КУ получается краевая задача:

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0, & x \in (a;\ b), \\ y(a) = A, \qquad y(b) = B. \end{cases}$$

Замечание. Если функционал зависит от нескольких функций:

$$V[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int\limits_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')\,dx,$$

то НУЭ приводит к системе уравнений Эйлера:

$$F_{y_k} - \frac{d}{dx}\left(F_{y_k'}\right) = 0, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Пример 2 (самостоятельно). Найти экстремали функционала $V[y] = \int_1^3 (3x - y)y\,dx$, удовлетворяющие условиям $y(1) = 1$, $y(3) = 4$.
Здесь $F(x, y, y') = 3xy - y^2$.
Уравнение Эйлера имеет вид:

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0.$$

$3x - 2y = 0.$
Отсюда

$$y = \frac{3}{2}x.$$

Но $y(1) \neq 1$, $y(3) \neq 4$.
Ответ: экстремалей нет.

Пример 3 (самостоятельно). Найти экстремали функционала $V[y] = \int_a^b \left(y + \frac{y^3}{3}\right)dx$, удовлетворяющие условиям $y(a) = A$, $y(b) = B$.
Здесь $F(x, y, y') = y + \frac{y^3}{3}$.
Уравнение Эйлера имеет вид:

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0.$$

$1 + y^2 = 0.$

Это уравнение не имеет вещественных решений.
Ответ: экстремалей нет.

Пример 4 (самостоятельно). Найти экстремали функционала $V[y]=\int_0^1 yy'\,dx$, удовлетворяющие условиям $y(0)=A$, $y(1)=B$.
Здесь $F(x,y,y')=yy'$.
Уравнение Эйлера имеет вид:

$$F_y-\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=0.$$

$$y'-\frac{d}{dx}(y)=0.$$

$$y'-y'=0.$$

Уравнение выполняется для всех функций $y(x)$. Все дифференцируемые функции $y(x)$, удовлетворяющие краевым условиям $y(0)=A$, $y(1)=B$, являются экстремалями. При этом функционал

$$V[y]=\int_0^1 yy'\,dx=\int_0^1\left(\frac{y^2}{2}\right)'dx=\frac{y^2}{2}\bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{B^2-A^2}{2}$$

не зависит от вида функции $y(x)$.
Ответ: все дифференцируемые функции $y(x)$, удовлетворяющие условиям $y(0)=A$, $y(1)=B$.

Пример 5 (самостоятельно). Найти экстремали функционала $V[y]=\int_a^b (xy'+(y')^2)\,dx$, удовлетворяющие условиям $y(a)=A$, $y(b)=B$.
Здесь $F(x,y,y')=xy'+(y')^2$.
Уравнение Эйлера имеет вид:

$$F_y-\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=0.$$

$$0-\frac{d}{dx}(x+2y')\ =0.$$

$$\frac{d}{dx}(x+2y')=0.$$

$$x+2y'=2C_1.$$

$$y'=-\frac{x}{2}+C_1.$$

$$y=-\frac{x^2}{4}+C_1x+C_2.$$

Константы C_1, C_2 определяются из краевых условий $y(a)=A$, $y(b)=B$:

$$\begin{cases} y(a)=-\dfrac{a^2}{4}+C_1a+C_2=A,\\ y(b)=-\dfrac{b^2}{4}+C_1b+C_2=B.\end{cases}$$

$$C_1=\frac{B-A}{b-a}+\frac{a+b}{4},\qquad C_2=\frac{Ab-Ba}{b-a}-\frac{ab}{4}.$$

Ответ: $y=-\frac{x^2}{4}+\left(\frac{B-A}{b-a}+\frac{a+b}{4}\right)x+\frac{Ab-Ba}{b-a}-\frac{ab}{4}$.

Пример 6 (самостоятельно). Найти экстремали функционала
$V[y] = \int_{-1}^{0} (12xy - (y')^2)\,dx$, удовлетворяющие условиям $y(-1) = 1$, $y(0) = 0$.
Здесь $F(x, y, y') = 12xy - (y')^2$.
Уравнение Эйлера имеет вид:

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0.$$

$$12x - \frac{d}{dx}(-2y') = 0.$$

$$\frac{d}{dx}(y') = -6x.$$

$$y' = -3x^2 + C_1.$$

$$y = -x^3 + C_1 x + C_2.$$

Краевые условия:

$$\begin{cases} y(-1) = 1 - C_1 + C_2 = 1, \\ y(0) = C_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = C_2 = 0$.
Ответ: $y = -x^3$.

Частные случаи уравнения Эйлера

1) Если $\boxed{F = F(y'),}$ то уравнение Эйлера имеет вид:

   $$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0,$$

   $$\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0,$$

   $$F_{y'y'} \cdot y'' = 0.$$

   Это уравнение имеет следующие решения.
   а) $y'' = 0$.
   $y = C_1 x + C_2, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
   б) $F_{y'y'}(y') = 0$.
   Либо $F_{y'y'} \equiv 0$ (т. е. $F(y') = \alpha y' + \beta$), тогда уравнение выполняется для любых функций $y(x)$; либо это уравнение (не дифференциальное) но y', которое может иметь некоторые корни $y' = \tilde{c}_k$, откуда $y = \tilde{c}_k x + \tilde{c}$, но решения такого вида уже получены в п. а).

   Таким образом, если $F = F(y')$ и $F_{y'y'} \not\equiv 0$, то все экстремали являются линейными функциями: $\boxed{y = C_1 x + C_2.}$

2) Если $\boxed{F = F(y, y'),}$ то уравнение Эйлера имеет вид:

   $$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0.$$

   Умножим уравнение на y':

   $$y' F_y - y' \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0.$$

   Прибавим и вычтем $y'' F_{y'}$ в левой части уравнения:

$$\underbrace{y'F_y + y''F_{y'}}_{\frac{d}{dx}(F(y,y'))}\underbrace{-y''F_{y'} - y'\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)}_{-\frac{d}{dx}\left(y'F_{y'}\right)} = 0.$$

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'F_{y'}\right) = 0.$$

$$\boxed{F - y'F_{y'} = C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.}$$

Таким образом, порядок уравнения понизился (в общем случае получилось ОДУ 1-го порядка). Полученную формулу можно использовать при решении задач.

Пример 7 (самостоятельно). Найти экстремали функционала $V[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$, удовлетворяющие условиям $y(a) = A$, $y(b) = B$.

Функционал представляет собой длину кривой $y = y(x)$, проходящей через точки $(a;\, A)$ и $(b;\, B)$. Очевидно, он должен достигать минимума на прямой, соединяющей эти точки. Проверим это.

Здесь $F(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$ — зависит только от y'.

Поскольку $F_{y'y'} \not\equiv 0$ (иначе функция F была бы линейной функцией y'), то экстремали имеют вид:

$y = C_1 x + C_2$.

Константы C_1, C_2 находятся из краевых условий:

$$\begin{cases} y(a) = C_1 a + C_2 = A, \\ y(b) = C_1 b + C_2 = B. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_1 = \frac{B - A}{b - a}, \qquad C_2 = \frac{Ab - Ba}{b - a}.$$

Ответ: $y = \frac{B-A}{b-a}x + \frac{Ab-Ba}{b-a}$.

ДЗ 12.

1. Найти вариацию функционалов:
   а) $V[y] = \int_a^b yy'\, dx$,
   б) $V[y] = y^2(0) + \int_0^1 (xy + (y')^2)\, dx$,
   в) $V[y] = \int_0^\pi y' \sin y\, dx$.

Эльсгольц «Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление», гл. 6, задачи для самостоятельного решения (в конце главы) № 1–4, 6, 11.