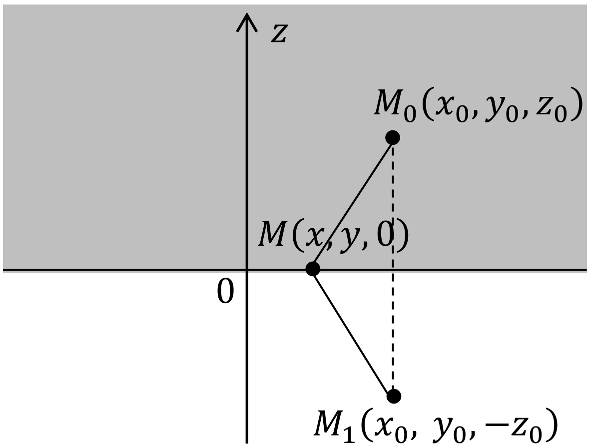
Семинар 14

Пример 1 (задача Неймана в полупространстве). Построить функцию Грина задачи Неймана для уравнения Лапласа в полупространстве $z > 0$.



Функция Грина должна иметь вид

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_0}} + v(M),$$

где

$$\begin{cases} \Delta\, v(M) = 0, \qquad z > 0, \\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \\ G \rightrightarrows 0 \text{ при } z \to +\infty. \end{cases}$$

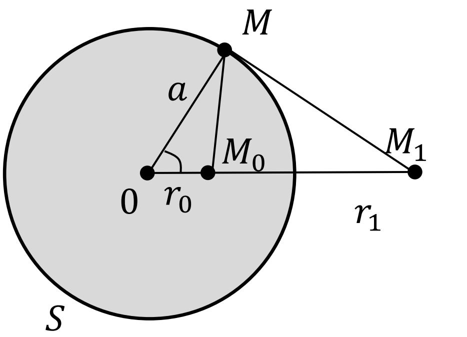
Физическая интерпретация: в случае задачи Неймана функция Грина описывает стационарное распределение температуры в однородной среде над теплоизолированной поверхностью $z = 0$. В точке M_0 находится точечный источник тепла. Если в симметричную точке M_0 относительно плоскости $z = 0$ точку M_1 поместить второй такой же источник тепла, то потока тепла через поверхность $z = 0$ не будет (в силу симметрии: сверху приходит столько же тепла, сколько снизу).

В этом случае $v(M) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_1}}$, и функция Грина задачи Неймана для уравнения Лапласа в верхнем полупространстве:

$$\boxed{G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_0}} + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_1}}.}$$

Дома проверить выполнение условия Неймана для найденной функции Грина, выразив её через координаты точек M и M_0!

Пример 2 (задача Дирихле в круге). Найти функцию Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.



На прошлом семинаре была получена функция Грина для этой задачи методом разделения переменных. Теперь найдём её другим способом: методом зеркальных отображений.

Функция Грина должна иметь вид:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_0}} + v(M),$$

где

$$\begin{cases} \Delta\, v(M) = 0 \text{ в круге}, \\ G(M, M_0)|_{M\in S} = 0. \end{cases}$$

Пусть M_0 — произвольная точка внутри круга.

О. Точка M_1 называется сопряжённой (симметричной) к точке M_0 относительно окружности S, если точка M_1 лежит на прямой, соединяющей центр O окружности S и точку M_0, по ту же сторону от центра O, что и точка M_0, и при этом

$r_0 \cdot r_1 = a^2$,

где $r_0 = R_{OM_0}$, $r_1 = R_{OM_1}$.

Поскольку $r_1 = \frac{a^2}{r_0}$, то если точка M_0 лежит внутри круга, сопряжённая точка M_1 будет лежать вне круга, и наоборот. Точка, сопряжённая к центру круга — бесконечно удалённая.

Лемма. Если $M \in S$, то $R_{MM_0} = \frac{r_0}{a} R_{MM_1}$.

Доказательство. Из равенства $r_0 \cdot r_1 = a^2$ следует, что $\frac{a}{r_1} = \frac{r_0}{a}$. Тогда

$\triangle\, OMM_0 \sim \triangle\, OM_1M,$

т.к. $\frac{OM}{OM_1} = \frac{OM_0}{OM}$, и $\angle MOM_0 = \angle M_1OM$.

Из подобия треугольников вытекает, что

$$\frac{MM_0}{OM_0} = \frac{M_1M}{OM},$$

т.е. $\frac{R_{MM_0}}{r_0} = \frac{R_{MM_1}}{a}$, ч.т.д.

Теперь, если мы возьмём $v(M) = -\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{a}{r_0}\frac{1}{R_{MM_1}}\right)$, то

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_0}} + v(M) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{R_{MM_0}} - \ln\left(\frac{a}{r_0}\frac{1}{R_{MM_1}}\right)\right],$$

и, в силу доказанной леммы, $G(M, M_0)|_{M\in S} = 0$. При этом функция $v(M)$ будет гармонической в круге (т.к. она является фундаментальным решением уравнения Лапласа с особенностью при $M = M_1$).

Таким образом, функция Грина внутренней задачи Дирихле в круге:

$$\boxed{G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{R_{MM_0}} - \ln\left(\frac{a}{r_0}\frac{1}{R_{MM_1}}\right)\right].}$$

Пример 3 (задача Дирихле в шаре). Найти функцию Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.

Отличие от предыдущей задачи в том, что

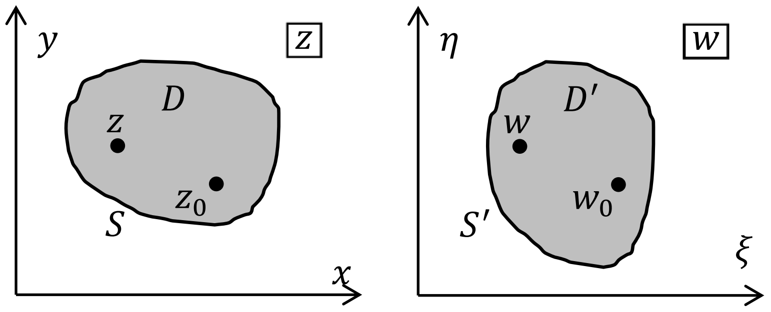
$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_0}} + v(M).$$

Тогда надо взять $v(M) = -\frac{1}{4\pi}\frac{a}{r_0}\frac{1}{R_{MM_1}}$, где M_1 — точка, сопряжённая точке M_0 относительно сферы, являющейся границей шара (точки, сопряжённые относительно сферы, определяются так же, как и точки, сопряжённые относительно окружности). Таким образом, функция Грина внутренней задачи Дирихле в шаре:

$$\boxed{G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{a}{r_0}\frac{1}{R_{MM_1}}\right).}$$

Построение функции Грина методом конформных отображений (для двумерных задач)

Пусть D — некоторая двумерная область. Смысл метода конформных отображений состоит в том, чтобы исходную область D конформно отобразить на более простую область D', в которой функцию Грина найти легче.



Будем рассматривать точки области D как точки на комплексной плоскости. Тогда каждой точке соответствует комплексное число $z = x + iy$. Поэтому будем обозначать точки области соответствующими комплексными числами z.

Для простоты построим функцию Грина задачи Дирихле. Функция Грина задачи Дирихле в области D удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases}\Delta_z\, G(z, z_0) = -\delta(z, z_0), \qquad z, z_0 \in D,\\ G(z, z_0)|_{z\in S} = 0.\end{cases}$$

Докажем, что конформное отображение сохраняет функцию Грина.

Всякое конформное отображение области D на область D' можно записать в виде:

$w = f(z), \qquad z \in D,$

где $f(z)$ — однозначная и однолистная аналитическая функция, $f'(z) \neq 0$ в области D, $w = \xi + i\eta$ — точка области D', в которую переходит точка z области D.

Можно показать (сделав замену переменных), что при конформном отображении оператор Лапласа преобразуется следующим образом:

$\Delta_z = |f'(z)|^2\, \Delta_w,$

где $\Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа в старых переменных, $\Delta_w = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$ — оператор Лапласа в новых переменных. (Дома проверить!)

Посмотрим, как при этом преобразуется дельта-функция. Сделаем замену переменных в интеграле, определяющем действие дельта-функции на произвольную функцию $\varphi(z)$. Мы хотим, чтобы в новых переменных он имел такой же вид, как и в старых, поэтому

$$\varphi(z_0) = \iint\limits_D \varphi(z)\delta(z, z_0)\, dx\, dy = \iint\limits_{D'} \underbrace{\varphi\big(f^{-1}(w)\big)}_{\tilde\varphi(w)} \underbrace{\delta\big(f^{-1}(w), f^{-1}(w_0)\big)\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right|}_{\delta(w, w_0)} d\xi\, d\eta =$$

$$= \iint\limits_{D'} \tilde\varphi(w)\delta(w, w_0)\, d\xi\, d\eta,$$

где $f^{-1}(w)$ — функция, обратная к $f(z)$, $w_0 = f(z_0)$.

Геометрический смысл модуля якобиана перехода $\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right|$ — во сколько раз увеличиваются элементарные площади при данном отображении. С другой стороны, при конформном отображении сохраняются углы, а элементы длины увеличиваются в $|f'(z)|$ раз. Поэтому элементы площади увеличиваются в $|f'(z)|^2$ раз, т.е. $\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right| = |f'(z)|^2$.

Таким образом,

$\delta(w, w_0) = |f'(z)|^2 \delta(z, z_0).$

Значит, при конформном отображении уравнение $\Delta_z\, G(z, z_0) = -\delta(z, z_0)$ переходит в уравнение

$$|f'(z)|^2\, \Delta_w \underbrace{G\big(f^{-1}(w), f^{-1}(w_0)\big)}_{\tilde G(w, w_0)} = -|f'(z)|^2 \delta(w, w_0),$$

т.е.

$\Delta_w\, \tilde G(w, w_0) = -\delta(w, w_0).$

Тогда функция $\tilde G(w, w_0)$ удовлетворяет задаче:

$$\begin{cases} \Delta_w \tilde{G}(w, w_0) = -\delta(w, w_0), \qquad w, w_0 \in D', \\ \tilde{G}\big|_{w \in S'} = G|_{M \in S} = 0. \end{cases}$$

А это задача, решением которой является функция Грина задачи Дирихле в области D'. Таким образом, после замены переменных функция Грина задачи Дирихле в области D перешла в функцию Грина задачи Дирихле в области D'. А это и означает, что конформное отображение сохраняет функцию Грина. Ч.т.д.

Если $\tilde{G}(w, w_0)$ — функция Грина в новой области D', то $G(z, z_0) = \tilde{G}\big(f(z), f(z_0)\big)$ — функция Грина в старой области D.

Итак, чтобы найти функцию Грина в некоторой области D, надо эту область конформно отобразить на область D', где функция Грина известна или может быть легко получена. Например, любую односвязную область, граница которой состоит хотя бы из одной точки, можно конформно отобразить на единичный круг, причём так, чтобы заданная точка $z_0 \in D$ перешла в центр круга (**теорема Римана**). Правда, построить такое конформное отображение в явном виде удаётся далеко не для всякой области (но известно, что оно существует).

Замечание 1. Метод конформных отображений позволяет находить функцию Грина не только в ограниченных, но и в неограниченных областях.

Замечание 2. Почему этот метод не применяется для трёхмерных областей? В трёхмерном случае (и в случае большей размерности) класс отображений, сохраняющих функцию Грина, слишком узок и потому не позволяет существенно упростить область. В трёхмерном случае нет аналога теоремы Римана.

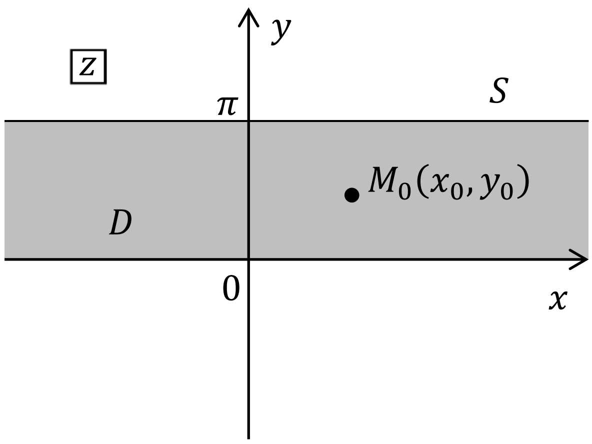
Замечание 3. Использование метода конформных отображений для построения функции Грина в случае ГУ других типов связано с дополнительными трудностями.

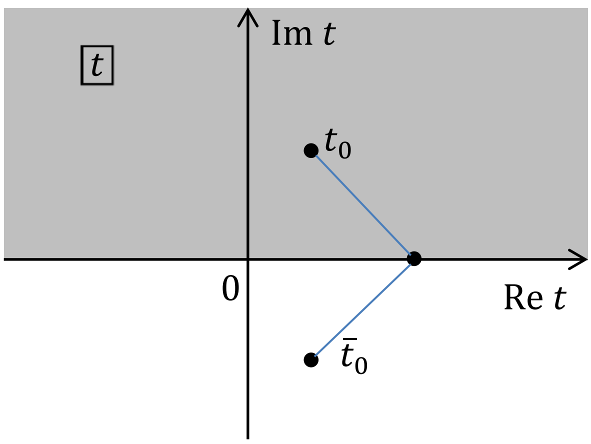
Пример 4 (задача Дирихле в полосе). Найти функцию Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полосе $0 < y < \pi$.

Функция Грина должна удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases} \Delta_z G(z, z_0) = -\delta(z, z_0), \qquad z, z_0 \in D, \\ G(z, z_0)|_{z \in S} = 0, \\ G(z, z_0) \text{ ограничена при } x \to \infty. \end{cases}$$

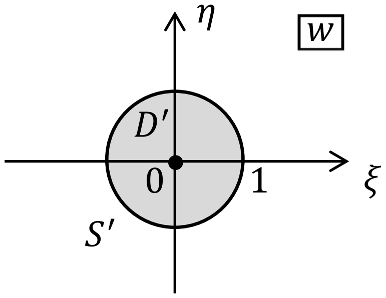
Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ — произвольная точка внутри полосы D. В соответствии с теоремой Римана, отобразим полосу D конформно на единичный круг так, чтобы точка M_0 перешла в центр круга.





1. Сначала сделаем экспоненциальное отображение:

$t = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$.



При этом $|t| = e^x$ изменяется от 0 до ∞, $\arg t = y$ изменяется от 0 до π. Значит, полоса D отобразится на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$. При этом точка $M_0(x_0, y_0)$ перейдёт в точку $t_0 = e^{x_0}e^{iy_0}$.

2. Теперь верхнюю полуплоскость отобразим на единичный круг D' так, чтобы точка t_0 перешла в центр круга. Для этого сделаем дробно-линейное отображение:

$$w = \lambda \frac{t-\alpha}{t-\beta},$$

которое переведёт границу полуплоскости, прямую $\operatorname{Im} t = 0$, в границу круга — окружность $|w| = 1$, а точку t_0 — в центр круга $w = 0$. Здесь α, β, λ — неизвестные параметры.

Поскольку точка t_0 переходит в точку $w = 0$, то $\alpha = t_0$.

Далее, при дробно-линейном отображении сохраняется симметрия относительно окружностей и прямых. Поэтому точка $\bar{t}_0$, симметричная точке t_0 относительно прямой $\operatorname{Im} t = 0$, перейдёт в точку $w = \infty$, симметричную точке $w = 0$ относительно окружности $|w| = 1$. Отсюда $\beta = \bar{t}_0$.

И из условия, что прямая $\operatorname{Im} t = 0$ переходит в окружность $|w| = 1$, получим:

$$|w| = \left|\lambda \frac{t-t_0}{t-\bar{t}_0}\right| = |\lambda| \frac{|t-t_0|}{|t-\bar{t}_0|} = |\lambda| = 1,$$

поскольку расстояние между точками t и t_0 равно расстоянию между точками t и $\bar{t}_0$, когда точка t лежит на прямой $\operatorname{Im} t = 0$.

Отсюда $\lambda = e^{i\varphi}$, где φ — произвольное вещественное число (это угол поворота круга относительно его центра, он может быть любой). Для простоты возьмём $\varphi = 0$. Тогда $\lambda = 1$.

Значит, отображение

$$w = \frac{t-t_0}{t-\bar{t}_0}$$

переводит верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$ в единичный круг $|w| < 1$, при этом точка t_0 переходит в центр круга.

3. Композиция отображений $z \to t \to w$ даёт нам отображение

$$w = f(z) = \frac{e^z - t_0}{e^z - \bar{t}_0} = \frac{e^x e^{iy} - e^{x_0}e^{iy_0}}{e^x e^{iy} - e^{x_0}e^{-iy_0}},$$

переводящее полосу $0 < y < \pi$ в единичный круг $|w| < 1$ так, что точка $M_0(x_0, y_0)$ переходит в центр круга.

Теперь в единичном круге D' нам надо найти функцию Грина $\tilde{G}(w, 0)$:

$$\begin{cases} \Delta_w \tilde{G}(w,0) = -\delta(w,0), \qquad w \in D', \\ \tilde{G}(w,0)\big|_{|w|=1} = 0. \end{cases}$$

(Это проще, чем находить $\tilde{G}(w, w_0)$ для произвольной $w_0 \in D'$, поэтому мы и потребовали, чтобы точка M_0 перешла в центр круга $w_0 = 0$.)

Функция Грина в области D' имеет вид:

$$\tilde{G}(w,0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|w|} + v(w),$$

где $\Delta\, v(w) = 0$ в D'.

Подставив функцию $\tilde{G}(w, 0)$ в ГУ $\tilde{G}(w,0)\big|_{|w|=1} = 0$, получим

$v|_{|w|=1} = 0.$
Тогда $v \equiv 0$, и

$$\boxed{\tilde{G}(w,0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|w|}}$$

— функция Грина задачи Дирихле в единичном круге (с особенностью в точке $w = 0$).
Функция Грина в исходной области D имеет вид:

$$G(z,z_0) = \tilde{G}(f(z),0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\left| \frac{e^x e^{iy} - e^{x_0} e^{iy_0}}{e^x e^{iy} - e^{x_0} e^{-iy_0}} \right|}.$$

Вычислим:

$$\left| e^x e^{iy} - e^{x_0} e^{iy_0} \right|^2 = \left(e^x e^{iy} - e^{x_0} e^{iy_0} \right) \left(e^x e^{-iy} - e^{x_0} e^{-iy_0} \right) =$$
$$= e^{2x} - e^{x+x_0} e^{i(y_0 - y)} - e^{x+x_0} e^{i(y-y_0)} + e^{2x_0} = e^{2x} + e^{2x_0} - 2e^{x+x_0} \cos(y - y_0).$$

Аналогично,

$$\left| e^x e^{iy} - e^{x_0} e^{-iy_0} \right|^2 = e^{2x} + e^{2x_0} - 2e^{x+x_0} \cos(y + y_0).$$

Тогда

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\left| e^x e^{iy} - e^{x_0} e^{-iy_0} \right|^2}{\left| e^x e^{iy} - e^{x_0} e^{iy_0} \right|^2} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{e^{2x} + e^{2x_0} - 2e^{x+x_0} \cos(y + y_0)}{e^{2x} + e^{2x_0} - 2e^{x+x_0} \cos(y - y_0)} =$$
$$= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{e^{x-x_0} + e^{x_0 - x} - 2\cos(y + y_0)}{e^{x-x_0} + e^{x_0 - x} - 2\cos(y - y_0)} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{2\operatorname{ch}(x - x_0) - 2\cos(y + y_0)}{2\operatorname{ch}(x - x_0) - 2\cos(y - y_0)} =$$
$$= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y + y_0)}{\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y - y_0)}.$$

Итак, функция Грина задачи Дирихле в полосе $0 < y < \pi$:

$$\boxed{G(z,z_0) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y + y_0)}{\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y - y_0)}.}$$

ДЗ 14.
Построить функцию Грина задачи Дирихле:

а) в полушаре;
б) в полуплоскости $y > 0$;
в) в полосе $0 < y < \pi$, сделав конформное отображение на полуплоскость и воспользовавшись результатом предыдущего пункта;
г) в круге радиуса a, сделав конформное отображение на единичный круг, при котором точка z_0 переходит в центр круга;
д) в квадранте $x > 0$, $y > 0$ (на плоскости) двумя способами: методом зеркальных отображений и методом конформных отображений.

В след. раз — к/р.