Семинар 10

Резольвента

Рассмотрим неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds + f(x).$$

Альтернатива Фредгольма: либо λ — ХЧ соответствующего *однородного* уравнения, либо *неоднородное* уравнение однозначно разрешимо для любой непрерывной функции $f(x)$.
В том случае, когда λ — не ХЧ однородного уравнения, единственное решение неоднородного уравнения представляется в виде

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda)f(s)\,ds + f(x),$$

где функция $R(x,s,\lambda)$ называется *резольвентой* ИУ: она определяется ядром $K(x,s)$ и не зависит от $f(x)$. Резольвента — аналог функции Коши для ОДУ. Если известна резольвента, то можно получить решение неоднородного ИУ для любой непрерывной функции $f(x)$.

Резольвента вещественного симметрического ядра

Если ядро $K(x,s)$ вещественное и симметрическое, т. е. $K(x,s) \equiv K(s,x)$, то
1) все ХЧ вещественны;
2) СФ, отвечающие разным ХЧ, ортогональны на отрезке $[a;b]$,
3) ЛНЗ СФ, отвечающие одному ХЧ, можно ортогонализовать алгоритмом Грама—Шмидта;
4) следовательно, из ЛНЗ вещественных СФ можно построить ортонормированную на отрезке $[a;b]$ систему (ОНС) $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots\}$ (для вырожденного ядра — конечную), где каждая СФ $\varphi_j(x)$ отвечает некоторому ХЧ λ_j (среди λ_j могут быть совпадающие) и $\left(\varphi_j, \varphi_m\right) = \int_a^b \varphi_j(s)\varphi_m(s)\,ds = \delta_{jm}$.

Тогда резольвента имеет вид:

$$R(x,s,\lambda) = \sum_j \frac{\varphi_j(x)\varphi_j(s)}{\lambda_j - \lambda}. \tag{1}$$

Сумма берётся по всем функциям φ_j. Резольвента (1) существует (т. е. ряд сходится) для всех λ, не являющихся ХЧ. Если λ — ХЧ, то резольвента не существует. Если в формуле (1) взять сумму первых нескольких членов, то получится приближённая резольвента, которую можно использовать для приближённого решения ИУ.

Пример 1. Построить резольвенту для уравнения:

$$y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \left[\sin(x+s) + \frac{1}{2}\right] y(s)\,ds + f(x).$$

В данном уравнении ядро вещественное и симметрическое.
В примере 1 семинара 9 были найдены ХЧ и СФ соответствующего однородного уравнения:

$$\lambda=\frac{1}{\pi},\qquad y(x)=C_1(\sin x+\cos x)+C_2,$$
$$\lambda=-\frac{1}{\pi},\qquad y(x)=C(\cos x-\sin x).$$
ХЧ $\lambda=\frac{1}{\pi}$ отвечают две ЛНЗ СФ: $y_1(x)=\sin x+\cos x$ и $y_2(x)=1$. Они уже ортогональны на отрезке $[0;\ 2\pi]$ (нам повезло):
$$(y_1,y_2)=\int_0^{2\pi} y_1(s)y_2(s)\,ds=\int_0^{2\pi}(\sin s+\cos s)\,ds=0.$$
Остаётся их отнормировать:
$$\|y_1\|^2=(y_1,y_1)=\int_0^{2\pi} y_1^2(s)\,ds=\int_0^{2\pi}(\sin s+\cos s)^2\,ds=$$
$$=\int_0^{2\pi}(\sin^2 s+2\sin s\cos s+\cos^2 s)\,ds=2\pi.$$
$$\|y_2\|^2=(y_2,y_2)=\int_0^{2\pi} y_2^2(s)\,ds=\int_0^{2\pi} ds=2\pi.$$
Тогда ортонормированными СФ, отвечающими ХЧ $\lambda=\frac{1}{\pi}$, будут
$$\varphi_1(x)=\frac{y_1(x)}{\|y_1\|}=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2\pi}},\qquad \varphi_2(x)=\frac{y_2(x)}{\|y_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$
ХЧ $\lambda=-\frac{1}{\pi}$ отвечает одна ЛНЗ СФ: $y_3(x)=\cos x-\sin x$. Т. к. ядро вещественное и симметрическое, то она заведомо ортогональна всем СФ, отвечающим $\lambda=\frac{1}{\pi}$. Отнормируем её:
$$\|y_3\|^2=(y_3,y_3)=\int_0^{2\pi} y_3^2(s)\,ds=\int_0^{2\pi}(\cos s-\sin s)^2\,ds=$$
$$=\int_0^{2\pi}(\cos^2 s-2\sin s\cos s+\sin^2 s)\,ds=2\pi.$$
$$\varphi_3(x)=\frac{y_3(x)}{\|y_3\|}=\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2\pi}}.$$
Мы получили ОНС СФ
$$\varphi_1(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2\pi}},\qquad \varphi_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\qquad \varphi_3(x)=\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2\pi}},$$
отвечающих ХЧ $\lambda_1=\frac{1}{\pi}$, $\lambda_2=\frac{1}{\pi}$, $\lambda_3=-\frac{1}{\pi}$, соответственно. Теперь резольвента имеет вид:

$$R(x,y,\lambda)=\sum_j \frac{\varphi_j(x)\varphi_j(s)}{\lambda_j-\lambda}=\frac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1-\lambda}+\frac{\varphi_2(x)\varphi_2(s)}{\lambda_2-\lambda}+\frac{\varphi_3(x)\varphi_3(s)}{\lambda_3-\lambda}=$$
$$=\frac{(\sin x+\cos x)(\sin s+\cos s)}{2\pi\left(\frac{1}{\pi}-\lambda\right)}+\frac{1}{2\pi\left(\frac{1}{\pi}-\lambda\right)}+\frac{(\cos x-\sin x)(\cos s-\sin s)}{2\pi\left(-\frac{1}{\pi}-\lambda\right)}=$$
$$=\frac{\sin x\sin s+\cos x\sin s+\sin x\cos s+\cos x\cos s}{2(1-\lambda\pi)}+\frac{1}{2(1-\lambda\pi)}-$$
$$-\frac{\sin x\sin s-\cos x\sin s-\sin x\cos s+\cos x\cos s}{2(1+\lambda\pi)}=$$
$$=\frac{2\cos x\sin s+2\sin x\cos s+2\lambda\pi(\sin x\sin s+\cos x\cos s)+1+\lambda\pi}{1-\lambda^2\pi^2}=$$
$$=\frac{1+2\sin(x+s)+\lambda\pi[1+2\cos(x-s)]}{1-\lambda^2\pi^2}.$$
Ответ: $R(x,s,\lambda)=\frac{1+2\sin(x+s)+\lambda\pi[1+2\cos(x-s)]}{1-\lambda^2\pi^2}$.

Построение резольвенты при малых λ

Для произвольного непрерывного ядра $K(x,s)$ (не обязательно симметрического) можно найти резольвенту при *малых* λ в виде сходящегося *ряда Неймана:*
$$R(x,s,\lambda)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n K_{n+1}(x,s),$$
где $K_{n+1}(x,s)$ — *повторные ядра:*
$$K_1(x,s)=K(x,s),\qquad K_n(x,s)=\int_a^b K(x,t)K_{n-1}(t,s)\,dt,\qquad n=2,3,\dots$$
При этом λ должно быть достаточно *малым*: $|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}$ (это оценка с запасом), где $M=\max\limits_{x,s\in[a;\,b]}|K(x,s)|$. Тогда ряд Неймана будет сходиться.
Если взять частичную сумму ряда Неймана, то получится приближённая резольвента, которую можно использовать для приближённого решения ИУ.

Пример 2. Построить резольвенту при малых λ для уравнения:
$y(x)=\lambda\int_0^1 xe^s y(s)\,ds+f(x)$.
Имеем:
$K_1(x,s)=K(x,s)=xe^s$,
$$K_2(x,s)=\int_0^1 K(x,t)K_1(t,s)\,dt=\int_0^1 xe^t te^s\,dt=xe^s\int_0^1 te^t\,dt=xe^s\left(te^t|_0^1-\int_0^1 e^t\,dt\right)=$$
$=xe^s(e-e+1)=xe^s$,
$$K_3(x,s)=\int_0^1 K(x,t)K_2(t,s)\,dt=\int_0^1 xe^t te^s\,dt=xe^s,$$
…
$K_n(x,s)=xe^s\ \ \forall n$.

Тогда резольвента имеет вид:

$$R(x,s,\lambda)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n K_{n+1}(x,s)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n xe^s=xe^s\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n=xe^s\cdot\frac{1}{1-\lambda}.$$

Запишем критерий малости λ. Имеем:

$$M=\max_{x,s\in[0;\,1]}|K(x,s)|=\max_{x,s\in[0;\,1]}xe^s=e,\qquad |\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}=\frac{1}{e(1-0)}=\frac{1}{e}.$$

И действительно, при $|\lambda|<\frac{1}{e}$ ряд $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n$ заведомо сходится (однако, он сходится и в более широкой области: $|\lambda|<1$, так что это оценка с запасом).

Ответ: $R(x,s,\lambda)=\frac{xe^s}{1-\lambda}$, $|\lambda|<\frac{1}{e}$.

Метод последовательных приближений

При $|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}$ (т. е. при малых λ) уравнение Фредгольма 2-го рода (с произвольным непрерывным ядром, не обязательно симметрическим)

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds+f(x)$$

можно решать методом последовательных приближений.

Пусть $y_0(x)$ — произвольная непрерывная функция и последовательность функций $y_n(x)$ строится по следующей рекуррентной формуле:

$$y_n(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)y_{n-1}(s)\,ds+f(x),\qquad n=1,2,\ldots$$

(т. е. в левую часть интегрального уравнения вместо y подставляем y_n, а в правую — y_{n-1}).

Тогда $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x)$ — единственное решение исходного ИУ при малых λ. (Можно показать, что в круге $|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}$ не содержится ХЧ, поэтому ИУ имеет единственное решение.)

Обычно метод последовательных приближений применяется для приближённого решения ИУ: процесс построения последовательности $\{y_n(x)\}$ обрывается на m-м шаге и в качестве приближённого решения ИУ берётся $y_m(x)$.

Пример 3. Решить уравнение методом последовательных приближений:

$y(x)=\lambda\int_0^1 y(s)\,ds+1$.

Пусть $y_0(x)=f(x)=1$, тогда

$$y_1(x)=\lambda\int_0^1 y_0(s)\,ds+1=\lambda\int_0^1 ds+1=\lambda+1,$$

$$y_2(x)=\lambda\int_0^1 y_1(s)\,ds+1=\lambda\int_0^1(\lambda+1)\,ds+1=\lambda^2+\lambda+1,$$

$$y_3(x) = \lambda \int_0^1 y_2(s)\,ds + 1 = \lambda \int_0^1 (\lambda^2 + \lambda + 1)\,ds + 1 = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1,$$

…

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k.$$

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Критерий малости λ: $M = \max\limits_{x,s\in[0;\,1]} |K(x,s)| = 1$, откуда $|\lambda| < 1$.

Ответ: $y(x) = \frac{1}{1-\lambda}$, $|\lambda| < 1$.

Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода

ИУ Вольтерра 2-го рода имеет вид:

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)\,ds + f(x), \qquad x \in [a;\ b].$$

Решение существует и единственно при всех λ. Значит, однородное уравнение имеет только тривиальное решение, потому ХЧ у уравнения Вольтерра нет.

Методы решения.

1. *Метод последовательных приближений.* Последовательность $\{y_n(x)\}$, где $y_0(x)$ — произвольная непрерывная функция,

   $$y_n = \lambda \int_a^x K(x,s)y_{n-1}(s)\,ds + f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

   будет сходиться к решению $y(x)$ ИУ для всех λ, не только для малых.
2. *Построение резольвенты.* Резольвента для уравнения Вольтерра 2-го рода существует для всех λ и представляется сходящимся рядом Неймана:

   $$R(x,s,\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,s),$$

   $$K_1(x,s) = K(x,s), \qquad K_n(x,s) = \int_s^x K(x,t)K_{n-1}(t,s)\,dt\,, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

   Решение ИУ имеет вид:

   $$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,s,\lambda)f(s)\,ds.$$
3. *Преобразование Лапласа.* Годится для решения уравнений Вольтерра типа свёртки, у которых ядро зависит от разности аргументов: $K(x-s)$. Пусть $a = 0$ и ИУ

   $$y(x) = \lambda \int_0^x K(x-s)y(s)\,ds + f(x)$$

выполняется при всех $x \geq 0$. Будем считать, что при $x < 0$ функции $y(x)$, $K(x)$ и $f(x)$ равны нулю и что от них существует преобразование Лапласа: $y(x) \risingdotseq Y(p)$, $K(x) \risingdotseq \widetilde{K}(p)$, $f(x) \risingdotseq F(p)$. Поскольку интеграл $\int_0^x K(x-s)y(s)\,ds$ представляет собой свёртку функций $K(x)$ и $y(x)$, то его изображение есть произведение изображений функций $K(x)$ и $y(x)$. Тогда, взяв преобразование Лапласа от левой и правой части уравнения Вольтерра, получим:
$Y(p) = \lambda\widetilde{K}(p)Y(p) + F(p)$.
Из этого алгебраического уравнения находится функция $Y(p)$, а затем по изображению восстанавливается оригинал $y(x)$.
4. *Сведение к задаче Коши.* Некоторые уравнения Вольтерра с помощью последовательного дифференцирования можно свести к задаче Коши для ОДУ.

Специальных методов решения уравнений Вольтерра с вырожденными ядрами нет.

Пример 4. Решить уравнение разными способами: $y(x) = \lambda \int_0^x y(s)\,ds + 1$.

1. *Метод последовательных приближений.* Пусть $y_0(x) = f(x) = 1$, тогда

$$y_1(x) = \lambda \int_0^x y_0(s)\,ds + 1 = \lambda x + 1,$$

$$y_2(x) = \lambda \int_0^x y_1(s)\,ds + 1 = \lambda \int_0^x (\lambda s + 1)\,ds + 1 = \lambda\left(\frac{\lambda x^2}{2} + x\right) + 1 = \frac{\lambda^2 x^2}{2} + \lambda x + 1,$$

$$y_3(x) = \lambda \int_0^x y_2(s)\,ds + 1 = \lambda \int_0^x \left(\frac{\lambda^2 s^2}{2} + \lambda s + 1\right) ds + 1 = \lambda\left(\frac{\lambda^2 x^3}{2 \cdot 3} + \frac{\lambda x^2}{2} + x\right) + 1 =$$

$$= \frac{\lambda^3 x^3}{2 \cdot 3} + \frac{\lambda^2 x^2}{2} + \lambda x + 1,$$

$$y_4(x) = \lambda \int_0^x y_3(s)\,ds + 1 = \lambda \int_0^x \left(\frac{\lambda^3 s^3}{2 \cdot 3} + \frac{\lambda^2 s^2}{2} + \lambda s + 1\right) ds + 1 =$$

$$= \lambda\left(\frac{\lambda^3 x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\lambda^2 x^3}{2 \cdot 3} + \frac{\lambda x^2}{2} + x\right) + 1 = \frac{\lambda^4 x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\lambda^3 x^3}{2 \cdot 3} + \frac{\lambda^2 x^2}{2} + \lambda x + 1,$$

…

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k x^k}{k!}.$$

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k x^k}{k!} = e^{\lambda x}.$$

2. *Построение резольвенты.*

$K_1(x,s) = K(x,s) = 1,$

$$K_2(x,s) = \int_s^x K(x,t)K_1(t,s)\,dt = \int_s^x dt = x - s,$$

$$K_3(x,s) = \int_s^x K(x,t)K_2(t,s)\,dt = \int_s^x (t-s)\,dt.$$

Сделаем замену: $t - s = u$, тогда $dt = du$ и

$$K_3(x,s) = \int_0^{x-s} u\,du = \frac{u^2}{2}\bigg|_0^{x-s} = \frac{(x-s)^2}{2}.$$

$$K_4(x,s) = \int_s^x K(x,t)K_3(t,s)\,dt = \int_s^x \frac{(t-s)^2}{2}dt = \int_0^{x-s} \frac{u^2}{2}du = \frac{(x-s)^3}{2\cdot 3},$$

$$K_5(x,s) = \int_s^x K(x,t)K_4(t,s)\,dt = \int_s^x \frac{(t-s)^3}{2\cdot 3}dt = \int_0^{x-s} \frac{u^3}{2\cdot 3}du = \frac{(x-s)^4}{2\cdot 3\cdot 4},$$

…

$$K_n(x,s) = \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$$R(x,s,\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n (x-s)^n}{n!} = e^{\lambda(x-s)}.$$

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x,s,\lambda) f(s)\,ds = 1 + \lambda \int_0^x e^{\lambda(x-s)}\,ds = 1 + \left(-e^{\lambda(x-s)}\right)\Big|_{s=0}^{s=x} =$$

$$= 1 - 1 + e^{\lambda x} = e^{\lambda x}.$$

3. *Преобразование Лапласа.* Поскольку ядро $K(x,s) = 1$ можно считать зависящим от разности аргументов: $K(x-s) = 1$, то наше уравнение Вольтерра является уравнением типа свёртки. Пусть ИУ выполняется при всех $x \geq 0$. Будем считать, что при $x < 0$ функции $y(x)$, $K(x)$ и $f(x)$ равны нулю. Пусть функция $y(x)$ является оригиналом. Тогда

$$y(x) \risingdotseq Y(p), \qquad K(x) = \theta(x) \risingdotseq \frac{1}{p}, \qquad f(x) = \theta(x) \risingdotseq \frac{1}{p},$$

где $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ — функция Хевисайда.

Взяв преобразование Лапласа от левой и правой части ИУ, получим

$$Y(p) = \lambda Y(p) \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p},$$

откуда

$$Y(p) = \frac{1}{p-\lambda}.$$

Воспользовавшись таблицей изображений, находим $y(x) = e^{\lambda x}\theta(x)$. Тогда при $x \geq 0$: $y(x) = e^{\lambda x}$.

4. *Сведение к задаче Коши.* В предположении, что $y(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, продифференцируем интегральное уравнение по x:

$y'(x) = \lambda y(x)$.

Получилось ОДУ 1-го порядка. Его решение не единственно, а решение ИУ Вольтерра — единственно, поэтому необходимо поставить дополнительное условие. Если мы подставим $x = 0$ в исходное ИУ, мы получим $y(0) = 1$. Значит, ИУ сводится к задаче Коши:

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Общее решение дифференциального уравнения: $y(x) = Ce^{\lambda x}$. Подставив это в условие Коши, найдём константу C: $y(0) = C = 1$. Значит, решение ИУ: $y(x) = e^{\lambda x}$.

Ответ: $y(x) = e^{\lambda x}$.

ДЗ10.

1. Построить резольвенту для ИУ с вещественным симметрическим ядром:
$$y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\sin x \sin s + \sin 2x \sin 2s) y(s)\, ds + f(x).$$
2. Построить резольвенту при малых λ для ИУ:
   а) $y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin s + \cos x) y(s)\, ds + f(x)$,
   б) $y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x + s)\, y(s)\, ds + f(x)$.
3. Решить ИУ методом последовательных приближений:
$$y(x) = \lambda \int_0^1 xsy(s)\, ds + x.$$
4. Решить ИУ $y(x) = \lambda \int_0^x (x - s) y(s)\, ds + f(x)$
   а) методом последовательных приближений при $\lambda = 1$, $f(x) = 1$;
   б) с помощью резольвенты при $\lambda = -1$, $f(x) = x$;
   в) с помощью преобразования Лапласа при $\lambda = 1$, $f(x) = x^2$, $x \geq 0$;
   г) сведя к задаче Коши при $\lambda = 1$, $f(x) = x^2$.