Семинар 4

ОДУ 1-го порядка, не разрешённые относительно производной

$\boxed{F(x,y,y')=0.}$

Если отсюда можно в явном виде выразить $y'=f(x,y)$, то получится уравнение, разрешённое относительно производной, которое можно решать рассмотренными ранее методами.

Если же выразить y' невозможно или слишком громоздко, то используют *метод введения параметра.* Рассмотрим частные случаи, когда уравнение $F(x,y,y')=0$ можно разрешить относительно x или y.

1) Уравнение можно разрешить относительно y:
   $y=f(x,y')$.
   Частный случай:
   $y=x\varphi(y')+\psi(y')$ — уравнение *Лагранжа,*
   $y=xy'+\psi(y')$ — уравнение *Клеро.*
   Пусть $p=y'=\frac{dy}{dx}$ — параметр. Тогда
   $y=f(x,p)$.
   Возьмём дифференциал
   $dy=f_x\,dx+f_p\,dp$
   и подставим $dy=p\,dx$:
   $p\,dx=f_x\,dx+f_p\,dp$.
   В полученном уравнении нет переменной y, поскольку $f=f(x,p)$. Кроме того, уравнение можно записать в виде
   $$\frac{dx}{dp}=\frac{f_p}{p-f_x},$$
   т. е. это уравнение, разрешённое относительно производной, которое можно решать изученными ранее методами (при делении мы могли потерять решение $f_x=p$).
   Из полученного уравнения можно найти функцию $x(p)$ и получить интегральные кривые в параметрическом виде:
   $$\begin{cases}x=x(p,C),\\ y=f(x(p,C),p).\end{cases}$$
2) Уравнение можно разрешить относительно x:
   $x=f(y,y')$.
   Решается аналогично, введением параметра $p=y'=\frac{dy}{dx}$, только dx заменяется на $\frac{dy}{p}$.

Пример 1 (Филиппов № 267). Решить уравнение $x=(y')^3+y'$.

Введём параметр $p=y'=\frac{dy}{dx}$. Уравнение запишется в виде:

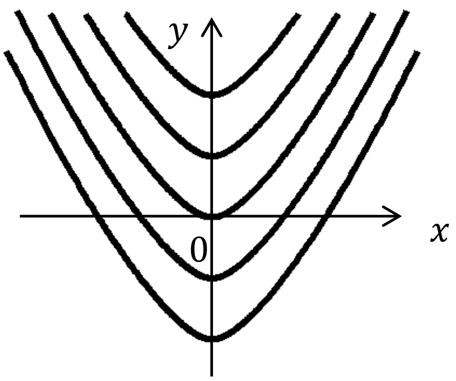
$x=p^3+p$.

Возьмём дифференциал от левой и правой части:

$dx=3p^2\,dp+dp$.

Заменив dx на $\frac{dy}{p}$ (заметим, что $p=0$ не является решением), исключим переменную x:

$$\frac{dy}{p}=3p^2\,dp+dp,$$



$dy = (3p^3 + p)\,dp.$

$y = \dfrac{3}{4}p^4 + \dfrac{p^2}{2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

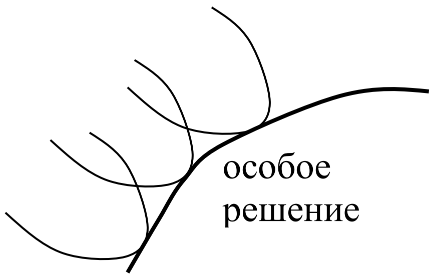
Вспомнив, что $x = p^3 + p$, запишем уравнения интегральных кривых в параметрической форме.

Ответ: $\begin{cases} x = p^3 + p, \\ y = \frac{3}{4}p^4 + \frac{p^2}{2} + C, \ C \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Здесь p — параметр, он пробегает все вещественные значения. При каждом фиксированном C имеем интегральную кривую, заданную в параметрическом виде.

Особые решения

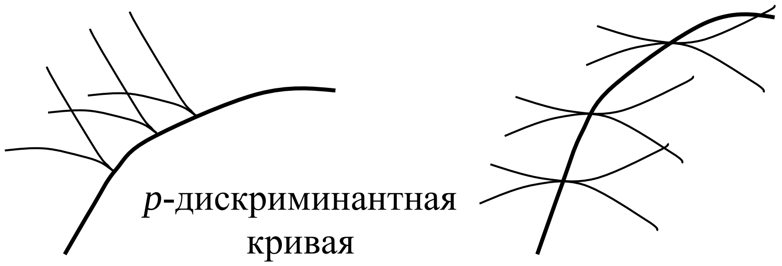
Семейство интегральных кривых уравнения, не разрешённого относительно производной, может иметь особенности, связанные с нарушением существования и единственности решения, проходящего через данную точку.



Особое решение — это такое решение ОДУ, которое является огибающей семейства интегральных кривых уравнения, т. е. в каждой точке его касается некоторое другое решение.

p-дискриминантная кривая дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ — это кривая, уравнение которой получается исключением параметра $p = y'$ из системы

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F_p(x, y, p) = 0. \end{cases}$$



Эта кривая может являться геометрическим местом точек заострения (т. е. точек возврата) или точек взаимного касания интегральных кривых.

Если p-дискриминантная кривая является решением ОДУ, то это — особое решение (т. е. огибающая семейства интегральных кривых).

C-дискриминантная кривая — это кривая, уравнение которой получается исключением константы C из системы

$$\begin{cases} \varphi(x, y, C) = 0, \\ \varphi_C(x, y, C) = 0, \end{cases}$$

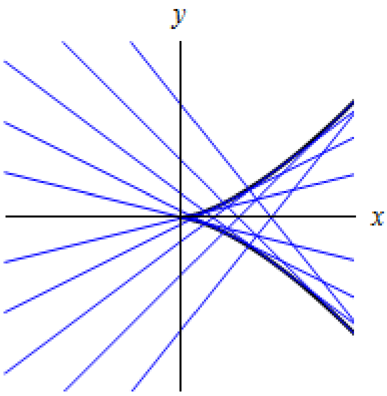
где $\varphi(x, y, C) = 0$ — семейство интегральных кривых ДУ.

Если в точках C-дискриминантной кривой выполнено условие $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$, то она является особым решением. Если это условие не выполнено, то она является геометрическим местом узловых точек (т. е. точек самопересечения) или (как предельный случай узловых точек) точек возврата.

Таким образом, для нахождения особого решения достаточно найти p-дискриминантную или C-дискриминантную кривую.

Пример 2 (Филиппов № 291). Решить уравнение $(y')^3 = 3(xy' - y)$. Исследовать особенности семейства интегральных кривых. Построить интегральные кривые (схематично).
Уравнение можно разрешить относительно y:
$y = xy' - \frac{(y')^3}{3}$ — уравнение Клеро.
Введём параметр $p = y' = \frac{dy}{dx}$. Получим:
$$y = xp - \frac{p^3}{3},$$
$dy = p\,dx + x\,dp - p^2\,dp.$
Исключим переменную y, подставив $dy = p\,dx$:
$p\,dx = p\,dx + x\,dp - p^2\,dp,$
$(x - p^2)\,dp = 0.$
Тогда либо
$dp = 0,$
откуда $p = C$,
$$\boxed{y = xC - \frac{C^3}{3}, \qquad C \in \mathbb{R};}$$
либо
$x = p^2.$
Тогда
$$y = p^3 - \frac{p^3}{3} = \frac{2}{3}p^3.$$
Исключив параметр p из соотношений
$$\begin{cases} x = p^2, \\ y = \dfrac{2}{3}p^3, \end{cases}$$
получим
$$\boxed{y = \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.}$$
Ошибочные рассуждения. Поскольку $p = C$, то $y' = C$, $y = Cx + C_0$, $C_0 \in \mathbb{R}$. И получается, что решение ОДУ 1-го порядка зависит от двух произвольных констант, чего не может быть. Ошибка в том, что p, x и y связаны между собой дополнительным уравнением $y = xp - \frac{p^3}{3}$, которое выполняется не для всех C_0. Вместо этого надо было подставить $p = C$ в данное уравнение, чтобы определить y.
Такая же ошибка произойдёт, если из $x = p^2$ выразить $y' = p = \pm\sqrt{x}$ и найти y в виде $y = \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Вместо этого надо было подставить $x = p^2$ в уравнение $y = xp - \frac{p^3}{3}$, чтобы определить y.
Теперь найдём особые решения. Для этого получим уравнение p-дискриминантной кривой.
Запишем исходное ДУ в виде
$F(x, y, y') = (y')^3 - 3xy' + 3y = 0.$
Уравнение p-дискриминантной кривой найдём, исключив параметр p из системы
$$\begin{cases} F(x, y, p) = p^3 - 3xp + 3y = 0, \\ F_p(x, y, p) = 3p^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Исключив $p = \pm\sqrt{x}$, получим уравнение p-дискриминантной кривой:
$y = \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.
Поскольку p-дискриминантная кривая удовлетворяет исходному ОДУ, то она является его особым решением, т. е. огибающей семейства решений.
К тому же выводу мы придём, найдя C-дискриминантную кривую: записав уравнение, описывающее семейство решений, $y = xC - \frac{C^3}{3}$, в виде $\varphi(x,y,C) = y - xC + \frac{C^3}{3} = 0$ и исключив константу C из системы
$$\begin{cases}\varphi(x,y,C) = y - xC + \dfrac{C^3}{3} = 0,\\ \varphi_C(x,y,C) = -x + C^2 = 0.\end{cases}$$



Исключив $C = \pm\sqrt{x}$, получим уравнение C-дискриминантной кривой:
$y = \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.
В данном случае она совпадает с p-дискриминантной кривой.
Поскольку в точках C-дискриминантной кривой
$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 = C^2 + 1 \neq 0$,
то C-дискриминантная кривая является особым решением.
Теперь можно изобразить интегральные кривые — прямые $y = xC - \frac{C^3}{3}$, касающиеся особого решения $y = \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

Ответ: $y = xC - \frac{C^3}{3},\ C \in \mathbb{R}$; $y = \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ — особое решение.

ОДУ высших порядков

$\boxed{F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0}$ — ОДУ n-го порядка.
Его общее решение является n-параметрическим семейством интегральных кривых, т. е. зависит от n произвольных констант: $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$.
Метод решения — понижение порядка до тех пор, пока не получится ОДУ 1-го порядка.
Перечислим основные приёмы понижения порядка (от простых к сложным; сначала следует пробовать применить простые приёмы).

1. Выделение полных производных.

Пример 3 (Филиппов № 457). Решить уравнение $yy'' = y'(y' + 1)$.
Преобразуем уравнение к такому виду, чтобы в левой и правой части стояли полные производные. Для этого поделим его на $y(y' + 1)$:
$$\frac{y''}{y' + 1} = \frac{y'}{y}.$$
$(\ln|y' + 1|)' = (\ln|y|)'$.
При делении потеряны решения $\boxed{y = 0,\ y = -x + C,\ C \in \mathbb{R}.}$
Проинтегрировав уравнение в полных производных, получим
$\ln|y' + 1| = \ln|y| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$.
$y' + 1 = C_2 y, \qquad C_2 = \pm e^{C_1} \neq 0$.

Получилось уравнение первого порядка, причём с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{C_2 y - 1} = dx.$$

(Потеряно решение $\boxed{y = \frac{1}{C_2}.}$)

$$\frac{1}{C_2}\ln|C_2 y - 1| = x + C_3, \qquad C_3 \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{y = \frac{1 + C_4 e^{C_2 x}}{C_2}, \qquad C_4 = \pm e^{C_2 C_3} \neq 0.}$$

Ответ: $y = \frac{1+C_4 e^{C_2 x}}{C_2},\ C_2 \neq 0,\ C_4 \in \mathbb{R};\ y = 0,\ y = -x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

2. Если уравнение имеет вид $\boxed{F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0,}$ т. е. **не содержит $\boldsymbol{y}$ и младших производных**, то замена $z(x) = y^{(k)}(x)$ приводит к понижению порядка.

Пример 4 (Филиппов № 433). Решить уравнение $(y'')^2 + y' = xy''$.
В уравнении нет y, но есть y', поэтому сделаем замену $z(x) = y'(x)$. Тогда $y'' = z'$, и
$(z')^2 + z = xz'$.
Получилось уравнение 1-го порядка — уравнение Клеро:
$z = xz' - (z')^2$.
Введём параметр: $p = z' = \frac{dz}{dx}$. Тогда
$z = xp - p^2$.
$dz = p\,dx + x\,dp - 2p\,dp$.
$p\,dx = p\,dx + x\,dp - 2p\,dp$.
$(x - 2p)\,dp = 0$.
Либо
$dp = 0$,
$p = C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$,
$\boxed{z = C_1 x - C_1^2, \qquad C_1 \in \mathbb{R},}$
либо

$$\begin{cases} x = 2p, \\ z = xp - p^2 = 2p^2 - p^2 = p^2. \end{cases}$$

Исключив отсюда параметр $p = \frac{x}{2}$, получим

$$\boxed{z = \frac{x^2}{4}.}$$

Подставляя функцию $z(x)$ в соотношение $z(x) = y'(x)$, находим функцию $y(x)$:

$$y' = z = C_1 x - C_1^2 \ \Rightarrow \ \boxed{y = \frac{C_1 x^2}{2} - C_1^2 x + C_2, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.}$$

$$y' = z = \frac{x^2}{4} \ \Rightarrow \ \boxed{y = \frac{x^3}{12} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.}$$

Ответ: $y = \frac{C_1 x^2}{2} - C_1^2 x + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R};\ y = \frac{x^3}{12} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

3. Если уравнение имеет вид $\boxed{F\left(y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0,}$ т. е. **не содержит x**, то делается замена $y' = p(y)$.

Пример 5 (ДИУВИПЗ № 2.1.7). Решить уравнение $yy'' = (y')^2 - (y')^3$.
Уравнение не содержит x. Сделаем замену $y' = p(y)$. Тогда
$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'(y)p(y).$$
Уравнение принимает вид:
$$yp\frac{dp}{dy} = p^2 - p^3.$$
Это уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными. После того, как будет найдена функция $p(y)$, останется решить уравнение $y' = p(y)$ относительно функции $y(x)$ (это тоже уравнение с разделяющимися переменными). Дома доделать.

4. Если уравнение — **однородное**, т. е. не изменится, если заменить (одновременно) y на ky, y' на ky', y'' на ky'' и т. д., где $k = \mathrm{const}$, $k \neq 0$, то делаем замену $y'(x) = y(x)z(x)$.

Пример 6 (Филиппов № 463). Решить уравнение $xyy'' - x(y')^2 = yy'$.
Если заменить y на ky, y' на ky', y'' на ky'', то получим
$$xkyky'' - x(ky')^2 = kyky',$$
и после сокращения на k^2 придём к исходному уравнению. Следовательно, оно однородное. Делаем замену $y'(x) = y(x)z(x)$. Тогда $y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'$, и
$$xy(yz^2 + yz') - xy^2z^2 = y^2z,$$
$$xy^2z^2 + xy^2z' - xy^2z^2 = y^2z,$$
$$xz' = z.$$
Потеряно решение $\boxed{y = 0.}$ Из полученного уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными надо определить функцию $z(x)$, после чего останется решить уравнение $y'(x) = yz(x)$ относительно функции $y(x)$ (это уравнение с разделяющимися переменными). Дома доделать.

5. Если уравнение — **обобщённо-однородное**, т. е. не изменится, если заменить (одновременно) x на kx, y на $k^\alpha y$, y' на $k^{\alpha-1}y'$, y'' на $k^{\alpha-2}y''$ и т. д., для любой константы $k \neq 0$ и некоторого α, то делаем замену:
$$x = \begin{cases} e^t, & x > 0, \\ -e^t, & x < 0, \end{cases}$$
$$y = z(t)e^{\alpha t},$$
после чего получится уравнение типа 3, т. е. не содержащее t.

Пример 7 (Филиппов № 483). Решить уравнение $yy' + 2x^2y'' = x(y')^2$.
Если заменить x на kx, y на $k^\alpha y$, y' на $k^{\alpha-1}y'$, y'' на $k^{\alpha-2}y''$, то получим
$$k^\alpha yk^{\alpha-1}y' + 2k^2x^2k^{\alpha-2}y'' = kx(k^{\alpha-1}y')^2,$$
$$k^{2\alpha-1}yy' + 2k^\alpha x^2y'' = k^{2\alpha-1}x(y')^2.$$
Чтобы можно было сократить, нужно, чтобы степени k во всех слагаемых были одинаковыми:
$$2\alpha - 1 = \alpha = 2\alpha - 1.$$
Отсюда $\alpha = 1$. Значит, уравнение является обобщённо-однородным с показателем $\alpha = 1$.

Сделаем замену. Рассмотрим сначала область $x > 0$. Тогда $x = e^t$, $y = z(t)e^t$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d[z(t)e^t]}{d(e^t)} = \frac{[z'(t)e^t + z(t)e^t]\,dt}{e^t\,dt} = z'(t) + z(t),$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d[z'(t) + z(t)]}{d(e^t)} = \frac{[z''(t) + z'(t)]\,dt}{e^t\,dt} = [z''(t) + z'(t)]e^{-t}.$$

Уравнение принимает вид

$$ze^t(z' + z) + 2e^{2t}(z'' + z')e^{-t} = e^t(z' + z)^2,$$

$$zz' + z^2 + 2z'' + 2z' = (z')^2 + 2zz' + z^2,$$

$$2z'' - (z')^2 - zz' + 2z' = 0.$$

Это уравнение не содержит t, т. е. принадлежит к типу 3. Чтобы понизить порядок, можно сделать замену $z' = p(z)$. Дома доделать.

ДЗ 4. Филиппов № 246, 251, 267, 285, 287, 424, 426, 435, 463, 473.