Семинар 16

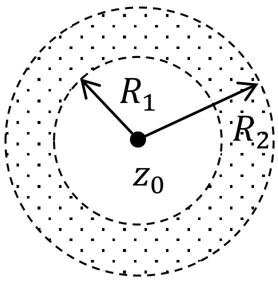
Ряд Лорана

Рядом Лорана называется выражение вида

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n}_{S_-(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n}_{S_+(z)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}}_{S_-(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n}_{S_+(z)}.$$

Здесь n пробегает все целые значения. Для отрицательных n мы сделали замену: $-n = k$.
По определению, будем считать, что ряд Лорана $S(z)$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся *оба* ряда: $S_+(z)$ (*правильная часть* ряда Лорана) и $S_-(z)$ (*главная часть* ряда Лорана).
Правильная часть $S_+(z)$ представляет собой степенной ряд, который сходится в некотором круге $|z - z_0| < R_2$.



Главная часть $S_-(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} t^k$ представляет собой степенной ряд по переменной $t = \frac{1}{z-z_0}$, который сходится при $|t| < r$, т. е. $\left|\frac{1}{z-z_0}\right| < r$, т. е. $|z-z_0| > \frac{1}{r} = R_1$.
Тогда ряд Лорана сходится в общей области сходимости рядов $S_+(z)$ и $S_-(z)$ — в *кольце* $R_1 < |z - z_0| < R_2$, включая, быть может, все или некоторые граничные точки этого кольца.
В зависимости от значений R_1 и R_2 область сходимости ряда Лорана может вырождаться в пустое множество (при $R_1 > R_2$), внешность круга (при $R_1 < R_2 = +\infty$) и др.
Т. Сумма ряда Лорана $S(z)$ — однозначная аналитическая функция в кольце
$R_1 < |z - z_0| < R_2$.
Т. (Лорана). Однозначную аналитическую в кольце $R_1 < |z - z_0| < R_2$ функцию можно в этом кольце единственным образом разложить в ряд Лорана вида $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$.
Частным случаем ряда Лорана является степенной ряд (когда $S_-(z) \equiv 0$).

Пример 1 (самостоятельно). Найти область сходимости ряда $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n$.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n}_{S_-(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} z^n}_{S_+(z)}.$$

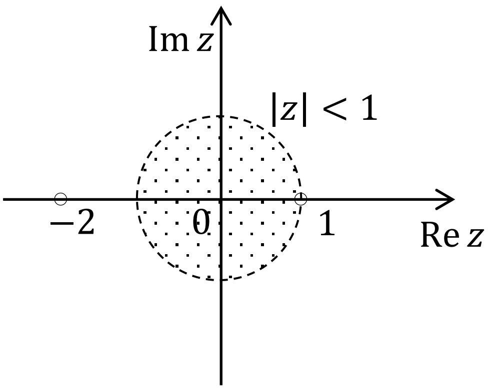
$S_+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ — степенной ряд для функции $\frac{1}{1-z}$, который сходится в круге $|z| < 1$ (геометрическая прогрессия со знаменателем z).
$S_-(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$ — аналогичный степенной ряд (геометрическая прогрессия со знаменателем $1/z$), который сходится при $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, т. е. при $|z| > 1$.
Значит, оба ряда, $S_+(z)$ и $S_-(z)$, могут сходиться одновременно только на границе своих областей сходимости — при $|z| = 1$. Но при $|z| = 1$ общие члены рядов z^n и $\left(\frac{1}{z}\right)^n$ не стре-

мятся к нулю, т. к. $|z^n| = |z|^n = 1$ и $\left|\left(\frac{1}{z}\right)^n\right| = \frac{1}{|z|^n} = 1$, поэтому не выполнено необходимое условие сходимости, и оба ряда расходятся.
Таким образом, ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n$ не сходится ни в одной точке комплексной плоскости.
Ответ: $\emptyset$.

Пример 2 (вопрос к общему зачёту № 25, самостоятельно). Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$ в области:
а) $|z| < 1$, б) $1 < |z| < 2$, в) $|z| > 2$, г) $0 < |z-1| < 3$, д) $0 < |z+2| < 3$.

$$f(z) = \frac{2z+1}{(z-1)(z+2)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2}.$$

Функция имеет две особые точки: $z = 1$ и $z = -2$.



а) В круге $|z| < 1$ (в окрестности точки $z = 0$) функция $f(z)$ является аналитической, поэтому она раскладывается в степенной ряд (ряд Тейлора) вида $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, который является частным случаем ряда Лорана.

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2}.$$

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \qquad |z| < 1.$$

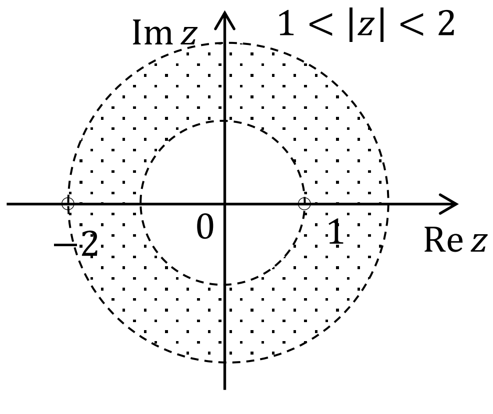
$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n, \qquad |z| < 2.$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n.$$

Первый ряд сходится при $|z| < 1$, второй — при $|z| < 2$. В круге $|z| < 1$ оба ряда сходятся, и их можно суммировать почленно:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - 1\right) z^n}_{\text{правильная часть}}, |z| < 1.$$

Это и есть искомый ряд Лорана в области $|z| < 1$. Главная часть у него отсутствует, т. к. он в данном случае является степенным рядом.



б) В кольце $1 < |z| < 2$ функция $f(z)$ является аналитической, поэтому она раскладывается в ряд Лорана вида $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$.

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2}.$$

Выше мы получили разложение для $\frac{1}{z-1}$:

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \qquad |z| < 1.$$

Такое разложение нам не подходит, поскольку этот ряд сходится при $|z| < 1$, а нам нужен ряд, сходящийся при $|z| > 1$.

Поэтому сделаем замену: $z = \frac{1}{t}$. Тогда

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{\frac{1}{t}-1} = \frac{t}{1-t} = t\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} t^k, \qquad |t| < 1.$$

Полученный ряд сходится при $|t| < 1$, т. е. при $|z| > 1$, как нам и нужно. Вернёмся к переменной z:

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{z^k}, \qquad |z| > 1.$$

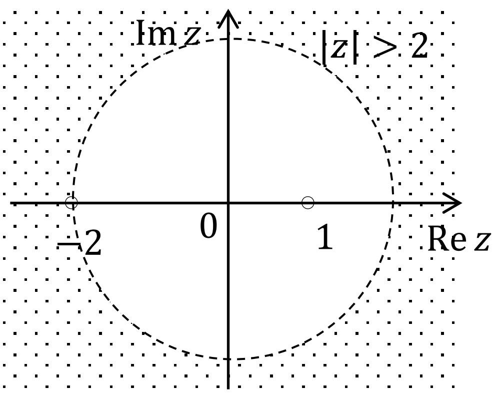
Для функции $\frac{1}{z+2}$ можно использовать полученное выше разложение, справедливое при $|z| < 2$:

$$\frac{1}{z+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n, \qquad |z| < 2.$$

Тогда при $1 < |z| < 2$:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{z^k}}_{\text{главная часть}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n}_{\text{правильная часть}}, \qquad 1 < |z| < 2.$$

Это и есть искомый ряд Лорана.



в) Область $|z| > 2$ является кольцом с бесконечным внешним радиусом. Область вида $|z| > R$ ещё называют *окрестностью бесконечно удалённой точки* $z = \infty$. В данном кольце функция $f(z)$ является аналитической, поэтому она может быть разложена в ряд Лорана вида $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$.

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2}.$$

Для функции $\frac{1}{z-1}$ можно использовать полученное выше разложение, справедливое при $|z| > 1$:

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{z^k}, \qquad |z| > 1.$$

Для функции $\frac{1}{z+2}$ получим аналогичное разложение, сделав замену $z = \frac{1}{t}$:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{\frac{1}{t}+2} = \frac{t}{1+2t} = \frac{t}{1-(-2t)} = t\sum_{n=0}^{+\infty} (-2t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n t^{n+1} =$$

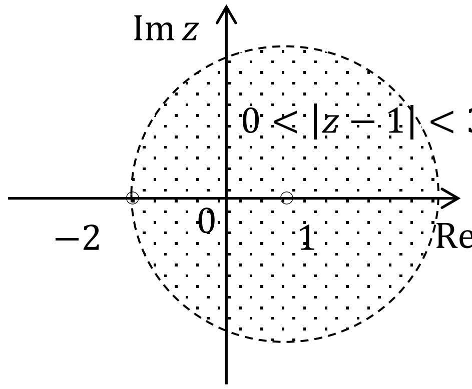
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} (-2)^{k-1} t^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-2)^{k-1}}{z^k}.$$

Данное разложение справедливо при $|-2t| < 1$, т.е. $|t| < \frac{1}{2}$, т.е. $|z| > 2$.

Тогда при $|z| > 2$ получаем:

$$f(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{z^k}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-2)^{k-1}}{z^k}=\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1+(-2)^{k-1}}{z^k}}_{\text{главная часть}},\qquad |z|>2\,.$$

Это и есть искомый ряд Лорана. У него отсутствует правильная часть.



г) В кольце $0<|z-1|<3$ (с нулевым внутренним радиусом) — в проколотой окрестности особой точки $z=1$ — функция $f(z)$ является аналитической, поэтому она раскладывается в ряд Лорана вида $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-1)^n$.

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2}.$$

Сделаем замену $z-1=t$:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{t+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{t}{3}\right)}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{t}{3}\right)^n=$$

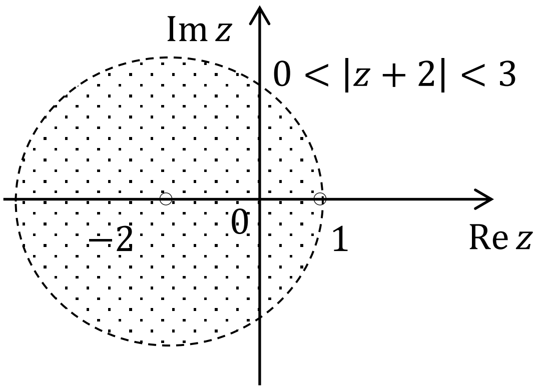
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}t^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n.$$

Это разложение справедливо при $|t|<3$, т. е. при $|z-1|<3$.

Заметим, что функция $\frac{1}{z-1}$ уже является своим рядом Лорана вида $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-1)^n$, состоящим из одного слагаемого $\frac{1}{(z-1)^1}$, поэтому её дальше раскладывать не нужно.

$$f(z)=\underbrace{\frac{1}{z-1}}_{\text{главная часть}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n}_{\text{правильная часть}},\qquad 0<|z-1|<3.$$

Это и есть искомый ряд Лорана. Его главная часть состоит только из одного слагаемого.



д) В кольце $0<|z+2|<3$ (в проколотой окрестности особой точки $z=-2$) функция $f(z)$ является аналитической, поэтому она раскладывается в ряд Лорана вида $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z+2)^n$.

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2}.$$

Сделав замену $z+2=t$, получаем:

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{t-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t}{3}\right)^n=$$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{3^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}.$$

Это разложение справедливо при $|t|<3$, т.е. при $|z+2|<3$. Тогда

$$f(z)=\underbrace{\frac{1}{z+2}}_{\text{главная часть}}\underbrace{-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}}_{\text{правильная часть}},\qquad 0<|z+2|<3.$$

Это и есть искомое разложение в ряд Лорана. Его главная часть состоит только из одного слагаемого.

Ответ: $\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - 1\right)z^n$ при $|z| < 1$; $\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{z^k} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$ при $1 < |z| < 2$; $\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1+(-2)^{k-1}}{z^k}$ при $|z| > 2$; $\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n$ при $0 < |z-1| < 3$; $\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z+2} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}$ при $0 < |z+2| < 3$.

Таким образом, мы убеждаемся, что одна и та же функция в различных областях имеет различные разложения в ряд Лорана.

ДЗ 16. КРАМ гл. II № 3.3–3.8 (задачи для самостоятельного решения).