Семинар 16

Линейные однородные УрЧП 1-го порядка

Рассмотрим *линейное однородное* УрЧП 1-го порядка:
$$a_1(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+a_2(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{1}$$
Здесь a_1, a_2 — заданные непрерывно дифференцируемые функции, которые не обращаются в нуль одновременно; $z(x,y)$ — неизвестная непрерывно дифференцируемая функция.
Запишем *характеристическое уравнение*:
$$\frac{dx}{a_1(x,y)}=\frac{dy}{a_2(x,y)}. \tag{2}$$
Это ОДУ первого порядка, записанное в дифференциалах. Из него можно найти $y(x)$ или $x(y)$, или уравнения интегральных кривых в неявном виде. Пусть ОР ХУ (2) записано в неявном виде:
$$\Psi(x,y)=C, \tag{3}$$
где C — произвольная константа. Функция $\Psi(x,y)$ постоянна на каждом решении уравнения (2), она называется *первым интегралом* уравнения (2). Выражение (3) описывает однопараметрическое семейство кривых на плоскости Oxy. Каждая из них называется *характеристикой* исходного УрЧП (1). Если выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка (2), то через каждую точку на плоскости проходит одна и только одна характеристика.
Можно показать, что ОР решение уравнения (1) имеет вид: $z(x,y)=F\big(\Psi(x,y)\big)$, где F — произвольная непрерывно дифференцируемая функция одного аргумента. В отличие от ОДУ 1-го порядка, ОР которого зависит от одной произвольной константы, ОР УрЧП 1-го порядка зависит от одной произвольной функции.
Заметим, что на каждой характеристике функция $z(x,y)$ постоянна, т. е. характеристики являются линиями уровня функции $z(x,y)$.

Пример 1 (Филиппов № 1167). Решить уравнение $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

Запишем уравнение характеристик:
$$\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}.$$
Разделив переменные, проинтегрируем:
$$x\,dx=-y\,dy.$$
$$\frac{x^2}{2}=-\frac{y^2}{2}+\frac{C}{2},\qquad C\in\mathbb{R}.$$
$$x^2+y^2=C.$$
Тогда первый интеграл $\Psi(x,y)=x^2+y^2$, а ОР исходного УрЧП имеет вид
$$z=F(\Psi)=F(x^2+y^2),$$
где F — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.
Ответ: $z=F(x^2+y^2)$, $F\in C^{(1)}$.

Рассмотрим **задачу Коши** для линейного однородного УрЧП 1-го порядка:
$$\begin{cases} a_1(x,y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+a_2(x,y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\\ z|_\Gamma=f(x,y).\end{cases}$$
Требуется найти функцию $z(x,y)$, которая удовлетворяет УрЧП и принимает заданные значения на гладкой кривой $\Gamma\subset Oxy$. Для того чтобы определить функцию $z(x,y)$, нужно найти ОР УрЧП и подставить его в *условие Коши* $z|_\Gamma=f(x,y)$.

Пример 2 (задача к общему зачёту № 96). Решить задачу Коши $\begin{cases} y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\\ z|_{x=1}=y^2.\end{cases}$

ОР этого УрЧП было получено в примере 1:
$z=F(x^2+y^2),\qquad F\in C^{(1)}$.
Подставим его в условие Коши:
$F(1+y^2)=y^2$.
Сделаем замену: $1+y^2=u$. Тогда
$F(u)=u-1$.
Таким образом, мы нашли функцию F в явном виде. Теперь выписываем решение задачи Коши:
$z=F(x^2+y^2)=x^2+y^2-1$.
(Здесь вместо аргумента функции нужно подставлять x^2+y^2.)
Ответ: $z=x^2+y^2-1$.

Теперь рассмотрим линейное однородное УрЧП относительно функции, зависящей от трёх переменных:
$$a_1(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x}+a_2(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y}+a_3(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z}=0. \tag{4}$$
Мы по-прежнему считаем, что функции a_1, a_2, a_3 непрерывно дифференцируемы и не обращаются в нуль одновременно.
Запишем *характеристическую систему*:
$$\frac{dx}{a_1(x,y,z)}=\frac{dy}{a_2(x,y,z)}=\frac{dz}{a_3(x,y,z)}. \tag{5}$$
ОР такой системы — это двухпараметрическое семейство кривых в пространстве (характеристик уравнения (4)), которые задаются неявно системой из двух уравнений:
$$\begin{cases}\Psi_1(x,y,z)=C_1,\\ \Psi_2(x,y,z)=C_2,\end{cases} \tag{6}$$
где $\Psi_1(x,y,z)$, $\Psi_2(x,y,z)$ — *независимые* функции (т. е. ни одна из них не является функцией другой) — первые интегралы системы (5), а C_1, C_2 — произвольные константы. Если выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы ОДУ (5), то через каждую точку в пространстве проходит одна и только одна характеристика.
Можно показать, что ОР УрЧП (4) имеет вид: $u=F\big(\Psi_1(x,y,z),\Psi_2(x,y,z)\big)$, где F — произвольная непрерывно дифференцируемая функция двух аргументов.
Заметим, что функция u постоянна на каждой характеристике.
Аналогично решается линейное однородное УрЧП для функции n переменных:

$$a_1(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+a_n(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0.$$
Характеристическая система
$$\frac{dx_1}{a_1}=\dots=\frac{dx_n}{a_n}$$
имеет $n-1$ независимых первых интегралов $\Psi_1(x_1,\dots,x_n)$, …, $\Psi_{n-1}(x_1,\dots,x_n)$, а ОР УрЧП имеет вид: $u=F\big(\Psi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\Psi_{n-1}(x_1,\dots,x_n)\big)$.

Пример 3 (Филиппов № 1170). Решить уравнение $(x-z)\frac{\partial u}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial u}{\partial y}+2z\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

Запишем характеристическую систему:
$$\frac{dx}{x-z}=\frac{dy}{y-z}=\frac{dz}{2z}.$$
Нам нужно найти два независимых первых интеграла. В этом нам поможет следующая лемма.

Лемма (о пропорциональных величинах). Пусть $\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\dots=\frac{\alpha_n}{\beta_n}=\gamma$. Тогда $\frac{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_n\alpha_n}{k_1\beta_1+k_2\beta_2+\dots+k_n\beta_n}=\gamma$ для любых $k_1,k_2,\dots,k_n$.

Доказательство. По условию $\alpha_1=\gamma\beta_1$, $\alpha_2=\gamma\beta_2$, …, $\alpha_n=\gamma\beta_n$. Тогда
$$\frac{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_n\alpha_n}{k_1\beta_1+k_2\beta_2+\dots+k_n\beta_n}=\frac{k_1\gamma\beta_1+k_2\gamma\beta_2+\dots+k_n\gamma\beta_n}{k_1\beta_1+k_2\beta_2+\dots+k_n\beta_n}=\frac{\gamma(k_1\beta_1+k_2\beta_2+\dots+k_n\beta_n)}{k_1\beta_1+k_2\beta_2+\dots+k_n\beta_n}=\gamma,$$
ч. т. д.

В нашем случае
$$\underbrace{\frac{dx}{x-z}}_{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}=\underbrace{\frac{dy}{y-z}}_{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}=\underbrace{\frac{dz}{2z}}_{\frac{\alpha_3}{\beta_3}}=\gamma.$$
Из леммы следует, что $\frac{\alpha_1+\alpha_3}{\beta_1+\beta_3}=\gamma=\frac{\alpha_3}{\beta_3}$, т. е.
$$\frac{dx+dz}{x-z+2z}=\frac{dz}{2z}.$$
$$\frac{d(x+z)}{x+z}=\frac{dz}{2z}.$$
$$2\frac{d(x+z)}{x+z}=\frac{dz}{z}.$$
$$d(2\ln|x+z|)=d(\ln|z|).$$
Это уравнение в полных дифференциалах, проинтегрируем его:
$$2\ln|x+z|=\ln|z|+C,\qquad C\in\mathbb{R}.$$
$$(x+z)^2=C_1z.$$
$$\frac{(x+z)^2}{z}=C_1.$$
Получаем один из первых интегралов: $\boxed{\Psi_1(x,y,z)=\frac{(x+z)^2}{z}.}$

Ещё один первый интеграл найдём, рассмотрев равенство: $\frac{\alpha_2+\alpha_3}{\beta_2+\beta_3}=\gamma=\frac{\alpha_3}{\beta_3}$. Тогда
$$\frac{d(y+z)}{y+z}=\frac{dz}{2z},$$
откуда аналогично получаем:

$$\frac{(y+z)^2}{z} = C_2.$$

Тогда имеем ещё один первый интеграл: $\boxed{\Psi_2(x,y,z) = \frac{(y+z)^2}{z}.}$

Первые интегралы можно было найти и другим способом, решив ОДУ $\frac{dx}{x-z} = \frac{dz}{2z}$, затем подставив его решение в уравнение $\frac{dx}{y-z} = \frac{dz}{2z}$, и решив полученное ОДУ.

Таким образом, ОР УрЧП: $u = F(\Psi_1, \Psi_2) = F\left(\frac{(x+z)^2}{z}, \frac{(y+z)^2}{z}\right)$, где F — произвольная непрерывно дифференцируемая функция двух аргументов.

Ответ: $u = F\left(\frac{(x+z)^2}{z}, \frac{(y+z)^2}{z}\right)$, $F \in C^{(1)}$.

Задача Коши решается аналогично случаю неизвестной функции двух переменных:

$$\begin{cases} a_1(x,y,z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + a_2(x,y,z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + a_3(x,y,z)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ u|_\Phi = f(x,y,z). \end{cases}$$

Требуется найти функцию $u(x,y,z)$, которая удовлетворяет УрЧП и принимает заданные значения на гладкой поверхности Φ. Для этого нужно найти ОР УрЧП и подставить его в условие Коши.

Пример 4 (Филиппов № 1193). Решить задачу Коши $\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + xy\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ u|_{z=0} = x^2 + y^2. \end{cases}$

Сначала найдём ОР УрЧП. Для этого запишем характеристическую систему:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy}.$$

Надо найти два независимых первых интеграла. Рассмотрим уравнение:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

Это уравнение с разделёнными переменными. Проинтегрируем его:

$$\ln|x| = \ln|y| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

$$x = C_1 y.$$

$$\frac{x}{y} = C_1.$$

Получаем первый интеграл: $\boxed{\Psi_1(x,y) = \frac{x}{y}.}$

Другой первый интеграл можно найти, если рассмотреть уравнение

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy}$$

и подставить в него найденное ранее $x = C_1 y$:

$$dy = \frac{dz}{C_1 y}.$$

Теперь разделим переменные и проинтегрируем:

$$C_1 y\,dy = dz.$$

$$\frac{C_1 y^2}{2} = z + \frac{C_2}{2}, \qquad C_2 \in \mathbb{R}.$$

$C_1y^2 - 2z = C_2$.

Подставив сюда $C_1 = \frac{x}{y}$, получим:

$xy - 2z = C_2$.

Отсюда получаем другой первый интеграл: $\boxed{\Psi_2(x,y,z) = xy - 2z.}$

Его можно получить и иным способом, если воспользоваться леммой и в системе

$$\underbrace{\frac{dx}{x}}_{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} = \underbrace{\frac{dy}{y}}_{\frac{\alpha_2}{\beta_2}} = \underbrace{\frac{dz}{xy}}_{\frac{\alpha_3}{\beta_3}} = \gamma$$

рассмотреть равенство

$$\frac{y\alpha_1 + x\alpha_2}{y\beta_1 + x\beta_2} = \gamma = \frac{\alpha_3}{\beta_3},$$

т. е.

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{xy + xy} = \frac{dz}{xy},$$

откуда

$$\frac{d(xy)}{2xy} = \frac{dz}{xy},$$

$$d(xy) = 2\,dz,$$

$$xy - 2z = C_2, \qquad \Psi_2(x,y,z) = xy - 2z.$$

Третий способ нахождения Ψ_2: из системы

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy}$$

следует, что

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 2\frac{dz}{xy},$$

откуда

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{xy} = 2\frac{dz}{xy},$$

$$d(xy) = 2\,dz,$$

$$xy - 2z = C_2, \qquad \Psi_2(x,y,z) = xy - 2z.$$

ОР УрЧП: $u = F(\Psi_1, \Psi_2) = F\left(\frac{x}{y}, xy - 2z\right)$, где F — произвольная непрерывно дифференцируемая функция двух аргументов.

Подставим ОР в условие Коши:

$$F\left(\frac{x}{y}, xy\right) = x^2 + y^2.$$

Сделаем замену: $t = \frac{x}{y}$, $v = xy$. Тогда $x^2 + y^2 = tv + \frac{v}{t}$, и

$$F(t,v) = tv + \frac{v}{t} = v\left(t + \frac{1}{t}\right).$$

Функция F найдена. Теперь выпишем решение задачи Коши:

$$u = F\left(\frac{x}{y}, xy - 2z\right) = (xy - 2z)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right).$$

(Здесь в качестве первого аргумента функции нужно подставлять $\frac{x}{y}$, в качестве второго — $xy - 2z$.)

Ответ: $u = (xy - 2z)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$.

ДЗ 16. Филиппов № 1168, 1169, 1189–1192, 1159, добавление (в конце задачника) № 221, 219.