Семинар 26

Интеграл Фурье

Функцию, заданную на отрезке (или периодическую), можно представить рядом Фурье на всей области определения. Если функция задана на всей вещественной оси и она непериодическая, то её нельзя представить рядом Фурье. Вместо этого используется интеграл Фурье.

Пусть

1) функция $f(x)$ задана на всей вещественной оси;
2) на каждом конечном отрезке функция $f(x)$ — кусочно-гладкая;
3) $\exists \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$.

Тогда в точках своей непрерывности функция $f(x)$ представима *интегралом Фурье:*

$$f(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} \left[\hat{f}_c(\lambda) \cos \lambda x + \hat{f}_s(\lambda) \sin \lambda x\right] d\lambda,$$

где

$$\hat{f}_c(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x\, dx, \quad \hat{f}_s(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx, \qquad \lambda > 0.$$

В точках разрыва функции $f(x)$ интеграл Фурье сходится к полусумме предельных значений $f(x)$ слева и справа: $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

Если функция $f(x)$ — чётная, то $\hat{f}_s(\lambda) \equiv 0$, и

$f(x) = \int_0^{+\infty} \hat{f}_c(\lambda) \cos \lambda x\, d\lambda,$

где

$\hat{f}_c(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \lambda x\, dx$ — *косинус-образ Фурье* ($\lambda > 0$).

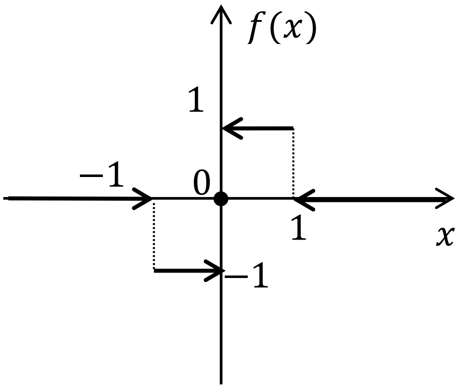
Если функция $f(x)$ — нечётная, то $\hat{f}_c(\lambda) \equiv 0$, и

$f(x) = \int_0^{+\infty} \hat{f}_s(\lambda) \sin \lambda x\, d\lambda,$

где

$\hat{f}_s(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx$ — *синус-образ Фурье* ($\lambda > 0$).

Пример 1 (из задач к экзамену, тема 9, № 4.1.2, самостоятельно). Представить интегралом Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn} x\,, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$



Поскольку функция $f(x)$ — нечётная, то $\hat{f}_c(\lambda)\equiv 0$. Тогда

$$\hat{f}_s(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1}\sin\lambda x\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{2(1-\cos\lambda)}{\pi\lambda}.$$

Получаем:

$$f(x)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{2(1-\cos\lambda)}{\pi\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda\,,\qquad x\ne 0,\pm 1.$$

Заметим, что в точках разрыва функции $f(x)$ интеграл Фурье сходится к полусумме предельных значений $f(x)$ слева и справа:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{2(1-\cos\lambda)}{\pi\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1/2, & x=1,\\ -1/2, & x=-1.\end{cases}$$

Ответ: $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{2(1-\cos\lambda)}{\pi\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda\,,\ x\ne 0,\pm 1.$

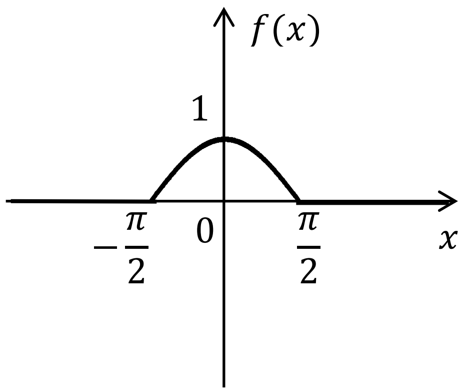
Пример 2 (из задач к экзамену, тема 9, № 4.1.1, самостоятельно). Представить интегралом Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}\cos x\,, & |x|\le\frac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

Поскольку функция $f(x)$ — чётная, то $\hat{f}_s(\lambda)\equiv 0$. Тогда

$$\hat{f}_c(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\cos\lambda x\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}[\cos(\lambda+1)x+\cos(\lambda-1)x]\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\lambda+1)x}{\lambda+1}+\frac{\sin(\lambda-1)x}{\lambda-1}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{\lambda+1}+\frac{\sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{\lambda-1}\right]=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{\lambda+1}+\frac{\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{1-\lambda}\right)=\frac{2\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{\pi(1-\lambda^2)}.$$



Получаем:

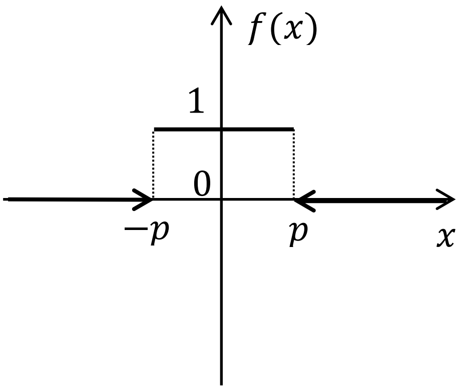
$$f(x)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{2\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{\pi(1-\lambda^2)}\cos\lambda x\,d\lambda.$$

Ответ: $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{2\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{\pi(1-\lambda^2)}\cos\lambda x\,d\lambda.$

Преобразование Фурье

При выполнении условий 1)–3) для функции $f(x)$ существует
$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}\,dx$ — *преобразование Фурье (Фурье-образ)* ($\lambda\in\mathbb{R}$), и
$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda$ — *обратное преобразование Фурье* ($x\in\mathbb{R}$).
В некоторых книгах в прямом преобразовании Фурье под интегралом пишут $e^{i\lambda x}$, а в обратном — $e^{-i\lambda x}$, но сути это не меняет.

Пример 3 (из задач к экзамену, тема 9, № 4.2.4, самостоятельно). Найти Фурье-образ функции $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le p,\\ 0, & |x|>p,\end{cases}$ где $p>0$.



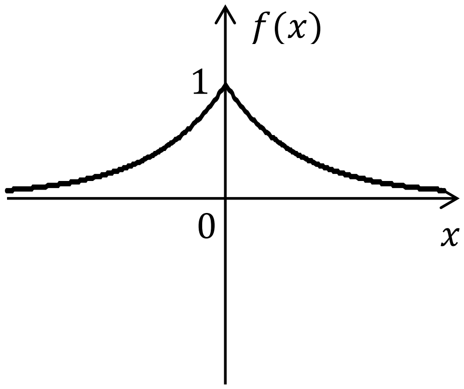
$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-p}^{p}e^{-i\lambda x}\,dx=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-i\lambda x}}{-i\lambda}\right)\Bigg|_{x=-p}^{x=p}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{i\lambda p}-e^{-i\lambda p}}{i\lambda}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{2\sin\lambda p}{\lambda}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin\lambda p}{\lambda},\qquad \lambda\ne 0.$$

$$\hat{f}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-p}^{p}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot p.$$

Ответ: $\hat{f}(\lambda)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin\lambda p}{\lambda}, & \lambda\ne 0,\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot p, & \lambda=0.\end{cases}$

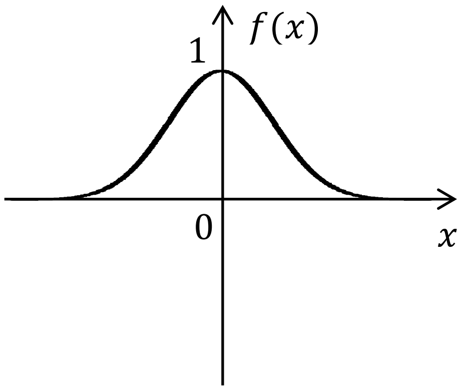
Пример 4 (из задач к экзамену, тема 9, № 4.2.1, самостоятельно). Найти Фурье-образ функции $f(x)=e^{-p|x|}$, где $p>0$.

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-p|x|}e^{-i\lambda x}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int\limits_{-\infty}^{0}e^{(p-i\lambda)x}\,dx+\int\limits_{0}^{+\infty}e^{(-p-i\lambda)x}\,dx\right]=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{(p-i\lambda)x}}{p-i\lambda}\Bigg|_{x=-\infty}^{x=0}+\frac{e^{(-p-i\lambda)x}}{-p-i\lambda}\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{p-i\lambda}+\frac{1}{p+i\lambda}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{2p}{p^2+\lambda^2}=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{p}{p^2+\lambda^2}.$$



Ответ: $\hat{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{p}{p^2+\lambda^2}$.

Пример 5 (из задач к экзамену, тема 9, № 4.2.2, самостоятельно). Найти Фурье-образ функции $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.



$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\lambda x}\, dx\,.$$

Продифференцируем интеграл по параметру λ:

$$\frac{d\hat{f}(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\lambda x}\, dx.$$

Проинтегрировав полученное выражение по частям, выразим его через $\hat{f}(\lambda)$:

$$\frac{d\hat{f}(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\lambda x}\, dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}\, d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\lambda x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\lambda x}\, dx \right) = -\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\lambda x}\, dx = -\lambda \hat{f}(\lambda).$$

Обоснование возможности дифференцирования $\hat{f}(\lambda)$ по параметру λ под знаком интеграла:

1) $\hat{f}(\lambda)$ сходится при $\lambda = 0$:

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\, d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = 1;$$

2) подынтегральная функция $e^{-\frac{x^2}{2} - i\lambda x}$ и её производная $\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(e^{-\frac{x^2}{2} - i\lambda x}\right) = -ixe^{-\frac{x^2}{2} - i\lambda x}$ непрерывны;

3) интеграл от производной $-\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2} - i\lambda x}\, dx$ сходится равномерно по $\lambda \in \mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса: $\left| xe^{-\frac{x^2}{2} - i\lambda x} \right| = |x| e^{-\frac{x^2}{2}}$, мажорантный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 2\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, d\left(-\frac{x^2}{2}\right) = -2\, e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_0^{+\infty} = 2$$

сходится.

Итак, для определения функции $\hat{f}(\lambda)$ мы получили дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\hat{f}}{d\lambda} = -\lambda\hat{f}.$$

Оно решается *методом разделения переменных:*

$$\frac{d\hat{f}}{\hat{f}} = -\lambda\, d\lambda.$$

$$\ln\left|\hat{f}\right| = -\frac{\lambda^2}{2} + C.$$

$$\left|\hat{f}\right| = e^C e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

$$\hat{f} = \underbrace{\pm e^C}_{\tilde{C}}\, e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Итак,

$$\hat{f}(\lambda) = \tilde{C}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Константу $\tilde{C}$ найдём из условия:

$\hat{f}(0) = 1.$

Отсюда $\tilde{C} = 1$. Окончательно

$$\hat{f}(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Т .е. функция $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ совпадает со своим Фурье-образом!

Ответ: $\hat{f}(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$.

Пример 6 (из задач к экзамену, тема 9, № 4.2.3, дополнительный). Найти Фурье-образ функции $f(x) = e^{-p|x|}\sin\beta x$, где $p > 0$.

В силу чётности или нечётности соответствующих подынтегральных функций получаем:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-p|x|} \sin\beta x \, e^{-i\lambda x} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-p|x|} \sin\beta x \, (\cos\lambda x - i\sin\lambda x) \, dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-p|x|} \sin\beta x \cos\lambda x \, dx}_{0} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-p|x|} \sin\beta x \sin\lambda x \, dx =$$

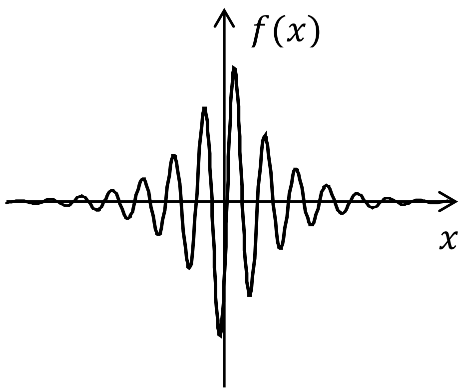
$$= -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-px} \sin\beta x \sin\lambda x \, dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-px} [\cos(\lambda+\beta)x - \cos(\lambda-\beta)x] \, dx =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-px} \left[e^{i(\lambda+\beta)x} - e^{i(\lambda-\beta)x}\right] dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \int\limits_{0}^{+\infty} \left\{e^{[-p+i(\lambda+\beta)]x} - e^{[-p+i(\lambda-\beta)]x}\right\} dx =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \left. \frac{e^{[-p+i(\lambda+\beta)]x}}{-p+i(\lambda+\beta)} \right|_{x=0}^{x=+\infty} - \left. \frac{e^{[-p+i(\lambda-\beta)]x}}{-p+i(\lambda-\beta)} \right|_{x=0}^{x=+\infty} \right\} =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{p-i(\lambda+\beta)} - \frac{1}{p-i(\lambda-\beta)} \right] = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{p+i(\lambda+\beta)}{p^2+(\lambda+\beta)^2} - \frac{p+i(\lambda-\beta)}{p^2+(\lambda-\beta)^2} \right] =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{p}{p^2+(\lambda+\beta)^2} - \frac{p}{p^2+(\lambda-\beta)^2} \right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2ip\beta\lambda}{[p^2+(\lambda+\beta)^2]\cdot[p^2+(\lambda-\beta)^2]}.$$



Ответ: $\hat{f}(\lambda) == -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2ip\beta\lambda}{[p^2+(\lambda+\beta)^2]\cdot[p^2+(\lambda-\beta)^2]}$.

ДЗ 26. Демидович № 3883, 3885–3887, 3892, 3895(б), 3897.