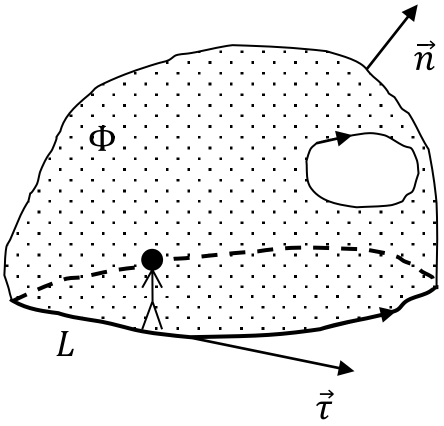
Семинар 3

Формула Стокса



Пусть Φ — незамкнутая двусторонняя кусочно гладкая ограниченная поверхность, краем которой является кусочно гладкий *замкнутый* контур L (поверхность Φ *натянута* на контур L). Выберем сторону поверхности Φ, соответствующую полю единичных нормалей $\vec{n}$ (*ориентированная* поверхность). Если наблюдатель, голова которого направлена вдоль нормали $\vec{n}$, при обходе по контуру L видит поверхность Φ *слева* от себя, то такое направление обхода называется *положительным* направлением обхода, согласованным с ориентацией поверхности.

Если граница поверхности состоит из нескольких замкнутых контуров $L_1, L_2, \ldots, L_N$ (поверхность с «дырками»), то положительное направление обхода определяется на каждом из них таким же образом.

Пусть $\vec{\tau}$ — единичная касательная к контуру L, направленная вдоль положительного направления обхода.

Пусть векторное поле $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ имеет в окрестности Φ непрерывные ч. п. 1-го порядка. Тогда

$\boxed{\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Phi (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n})\,dS}$ — формула Стокса.

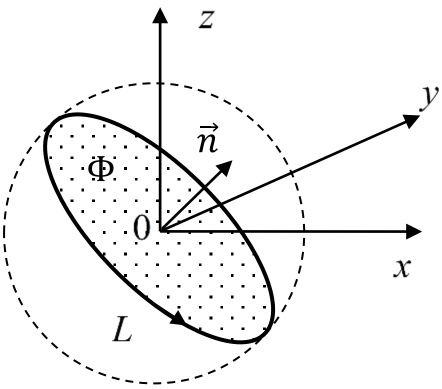
В левой части формулы Стокса стоит *циркуляция* или *работа* вектора $\vec{a}$ по замкнутому контуру L в положительном направлении обхода.

Таким образом, циркуляция векторного поля по замкнутому контуру равна потоку ротора этого поля через поверхность, натянутую на контур, в направлении нормали, согласованной с направлением обхода.

Для «дырявой» поверхности циркуляция берётся по полной границе с учётом направления обхода: $L = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_N$.

Формула Стокса нужна для упрощения вычисления интегралов.

Пример 1 (гл. XIV № 18в, гл. XV № 51а). Вычислить интеграл $I = \oint_L y\,dx + z\,dy + x\,dz$ вдоль окружности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемой против часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.



Данная окружность лежит на пересечении сферы $x^2 + y^2 + {}$ ${}+z^2 = a^2$ и плоскости $x + y + z = 0$, которая проходит через начало координат — центр сферы. Значит, радиус окружности равен R. Попробуем упростить интеграл, применив формулу Стокса. Сначала найдём $\operatorname{rot}\vec{a}$, где $\vec{a} = \{y, z, x\}$, а затем подумаем, какую поверхность, натянутую на окружность L, будет удобно использовать в формуле Стокса. Имеем

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = \{-1, -1, -1\}.$$

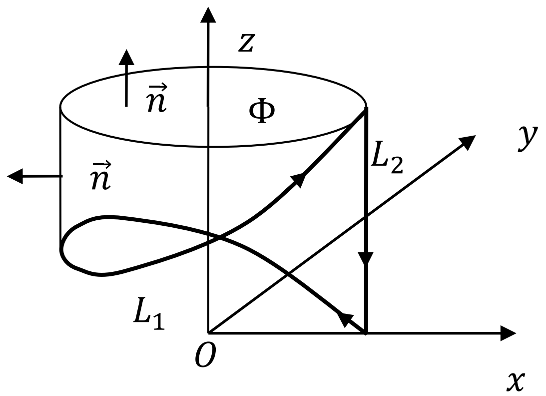
Поскольку $\operatorname{rot}\vec{a}$ является постоянным вектором, нам будет удобно натянуть на L часть плоскости $x+y+z=0$, ограниченную контуром L, т. е. круг, т. к. в этом случае нормаль к поверхности Ф также будет постоянным вектором, и подынтегральное выражение в поверхностном интеграле будет константой. При этом единичной нормалью к сти Ф, *согласованной с направлением обхода*, будет $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\{1;\ 1;\ 1\}$. Применив формулу Стокса, получим

$$I=\iint\limits_{\Phi}(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})\,dS=\iint\limits_{\Phi}\frac{1}{\sqrt{3}}(-1-1-1)dS=-\sqrt{3}\iint\limits_{\Phi}dS=-\pi R^2\sqrt{3}.$$

Замечание. Мы могли бы применить формулу Стокса, натянув на окружность L какую-нибудь другую поверхность, например, полусферу. Но тогда поверхностный интеграл было бы вычислить сложнее. Всегда следует натягивать на контур такую поверхность, по которой будет проще интегрировать.

Ответ: $-\pi R^2\sqrt{3}$.

Пример 2 (МАВЗ гл. XV § 3 пример № 9). Найти работу силового поля $\vec{F}=-y\vec{\imath}+x\vec{\jmath}+z\vec{k}$ вдоль отрезка L_1 винтовой линии $\vec{r}(t)=a\cos t\,\vec{\imath}+a\sin t\,\vec{\jmath}+bt\vec{k}$ $(0\le t\le 2\pi)$ в направлении возрастания параметра t.



Достроим кривую L_1 до замкнутого контура, добавив прямолинейный отрезок L_2. Тогда работа по замкнутому контуру $L=L_1\cup L_2$ складывается из работы по кривой L_1 и отрезку L_2:

$$\underbrace{\oint\limits_{L}-y\,dx+x\,dy+z\,dz}_{A}=$$

$$=\underbrace{\int\limits_{L_1}-y\,dx+x\,dy+z\,dz}_{A_1}+\underbrace{\int\limits_{L_2}-y\,dx+x\,dy+z\,dz}_{A_2}.$$

Теперь натянем на полученный замкнутый контур L поверхность Ф — часть поверхности цилиндра, как показано на рисунке (направление единичной нормали $\vec{n}$ должно быть *согласовано с направлением обхода контура*), и применим формулу Стокса:

$$A=\iint\limits_{\Phi}\left(\operatorname{rot}\vec{F},\vec{n}\right)dS.$$

Вычислим

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -y & x & z\end{vmatrix}=2\vec{k}=\{0;\ 0;\ 2\}.$$

На боковой поверхности цилиндра $\operatorname{rot}\vec{F}\perp\vec{n}$, поэтому поток по ней равен нулю. Остаётся поток по верхней поверхности цилиндра, которая представляет собой круг радиуса a:

$$A=\iint\limits_{\Phi_{\text{верх}}}\left(\operatorname{rot}\vec{F},\vec{n}\right)dS=2\iint\limits_{\Phi_{\text{верх}}}dS=2\pi a^2.$$

Осталось вычислить работу вдоль отрезка L_2:

$$A_2 = \int\limits_{L_2} -y\,dx + x\,dy + z\,dz = \int\limits_{L_2} z\,dz = \int\limits_{2\pi b}^{0} z\,dz = -2\pi^2 b^2.$$

Тогда работа вдоль кривой L_1:

$A_1 = A - A_2 = 2\pi a^2 + 2\pi^2 b^2$.

Ответ: $2\pi a^2 + 2\pi^2 b^2$.

Потенциальное поле

О. Векторное поле $\vec{a}$ называется *потенциальным* в области T, если в области T существует такое скалярное поле u, что $\boxed{\vec{a} = \operatorname{grad} u}$. При этом u называется *скалярным потенциалом* поля $\vec{a}$.

Если $\vec{a} = \{P, Q, R\}$, то из равенства $\vec{a} = \operatorname{grad} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$ следует, что $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$, т. е. $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = du$ — полный дифференциал. Тогда криволинейный интеграл II рода

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{AB} du = u(B) - u(A)$$

не зависит от пути интегрирования, а циркуляция потенциального поля по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint\limits_{L} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Верно и обратное: если циркуляция векторного поля по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру равна нулю, то поле потенциально.

Вычислим ротор дифференцируемого потенциального поля $\vec{a}$:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{0},$$

т. е. потенциальное поле является безвихревым. Попутно мы доказали формулу:

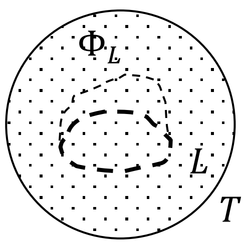
$\boxed{\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \vec{0}}$ $\forall u$.

Таким образом: $\vec{a}$ потенциально $\Rightarrow \operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$.

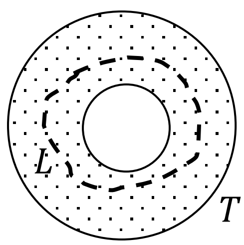
Верно ли обратное?

О. Область $T \subset \mathbb{R}^3$ называется *поверхностно односвязной,* если на любой кусочно-гладкий замкнутый контур $L \subset T$ (без самопересечений) можно натянуть кусочно-гладкую поверхность Φ_L (так, чтобы контур L являлся краем поверхности Φ_L), целиком лежащую в T.

Эквивалентное определение: область называется поверхностно односвязной, если любой замкнутый контур, лежащий в этой области, можно стянуть в точку.



шар



тор

Примеры: шар, куб, шаровой слой. Не является поверхностно односвязной областью тор.

По формуле Стокса в *поверхностно односвязной* области из условия $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$ следует, что цирку-

ляция поля по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру равна нулю:
$$\oint_L (\vec{a},\vec{\tau})\, dl = \iint_\Phi (\operatorname{rot}\vec{a}\,,\vec{n})\, dS = 0,$$
а из этого будет следовать потенциальность поля $\vec{a}$.
Таким образом: $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}$ потенциально (только в *поверхностно односвязной* области).

Пример 3 (гл. XV § 1 пример № 5). Убедиться, что электрическое поле точечного заряда $\vec{E} = \frac{kq\vec{r}}{r^3}$ является потенциальным в области $\mathbb{R}^3 \backslash O$ (всё пространство $\mathbb{R}^3$ с выброшенным началом координат O). Найти его скалярный потенциал. Вычислить циркуляцию поля по кривой, соединяющей точки $M(a,0,0)$ и $N(0,b,0)$, где $a > 0$, $b > 0$.
$\operatorname{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{kqx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{kqy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{kqz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{vmatrix} = \vec{0}$ в $\mathbb{R}^3 \backslash O$, а поскольку область является поверхностно односвязной, то поле потенциально.
Найдём скалярный потенциал u, для которого $\vec{E} = \operatorname{grad} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$:
$$du = \frac{kqx}{r^3}\, dx + \frac{kqy}{r^3}\, dy + \frac{kqz}{r^3}\, dz = kq\frac{x\, dx + y\, dy + z\, dz}{r^3} = \frac{kq}{2}\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{r^3} =$$
$$= kq\frac{d(r^2)}{2r^3} = kq\frac{dr}{r^2} = kq\, d\left(-\frac{1}{r}\right) = d\left(-\frac{kq}{r}\right),$$
т. е. $\boxed{u = -\frac{kq}{r} + \text{const.}}$
Т. к. поле потенциально, то циркуляция поля не зависит от вида кривой:
$$A = \int_{MN} \frac{kqx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx + \frac{kqy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dy + \frac{kqz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dz =$$
$$= u(N) - u(M) = \boxed{-\frac{kq}{b} + \frac{kq}{a}.}$$
Ответ: $u = -\frac{kq}{r} + \text{const}$, $A = \frac{kq}{a} - -\frac{kq}{b}$.

Может ли поле быть одновременно соленоидальным и потенциальным? Да, например, электрическое поле в области без зарядов. Может ли дифференцируемое поле быть не соленоидальным и не потенциальным? Да, например, $\vec{a} = \{xy, 0, 0\}$:
$\operatorname{div}\vec{a} = y \neq 0$,
$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 0 & 0 \end{vmatrix} = \{0, 0, -x\} \neq \vec{0},$$
поэтому поле $\vec{a}$ не соленоидально и не потенциально.
Но любое непрерывно дифференцируемое векторное поле можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей (причём не единственным образом):
$\vec{a} = \vec{a}_\text{п} + \vec{a}_\text{с}$.
В самом деле, $\vec{a}_\text{п} = \operatorname{grad} u$, тогда $\vec{a} = \operatorname{grad} u + \vec{a}_\text{с}$, откуда

$\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u + \vec{a}_\text{с}) = \operatorname{div}\operatorname{grad} u + \underbrace{\operatorname{div}\vec{a}_\text{с}}_{0} = \Delta u.$

Для определения скалярного потенциала u потенциальной составляющей поля $\vec{a}$ получается *уравнение Пуассона:*

$\Delta u = \operatorname{div}\vec{a},$

где $\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$

Уравнение Пуассона имеет бесконечно много решений.

Пример 4 (самостоятельно). Разложить поле $\vec{a} = \{xy, 0, 0\}$ на сумму потенциального и соленоидального полей.

Скалярный потенциал u потенциальной составляющей поля $\vec{a}$ находится из уравнения Пуассона

$\Delta u = \operatorname{div}\vec{a} = y,$

т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = y.$$

Нам достаточно подобрать одно из решений этого уравнения. Например, $u = \frac{y^3}{6}$. Тогда

$\vec{a}_\text{п} = \operatorname{grad} u = \left\{0, \dfrac{y^2}{2}, 0\right\},$

$\vec{a}_\text{с} = \vec{a} - \vec{a}_\text{п} = \left\{xy, -\frac{y^2}{2}, 0\right\}.$

Убедимся, что поле $\vec{a}_\text{с}$ соленоидально: $\operatorname{div}\vec{a}_\text{с} = y - y = 0.$

Ответ: $\vec{a} = \vec{a}_\text{п} + \vec{a}_\text{с}$, где $\vec{a}_\text{п} = \left\{0, \frac{y^2}{2}, 0\right\}$, $\vec{a}_\text{с} = \left\{xy, -\frac{y^2}{2}, 0\right\}$.

ДЗ 3. МАВЗ гл. XIV № 18(а,б,г,ж), 19(в), 21(в), 23(а); гл. XV № 11, 42(а), 54, 59, 60(г).
Читать теорию и отвечать на контрольные вопросы: гл. XV § 1, 2.