Семинар 3

Линейные пространства функций

О. ЛП N называется *нормированным,* если для любого элемента $x \in N$ определено число $\|x\| \in \mathbb{R}$ (*норма*) так, что выполнены следующие условия:

1) $\forall x \in N\ \|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
2) $\forall x \in N, \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3) $\forall x, y \in N\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*неравенство треугольника*).

Рассмотрим бесконечномерное ЛП вещественных, непрерывных на отрезке $[a;b]$ ций $y(x)$. На нём можно ввести норму двумя способами:

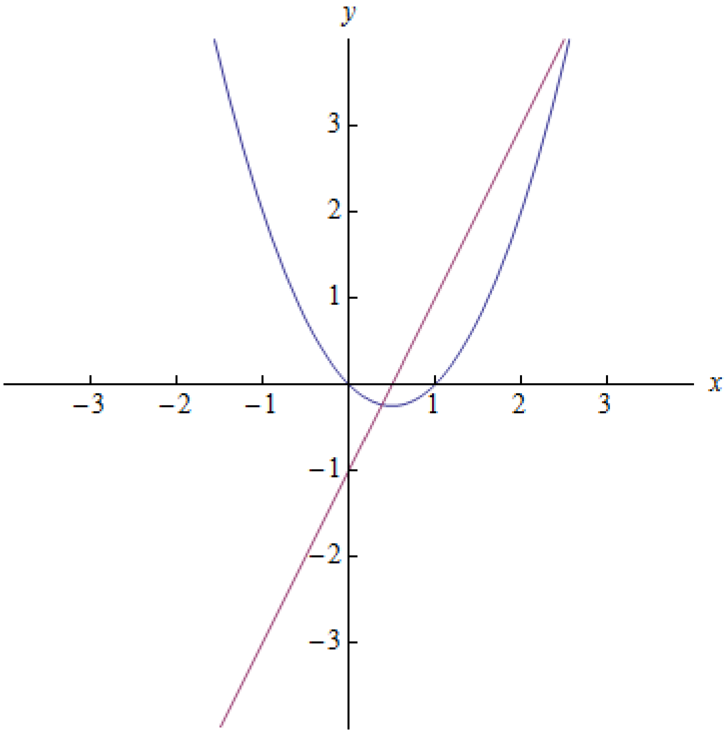
$$\|y\|_{C[a;b]} = \max_{x\in[a;b]} |y(x)|,$$

$$\|y\|_{h[a;b]} = \sqrt{\int\limits_a^b y^2(x)\,dx}.$$

Нормированные пространства $C[a;b]$ и $h[a;b]$ — это линейные пространства непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с соответствующим образом введёнными нормами.
В бесконечномерном ЛП вещественных функций, непрерывных на отрезке $[a;b]$ вместе со своими производными до p-го порядка включительно, норма вводится следующим образом:

$$\|y\|_{C^{(p)}[a;b]} = \sum_{k=0}^{p} \max_{x\in[a;b]} \left|y^{(k)}(x)\right|.$$

Пример 1. Вычислить $\|y\|_{C[0;2]}$, $\|y\|_{C^{(1)}[0;2]}$ и $\|y\|_{h[0;2]}$ для $y(x) = x^2 - x$.



$$\|y\|_{C[0;2]} = \max_{x\in[0;2]} |y(x)| = 2.$$

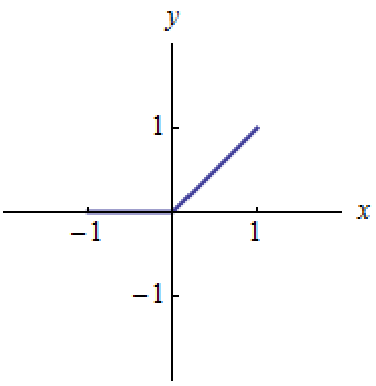
$$\|y\|_{C^{(1)}[0;2]} = \max_{x\in[0;2]} |y(x)| + \max_{x\in[0;2]} |y'(x)| =$$
$$= 2 + \max_{x\in[0;2]} |2x - 1| = 2 + 3 = 5.$$

$$\|y\|^2_{h[0;2]} = \int\limits_0^2 y^2(x)\,dx = \int\limits_0^2 (x^2 - x)^2\,dx =$$
$$= \int\limits_0^2 (x^4 - 2x^3 + x^2)\,dx =$$
$$= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{32}{5} - 8 + \frac{8}{3} = \frac{16}{15},$$

$$\|y\|_{h[0;2]} = \frac{4}{\sqrt{15}}.$$

Ответ: $\|y\|_{C[0;2]} = 2$, $\|y\|_{C^{(1)}[0;2]} = 5$, $\|y\|_{h[0;2]} = \frac{4}{\sqrt{15}}$.

Пример 2. Можно ли на множестве функций, непрерывных на отрезке $[-1;1]$, ввести норму формулой $\|y\| = \max\limits_{x\in[-1;0]}|y(x)|$?



Прежде всего, норма должна быть вещественным числом — это выполняется. Проверим выполнение аксиом нормы.

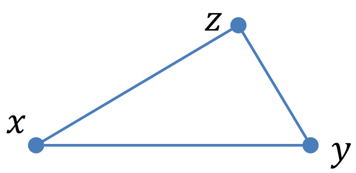
1) $\|y\| \geq 0$ — выполняется, $\|y\| = 0 \Leftrightarrow y(x) = \theta(x) \equiv 0$ — не выполняется. В самом деле, рассмотрим функцию

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;0], \\ x, & x \in (0;1]. \end{cases}$$

Данная функция непрерывна на отрезке $[-1;1]$, $\|y\| = 0$, но $y(x) \not\equiv 0$, т. е. $y \neq \theta$.

Ответ: нельзя.

О. Множество M называется *метрическим пространством*, если $\forall x,y \in M$ определено число $\rho(x,y) \in \mathbb{R}$ (*метрика* или *расстояние*) так, что выполняются следующие условия:



1) $\forall x,y \in M$ $\rho(x,y) \geq 0$, $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\forall x,y \in M$ $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

3) $\forall x,y,z \in M$ $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (*неравенство треугольника*).

Любое нормированное пространство можно сделать метрическим, если ввести метрику по формуле $\rho(x,y) = \|x - y\|$.

Пример 3. Найдите расстояние между функциями $y(x) = 2\sin\pi x$ и $z(x) = \cos\pi x$ в пространствах $C[0;2]$, $C^{(1)}[0;2]$ и $h[0;2]$.

$$\rho(y,z)_{C[0;2]} = \|2\sin\pi x - \cos\pi x\|_{C[0;2]} = \max_{x\in[0;2]}|2\sin\pi x - \cos\pi x| =$$

$$= \max_{x\in[0;2]}\left|\sqrt{5}\left(\underbrace{\frac{2}{\sqrt{5}}}_{\cos\varphi}\sin\pi x - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}}_{\sin\varphi}\cos\pi x\right)\right| = \max_{x\in[0;2]}\left|\sqrt{5}\sin(\pi x - \varphi)\right| = \sqrt{5},$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; максимум модуля достигается при $x = \frac{\varphi}{\pi} + \frac{1}{2} \in (0;1)$.

$$\rho(y,z)_{C^{(1)}[0;2]} = \|2\sin\pi x - \cos\pi x\|_{C^{(1)}[0;2]} =$$

$$= \max_{x\in[0;2]}|2\sin\pi x - \cos\pi x| + \max_{x\in[0;2]}|2\pi\cos\pi x + \pi\sin\pi x| =$$

$$= \sqrt{5} + \max_{x\in[0;2]}\left|\sqrt{5}\pi\left(\underbrace{\frac{2}{\sqrt{5}}}_{\cos\varphi}\cos\pi x + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}}_{\sin\varphi}\sin\pi x\right)\right| = \sqrt{5} + \max_{x\in[0;2]}\left|\sqrt{5}\pi\cos(\pi x - \varphi)\right| =$$

$$= \sqrt{5}(1 + \pi),$$

где максимум модуля достигается при $x = \frac{\varphi}{\pi}$.

$$\rho^2(y,z)_{h[0;2]} = \|2\sin\pi x - \cos\pi x\|^2_{h[0;2]} = \int_0^2 (2\sin\pi x - \cos\pi x)^2\,dx =$$

$$= \int_0^2 (4\sin^2\pi x - 4\sin\pi x\cos\pi x + \cos^2\pi x)\,dx =$$

$$= \int_0^2 \left(2 - 2\cos 2\pi x - 2\sin 2\pi x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\pi x\right) dx = 5,$$

$\rho(y,z)_{h[0;2]} = \sqrt{5}$.

Ответ: $\rho(y,z)_{C[0;2]} = \sqrt{5}$, $\rho(y,z)_{C^{(1)}[0;2]} = \sqrt{5}(1+\pi)$, $\rho(y,z)_{h[0;2]} = \sqrt{5}$.

Пространство $h[a;b]$ будет евклидовым, если ввести в нём СП по формуле

$$(y,z) = \int_a^b y(x)z(x)\,dx.$$

Тогда $(y,y) = \|y\|^2$.

В евклидовых пространствах справедливо неравенство Коши—Буняковского

$(y,z)^2 \le (y,y)\cdot(z,z)$,

которое в случае пространства $h[a;b]$ принимает вид

$$\left(\int_a^b y(x)z(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b y^2(x)\,dx \cdot \int_a^b z^2(x)\,dx.$$

О. Последовательность элементов нормированного пространства $x_n \in N$ называется *ограниченной*, если $\exists M$: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|x_n\| \le M$.

О. Последовательность $x_n \in N$ сходится к элементу $x_0 \in N$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x_0\| = 0$.

Сходимость функциональных последовательностей в норме $C[a;b]$ является равномерной сходимостью, сходимость функциональных последовательностей в норме в $h[a;b]$ является сходимостью в среднем.

О. Последовательность $x_n \in N$ называется *фундаментальной*, если $\forall\varepsilon > 0$ $\exists K \in \mathbb{N}$: $\forall n > K$, $\forall p \in \mathbb{N}$ $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$.

Т. Если последовательность сходится, то она фундаментальна.

Обратное, вообще говоря, не верно в бесконечномерных нормированных пространствах.

О. Последовательность $x_n \in N$ называется *компактной*, если из любой её подпоследовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Примеры: $\{0,1,0,2,0,3,\dots,0,n,\dots\}$ — некомпактная последовательность чисел (т. к. из её подпоследовательности $\{1,2,3,\dots,n,\dots\}$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность); $\{0,1,2,0,1,2,0,1,2,\dots,0,1,2,\dots\}$ — компактная последовательность чисел (т. к. любая её подпоследовательность является ограниченной, и поэтому из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность по теореме Больцано—Вейерштрасса).

Пример 4 (самостоятельно). Докажите, что последовательность функций $y_n = \sin nx$ ограничена в пространстве $h[0;\pi]$, но не компактна.

$$\|y_n\|^2_{h[0;\pi]} = \int_0^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \frac{\pi}{2},$$

$\|y_n\|_{h[0;\pi]} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$ последовательность ограничена.

Если бы она была компактна, то из любой её подпоследовательности можно было бы выделить сходящуюся подпоследовательность. Но

$$\|y_n - y_m\|^2_{h[0;\pi]} = \int_0^{\pi} (\sin nx - \sin mx)^2\, dx = \int_0^{\pi} (\sin^2 nx - 2\sin nx \sin mx + \sin^2 mx)\, dx =$$

$$= \pi + \int_0^{\pi} (\cos(n+m)x - \cos(n-m)x)\, dx = \pi, \qquad \forall n \neq m,$$

$$\|y_n - y_m\|_{h[0;\pi]} = \sqrt{\pi}, \qquad \forall n \neq m,$$

поэтому никакая подпоследовательность последовательности y_n не может быть фундаментальной, а следовательно, не может сходиться, ч. т. д.

Таким образом, в бесконечномерных нормированных пространствах теорема Больцано—Вейерштрасса не выполняется, т. е. не из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность!

Пример 5. Приведите пример ограниченной, но не компактной последовательности в пространстве $C^{(1)}[0;\pi]$.

Рассмотрим последовательность $y_n = \frac{\cos 2^n x}{2^n}$. Докажем, что она ограничена в $C^{(1)}[0;\pi]$:

$$\|y_n\|_{C^{(1)}[0;\pi]} = \max_{x\in[0;\pi]} |y_n(x)| + \max_{x\in[0;\pi]} |y_n'(x)| = \max_{x\in[0;\pi]} \left|\frac{\cos 2^n x}{2^n}\right| + \max_{x\in[0;\pi]} |-\sin 2^n x| \leq 2,$$

ч. т. д.

Теперь докажем, что последовательность не компактна в $C^{(1)}[0;\pi]$. Если бы она была компактной, то из любой её подпоследовательности можно было бы выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть эта сходящаяся подпоследовательность имеет вид y_{n_k}. Поскольку она сходится, то она является фундаментальной, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists K\colon \forall k > K, \forall p \in \mathbb{N}$

$$\left\|y_{n_{k+p}} - y_{n_k}\right\|_{C^{(1)}[0;\pi]} < \varepsilon, \text{ т. е. } \max_{x\in[0;\pi]} \left|y_{n_{k+p}}(x) - y_{n_k}\right| + \max_{x\in[0;\pi]} \left|y'_{n_{k+p}}(x) - y'_{n_k}(x)\right| < \varepsilon.$$

Но для любого номера n_k найдётся точка $x_* = \frac{1}{2^{n_k}} \cdot \frac{\pi}{2} \in [0;\pi]$, в которой

$$y'_{n_k}(x_*) = -\sin(2^{n_k} x_*) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1,$$

$$y'_{n_{k+p}}(x_*) = -\sin(2^{n_{k+p}} x_*) = -\sin(2^{n_{k+p} - n_k - 1}\pi) = 0,$$

т. к. $2^{n_{k+p} - n_k - 1} = m \in \mathbb{N}$, $\sin m\pi = 0$.

Но тогда

$$\left\|y_{n_{k+p}} - y_{n_k}\right\|_{C^{(1)}[0;\pi]} = \max_{x\in[0;\pi]} \left|y_{n_{k+p}}(x) - y_{n_k}\right| + \max_{x\in[0;\pi]} \left|y'_{n_{k+p}}(x) - y'_{n_k}(x)\right| \geq$$

$$\geq \left|y'_{n_{k+p}}(x_*) - y'_{n_k}(x_*)\right| = 1,$$

и поэтому данная величина не может быть меньше любого наперёд заданного положительного числа ε, т. е. никакая подпоследовательность последовательности y_n не может быть

фундаментальной, а следовательно, не может сходиться. Значит, последовательность y_n — не компактная в $C^{(1)}[0;\pi]$, ч. т. д.
Ответ: $y_n = \frac{\cos 2^n x}{2^n}$.

Линейные операторы

Пусть $A\colon N_1 \to N_2$ — линейный оператор, который переводит элементы нормированного пространства N_1 в элементы нормированного пространства N_2.
$D(A)$ — область определения оператора, $R(A)$ — область значений оператора.
О. Нормой линейного оператора A называется число $\|A\|_{N_1\to N_2} = \sup\limits_{\|y\|_{N_1}=1} \|Ay\|_{N_2}$.
О. Линейный оператор A называется *ограниченным*, если $\|A\|_{N_1\to N_2} < +\infty$.
О. Оператором *Фредгольма* называется линейный оператор A, действующий на непрерывные на отрезке $[a;b]$ функции $y(x)$ по формуле $Ay = \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds$, где $K(x,s)$ — непрерывная функция (*ядро* оператора Фредгольма).

Пример 6. Докажите, что оператор Фредгольма $Ay = \int_0^1 xsy(s)\,ds$ является ограниченным при действии $h[0;1] \to h[0;1]$, и получите оценку сверху для его нормы в этом случае.
$\|A\|_{h[0;1]\to h[0;1]} = \sup\limits_{\|y\|_{h[0;1]}=1} \|Ay\|_{h[0;1]}$.
Пусть $\|y\|_{h[0;1]} = 1$. Тогда

$$\|Ay\|^2_{h[0;1]} = \int_0^1 \big(Ay(x)\big)^2\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 xsy(s)\,ds\right)^2 dx = \int_0^1 x^2 \left(\int_0^1 sy(s)\,ds\right)^2 dx \le$$

$$\le \int_0^1 x^2 \left(\int_0^1 s^2\,ds \cdot \underbrace{\int_0^1 y^2(s)\,ds}_{\|y\|^2_{h[0;1]}=1}\right) dx = \int_0^1 x^2\,dx \cdot \int_0^1 s^2\,ds = \frac{1}{9}.$$

(Здесь было использовано неравенство Коши—Буняковского.) Значит, $\|Ay\|_{h[0;1]} \le \frac{1}{3}$, $\|A\|_{h[0;1]\to h[0;1]} = \sup\limits_{\|y\|_{h[0;1]}=1} \|Ay\|_{h[0;1]} \le \frac{1}{3}$, поэтому оператор ограничен, ч. т. д.
Ответ: $\|Ay\|_{h[0;1]} \le \frac{1}{3}$.

О. Оператор $A\colon N_1 \to N_2$ называется *непрерывным* в точке $y_0 \in D(A)$, если для любой последовательности $y_n \in D(A)$, сходящейся к y_0, последовательность Ay_n сходится к Ay_0.
О. Оператор $A\colon N_1 \to N_2$ называется *вполне непрерывным*, если он переводит любую ограниченную последовательность в компактную.

Пример 7. Докажите, что оператор Фредгольма $Ay = \int_0^\pi \sin x \cos s\, y(s)\,ds$ является вполне непрерывным при действии $h[0;\pi] \to h[0;\pi]$.
Требуется доказать, что оператор переводит любую ограниченную последовательность в компактную. Пусть y_n — ограниченная в $h[0;\pi]$ последовательность:
$\exists M\colon \forall n \in \mathbb{N}\ \|y_n\|_{h[0;\pi]} \le M$.

Пусть $z_n = Ay_n$. Докажем, что z_n — компактная в $h[0;\pi]$ последовательность. Доказательство будет основано на следующей теореме.

Т. (Арцела). Если функциональная последовательность $z_n(x)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на отрезке $[a;b]$, то из неё можно выделить равномерно сходящуюся на отрезке $[a;b]$ подпоследовательность.

1) Докажем, что последовательность $z_n(x)$ равномерно ограничена на отрезке $[0;\pi]$, т. е. $\exists L$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0;\pi]$ $|z_n(x)| \le L$. Воспользовавшись неравенством Коши—Буняковского, получим:
$$|z_n(x)| = \left|\int_0^\pi \sin x \cos s\, y_n(s)\, ds\right| = |\sin x| \cdot \left|\int_0^\pi \cos s\, y_n(s)\, ds\right| \le \left|\int_0^\pi \cos s\, y_n(s)\, ds\right| \le$$
$$\le \underbrace{\sqrt{\int_0^\pi \cos^2 s\, ds}}_{\le\sqrt{\pi}} \cdot \underbrace{\sqrt{\int_0^\pi y_n^2(s)\, ds}}_{\|y_n\|\le M} \le \sqrt{\pi}M, \qquad \text{ч. т. д.}$$
2) Докажем, что последовательность $z_n(x)$ равностепенно непрерывна на отрезке $[0;\pi]$, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x_1, x_2 \in [0;\pi]$, $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |z_n(x_1) - z_n(x_2)| < \varepsilon$. Для этого воспользуемся полученной выше оценкой:
$$|z_n(x_1) - z_n(x_2)| = \left|\int_0^\pi \sin x_1 \cos s\, y_n(s)\, ds - \int_0^\pi \sin x_2 \cos s\, y_n(s)\, ds\right| =$$
$$= \left|(\sin x_1 - \sin x_2) \cdot \int_0^\pi \cos s\, y_n(s)\, ds\right| \le |\sin x_1 - \sin x_2| \cdot \left|\int_0^\pi \cos s\, y_n(s)\, ds\right| \le$$
$$\le |\sin x_1 - \sin x_2| \cdot \sqrt{\pi}M.$$
Поскольку функция $\sin x$ непрерывна на отрезке $[0;\pi]$, то по теореме Кантора она является равномерно непрерывной на отрезке $[0;\pi]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:
$\forall x_1, x_2 \in [0;\pi]$, $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow$ $|\sin x_1 - \sin x_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}M}$, откуда $|z_n(x_1) - z_n(x_2)| < \varepsilon$, ч. т. д.
3) Итак, функциональная последовательность $z_n(x)$ является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной на отрезке $[0;\pi]$. Это будет справедливо и для любой её подпоследовательности. Согласно теореме Арцела, из неё можно выделить равномерно сходящуюся на отрезке $[0;\pi]$ подпоследовательность. Из равномерной сходимости следует сходимость в среднем. Таким образом, последовательность z_n является компактной в $h[0;\pi]$, ч. т. д.

ДЗ 3. В.Т. Волков, А.Г. Ягола. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление (методы решения задач). 2009. (ВЯ, http://matematika.phys.msu.ru/stud_gen/27) Задачи для самостоятельного решения: № 1.4(б), 1.5(б,г), 1.6(в), 1.11, 2.8, 2.9, 2.15–2.17.