Семинар 3

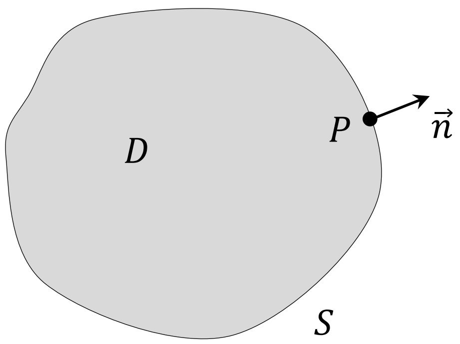
Выпишем СЗ и СФ основных одномерных задач Ш.–Л. для оператора Лапласа.

ДУ: $y''(x) + \lambda y(x) = 0$

ГУ	СЗ λ_n	СФ $y_n(x)$	$\|y_n\|^2$	n	
$y(0) = y(l) = 0$	$\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$	$\sin\frac{\pi n x}{l}$	$\frac{l}{2}$	$1, 2, \ldots$	
$y'(0) = y'(l) = 0$	$\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$	$\cos\frac{\pi n x}{l}$	$\frac{l}{2}(1 + \delta_{n0})$	$0, 1, 2, \ldots$	СФ образуют полную ортогональную систему на $[0, l]$
$y(0) = y'(l) = 0$	$\left(\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{l}\right)^2$	$\sin\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{l}$	$\frac{l}{2}$	$1, 2, \ldots$	
$y'(0) = y(l) = 0$	$\left(\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{l}\right)^2$	$\cos\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{l}$	$\frac{l}{2}$	$1, 2, \ldots$	
$y(x + 2l) \equiv y(x)$	$\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$	$\cos\frac{\pi n x}{l},\ n \geq 0,$ $\sin\frac{\pi n x}{l},\ n < 0$	$l(1 + \delta_{n0})$	$0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	СФ образуют полную ортогональную систему на $[0, 2l]$

Этими результатами можно пользоваться в дальнейшем при решении задач.

Краевые задачи для уравнения Лапласа



Пусть D — ограниченная область на плоскости или в пространстве, S — её граница. Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta\, u = 0 \text{ в } D, \\ + \text{ ГУ на } S. \end{cases}$$

Требуется найти неизвестную функцию u.

Мы будем рассматривать ГУ следующего вида:

$u|_S = f(P)$ — Дирихле,

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P)$ — Неймана,

$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right|_S = f(P)$ — третьего рода ($h(P) \not\equiv 0$),

а также смешанные ГУ, когда на одной части границы S ставится условие одного рода, на другой — другого, и т.п.

Предположим, что все функции достаточно гладкие. Тогда справедлива следующая теорема.

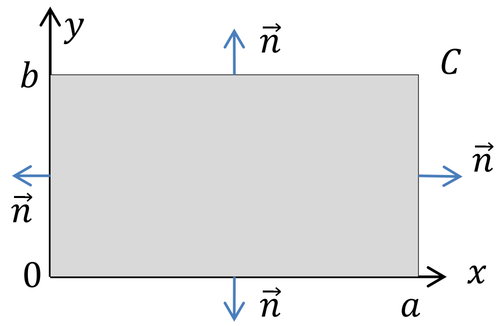
Т. (существования и единственности). а) задачи Дирихле и третьего рода при $h(P) \geq 0$ (а также смешанные задачи) однозначно разрешимы;

б) задача Неймана разрешима $\Leftrightarrow$

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \iint\limits_S f(P)\, dS = 0.$$

При этом её решение определено с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Пример 1 (прямоугольник).



$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ 0 < x < a, \ 0 < y < b, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi_1(y), \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = \varphi_2(y), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi_1(x), \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = \psi_2(x). \end{cases} \tag{0}$$

Это задача Неймана.

Здесь $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ — заданные функции.

Условие разрешимости задачи Неймана запишется в виде:

$$\int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n} dl = \int\limits_0^a \left(-\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}\right) dx + \int\limits_0^b \left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a}\right) dy + \int\limits_0^a \left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b}\right) dx + \int\limits_0^b \left(-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^b [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)]\, dy + \int\limits_0^a [\psi_2(x) - \psi_1(x)]\, dx = 0.$$

Будем считать, что оно выполнено (иначе задача не имеет решения).

Будем искать неизвестную функцию $u(x, y)$ в виде:

$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$,

где функции $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ являются решениями следующих краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi_1(x), \quad \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=b} = \psi_2(x). \end{cases} \tag{I}$$

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=a} = \varphi_2(y), \\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right|_{y=b} = 0. \end{cases} \tag{II}$$

В самом деле, тогда функция $u(x, y)$ будет удовлетворять исходной краевой задаче (0).

Проблема в том, что исходная задача (0) может быть разрешима, а задачи (I), (II) могут не иметь решения, т.к. для них условия разрешимости:

$$\int\limits_0^a [\psi_2(x) - \psi_1(x)]\, dx = 0, \qquad \int\limits_0^b [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)]\, dy = 0.$$

В этом случае данный подход неприменим. В дальнейшем будем считать, что условия разрешимости задач (I), (II) выполнены.

Рассмотрим задачу (I).

Сначала найдём *частные* решения уравнения Лапласа $\Delta u_1 = 0$, удовлетворяющие однородным ГУ: $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=a} = 0$, и представимые в виде

$u_1(x, y) = X(x)Y(y) \not\equiv 0$.

В этом случае уравнение Лапласа принимает вид:

$\Delta u_1 = (u_1)_{xx} + (u_1)_{yy} = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$.

Поделим его на $X(x)Y(y)$ и разделим переменные (о методе разделения переменных см. семинар 2):

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

С учётом ГУ: $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=a} = 0$, для функции $X(x)$ получим задачу Ш.–Л.:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad 0 < x < a, \\ X'(0) = 0, \qquad X'(a) = 0. \end{cases}$$

Как мы уже знаем (см. таблицу), её СЗ и СФ:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \qquad X_n(x) = \cos\frac{\pi n x}{a}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Теперь для функции $Y(y)$ имеем ДУ:

$$Y_n''(y) - \lambda_n Y_n(y) = 0,$$

т.е.

$$Y_n''(y) - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 Y_n(y) = 0.$$

Оно имеет ОР:

$Y_0(y) = A_0 y + B_0$, если $n = 0$;

$Y_n(y) = A_n e^{\frac{\pi n y}{a}} + B_n e^{-\frac{\pi n y}{a}}$, если $n = 1, 2, \ldots$

Таким образом, мы получили функции

$$u_1^{(0)}(x,y) = X_0(x)Y_0(y) = A_0 y + B_0,$$

$$u_1^{(n)}(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \cos\frac{\pi n x}{a} \cdot \left(A_n e^{\frac{\pi n y}{a}} + B_n e^{-\frac{\pi n y}{a}}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

которые удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta u_1 = 0$ и ГУ: $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=a} = 0.$

Будем искать решение задачи (I) в виде их суммы:

$$u_1(x,y) = u_1^{(n)}(x,y) = A_0 y + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi n x}{a} \cdot \left(A_n e^{\frac{\pi n y}{a}} + B_n e^{-\frac{\pi n y}{a}}\right). \qquad (*)$$

При условии, что ряд можно дифференцировать почленно два раза, функция $u_1(x,y)$ тоже будет удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta u_1 = 0$ и однородным ГУ: $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=a} = 0.$

Подставим её в неоднородные ГУ: $\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi_1(x),\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=b} = \psi_2(x).$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{a} \cos\frac{\pi n x}{a} \cdot \left(A_n e^{\frac{\pi n y}{a}} - B_n e^{-\frac{\pi n y}{a}}\right).$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{a} \cos\frac{\pi n x}{a} \cdot (A_n - B_n) = \psi_1(x). \qquad (1)$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=b} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{a} \cos\frac{\pi n x}{a} \cdot \left(A_n e^{\frac{\pi n b}{a}} - B_n e^{-\frac{\pi n b}{a}}\right) = \psi_2(x). \qquad (2)$$

Из уравнений (1), (2) надо найти коэффициенты A_n, B_n. Для этого разложим известные функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ в ряд Фурье по $\cos\frac{\pi n x}{a}$, $n = 0, 1, 2\ldots$ (по ортогональной системе СФ задачи Ш.–Л. на отрезке $[0, a]$):

$$\psi_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\frac{\pi n x}{a}, \qquad \psi_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos\frac{\pi n x}{a},$$

где

$$C_n = \frac{1}{\left\|\cos\frac{\pi n x}{a}\right\|^2}\int_0^a \psi_1(x)\cos\frac{\pi n x}{a}\,dx, \qquad D_n = \frac{1}{\left\|\cos\frac{\pi n x}{a}\right\|^2}\int_0^a \psi_2(x)\cos\frac{\pi n x}{a}\,dx,$$

$$\left\|\cos\frac{\pi n x}{a}\right\|^2 = \frac{a}{2}(1+\delta_{n0}).$$

Подставим эти ряды Фурье в правые части уравнений (1), (2):

$$\begin{cases} A_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{a}\cos\frac{\pi n x}{a}\cdot(A_n - B_n) = C_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n\cos\frac{\pi n x}{a}, \\ A_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{a}\cos\frac{\pi n x}{a}\cdot\left(A_n e^{\frac{\pi n b}{a}} - B_n e^{-\frac{\pi n b}{a}}\right) = D_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} D_n\cos\frac{\pi n x}{a}. \end{cases}$$

В силу единственности разложения функции в ряд Фурье, приравняем соответствующие коэффициенты при $\cos\frac{\pi n x}{a}$, $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{cases} A_0 = C_0, \\ \frac{\pi n}{a}(A_n - B_n) = C_n, \qquad n = 1, 2, \dots, \\ A_0 = D_0, \\ \frac{\pi n}{a}\left(A_n e^{\frac{\pi n b}{a}} - B_n e^{-\frac{\pi n b}{a}}\right) = D_n, \qquad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Из этой системы однозначно определяются все коэффициенты A_0, A_n, B_n, $n = 1, 2, \dots$ (проверьте это). Заметим, что система имеет решение только при $C_0 = D_0$, что следует из условия разрешимости задачи Неймана (I). Полученные коэффициенты подставляются в выражение (*), и получается решение задачи (I) (при условии, что ряд сходится; мы не будем доказывать его сходимость.). В силу теоремы существования и единственности, других решений у задачи (I) нет. Заметим, что коэффициент B_0 остаётся произвольным, что соответствует тому, что решение задачи Неймана определено с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Замечание: система для определения коэффициентов A_n, B_n упростится, если ОР ДУ

$$Y_n''(y) - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 Y_n(y) = 0 \qquad (3)$$

записать в виде

$$Y_n(y) = A_n Y_n^{(1)}(y) + B_n Y_n^{(2)}(y),$$

где функции $Y_n^{(1)}(y)$ и $Y_n^{(2)}(y)$ образуют ФСР ДУ (3), причём функция $Y_n^{(1)}(y)$ удовлетворяет *однородному* ГУ при $y = 0$, а функция $Y_n^{(2)}(y)$ удовлетворяет *однородному* ГУ при $y = b$, т.е. в нашей задаче — условиям Неймана:

$$\left.\frac{d}{dy}Y_n^{(1)}\right|_{y=0} = 0, \qquad \left.\frac{d}{dy}Y_n^{(2)}\right|_{y=b} = 0. \qquad (4)$$

При $n \neq 0$ такая ФСР существует:

$$Y_n^{(1)}(y) = \operatorname{ch}\frac{\pi n y}{a}, \qquad Y_n^{(2)}(y) = \operatorname{ch}\frac{\pi n(y-b)}{a}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

В самом деле, можно проверить, что данные функции удовлетворяют ДУ (3), ГУ (4) и являются ЛНЗ.
При $n = 0$ ФСР, удовлетворяющая однородным ГУ Неймана (4), к сожалению, не существует, поэтому ОР ДУ оставим в старом виде:
$Y_0(y) = A_0 y + B_0$.
Теперь решение задачи (I) ищется в виде:

$$u_1(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = A_0 y + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi n x}{a} \cdot \left(A_n \operatorname{ch}\frac{\pi n y}{a} + B_n \operatorname{ch}\frac{\pi n (y-b)}{a}\right). \quad (**)$$

Поскольку

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{a} \cos\frac{\pi n x}{a} \cdot \left(A_n \operatorname{sh}\frac{\pi n y}{a} + B_n \operatorname{sh}\frac{\pi n (y-b)}{a}\right),$$

при подстановке в неоднородные ГУ: $\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi_1(x)$, $\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=b} = \psi_2(x)$, получим:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0} = A_0 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{a} \cos\frac{\pi n x}{a} \cdot B_n \operatorname{sh}\frac{\pi n b}{a} = \psi_1(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\frac{\pi n x}{a}, \\ \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=b} = A_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{a} \cos\frac{\pi n x}{a} \cdot A_n \operatorname{sh}\frac{\pi n b}{a} = \psi_2(x) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\frac{\pi n x}{a}, \end{cases}$$

откуда сразу имеем:

$$A_0 = C_0 = D_0, \qquad A_n = \frac{a D_n}{\pi n \operatorname{sh}\dfrac{\pi n b}{a}}, \qquad B_n = -\frac{a C_n}{\pi n \operatorname{sh}\dfrac{\pi n b}{a}}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Например, пусть $\psi_1(x) = 1$, $\psi_2(x) = 1 + \cos\frac{\pi x}{a}$. Тогда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} A_0 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{a} B_n \operatorname{sh}\frac{\pi n b}{a} \cos\frac{\pi n x}{a} = 1, \\ A_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{a} A_n \operatorname{sh}\frac{\pi n b}{a} \cos\frac{\pi n x}{a} = 1 + \cos\frac{\pi x}{a}. \end{cases}$$

Заметим, что правые части этих уравнений уже разложены в ряды Фурье по $\cos\frac{\pi n x}{a}$, состоящие в данном случае из конечного числа слагаемых. Приравнивая соответствующие коэффициенты рядов Фурье, находим:

$$A_0 = 1, \qquad A_1 = \frac{a}{\pi \operatorname{sh}\dfrac{\pi b}{a}}, \qquad A_n = 0, \qquad n = 2, 3, \ldots;$$

$$B_n = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

И тогда решением задачи (I) будет функция (**):

$$u_1(x,y) = y + B_0 + \frac{a}{\pi \operatorname{sh}\dfrac{\pi b}{a}} \cos\frac{\pi x}{a} \operatorname{ch}\frac{\pi y}{a},$$

где B_0 — произвольная постоянная.
Задача (II) решается аналогично задаче (I), и в итоге получается решение исходной задачи (0) в виде
$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$.

Краевые задачи с другими ГУ решаются аналогично, причём для них решение всегда существует и единственно, т.е. нет необходимости проверять условие разрешимости.

ДЗ 3. БК с. 117 № 6.