Семинар 20

Вычисление интегралов с помощью вычетов и леммы Жордана

Следующий класс несобственных интегралов, которые можно вычислять с помощью вычетов:

$$I_c = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax\,dx, \qquad I_s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,dx,$$

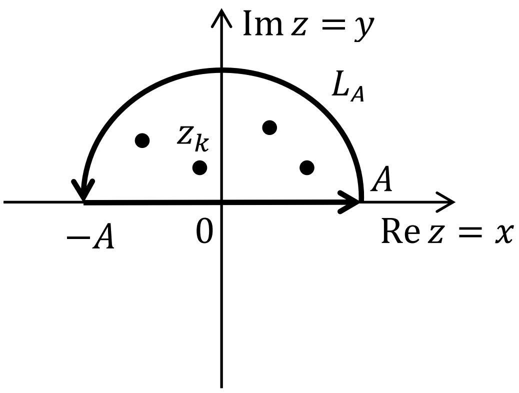
где *вещественнозначная* функция $f(x)$ непрерывна на всей вещественной оси и $a > 0$.
Если интегралы I_c и I_s сходятся, то сходится и комплексный интеграл

$$I = I_c + iI_s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\cos ax + i\sin ax) f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\,dx,$$

$I_c = \operatorname{Re} I, \qquad I_s = \operatorname{Im} I.$

Значит, он равен своему главному значению:

$$I = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} e^{iax} f(x)\,dx.$$



Если функция $f(x)$ допускает *аналитическое продолжение* с вещественной оси в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости, за исключением конечного числа ИОТ $z_1, z_2, \dots, z_N$, то отрезок вещественной оси $[-A;\,A]$ можно замкнуть полуокружностью L_A радиуса A с центром в нуле, расположенной в верхней полуплоскости. При достаточном большом A все ИОТ $z_1, \dots, z_N$ попадут внутрь полученного замкнутого контура. Интеграл по замкнутому контуру вычисляется через вычеты:

$$\int\limits_{-A}^{A} e^{iax} f(x)\,dx + \int\limits_{L_A} e^{iaz} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}\left[e^{iaz} f(z), z_k\right].$$

Перейдём к пределу при $A \to +\infty$:

$$\underbrace{\lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} e^{iax} f(x)\,dx}_{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\,dx} + \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{L_A} e^{iaz} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}\left[e^{iaz} f(z), z_k\right].$$

Чтобы найти предел от $\int_{L_A} e^{iaz} f(z)\,dz$, можно использовать следующую лемму.

Лемма (Жордана). Пусть $f(z)$ — однозначная аналитическая функция при $\begin{cases} |z| > R, \\ \operatorname{Im} z \geq 0, \end{cases}$ и $f(z) = O^*\left(\frac{1}{z^\delta}\right)$ при $z \to \infty$, где $\delta > 0$. Тогда

$$\lim_{A\to+\infty} \int\limits_{L_A} e^{iaz} f(z)\,dz = 0,$$

где L_A — полуокружность радиуса A с центром в начале координат, расположенная в верхней полуплоскости, и $a > 0$.

Замечание 1. Лемма Жордана справедлива при $a > 0$ именно в верхней полуплоскости, т. к. при $\operatorname{Im} z = y > 0$ экспонента

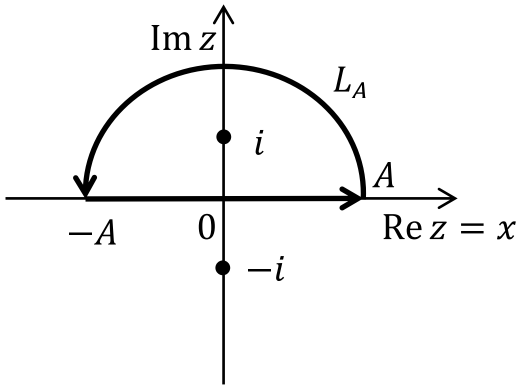
$e^{iaz} = e^{ia(x+iy)} = \underbrace{e^{iax}}_{\text{огр.}} e^{-ay}$ оказывается быстро убывающей по модулю (стремится к нулю) в верхней полуплоскости при $y \to +\infty$.

В нижней полуплоскости нужно потребовать $a < 0$. В левой и правой полуплоскостях нужно рассматривать экспоненту e^{az} с $a > 0$ и $a < 0$, соответственно.

Замечание 2. Именно для того, чтобы применить лемму Жордана, мы перешли от синуса и косинуса к экспоненте. Сами по себе функции $\sin az$ и $\cos az$ не стремятся к нулю при $z \to \infty$ в верхней полуплоскости (и даже не ограничены!), т. к. выражения

$$\sin az = \frac{e^{iaz} - e^{-iaz}}{2i}, \qquad \cos az = \frac{e^{iaz} + e^{-iaz}}{2}$$

содержат одновременно и убывающую, и растущую экспоненту.



Пример 1. Вычислить $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax\, dx}{x^2+1}$ — *интеграл Лапласа.*

При $a = 0$ интеграл равен

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Далее, для определённости, будем считать, что $a > 0$ (функция $I(a)$ является чётной: $I(-a) = I(a)$, поэтому достаточно рассмотреть положительные значения a, а затем продолжить ответ чётным образом на всю вещественную ось).

Интеграл $I(a)$ сходится по признаку сравнения: $\left|\frac{\cos ax}{x^2+1}\right| \le \frac{1}{x^2+1}$, а интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ сходится, как мы только что выяснили.

Заметим, что подынтегральная функция — чётная по переменной x, поэтому

$$I(a) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax\, dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax} dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} \frac{e^{iax} dx}{x^2 + 1}.$$

Продолжив подынтегральную функцию аналитически на верхнюю полуплоскость и замкнув отрезок $[-A;\ A]$ верхней полуокружностью L_A, получим

$$\int_{-A}^{A} \frac{e^{iax} dx}{x^2 + 1} + \int_{L_A} \frac{e^{iaz} dz}{z^2 + 1} = 2\pi i \operatorname{res} \left[\frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}, i\right],$$

где $z_0 = i$ — ИОТ (полюс первого порядка) функции $\frac{e^{iaz}}{z^2+1}$, расположенная в верхней полуплоскости (второй нуль знаменателя, $z_1 = -i$, лежит в нижней полуплоскости). Вычислим вычет в этой точке:

$$\operatorname{res} \left[\frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}, i\right] = \frac{e^{iaz}}{(z^2 + 1)'}\bigg|_{z=i} = \frac{e^{iaz}}{2z}\bigg|_{z=i} = \frac{e^{-a}}{2i}.$$

Отсюда

$$\int_{-A}^{A} \frac{e^{iax}dx}{x^2+1} + \int_{L_A} \frac{e^{iaz}dz}{z^2+1} = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2i} = \pi e^{-a}.$$

Перейдём в этом равенстве к пределу при $A \to +\infty$:

$$\underbrace{\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \frac{e^{iax}dx}{x^2+1}}_{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}dx}{x^2+1}} + \lim_{A\to+\infty} \int_{L_A} \frac{e^{iaz}dz}{z^2+1} = \pi e^{-a}.$$

Согласно лемме Жордана, поскольку $a > 0$ и $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = O^*\left(\frac{1}{z^2}\right)$ при $z \to \infty$, то $\int_{L_A} \frac{e^{iaz}dz}{z^2+1} \to 0$ при $A \to +\infty$.

Тогда получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}dx}{x^2+1} = \pi e^{-a}.$$

Теперь

$$I(a) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax\, dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}dx}{x^2+1} = \frac{\pi e^{-a}}{2}, \qquad a > 0.$$

Поскольку функция $I(a)$ — чётная, то

$$I(a) = \left\{\begin{matrix} \dfrac{\pi e^{-a}}{2}, & a > 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & a = 0, \\ \dfrac{\pi e^{a}}{2}, & a < 0, \end{matrix}\right\} = \frac{\pi e^{-|a|}}{2}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $I(a) = \frac{\pi e^{-|a|}}{2},\ a \in \mathbb{R}$.

Пример 2. Вычислить $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$ — интеграл Дирихле.

При $a = 0$ интеграл равен нулю. Функция $I(a)$ — нечётная $\big(I(-a) = -I(a)\big)$, поэтому достаточно рассмотреть $a > 0$. Интеграл сходится по признаку Дирихле (семинар 12, пример 3), подынтегральная функция имеет устранимый разрыв при $x = 0$. В силу чётности подынтегральной функции по переменной x:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx.$$

Поскольку интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx$ расходится (при $x = 0$ подынтегральная функция имеет особенность порядка $\frac{1}{x}$), то мы берём его главное значение:

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ \delta\to 0+0}} \left(\int_{-A}^{-\delta} \frac{e^{iax}}{x} dx + \int_{\delta}^{A} \frac{e^{iax}}{x} dx\right).$$

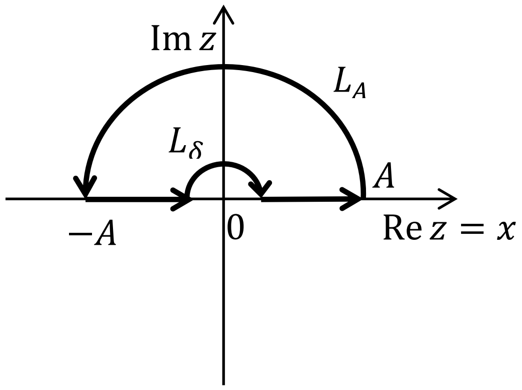
Нетрудно убедиться, что это главное значение существует, т. к.

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x}dx = \text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x}dx + i\cdot\text{v. p.}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx}_{\text{сходится}},$$

а

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x}dx = \lim_{\substack{A\to+\infty\\ \delta\to 0+0}}\left(\int_{-A}^{-\delta}\frac{\cos ax}{x}dx + \int_{\delta}^{A}\frac{\cos ax}{x}dx\right) = 0$$

в силу нечётности подынтегральной функции по переменной x (поскольку интеграл берётся в симметричных относительно нуля пределах).



Рассмотрим интегралы

$$\int_{-A}^{-\delta}\frac{e^{iax}}{x}dx + \int_{\delta}^{A}\frac{e^{iax}}{x}dx.$$

Замкнём контур интегрирования, состоящий из отрезков вещественной оси $[-A;\,-\delta]$ и $[\delta;\,A]$, двумя полуокружностями с центром в нуле, лежащими в верхней полуплоскости: радиуса A и радиуса δ.

Интеграл по полученному замкнутому контуру

$$\int_{-A}^{-\delta}\frac{e^{iax}}{x}dx + \int\limits_{L_\delta}\frac{e^{iaz}}{z}dz + \int_{\delta}^{A}\frac{e^{iax}}{x}dx + \int\limits_{L_A}\frac{e^{iaz}}{z}dz = 0,$$

поскольку подынтегральная функция не имеет особых точек внутри контура интегрирования (а интеграл по замкнутому контуру от аналитической в односвязной области функции равен нулю — теорема Коши).

Теперь перейдём к пределу при $A\to+\infty$ и $\delta\to 0+0$:

$$\underbrace{\lim_{\substack{A\to+\infty\\ \delta\to 0+0}}\left(\int_{-A}^{-\delta}\frac{e^{iax}}{x}dx + \int_{\delta}^{A}\frac{e^{iax}}{x}dx\right)}_{\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x}dx} + \lim_{\delta\to 0+0}\int\limits_{L_\delta}\frac{e^{iaz}}{z}dz + \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{L_A}\frac{e^{iaz}}{z}dz = 0. \qquad (1)$$

По лемме Жордана $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{L_A}\frac{e^{iaz}}{z}dz = 0$, т. к. $a>0$ и $f(z)=\frac{1}{z}=O^*\left(\frac{1}{z^1}\right)$ при $z\to\infty$.

Для вычисления интеграла по полуокружности L_δ перейдём к полярным координатам:
$z=\delta e^{i\varphi}$, $dz = i\delta e^{i\varphi}\,d\varphi$,

$$\lim_{\delta\to 0+0}\int\limits_{L_\delta}\frac{e^{iaz}}{z}dz = \lim_{\delta\to 0+0}\int\limits_{\pi}^{0}\frac{e^{ia\delta e^{i\varphi}}}{\delta e^{i\varphi}}i\delta e^{i\varphi}d\varphi = -i\lim_{\delta\to 0+0}\int\limits_{0}^{\pi}e^{ia\delta e^{i\varphi}}d\varphi.$$

Поскольку интеграл — собственный и подынтегральная функция непрерывна, то можно переходить к пределу под знаком интеграла, тогда

$$\lim_{\delta\to 0+0}\int\limits_{L_\delta}\frac{e^{iaz}}{z}dz = -i\int\limits_{0}^{\pi}\lim_{\delta\to 0+0}\left(e^{ia\delta e^{i\varphi}}\right)d\varphi = -i\int\limits_{0}^{\pi}d\varphi = -i\pi.$$

Теперь из равенства (1) получаем

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x}dx = i\pi.$$

Значит,

$$I(a) = \int_{0}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x}dx = \frac{\pi}{2}, \qquad a>0.$$

Поскольку функция $I(a)$ — нечётная, то

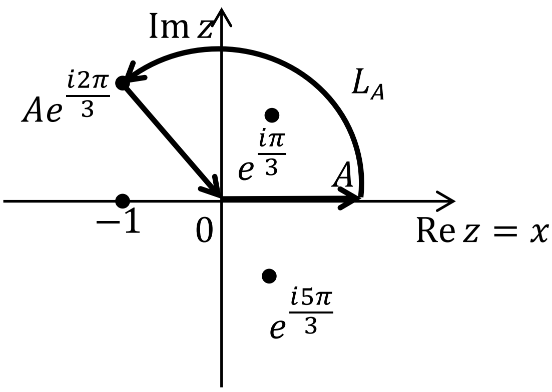
$$I(a)=\left\{\begin{matrix} \dfrac{\pi}{2}, & a>0, \\ 0, & a=0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & a<0, \end{matrix}\right\} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a, \qquad a\in\mathbb{R}.$$

Ответ: $I(a)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a,\ a\in\mathbb{R}$.

Пример 3. Вычислить $I=\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^3}dx$.

Интеграл сходится, т. к. подынтегральная функция $\frac{x}{1+x^3}=O^*\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x\to+\infty$. Заметим, что продолжить интеграл на всю вещественную ось мы не можем, т. к. подынтегральная функция не является чётной. Рассмотрим

$$I=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^A\frac{x}{1+x^3}dx.$$



Возьмём на комплексной плоскости замкнутый контур, состоящий из отрезка вещественной оси $[0;A]$, отрезка прямой $\arg z=\frac{2\pi}{3}$ и дуги окружности L_A (см. рис.).

Функция $\frac{z}{1+z^3}$ имеет следующие конечные ОТ:

$z=\sqrt[3]{-1}=e^{\frac{i\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}}, \qquad k=0,1,2.$

$z_0=e^{\frac{i\pi}{3}},\ z_1=-1,\ z_2=e^{\frac{i5\pi}{3}}$.

Из них только одна, $z_0=e^{\frac{i\pi}{3}}$, попадает внутрь контура при достаточно больших A.

Интеграл по замкнутому контуру равен

$$\int\limits_0^A\frac{x}{1+x^3}dx+\int\limits_{L_A}\frac{z}{1+z^3}dz+\int\limits_{Ae^{\frac{i2\pi}{3}}}^0\frac{z}{1+z^3}dz=2\pi i\operatorname{res}\left[\frac{z}{1+z^3},e^{\frac{i\pi}{3}}\right]. \qquad (2)$$

Точка $z_0=e^{\frac{i\pi}{3}}$ — полюс первого порядка для функции $f(z)=\frac{z}{1+z^3}$, поэтому

$$\operatorname{res}\left[\frac{z}{1+z^3},e^{\frac{i\pi}{3}}\right]=\left.\frac{z}{(1+z^3)'}\right|_{z=e^{\frac{i\pi}{3}}}=\left.\frac{z}{3z^2}\right|_{z=e^{\frac{i\pi}{3}}}=\frac{1}{3e^{\frac{i\pi}{3}}}.$$

На прямой $\arg z=\frac{2\pi}{3}$ имеем: $z=|z|e^{\frac{i2\pi}{3}}$. Сделаем замену: $|z|=t$, тогда t — вещественное, $z=te^{\frac{i2\pi}{3}},\ dz=e^{\frac{i2\pi}{3}}dt$,

$$\int\limits_{Ae^{\frac{i2\pi}{3}}}^0\frac{z}{1+z^3}dz=\int\limits_A^0\frac{te^{\frac{i2\pi}{3}}}{1+\left(te^{\frac{i2\pi}{3}}\right)^3}e^{\frac{i2\pi}{3}}dt=-e^{\frac{i4\pi}{3}}\int\limits_0^A\frac{t}{1+t^3}dt=-e^{\frac{i4\pi}{3}}\int\limits_0^A\frac{x}{1+x^3}dx.$$

Теперь понятно, почему был взят отрезок прямой $\arg z=\frac{2\pi}{3}$: если $\arg z=\frac{2\pi}{3}$, то z^3 — вещественное неотрицательное число, поэтому интеграл от функции $\frac{z}{1+z^3}$ по отрезку

$\left[Ae^{\frac{i2\pi}{3}};0\right]$ прямой $\arg z = \frac{2\pi}{3}$ выражается через интеграл от функции $\frac{x}{1+x^3}$ по отрезку $[0;A]$ вещественной оси (исходный интеграл). Теперь равенство (2) принимает вид:

$$\left(1-e^{\frac{i4\pi}{3}}\right)\int\limits_0^A \frac{x}{1+x^3}\,dx + \int\limits_{L_A} \frac{z}{1+z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{3e^{\frac{i\pi}{3}}}.$$

Перейдём к пределу при $A \to +\infty$:

$$\left(1-e^{\frac{i4\pi}{3}}\right)\underbrace{\lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^A \frac{x}{1+x^3}\,dx}_{\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^3}dx} + \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{L_A} \frac{z}{1+z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{3e^{\frac{i\pi}{3}}}.$$

Т. к. $\frac{z}{1+z^3} = O^*\left(\frac{1}{z^2}\right)$ при $z \to \infty$, то по лемме прошлого семинара

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{L_A} \frac{z}{1+z^3}\,dz = 0.$$

Значит,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}\,dx = \frac{2\pi i}{3e^{\frac{i\pi}{3}}\left(1-e^{\frac{i4\pi}{3}}\right)} = \frac{2\pi i}{3e^{i\pi}\left(e^{-\frac{i2\pi}{3}}-e^{\frac{i2\pi}{3}}\right)} = \frac{\pi}{3\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Пример 4 (дополнительный). Вычислить интегралы Френеля $\int_0^{+\infty}\sin t^2\,dt$, $\int_0^{+\infty}\cos t^2\,dt$.
Мы уже доказывали сходимость первого интеграла (семинар 12, пример 1), для второго это делается аналогично. Заметим, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\cos t^2\,dt + i\int\limits_0^{+\infty}\sin t^2\,dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt = I,$$

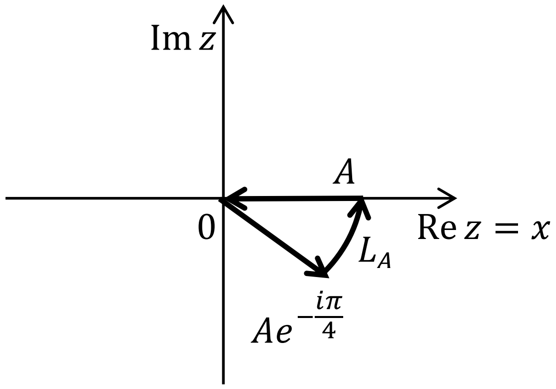
$$\int\limits_0^{+\infty}\cos t^2\,dt = \operatorname{Re} I, \qquad \int\limits_0^{+\infty}\sin t^2\,dt = \operatorname{Im} I.$$

Сведём интеграл I к интегралу Пуассона $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, значение которого будем считать известным.
По определению,

$$I = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^A e^{it^2}\,dt.$$

Сделаем замену: $\sqrt{-i}t = z$, где, для определённости, выбрано одно из двух значений квадратного корня: $\sqrt{-i} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$. Тогда $-it^2 = z^2$, $z = e^{-\frac{i\pi}{4}}t$, $dz = e^{-\frac{i\pi}{4}}\,dt$, $|z| = t$, $\arg z = -\frac{\pi}{4}$.
Отрезок вещественной оси $t \in [0;A]$ перейдёт в отрезок прямой $\arg z = e^{-\frac{i\pi}{4}}$, и

$$\int\limits_0^A e^{it^2}\,dt = e^{\frac{i\pi}{4}}\int\limits_0^{Ae^{-\frac{i\pi}{4}}} e^{-z^2}\,dz. \qquad (3)$$



Теперь замкнём контур интегрирования (отрезок прямой, соединяющий точки 0 и $Ae^{-\frac{i\pi}{4}}$) дугой окружности радиуса A и отрезком вещественной оси $[0;\ A]$. Интеграл по замкнутому контуру

$$\int_0^{Ae^{-\frac{i\pi}{4}}} e^{-z^2}\,dz + \int_{L_A} e^{-z^2}\,dz + \int_A^0 e^{-x^2}\,dx = 0,$$

т. к. функция e^{-z^2} не имеет особых точек внутри контура интегрирования.

Перейдём к пределу при $A \to +\infty$:

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^{Ae^{-\frac{i\pi}{4}}} e^{-z^2}\,dz + \lim_{A\to+\infty} \int_{L_A} e^{-z^2}\,dz + \lim_{A\to+\infty} \int_A^0 e^{-x^2}\,dx = 0. \qquad (4)$$

На дуге L_A: $z = Ae^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le 0$. Сделаем замену: $\zeta = z^2 = A^2 e^{2i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} \le 2\varphi \le 0$. Т. е. переменная ζ изменяется на дуге окружности L' радиуса A^2, аргумент ζ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до 0, поэтому по лемме Жордана для правой полуплоскости

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{L_A} e^{-z^2}\,dz = \lim_{A\to+\infty} \int_{L'} \frac{e^{-\zeta}}{2\sqrt{\zeta}}\,d\zeta = 0.$$

Тогда из равенства (4) получаем:

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^{Ae^{-\frac{i\pi}{4}}} e^{-z^2}\,dz = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

где использовано значение интеграла Пуассона. Отсюда и из равенства (3) получаем

$$I = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{it^2}\,dt = \lim_{A\to+\infty} e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^{Ae^{-\frac{i\pi}{4}}} e^{-z^2}\,dz = e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Теперь

$$\int_0^{+\infty} \cos t^2\,dt = \operatorname{Re} I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \int_0^{+\infty} \sin t^2\,dt = \operatorname{Im} I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Пример 5 (дополнительный). Вычислить $I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$, где $0 < p < 1$.

Интеграл сходится в нуле (т. к. $\frac{x^{p-1}}{1+x} = O^*\left(\frac{1}{x^{1-p}}\right)$ при $x \to 0+0$, и $1-p < 1$) и на бесконечности (т. к. $\frac{x^{p-1}}{1+x} = O^*\left(\frac{1}{x^{2-p}}\right)$ при $x \to +\infty$, и $2-p > 1$).

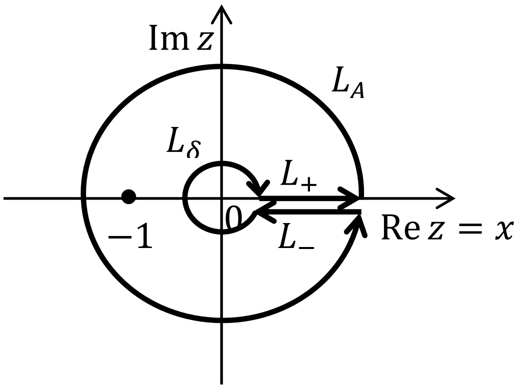
Аналитическое продолжение подынтегральной функции, функция $f(z) = \frac{z^{p-1}}{1+z}$ — многозначная:

$$z^{p-1} = e^{(p-1)\operatorname{Ln} z} = e^{(p-1)(\ln|z| + i\arg z + 2\pi k i)}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Будем считать, что $0 \le \arg z < 2\pi$. Тогда каждая ветвь функции z^{p-1} будет аналитической в окрестности точки $z = 0$ с разрезом вдоль положительной части вещественной оси. Мы не взяли главное значение аргумента $-\pi < \arg z \le \pi$, т. к. у функции $f(z)$ полюс $z_0 = -1$ лежит на отрицательной части вещественной оси, и если он попадёт на разрез, то мы не сможем вычислять интеграл по контуру, проходящему по берегам разреза, с помощью вычетов. Ветвь функции z^{p-1} выберем так, чтобы она принимала вещественные значения при $\arg z = 0$, т. е. положим $k = 0$:

$z^{p-1} = e^{(p-1)(\ln|z| + i\arg z)} = |z|^{p-1} e^{i(p-1)\arg z}$.

Тогда она будет совпадать с вещественной функцией x^{p-1} при вещественных положительных $z = x$.



Теперь рассмотрим замкнутый контур интегрирования (см. рис.), состоящий из окружностей L_A и L_δ и отрезков вещественной оси L_+ и L_-, проходящих по верхнему и нижнему берегу разреза (формально мы можем разнести эти отрезки на какое-то расстояние, а затем устремить его к нулю), т. е. на L_+ $\arg z = 0$, а на L_- $\arg z = 2\pi$. Контур не пересекает разрез, внутри контура функция $f(z)$ является аналитической везде, кроме полюса первого порядка $z_0 = -1$. Тогда интеграл по замкнутому контуру равен

$$\int\limits_{L_+} f(z)\,dz + \int\limits_{L_A} f(z)\,dz + \int\limits_{L_-} f(z)\,dz + \int\limits_{L_\delta} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}[f(z), -1]. \tag{5}$$

Вычислим вычет:

$$\operatorname{res}[f(z), -1] = \left.\frac{z^{p-1}}{(1+z)'}\right|_{z=-1} = (-1)^{p-1} = e^{(p-1)i\pi} = -e^{i\pi p}.$$

Т. к. $f(z) = O^*\left(\frac{1}{z^{2-p}}\right)$ при $z \to \infty$, а $2 - p > 1$, то по лемме прошлого семинара

$$\lim_{A\to+\infty} \int\limits_{L_A} f(z)\,dz = 0.$$

Вычислим

$$\lim_{\delta\to 0+0} \int\limits_{L_\delta} \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = \lim_{\delta\to 0+0} \int\limits_{2\pi}^{0} \frac{(\delta e^{i\varphi})^{p-1}}{1+\delta e^{i\varphi}} i\delta e^{i\varphi}\,d\varphi = \int\limits_{2\pi}^{0} \lim_{\delta\to 0+0} \left[\frac{(\delta e^{i\varphi})^{p-1}}{1+\delta e^{i\varphi}} i\delta e^{i\varphi}\right] d\varphi =$$

$$= \int\limits_{2\pi}^{0} 0\,d\varphi = 0.$$

Теперь выразим интеграл по L_- через интеграл по L_+.

На L_+: $\arg z = 0$, $|z| = x$, т. е. $z = x \in \mathbb{R}$:

$$\int\limits_{L_+} f(z)\,dz = \int\limits_{\delta}^{A} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx.$$

На L_-: $\arg z = 2\pi$, $|z| = x$, $z = xe^{2\pi i} = x$,

$z^{p-1} = |z|^{p-1} e^{i(p-1)\arg z} = x^{p-1} e^{2\pi p i} e^{-2\pi i} = x^{p-1} e^{2\pi p i}$,

$$\int\limits_{L_-} f(z)\,dz = \int\limits_{L_-} \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = \int\limits_{A}^{\delta} \frac{x^{p-1}e^{2\pi pi}}{1+x}\,dx = -e^{2\pi pi}\int\limits_{\delta}^{A} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx.$$

Переходя в равенстве (5) к пределу при $A \to +\infty$, $\delta \to 0+0$, получим:

$$\left(1-e^{2\pi pi}\right)\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = -2\pi i e^{i\pi p},$$

откуда

$$I(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{2\pi i e^{i\pi p}}{e^{2\pi pi}-1} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi p}-e^{-i\pi p}} = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

С другой стороны, если в интеграле сделать замену $\frac{1}{1+x} = t$, $x = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, то получим

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{(1-t)^{p-1}}{t^{p-1}}\,t\,\frac{dt}{t^2} = \int\limits_{0}^{1} t^{-p}(1-t)^{p-1}\,dt = \mathrm{B}(1-p,p) = \frac{\Gamma(1-p)\Gamma(p)}{\Gamma(1)} =$$

$$= \Gamma(1-p)\Gamma(p),$$

т. е. мы доказали формулу дополнения

$$\Gamma(1-p)\Gamma(p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}, \qquad 0 < p < 1.$$

Ответ: $I(p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$.

ДЗ 20. Волк № 4.149, 4.152, 4.160, 4.163, 4.145, 4.172.
В следующий раз будет КР по ТФКП.