# Семинар 17

## Классификация особых точек функции комплексной переменной

Пусть $f(z)$ — однозначная функция.
**О.** Если функция $f(z)$ является аналитической в точке $z_0$, то $z_0$ называется *правильной точкой* функции $f(z)$.
**О.** Если $z_0$ — предельная точка области определения функции $f(z)$, но функция $f(z)$ не является аналитической в точке $z_0$, то $z_0$ называется *особой точкой* (ОТ) функции $f(z)$.
Также к числу *особых точек* функции причисляют *бесконечно удалённую точку* $z_0 = \infty$.
**О.** Если функция $f(z)$ является аналитической в некоторой проколотой окрестности *особой точки* $z_0$: $0 < |z - z_0| < \delta$ (т. е. в этой окрестности нет других особых точек), то $z_0$ — *изолированная особая точка* (ИОТ) функции $f(z)$.
Заметим, что в проколотой окрестности изолированной особой точки $z_0$
(в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$) функция $f(z)$ единственным образом раскладывается в ряд Лорана вида

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Ни в какой проколотой окрестности *неизолированной* особой точки (НОТ) функция $f(z)$ *не раскладывается* в ряд Лорана.
**О. (классификация ИОТ).** Пусть $z_0$ — конечная ($z_0 \neq \infty$) ИОТ однозначной функции $f(z)$, и в проколотой окрестности точки $z_0$ справедливо разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана вида

1) $f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.
   Тогда $z_0$ — *устранимая* особая точка (УОТ) функции $f(z)$. В этом случае главная часть ряда Лорана отсутствует, т. е. это степенной ряд. В УОТ функцию $f(z)$ можно доопределить (переопределить) по непрерывности: $f(z_0) = a_0$. Тогда функция $f(z)$ станет аналитической в точке $z_0$.
   *Пример:* $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $z_0 = 0$.
   $$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}, \qquad |z| > 0.$$
   Здесь мы сделали замену: $n - 1 = k$. Если функцию $f(z)$ доопределить в точке $z_0 = 0$ её предельным значением 1, то функция станет аналитической в точке $z_0 = 0$.
2) $f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, где $m \in \mathbb{N}$, $a_{-m} \neq 0$. (Главная часть ряда Лорана содержит *конечное число ненулевых* членов.)
   Тогда $z_0$ — *полюс порядка* $m$ функции $f(z)$.
   *Пример:* $f(z) = \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$.
   Функция $\frac{1}{z}$ уже является своим рядом Лорана вида $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ при $|z| > 0$, который состоит из одного слагаемого: $\frac{1}{z^1}$, т. е. $z_0 = 0$ — полюс первого порядка для функции $\frac{1}{z}$.
3) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, и главная часть ряда Лорана содержит *бесконечно много ненулевых* членов (с отрицательными степенями $(z - z_0)$).

Тогда $z_0$ — *существенно особая* точка (СОТ) функции $f(z)$.

*Пример:* $f(z) = \exp\frac{1}{z}$, $z_0 = 0$.

$$\exp\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{-n}}{n!}, \qquad |z| > 0.$$

**О.** Бесконечно удалённая точка $z = \infty$ является для функции $f(z)$ особой точкой того же типа, что и точка $t = 0$ для функции $f\left(\frac{1}{t}\right)$.

Таким образом, чтобы исследовать тип ИОТ $z = \infty$ для функции $f(z)$, можно сделать замену $z = \frac{1}{t}$ и исследовать тип ИОТ $t = 0$ для функции $f\left(\frac{1}{t}\right)$.

*Пример:* $f(z) = \exp z$. Как мы только что убедились, точка $t = 0$ является СОТ для функции $f\left(\frac{1}{t}\right) = \exp\frac{1}{t}$, поэтому точка $z = \infty$ является СОТ для функции $f(z) = \exp z$.

*Ещё пример:* $f(z) = z$. Как мы показали выше, точка $t = 0$ является полюсом первого порядка для функции $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}$, поэтому точка $z = \infty$ является полюсом первого порядка для функции $f(z) = z$.

*Ещё пример:* $f(z) = z\sin\frac{1}{z}$. Как мы показали выше, точка $t = 0$ является УОТ для функции $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sin t}{t}$, поэтому точка $z = \infty$ является УОТ для функции $f(z) = z\sin\frac{1}{z}$.

**Т. (характеристические свойства ИОТ).** Пусть $z_0$ — ИОТ однозначной функции $f(z)$. Тогда

1) $z_0$ — УОТ $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ (конечный предел);
2) $z_0$ — полюс $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$;
3) $z_0$ — СОТ $\Leftrightarrow \nexists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ (не существует ни конечного, ни бесконечного предела);
4) $z_0 \neq \infty$ — полюс порядка $m \Leftrightarrow f(z) = O^*\left(\frac{1}{(z-z_0)^m}\right)$ при $z \to z_0$, т. е. $\exists \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z) \neq 0$ (конечный предел);
5) $z_0 \neq \infty$ — полюс порядка $m \Leftrightarrow$ в некоторой проколотой окрестности точки $z_0$: $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, где функция $g(z)$ является аналитической в точке $z_0$ и $g(z_0) \neq 0$.

**Пример 1 (задача к общему зачёту № 43).** Определить тип особых точек функции $f(z) = \frac{\cos\frac{1}{z^2}}{z^2+4}$.

ОТ: $z_0 = 0$, $z_{1,2} = \pm 2i$, $z_3 = \infty$. Все они — ИОТ.

а) $z_3 = \infty$.

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{z^2}}{z^2+4} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Существует конечный предел $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$, поэтому $z_3 = \infty$ — УОТ.

б) $z_0 = 0$.

Докажем, что $\nexists \lim\limits_{z\to 0} f(z)$.

Рассмотрим две последовательности точек, лежащих на вещественной оси: $z_n' = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, $z_n'' = \frac{1}{\sqrt{2\pi n+\pi}}$, $n = 1, 2, \ldots$ (здесь $\sqrt{\phantom{x}}$ означает арифметический корень).

Тогда $z_n' \to 0$, $z_n'' \to 0$ при $n \to +\infty$, и

$f(z_n') = \frac{\cos 2\pi n}{(z_n')^2+4} = \frac{1}{(z_n')^2+4} \to \frac{1}{4}$ при $n \to +\infty$,

$f(z_n'') = \frac{\cos(2\pi n+\pi)}{(z_n'')^2+4} = \frac{-1}{(z_n'')^2+4} \to -\frac{1}{4}$ при $n \to +\infty$.

Это означает, что $\nexists \lim\limits_{z\to 0} f(z)$ (не существует ни конечного, ни бесконечного предела в смысле определения предела функции по Гейне). Значит, $z_0 = 0$ — СОТ.

в) $z_1 = 2i$.

$\lim\limits_{z\to 2i} f(z) = \frac{\cos\left(-\frac{1}{4}\right)}{0} = \infty \Rightarrow\ z_1 = 2i$ — полюс. Осталось определить его порядок. Имеем:

$$f(z) = \frac{\cos\frac{1}{z^2}}{z^2+4} = \frac{\cos\frac{1}{z^2}}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{g(z)}{z-2i},$$

где функция $g(z) = \frac{\cos\frac{1}{z^2}}{z+2i}$ — аналитическая в окрестности точки $z_1 = 2i$ и

$$g(2i) = \frac{\cos\frac{1}{(2i)^2}}{4i} = \frac{\cos\left(-\frac{1}{4}\right)}{4i} \neq 0.$$

Значит, точка $z_1 = 2i$ — полюс первого порядка.

г) $z_2 = -2i$.

Тут всё аналогично случаю б):

$$f(z) = \frac{\cos\frac{1}{z^2}}{z^2+4} = \frac{\cos\frac{1}{z^2}}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{g(z)}{z+2i},$$

где функция $g(z) = \frac{\cos\frac{1}{z^2}}{z-2i}$ — аналитическая в окрестности точки $z_2 = -2i$ и

$$g(-2i) = \frac{\cos\frac{1}{(-2i)^2}}{4i} = \frac{\cos\left(-\frac{1}{4}\right)}{4i} \neq 0.$$

Значит, точка $z_2 = -2i$ — полюс первого порядка.

*Ответ:* $\infty$ — УОТ, 0 — СОТ, $\pm 2i$ — полюсы первого порядка.

**Пример 2.** Определить тип особых точек функции $f(z) = \operatorname{ctg} z$.

$f(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$.

Особые точки: $z = \infty$ и нули знаменателя. Найдём их:

$\sin z = 0$.

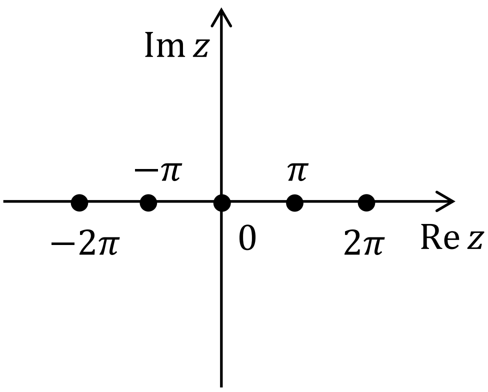
$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0$.

$e^{iz} = e^{-iz}$.

$e^{2iz} = 1$.

$2iz = \operatorname{Ln} 1 = \ln|1| + i(\arg 1 + 2\pi k) = 2\pi k i, \qquad k \in \mathbb{Z}$.

$z = \pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}$.




а) Заметим, что $z = \infty$ — НОТ, т. к. в любой её окрестности ($|z| > R$) найдутся другие особые точки вида $z = \pi k$.

б) Рассмотрим ОТ $z_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Все они — ИОТ. Зафиксируем некоторое $k$ и найдём предел

$$\lim_{z\to\pi k} f(z) = \lim_{z\to\pi k} \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{(-1)^k}{0} = \infty.$$

Значит, точка $z_k = \pi k$ является полюсом. Остаётся определить, какого порядка. Если точка $z_k$ является полюсом, то $\exists m \in \mathbb{N}$: $\exists \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) \neq 0$ (конечный предел). Причём число $m$ из этого условия определяется однозначно (нетрудно заметить, что для других натуральных $m$ данный предел будет равен 0 или $\infty$). Будем вычислять данный предел для $m = 1, 2, \ldots$, пока не получим конечное ненулевое значение. Для $m = 1$:

$$\lim_{z\to\pi k} (z-\pi k) f(z) = \lim_{z\to\pi k} (z-\pi k)\operatorname{ctg} z = \lim_{z\to\pi k} \frac{z-\pi k}{\operatorname{tg} z} = \lim_{z\to\pi k} \frac{(z-\pi k)'}{(\operatorname{tg} z)'} =$$

$$= \lim_{z\to\pi k} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 z}} = \lim_{z\to\pi k} \cos^2 z = 1 \neq 0.$$

Здесь мы использовали правило Лопиталя для раскрытия неопределённости типа $\frac{0}{0}$.

Поскольку мы доказали, что существует конечный предел $\lim_{z\to\pi k} (z-\pi k) f(z) \neq 0$, то $z_k = \pi k$ — полюс первого порядка, $k \in \mathbb{Z}$.

*Ответ:* $\infty$ — НОТ, $\pi k$ — полюсы первого порядка, $k \in \mathbb{Z}$.

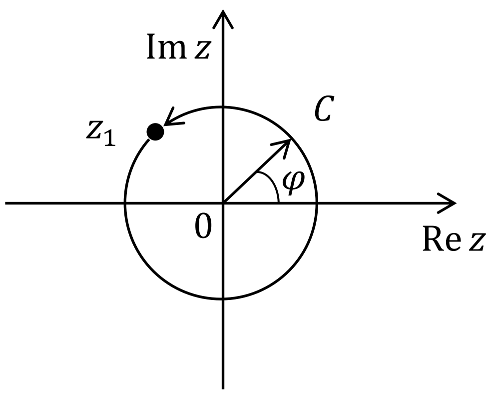
## Точки ветвления

Пусть $f(z)$ — многозначная функция, которая распадается на однозначные аналитические ветви $f_k(z)$ (например, $\sqrt[n]{z}$ или $\operatorname{Ln} z$). Многозначные функции могут иметь ещё один тип ОТ — точки ветвления.

**О.** Точка $z_0$ называется *точкой ветвления* функции $f(z)$, если в некоторой окрестности точки $z_0$ при обходе по любому простому замкнутому контуру вокруг точки $z_0$ одна ветвь функции $f(z)$, изменяясь непрерывно, переходит в другую её ветвь.

В проколотой окрестности точки ветвления однозначные функции $f_n(z)$ нельзя разложить в ряд Лорана, ибо они не являются аналитическими (они могут быть аналитическими в окрестности с *разрезом*).

Пример: рассмотрим $f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{i\left(\frac{\varphi}{2} + \pi k\right)}$, $k = 1, 2$, где $z = \rho e^{i\varphi}$, $\varphi$ — одно из значений $\operatorname{Arg} z$.




Имеется две ветви: $f_0(z) = \sqrt{\rho} e^{\frac{i\varphi}{2}}$ и

$$f_1(z) = \sqrt{\rho} e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)} = \sqrt{\rho} e^{\frac{i\varphi}{2}} e^{i\pi} = -\sqrt{\rho} e^{\frac{i\varphi}{2}} = -f_0(z),$$

каждая из которых аналитична на комплексной плоскости с разрезом.

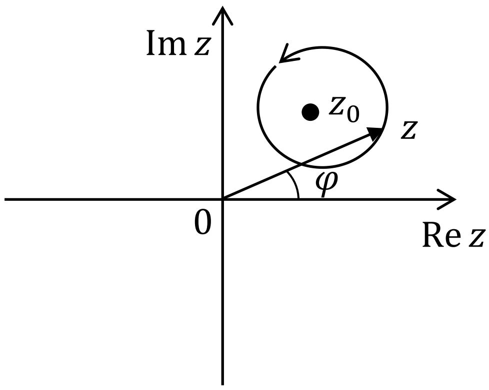
Рассмотрим простой замкнутый контур $C$, охватывающий точку $z_0 = 0$ (например, окружность). Возьмём в качестве начальной точки точку $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \in C$ и будем обходить контур $C$ в положительном направлении так, чтобы аргумент $\varphi$ изменялся непрерывно, тогда и значение $f_0(z) = \sqrt{\rho} e^{\frac{i\varphi}{2}}$ будет изменяться непрерывно.

После полного обхода по контуру $C$ мы вернёмся в начальную точку, но аргумент $\varphi$ увеличится на $2\pi$, то есть вместо начального значения $f_0(z_1) = \sqrt{\rho_1}e^{\frac{i\varphi_1}{2}}$ мы придём к значению

$\sqrt{\rho_1}e^{\frac{i(\varphi_1+2\pi)}{2}} = f_1(z_1) = -f_0(z_1)$.

Т. е. при обходе по замкнутому контуру мы переходим на другую ветвь. Если мы ещё раз обойдём по контуру $C$, то ветвь $f_1$ вновь перейдёт в ветвь $f_0$.

Таким образом, $z_0 = 0$ — точка ветвления многозначной функции $f(z) = \sqrt{z}$.




Для точки $z_0 = \infty$ справедливы те же рассуждения (контур берётся такой же), она также является точкой ветвления.

Любая конечная точка $z_0 \neq 0$ не является точкой ветвления, т. к. при обходе по замкнутому контуру, охватывающему точку $z_0$, но не охватывающему точку 0, аргумент $\varphi$, изменяясь непрерывно, вернётся к своему первоначальному значению (ибо аргумент $\varphi$ — это угол между радиус-вектором точки $z$ и положительным направлением вещественной оси), и смены ветви не произойдёт.

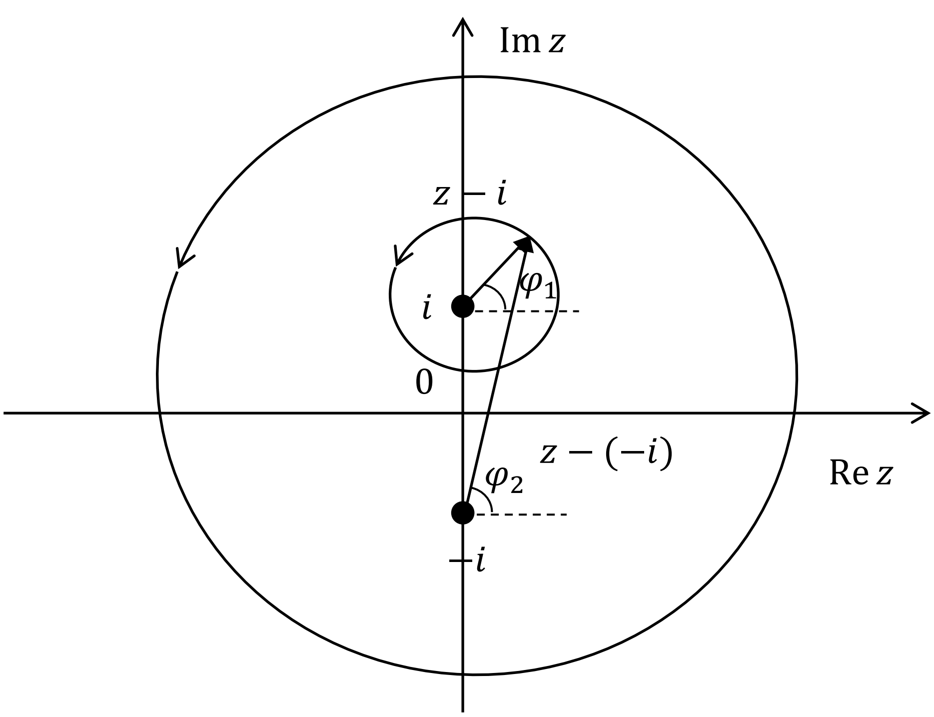
**Пример 3 (дополнительный).** Определить тип особых точек функции $f(z) = \mathrm{Ln}\,(1+z^2)$.

$\mathrm{Ln}\,z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\qquad k \in \mathbb{Z}$.

Зафиксировав $k$, получим однозначную ветвь логарифма.

Каждая из ветвей логарифма — аналитическая функция на плоскости с разрезом (разрез можно проводить по любому лучу вида $\arg z = \varphi_0$). Точки $z_0 = 0$ и $z_0 = \infty$ являются особыми для функции $\mathrm{Ln}\,z$ (точки ветвления, как и для $\sqrt{z}$). Тогда для функции $\mathrm{Ln}\,(1+z^2)$ особыми будут точки $z_0 = \pm i$ и $z_0 = \infty$.

а) Рассмотрим точку $z_0 = i$.
   $f(z) = \mathrm{Ln}\,(z+i)(z-i)$.
   Каждая оздназначная ветвь логарифма изменяется непрерывно, когда аргумент изменяется непрерывно.
   При обходе против часовой стрелки по замкнутому контуру, охватывающему точку $i$, но оставляющему вне себя точку $-i$, аргумент $z-i$ увеличится на $2\pi$




($z-i$ — это вектор, проведённый из точки $i$ в точку $z$, а аргумент $z-i$ — это угол между данным вектором и положительным направлением вещественной оси), а аргумент $z+i$ не изменится.

Заметим, что при перемножении двух комплексных чисел их аргументы складываются:

$$\rho_1 e^{i\varphi_1}\cdot\rho_2 e^{i\varphi_2} = \\ = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Поэтому аргумент произведения $(z+i)(z-i)$ увеличится на $2\pi$, и мы перейдём с одной ветви логарифма на другую ветвь.

Таким образом, $z_0 = i$ — точка ветвления.

б) $z_0 = -i$ — также точка ветвления (всё аналогично случаю а)).

в) $z_0 = \infty$.

При обходе против часовой стрелки по замкнутому контуру, вне которого нет других особых точек, аргумент $z-i$ увеличится на $2\pi$, и аргумент $z+i$ увеличится на $2\pi$. Аргумент произведения $(z+i)(z-i)$ увеличится на $4\pi$, и мы перейдём с одной на другую ветвь логарифма (но уже не на соседнюю).

Значит, $z_0 = \infty$ — точка ветвления.

*Ответ:* $\pm i, \infty$ — точки ветвления.

**ДЗ 17.** КРАМ гл. II № 4.3, 4.4, 4.6(а), 4.8, 4.14, 5.2, 5.8 (задачи для самостоятельного решения).