Семинар 13

Рассмотрим различные способы нахождения функции Грина.

Разложение функции Грина в ряд Фурье по СФ задачи Ш.–Л.

Функция Грина внутренней задачи Дирихле в области D должна удовлетворять задаче (2). Пусть функции $\{u_n(M)\}$ образуют полную ортогональную систему СФ задачи Ш.–Л. для оператора Лапласа в области D с условием Дирихле:
$$\begin{cases} \Delta\, u + \lambda u = 0 \ \text{ в } D, \\ u|_S = 0, \end{cases}$$
причём λ_n — соответствующие СЗ. (Здесь индекс n будет двойным в двумерном случае и тройным — в трёхмерном.)
Будем искать функцию Грина в виде ряда Фурье по всем функциям $\{u_n(M)\}$:
$$G(M, M_0) = \sum_n A_n u_n(M), \tag{3}$$
где коэффициенты разложения A_n зависят от M_0 (сумма будет двойной в двумерном случае и тройной — в трёхмерном).
Тогда ГУ $G|_{M\in S} = 0$ автоматически выполняется, т.к. $u(M)|_S = 0$.
Подставим ряд (3) в ДУ $\Delta_M\, G(M, M_0) = -\delta(M, M_0)$:
$$\Delta_M\, G(M, M_0) = \sum_n A_n\, \Delta\, u_n(M) = -\sum_n A_n \lambda_n u_n(M) = -\delta(M, M_0),$$
т.е.
$$\sum_n A_n \lambda_n u_n(M) = \delta(M, M_0).$$
Умножим полученное равенство на $u_k(M)$ и проинтегрируем по области D:
$$\sum_n A_n \lambda_n \underbrace{\int_D u_k(M)\, u_n(M)\, dV}_{0,\ \text{если}\ n\neq k} = \underbrace{\int_D u_k(M)\, \delta(M, M_0)\, dV}_{u_k(M_0)}.$$
В силу ортогональности СФ, в сумме, стоящей в левой части, отлично от нуля только одно слагаемое, соответствующее $n = k$. Тогда
$$A_k \lambda_k \underbrace{\int_D u_k^2(M)\, dV}_{\|u_k\|^2} = u_k(M_0),$$
$$A_k \lambda_k \|u_k\|^2 = u_k(M_0),$$
откуда
$$A_k = \frac{u_k(M_0)}{\lambda_k \|u_k\|^2}.$$
(Заметим, что для задачи Дирихле все СЗ $\lambda_k > 0$, поэтому на них можно делить.)
В силу произвольности индекса k, таким образом определяются все коэффициенты A_k. Подставив их в ряд (3), получим функцию Грина внутренней задачи Дирихле в области D:
$$\boxed{G(M, M_0) = \sum_n \frac{u_n(M) u_n(M_0)}{\lambda_n \|u_n\|^2}.}$$

Нахождение функции Грина методом разделения переменных

Напомним, что функция Грина $G(M, M_0)$ внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D определяется как решение задачи:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \qquad M, M_0 \in D, \\ G|_{M\in S} = 0. \end{cases}$$

С другой стороны, любое фундаментальное решение уравнения Лапласа, т.е. решение уравнения $\Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0)$, представляется в виде:

$$G(M, M_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{R_{MM_0}} + v(M) & \text{в двумерном случае,} \\ \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{1}{R_{MM_0}} + v(M) & \text{в трёхмерном случае,} \end{cases}$$

где $\Delta\, v(M) = 0,\ M \in D$.

Тогда, с учётом граничного условия $G|_{M\in S} = 0$, для функции $v(M)$ получается краевая задача:

$$\begin{cases} \Delta\, v(M) = 0, \qquad M \in D, \\ v(M)|_{M\in S} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{R_{MM_0}} & \text{в двумерном случае,} \\ -\dfrac{1}{4\pi} \dfrac{1}{R_{MM_0}} & \text{в трёхмерном случае.} \end{cases} \end{cases}$$

(Точка M_0 должна лежать строго внутри области D, поэтому функции $\frac{1}{R_{MM_0}}$ и $\ln \frac{1}{R_{MM_0}}$ будут непрерывны при $M \in S$.)

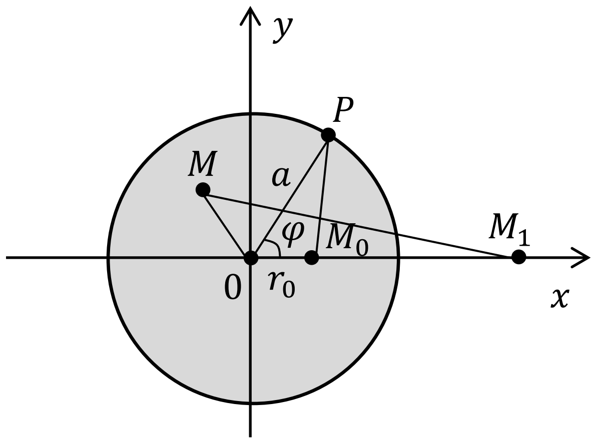
Пример 1 (задача Дирихле в круге). Найти функцию Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Функция Грина в круге будет иметь вид:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} + v(M),$$

где $G|_{M\in S} = 0$ на границе круга.

Итак, пусть M_0 — фиксированная точка внутри круга, M — произвольная точка внутри круга, P — произвольная точка на границе круга. Выберем систему координат с началом в центре круга, так чтобы точка M_0 лежала на оси Ox.



Тогда точка M_0 будет иметь полярные координаты $(r_0, 0)$, точка M будет иметь полярные координаты (r, φ). Функция $v(M)$ должна удовлетворять следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \Delta\, v = 0, \qquad 0 \le r < a, \\ v|_{r=a} = -\dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{R_{PM_0}}. \end{cases}$$

Решение уравнения Лапласа в круге имеет вид (см. семинар 4):

$$v(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Подставим в ГУ:

$$v|_{r=a} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{PM_0}}.$$

Разложим функцию, стоящую в правой части, в ряд Фурье по тригонометрической системе функций. Если точка P имеет полярные координаты (a, φ), по теореме косинусов получим:

$$R_{PM_0} = \sqrt{r_0^2 + a^2 - 2r_0 a \cos\varphi}.$$

С другой стороны, с помощью дифференцирования по параметру можно получить формулу:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n \cos n\varphi}{n} = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2q\cos\varphi + q^2}}, \qquad |q| < 1.}$$

Тогда

$$\ln \frac{1}{R_{PM_0}} = \ln \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + a^2 - 2r_0 a \cos\varphi}} = \ln \frac{1}{a\sqrt{\left(\frac{r_0}{a}\right)^2 + 1 - 2\left(\frac{r_0}{a}\right)\cos\varphi}} =$$

$$= \ln\frac{1}{a} + \ln \frac{1}{\sqrt{q^2 + 1 - 2q\cos\varphi}} = \ln\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} q^n \frac{\cos n\varphi}{n},$$

где $q = \frac{r_0}{a} < 1$. Таким образом,

$$\boxed{\ln \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + a^2 - 2r_0 a \cos\varphi}} = \ln\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r_0}{a}\right)^n \frac{\cos n\varphi}{n}, \qquad r_0 < a.} \qquad (1)$$

Это даёт нам искомое разложение функции $\ln\frac{1}{R_{PM_0}}$ в тригонометрический ряд Фурье. Теперь ГУ принимает вид:

$$v|_{r=a} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \ln\frac{1}{a} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r_0}{a}\right)^n \frac{\cos n\varphi}{n}.$$

Приравняв соответствующие коэффициенты при $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ и 1, получим:

$$A_0 = -\frac{1}{2\pi} \ln\frac{1}{a}, \qquad A_n = -\frac{1}{2\pi n}\left(\frac{r_0}{a^2}\right)^n, \qquad B_n = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Подставим найденные коэффициенты в ряд для $v(r, \varphi)$:

$$v(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \ln\frac{1}{a} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r r_0}{a^2}\right)^n \frac{\cos n\varphi}{n}. \qquad (2)$$

Замечание. Если считать, что точка M_0 имеет полярные координаты не $(r_0, 0)$, а (r_0, φ_0), то ответ запишется в виде

$$v(r,\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \ln\frac{1}{a} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r r_0}{a^2}\right)^n \frac{\cos n(\varphi - \varphi_0)}{n}.$$

Просуммируем ряд (2). Обозначим $\frac{a^2}{r_0} = r_1$. Тогда ряд (2) примет вид:

$$v(r,\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \ln\frac{1}{a} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \frac{\cos n\varphi}{n}.$$

Поскольку $\frac{a}{r_0} > 1$, то $r_1 = \frac{a}{r_0} \cdot a > a > r$. В таком случае формулу (1) можно записать в следующем виде (заменив r_0 на r и a на r_1):

$$\ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\varphi}} = \ln \frac{1}{r_1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \frac{\cos n\varphi}{n}, \qquad r < r_1,$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \frac{\cos n\varphi}{n} = \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\varphi}} - \ln \frac{1}{r_1}.$$

С учётом этого, функцию $v(r, \varphi)$ запишем в виде:

$$v(r,\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{a} + \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\varphi}} - \ln\frac{1}{r_1}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\varphi}} + \ln\frac{r_1}{a}\right) = -\frac{1}{2\pi}\left(\ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\varphi}} + \ln\frac{a}{r_0}\right).$$

Заметим, что $\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\varphi} = R_{MM_1}$ — расстояние между точкой M с полярными координатами (r, φ) и точкой M_1 с полярными координатами $(r_1, 0)$, которая лежит на оси Ox вне круга. Таким образом,

$$v(r,\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{a}{r_0}\frac{1}{R_{MM_1}}\right),$$

и

$$\boxed{G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{R_{MM_0}} - \ln\left(\frac{a}{r_0}\frac{1}{R_{MM_1}}\right)\right]}$$

— функция Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Функция Грина для других ГУ

Рассмотрим внутреннюю краевую задачу с ГУ третьего рода:

$$\begin{cases} \Delta\, u(M) = F(M), \qquad M \in D, \\ \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right|_S = f(P), \qquad h(P) \geq 0, \qquad h \not\equiv 0. \end{cases}$$

Функция Грина определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta_M\, G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \qquad M, M_0 \in D, \\ \left.\left(\dfrac{\partial G}{\partial n} + hG\right)\right|_{M \in S} = 0. \end{cases}$$

Тогда третья формула Грина для решения краевой задачи $u(M)$

$$u(M_0) = -\int\limits_D G(M, M_0)\, \Delta\, u(M)\, dV_M + \int\limits_S \left(G(P, M_0)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P, M_0)}{\partial n_P}\right) dS_P\,,$$

$$M_0 \in D, \qquad (3)$$

принимает вид

$$
u(M_0) = \\
= -\int\limits_D G(M,M_0)F(M)\,dV_M + \underbrace{\int\limits_S \left(G(P,M_0)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n_P} \right) dS_P}_{\int_S \left(G(P,M_0)\underbrace{\left(\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} + h(P)u(P)\right)}_{f(P)} - u(P)\underbrace{\left(\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n_P} + h(P)G(P,M_0)\right)}_{0} \right) dS_P} = \\
= -\int\limits_D G(M,M_0)F(M)\,dV_M + \int\limits_S G(P,M_0)f(P)\,dS_P.
$$

Функцию Грина для ГУ третьего рода также можно искать в виде разложения по СФ задачи Ш.–Л. с ГУ третьего рода или с помощью нахождения функции $v(M)$ как решения соответствующей краевой задачи с неоднородным ГУ третьего рода.

Аналогично определяется функция Грина для внутренней смешанной краевой задачи:

$$
\begin{cases} \Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0), \qquad M, M_0 \in D, \\ \text{однородное смешанное ГУ при } M \in S. \end{cases}
$$

Для задачи Неймана всё сложнее, поскольку она не всегда разрешима. Для простоты рассмотрим внутреннюю задачу Неймана для однородного уравнения Лапласа:

$$
\begin{cases} \Delta u(M) = 0, \qquad M \in D, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P). \end{cases}
$$

Пусть выполнено условие разрешимости: $\int_S f(P)\,dS = 0$. Тогда третья формула Грина (3) для решения краевой задачи $u(M)$ принимает вид:

$$
u(M_0) = \int\limits_S G(P,M_0)f(P)\,dS_P + \text{const}, \qquad M_0 \in D,
$$

где функция Грина $G(M,M_0)$ определяется так:

$$
\begin{cases} \Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0), \qquad M, M_0 \in D, \\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_{M\in S} = -\dfrac{1}{S_0}, \end{cases}
$$

где S_0 — площадь поверхности S. Такое неоднородное ГУ для функции Грина возникает потому, что иначе для гладкой части функции Грина $v(M)$ не будет выполнено условие разрешимости задачи Неймана для однородного уравнения Лапласа в области D.

Во внешних задачах для функции Грина надо ставить дополнительные условия на бесконечности.

В трёхмерном случае:

$$
\begin{cases} \Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0), \qquad M, M_0 \in D_e, \\ G|_{M\in S} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_{M\in S} = 0, \qquad \left.\left(\dfrac{\partial G}{\partial n} + hG\right)\right|_{M\in S} = 0 \ \text{ или однородное смешанное ГУ}, \\ G \rightrightarrows 0 \ \text{ при } r \to \infty, \qquad \text{где } r - \text{расстояние от точки } M \text{ до начала координат}. \end{cases}
$$

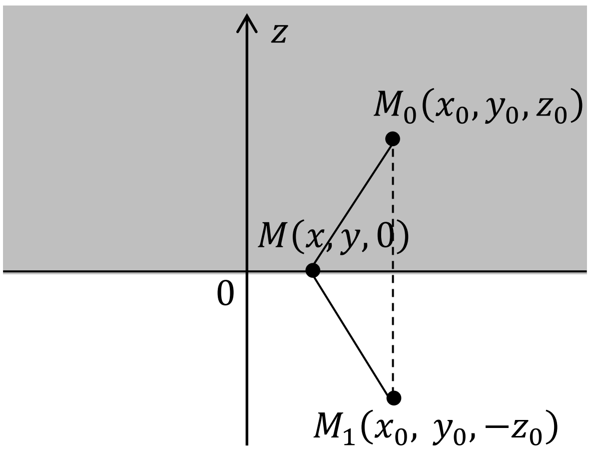
В двумерном случае:

$$\begin{cases}\Delta_M\, G(M,M_0) = -\delta(M,M_0), \qquad M, M_0 \in D_e,\\ G|_{M\in S} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_{M\in S} = -\dfrac{1}{S_0}, \qquad \left.\left(\dfrac{\partial G}{\partial n} + hG\right)\right|_{M\in S} = 0 \text{ или однородное смешанное ГУ,}\\ G(M,M_0) \text{ ограничена при } M \to \infty.\end{cases}$$

Построение функции Грина методом зеркальных отображений

Иногда, исходя из симметрии области D и физического смысла функции Грина, удаётся угадать функцию $v(M)$.

Пример 3 (задача Дирихле в полупространстве). Построить функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве $z > 0$.



Функция Грина в полупространстве должна иметь вид:

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_0}} + v(M),$$

где

$$\begin{cases}\Delta\, v(M) = 0, \qquad z > 0,\\ G|_{z=0} = 0,\\ G \rightrightarrows 0 \text{ при } z \to +\infty.\end{cases}$$

Эта задача имеет следующую физическую интерпретацию: требуется найти потенциал точечного заряда, расположенного в точке M_0 над заземлённой проводящей плоскостью $z = 0$. Функция $\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_0}}$ — это потенциал, создаваемый точечным зарядом, а $v(M)$ — потенциал, создаваемый наведёнными зарядами на плоскости.

Отобразим точку M_0 симметрично относительно плоскости $z = 0$, получим точку M_1. Поместим в эту точку фиктивный точечный заряд, такой же, как в точке M_0, но противоположного знака. Он создаёт потенциал:

$$v(M) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_1}}.$$

Тогда в верхнем полупространстве функция $v(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, а функция

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_0}} + v(M) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_1}}$$

удовлетворяет ГУ

$$G|_{z=0} = 0,$$

поскольку, когда точка M лежит в плоскости $z = 0$, выполняется равенство $R_{MM_0} = R_{MM_1}$.

Условие на бесконечности также выполнено.

Значит, функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве $z > 0$ имеет вид:

$$\boxed{G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R_{MM_1}}.}$$

Таким образом, наведённые на заземлённой проводящей плоскости $z = 0$ заряды создают такой же потенциал, какой бы создавал (при отсутствии заземлённой плоскости) точечный отрицательный заряд, помещённый в точку M_1.

ДЗ 13. БК с. 137 № 2, 3, 4, 6, 8, 10.