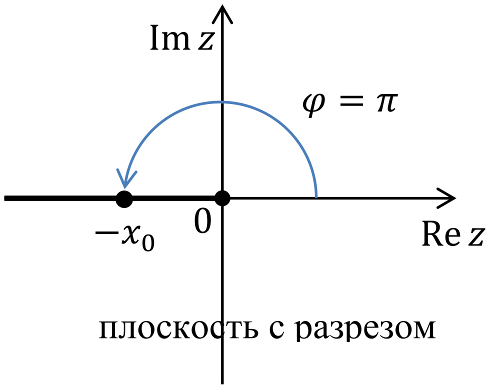
Семинар 15

О многозначных функциях

Рассмотрим многозначную функцию $\sqrt{z} = \sqrt{\rho}e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi k\right)}$, $k = 0,\ 1$, где $z = \rho e^{i\varphi}$, $\sqrt{\rho}$ — арифметический корень. Пусть $\varphi = \arg z$, $-\pi < \arg z \le \pi$. Выберем одну из *ветвей* функции $\sqrt{z}$, зафиксировав k. Например, положим $k = 0$. Тогда мы получим *главную ветвь* функции $\sqrt{z}$, т. е. такую, которая принимает вещественные положительные значения, когда z лежит на положительной части вещественной оси (когда $\varphi = 0$). Обозначим её через $f_0(z) = \sqrt{z} = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\varphi}{2}}$. Это однозначная функция. При каких z она аналитическая?



Покажем, что функция $f_0(z)$ имеет разрыв на отрицательной части вещественной оси.
В самом деле, рассмотрим, например, точку $-x_0$, расположенную на отрицательной части вещественной оси ($-x_0 < 0$). Пусть точка z стремится к точке $-x_0$ сверху, т. е. из верхней полуплоскости. Тогда
$|z| = \rho \to x_0$,
$\arg z = \varphi \to \pi$, и
$f_0(z) = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\varphi}{2}} \to \sqrt{x_0}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{x_0}$.
Теперь пусть точка z стремится к точке $-x_0$ снизу, т. е. из нижней полуплоскости. Тогда
$|z| = \rho \to x_0$,
$\arg z = \varphi \to -\pi$, и
$f_0(z) = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\varphi}{2}} \to \sqrt{x_0}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\sqrt{x_0}$.
Мы убеждаемся в том, что функция $f(z)$ не имеет предела в точке $-x_0$, и, стало быть, не является непрерывной и тем более аналитической на отрицательной части вещественной оси (так получилось из-за того, что $\varphi = \arg z$ имеет там разрыв, а $f(z)$ выражается через φ).
Однако можно доказать, что функция $f_0(z)$ будет аналитической на всей комплексной плоскости *с разрезом* вдоль неположительной части вещественной оси, т. е. на множестве $\{z\colon\ z \ne 0,\ \ -\pi < \arg z < \pi\}$. Заметим, что функция $\arg z$ непрерывна на этом множестве.
Чтобы убедиться в аналитичности функции $f(z)$, вычислим производную:

$$f_0'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\sqrt{z+\Delta z}-\sqrt{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left(\sqrt{z+\Delta z}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{z+\Delta z}+\sqrt{z}\right)}{\Delta z\left(\sqrt{z+\Delta z}+\sqrt{z}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{z+\Delta z-z}{\Delta z\left(\sqrt{z+\Delta z}+\sqrt{z}\right)} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\sqrt{z+\Delta z}+\sqrt{z}} = \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2f_0(z)}.$$

Здесь везде знак $\sqrt{}$ означает главную ветвь квадратного корня.

На плоскости с разрезом функция $f_0(z) = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ непрерывна (как произведение непрерывных функций) и $f_0(z) \ne 0$, поэтому её производная $f_0'(z) = \frac{1}{2f_0(z)}$ существует и непрерывна. Следовательно, главная ветвь функции $\sqrt{z}$ является однозначной аналитической функцией на плоскости с разрезом.

Заметим, что положение разреза определяется нашим выбором главного значения аргумента: $-\pi < \arg z \leq \pi$. Если использовать другие условия выбора главного значения аргумента, например $\alpha_0 \leq \arg z < 2\pi + \alpha_0$, то разрез будет проходить по лучу $\arg z = \alpha_0$.
То же самое относится и к другой ветви двузначной функции $\sqrt{z}$ (для $k = 1$), а также к однозначным ветвям функций типа $z\sqrt{z}$, $\operatorname{Ln} z$ и т. п.
Таким образом, все основные однозначные элементарные функции: $\exp z$, $\sin z$, $\cos z$, z^n ($n \in \mathbb{N}$) — аналитические на $\mathbb{C}$. Однозначные ветви многозначных функций $\sqrt[n]{z}$ ($n \in \mathbb{N}$), $\operatorname{Ln} z$, z^α — аналитические на плоскости с разрезом.

Степенные ряды комплексной переменной

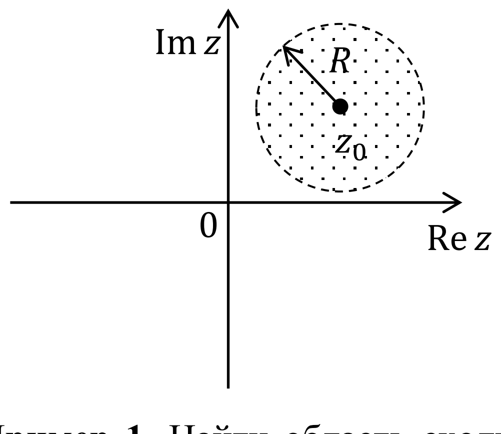
Степенной ряд комплексной переменной z:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots \qquad (*)$$

где a_n, z_0 — комплексные числа. По-прежнему будем считать, что $0^0 = 1$.
При $z = z_0$ ряд (*) сходится всегда. Свойства рядов комплексной переменной аналогичны свойствам рядов вещественной переменной. В частности, остаются в силе необходимое условие сходимости, признак Вейерштрасса равномерной сходимости, понятие абсолютной сходимости.
Т. $\exists R \geq 0$ (допускается $R = +\infty$) — *радиус сходимости* степенного ряда (*) — вещественное число:

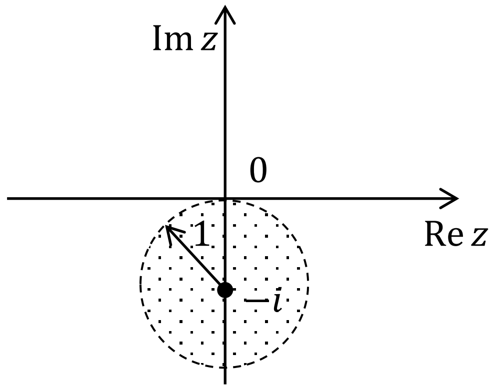
1) при $|z - z_0| < R$ ряд (*) сходится абсолютно,
2) при $|z - z_0| > R$ ряд (*) расходится,
3) при $|z - z_0| = R$ ряд (*) может как сходиться, так и расходиться,
4) при $|z - z_0| < R$ сумма ряда $S(z)$ — однозначная аналитическая функция.
5) *внутри* области $|z - z_0| < R$ ряд (*) можно почленно интегрировать и дифференцировать сколько угодно раз, при этом радиус сходимости не изменяется.

Радиус сходимости находится по формуле:
$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ (в *общем* случае) — формула *Коши–Адамара* (здесь $\sqrt[n]{|a_n|}$ — арифметический корень из вещественного неотрицательного числа),
или $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (в том случае, когда этот предел *существует* или равен $+\infty$).



Таким образом, областью сходимости степенного ряда комплексной переменной является *круг* радиуса R с центром в точке z_0 (включая или не включая все или некоторые граничные точки). Отсюда происходит название «радиус сходимости», которое для случая вещественной переменной было не очень понятно, т. к. там область сходимости представляла собой интервал вещественной оси (с включёнными или нет граничными точками) — одномерный круг.

Пример 1. Найти область сходимости ряда и изобразить её на комплексной плоскости: $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in}(z + i)^n$.
$a_n = e^{in}$, $z_0 = -i$.



$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|e^{in}|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{1} = 1.$$
$$R = 1.$$

Круг сходимости: $|z+i| < 1$.

На границе круга, при $|z+i| = 1$ ряд расходится, т. к. общий член ряда не стремится к нулю, поскольку
$$\left|e^{in}(z+i)^n\right| = \left|e^{in}\right| \cdot |(z+i)^n| = 1 \cdot |z+i|^n = 1.$$

Ответ: $|z+i| < 1$.

Здесь мы использовали тот факт, что $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, и $|z^n| \equiv |z|^n$.

В самом деле, если $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$, то
$|z_1| = \rho_1$, $|z_2| = \rho_2$, $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, $|z_1 z_2| = \rho_1\rho_2 = |z_1| \cdot |z_2|$.

Также имеем: $|z^n| = \Big|\underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ раз}}\Big| = \underbrace{|z| \cdot |z| \cdot \ldots \cdot |z|}_{n \text{ раз}} = |z|^n$.

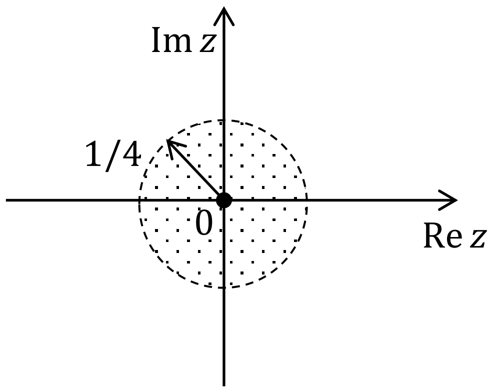
Пример 2. Найти область сходимости ряда и изобразить её на комплексной плоскости: $\sum_{n=0}^{+\infty} (3+i^n)^n z^n$.

$a_n = (3+i^n)^n$, $z_0 = 0$.

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|(3+i^n)^n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|3+i^n|^n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |3+i^n|.$$

Выпишем значения i^n, $n = 0, 1, \ldots$:

$i^n = 1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \ldots$ — четыре различных значения. Тогда
$3 + i^n = 4, 3+i, 2, 3-i, \ldots$ — четыре различных значения;
$|4| = 4$, $|3+i| = \sqrt{10}$, $|2| = 2$, $|3-i| = \sqrt{10}$.



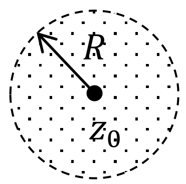
Получаем:
$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |3+i^n| = 4.$$
$$R = \frac{1}{4}.$$

Круг сходимости: $|z| < \frac{1}{4}$.

На границе круга — при $|z| = \frac{1}{4}$ — сходимости нет, т. к. общий член ряда не стремится к нулю:
$$|(3+i^n)^n z^n| = \left|\frac{3+i^n}{4}\right|^n = 1 \text{ при } n = 4k,\ k = 0, 1, \ldots$$

Ответ: $|z| < \frac{1}{4}$.

Ряд Тейлора



Т. (Тейлора). Пусть $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в круге $|z - z_0| < R$. Тогда в этом круге функция $f(z)$ единственным образом раскладывается в степенной ряд вида $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$, причём этот ряд является её рядом Тейлора:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \text{ при } |z-z_0|<R.$$

Радиус сходимости ряда Тейлора равен расстоянию от z_0 до ближайшей *особой* точки функции $f(z)$, т. е. такой точки, в которой функция не является аналитической.

Основные разложения:

$$\exp z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!},\qquad z\in\mathbb{C},$$

$$\sin z=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!},\qquad z\in\mathbb{C},$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}z^{2n}}{(2n)!},\qquad z\in\mathbb{C},$$

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{n}}{n},\qquad |z|<1$$

(это разложение главной ветви логарифма $\ln(1+z)=\ln|1+z|+i\arg(1+z)$, для которой $\ln 1=0$),

$$(1+z)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^n,\qquad |z|<1$$

(разложение главной ветви функции $(1+z)^\alpha=\exp[\alpha\ln(1+z)]$, для которой $1^\alpha=1$),

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n,\qquad |z|<1.$$

Пример 3. Разложить в степенной ряд с центром в точке $z_0=-1$ функцию $f(z)=\frac{2}{z^3}$.
Нам нужно получить разложение вида $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\cdot(z+1)^n$. Сделаем замену $z+1=t$. Тогда $f(z)=\dfrac{2}{(t-1)^3}$.
Нам нужно разложить эту функцию в ряд по степеням t.
Первый способ.

$$\frac{2}{(t-1)^3}=-\frac{2}{(1-t)^3}=-2\big(1+(-t)\big)^{-3}=$$

$$=-2\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-3)(-4)\ldots(-3-n+1)}{n!}(-t)^n\right)=$$

$$=-2\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 4\ldots(n+2)}{n!}(-1)^n t^n\right)=-2\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+2)!}{2n!}t^n\right)=$$

$$=-2\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}t^n\right)=-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}t^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)t^n,$$

$|t|<1$.
Тогда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)(z+1)^n, \qquad |z+1|<1.$$

Второй способ.

$$\frac{2}{(1-t)^3}=\left(\frac{1}{1-t}\right)''==\left(\sum_{n=0}^{+\infty}t^n\right)''=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)t^{n-2}=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)t^{n-2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(k+2)t^k, \qquad |t|<1.$$

Здесь сделана замена: $n-2=k$.

Окончательно:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(k+2)(z+1)^k, \qquad |z+1|<1.$$

Ответ: $\frac{2}{z^3}=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(k+2)(z+1)^k$ при $|z+1|<1$.

Пример 4. Разложить в степенной ряд с центром в точке $z_0=0$ функцию $f(z)=\frac{2z-i}{z^2-iz+2}$.

Сначала найдём корни знаменателя и представим функцию в виде суммы простых дробей:

$$f(z)=\frac{2z-i}{(z+i)(z-2i)}=\frac{1}{z+i}+\frac{1}{z-2i}.$$

Для разложения в ряд каждой из полученных простых дробей воспользуемся формулой

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n, \qquad |z|<1.$$

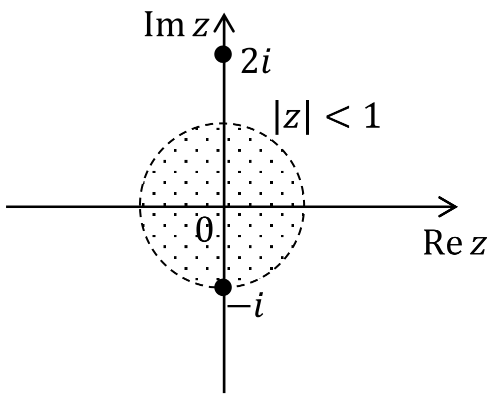
Неверное решение:

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{1+i-1-z}=\frac{1}{1-(z-i+1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(z-i+1)^n.$$

Получается степенной ряд вида $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\big(z-(i-1)\big)^n$, с центром в точке $z_0=i-1$, а мы должны получить ряд вида $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$, с центром в точке $z_0=0$.

Правильное решение:

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{i\left(1+\frac{z}{i}\right)}=-i\cdot\frac{1}{1-iz}=-i\sum_{n=0}^{+\infty}(iz)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}i^{n+1}z^n, \qquad |iz|<1,$$



$$\frac{1}{z-2i}=\frac{1}{-2i\left(1-\frac{z}{2i}\right)}=\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{iz}{2}\right)}=$$

$$=\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{iz}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^ni^{n+1}}{2^{n+1}}z^n, \qquad \left|-\frac{iz}{2}\right|<1,$$

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{+\infty}i^{n+1}z^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^ni^{n+1}}{2^{n+1}}z^n.$$

Первый ряд сходится при $|z|<1$,

второй — при $|z|<2$.

В общей области сходимости — при $|z|<1$ — ряды можно просуммировать почленно:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - 1 \right) i^{n+1} z^n, \qquad |z| < 1.$$

Заметим, что функция $f(z)$ является аналитической в круге $|z| < 1$, а в круге большего радиуса аналитической не является, поскольку имеет две особые точки: $z = -i$ и $z = 2i$.

Ответ: $\frac{2z-i}{z^2-iz+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - 1 \right) i^{n+1} z^n$ при $|z| < 1$.

Пример 5. Разложить в степенной ряд с центром в точке $z_0 = 0$ функцию $f(z) = \ln(z^2 - iz + 2)$, где $\ln$ — главная ветвь логарифма, для которой $\ln 1 = 0$.

Правильное решение.

Воспользуемся результатом примера 4:

$$f'(z) = (\ln(z^2 - iz + 2))' = \frac{2z - i}{z^2 - iz + 2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - 1 \right) i^{n+1} z^n, \qquad |z| < 1.$$

Внутри круга сходимости $|z| < 1$ степенной ряд можно проинтегрировать почленно:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - 1 \right) i^{n+1} \int z^n \, dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - 1 \right) i^{n+1} \frac{z^{n+1}}{n+1} + C =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{2^k} - 1 \right) \frac{i^k}{k} z^k + C, \qquad |z| < 1.$$

Мы сделали замену: $n + 1 = k$.

Константу интегрирования C найдём из условия $f(0) = \ln 2 = C$. Здесь $\ln 2$ означает логарифм в вещественном смысле от вещественного положительного числа 2. Тогда

$$f(z) = \ln 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{2^k} - 1 \right) \frac{i^k}{k} z^k, \qquad |z| < 1.$$

Неверное решение:

$\ln(z^2 - iz + 2) = \ln[(z + i)(z - 2i)] = \ln(z + i) + \ln(z - 2i) = \cdots$

А может быть:

$\ln(z^2 - iz + 2) = \ln[(-i - z)(2i - z)] = \ln(-i - z) + \ln(2i - z) = \cdots$?

Вспомним, что $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, $-\pi < \arg z \le \pi$.

В общем случае: $\boxed{\ln(z_1 z_2) \neq \ln z_1 + \ln z_2\,.}$

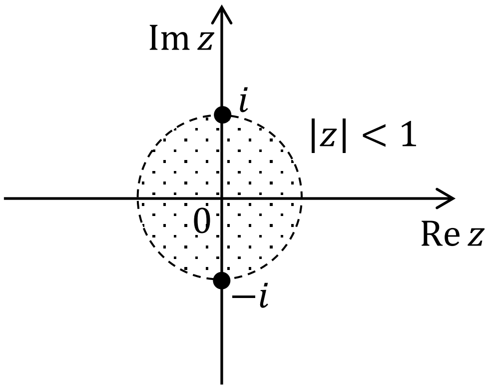
Например, рассмотрим $z_1 = z_2 = -1$:

$\ln(-1) = i\pi$,

$\ln[(-1) \cdot (-1)] = \ln 1 = 0 \neq \ln(-1) + \ln(-1)$.

Однако, верно, что $\boxed{\mathrm{Ln}\,(z_1 z_2) \equiv \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2,}$ в том смысле, что все значения многозначной функции, стоящей в левой части, содержатся среди значений многозначной функции, стоящей в правой части, и наоборот.

Ответ: $\ln(z^2 - iz + 2) = \ln 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{2^k} - 1 \right) \frac{i^k}{k} z^k$ при $|z| < 1$.



Пример 6. Разложить в степенной ряд с центром в точке $z_0 = 0$ функцию $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$.

$$f(z) = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n},$$

$|z| < 1$.

Заметим,что функция $f(z)$ имеет две *особые* точки (в которых она не аналитическая): $z = \pm i$ (нули знаменателя), поэтому разложение справедливо именно в круге $|z| < 1$, в котором функция $f(z)$ аналитическая.

Ответ: $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}$ при $|z| < 1$.

Пример 7. Разложить в степенной ряд с центром в точке $z_0 = 0$ функцию $f(z) = \sin^3 z$.

$$f(z) = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 3e^{-iz} - e^{-3iz}}{-8i} = \frac{3\sin z - \sin 3z}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^{2n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}\right].$$

Поскольку оба этих ряда для синусов сходятся при $\forall z$, их можно просуммировать почленно:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(3 - 3^{2n-1}) z^{2n-1}}{4(2n-1)!}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Ответ: $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(3-3^{2n-1}) z^{2n-1}}{4(2n-1)!}$ при $z \in \mathbb{C}$.

Пример 8. Написать 4 первых члена степенного ряда с центром в точке $z_0 = 0$ и найти радиус его сходимости для функции $f(z) = \frac{1}{1+e^z}$.

Искомое разложение будет выглядеть так:

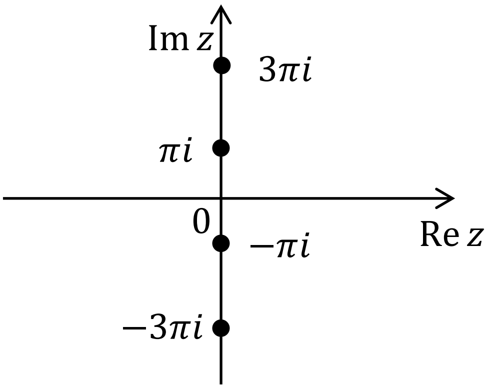
$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2} z^2 + \frac{f'''(0)}{6} z^3 + \cdots, \qquad |z| < R.$$

$$f(0) = \frac{1}{2},$$

$$f'(z) = -\frac{e^z}{(1+e^z)^2}, \qquad f'(0) = -\frac{1}{4},$$

$$f''(z) = -\frac{e^z(1+e^z)^2 - e^z \cdot 2(1+e^z)e^z}{(1+e^z)^4} = -\frac{e^z(1+e^z-2e^z)}{(1+e^z)^3} = \frac{e^z(e^z-1)}{(1+e^z)^3} = \frac{e^{2z} - e^z}{(1+e^z)^3},$$

$$f''(0) = 0,$$



$$f'''(z) = \frac{(2e^{2z} - e^z)(1+e^z)^3 - (e^{2z} - e^z)\cdot 3(1+e^z)^2 \cdot e^z}{(1+e^z)^6}, \ f'''(0) = \frac{1}{8}.$$

$$\frac{1}{1+e^z} = \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + 0 \cdot z^2 + \frac{z^3}{48} + \cdots$$

Радиус сходимости — расстояние от 0 до ближайшей особой точки — нуля знаменателя:

$1 + e^z = 0$.

$e^z = -1$.

$z = \mathrm{Ln}\,(-1) = i(\pi + 2\pi k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$
$R = |\pm i\pi| = \pi.$

Ответ: $\frac{1}{1+e^z} = \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + 0 \cdot z^2 + \frac{z^3}{48} + \cdots, R = \pi.$

ДЗ 15. Волк № 3.8, 3.48, 3.49, 3.55–3.57, 3.67, 3.69, 3.72–3.75, 3.79, 3.82, 3.88.