Тестирование по оптике №2

Составили: Авдеев Михаил (202), Пригорный Игорь (210), 2018 г.

Раздел 1. Дифракция Френеля – 1.

Говорят, что радиус отверстия r равен радиусу m-й зоны Френеля r_m, если разность хода Δ, соответствующая этому радиусу, составляет m длин полуволн $\lambda/2$ (или $2m$ длин волн). Таким образом, записывая из геометрических соображений выражение для Δ и записывая условие максимума, находим внешний радиус m-ой зоны Френеля:

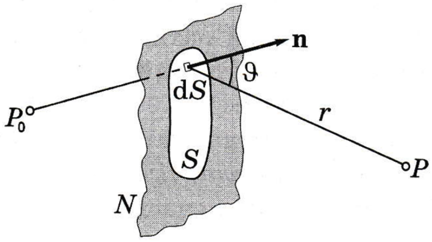
$$r_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}$$

В случае нормально падающей плоской волны, переходим к $a \to \infty$:

$$r_m = \sqrt{m\lambda b}$$

При достаточно малых m площади зон Френеля равны:

$$\Delta S = \pi r_m^2 - \pi r_{m-1}^2 = \pi\lambda \frac{ab}{a+b}$$



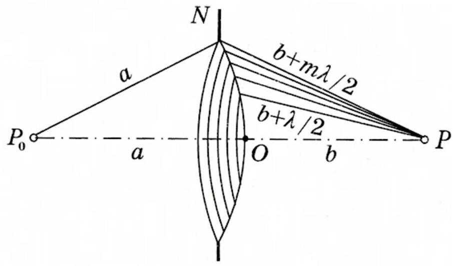


Рис. 1. Дифракция Френеля на круглом отверстии. К расчёту результирующего колебания (слева) и к определению числа зон Френеля (справа).

1.1 На непрозрачный экран с круглым отверстием радиуса R падает плоская монохроматическая электромагнитная волна с длиной волны λ. Для находящейся на оси точки наблюдения P отверстие открывает первые N зон Френеля. Как изменится число открытых зон при одновременном увеличении радиуса в 2 раза и уменьшении длины волны в 4 раза?

$$m_2 : m_1 = \frac{r_2^2}{\lambda_2 b} : \frac{r_1^2}{\lambda_1 b} = \frac{r_2^2}{r_1^2}\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{4R^2}{R^2}\frac{\lambda}{\lambda/4} = 16$$

Ответ: число отрытых зон увеличится в 16 раз.

Раздел 2. Дифракция Френеля – 2.

Пусть на преграду N с некоторым отверстием S проходит свет от точечного монохроматического источника P_0. Результирующее колебание в произвольной точке P может быть выражено через интеграл Френеля-Кирхгофа:

$$E(P) = -\frac{i}{\lambda}\iint\limits_S E(x,y,z)\frac{e^{ikr}}{r}\cos\theta dxdy$$

В простейших случаях интегрирование может быть заменено алгебраическим или графическим сложением. Разбивая волновую поверхность на зоны Френеля, результирующее колебание $\vec{E}$ находят как сумму элементарных векторов $d\vec{E}$, образующих спираль Френеля. Суть метода хорошо иллюстрируют следующие задачи:

2.1 Используя спираль Френеля, получить формулу зависимости интенсивности в центре картины при дифракции на круглом отверстии от числа m открытых зон Френеля.

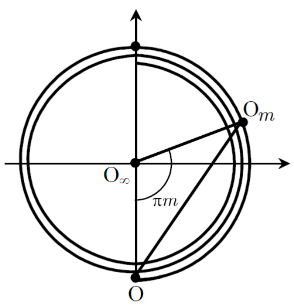


Рис. 2. Спираль Френеля.

Изобразим спираль Френеля и возьмем на ней произвольную точку O_m. Угол $\angle OO_\infty O_m$ равен πm (на рисунке $m < 1$). Треугольник $\triangle OO_\infty O_m$ равнобедренный, его стороны OO_∞ и $O_\infty O_m$ одинаковы и равны E_0, где E_0 – амплитуда в отсутствие препятствия. Сторона OO_m и есть искомая амплитуда E. Применяя теорему косинусов, получаем:

$$OO_m^2 = OO_\infty^2 + O_\infty O_m^2 - 2\cdot OO_\infty \cdot O_\infty O_m \cos\pi m$$
$$E^2 = E_0^2 + E_0^2 - 2E_0^2\cos\pi m$$
$$I = E^2 = 2E_0^2(1-\cos\pi m) = 2I_0(1-\cos\pi m)$$

Ответ: $I = 2I_0(1-\cos\pi m)$. Это важный результат, запомним его.

2.2 На диск радиуса $R_д = 1$ мм с отверстием $R_о = 0{,}5$ мм падает плоская монохроматическая волна длинной $\lambda = 0{,}5$ мкм с интенсивностью I_0. Найти интенсивность света на расстояние $b = 1$ м за диском с отверстием.

Найдём число зон Френеля для диска и его отверстия:

$$R_д^2 = m_д \lambda b \;\Rightarrow\; (1\text{ мм})^2 = m_д \cdot 0{,}5\text{ мкм} \cdot 1\text{ м} \;\Rightarrow\; m_д = 2$$
$$R_о^2 = m_о \lambda b \;\Rightarrow\; (0{,}5\text{ мм})^2 = m_о \cdot 0{,}5\text{ мкм} \cdot 1\text{ м} \;\Rightarrow\; m_о = 1/2$$

Отсчитываем точки O_2 и $O_{1/2}$ на спирали Френеля (от нуля против часовой стрелки):

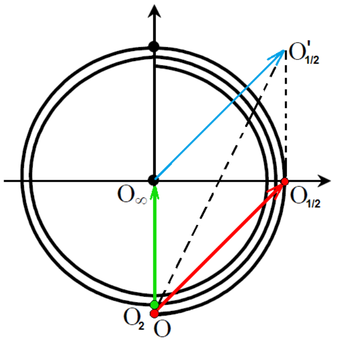


Рис. 3. Спираль Френеля.

Пусть $OO_\infty = E_0$, тогда $O_2O_\infty \approx OO_\infty = E_0$. По теореме Пифагора $OO_{1/2} = E_0\sqrt{2}$. Результирующая амплитуда $E = O_2O_\infty + OO_{1/2}$ (векторно). Перенесём параллельно вектор $OO_{1/2}$ на $O_\infty O'_{1/2}$ так, чтобы воспользоваться правилом треугольника для сложения векторов. Тогда $\angle O_2O_\infty O'_{1/2} = 135°$. Применяя теорему косинусов, получаем:

$$OO'^2_{1/2} \approx O_2O'^2_{1/2} = O_2O^2_\infty + O_\infty O'^2_{1/2} - 2 \cdot O_2O_\infty \cdot O_\infty O'_{1/2} \cos 135°$$

$$E^2 \approx E_0^2 + (E_0\sqrt{2})^2 + 2E_0^2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$I = E^2 \approx 5E_0^2 = 5I_0$$

Ответ: $I = 5I_0$.

2.3 Между точечным источником S монохроматического света и точкой наблюдения P помещают непрозрачный экран с круглым отверстием (линия SP совпадает с осью отверстия и перпендикулярна экрану). При этом интенсивность света в точке не изменяется. Чему равно минимальное число открытых зон Френеля, при котором возможна подобная ситуация?

Как было показано в задаче 2.1, интенсивность в центре картины при дифракции на круглом отверстии выражается как:

$$I = 2I_0(1 - \cos\pi m)$$

Нам необходимо подобрать такое минимальное положительное m, чтобы интенсивность не изменялась, то есть:

$$I_0 = 2I_0(1 - \cos\pi m) \;\Rightarrow\; \cos\pi m = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; m = \pm\frac{1}{3} + 2k,\; k \in \mathbb{Z}_+ \;\Rightarrow\; m_{\min} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $m_{\min} = \dfrac{1}{3}$.

Раздел 3. Дифракция Френеля – 3.

3.1 Плоская монохроматическая волна ($\lambda = 0{,}5$ мкм) падает нормально на стеклянный диск ($n = 1{,}5$) толщиной $b = 5{,}5$ мкм. На расстоянии $L = 10$ см от плоскости диска на его оси расположена точка наблюдения . При каком минимальном значении радиуса диска интенсивность в точке будет максимально возможной?

Пластинка будет вносить дополнительную разность хода и разность фаз:

$$\Delta = (n-1)b \qquad \delta\varphi = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)b$$

Дополнительная разность хода учитывается поворотом вектора OO_m против часовой стрелки вокруг O на $\delta\varphi$:

Результирующая амплитуда в случае отсутствия пластинки $E_0 = OO_\infty = OO_m + O_mO_\infty$, а в случае с пластинкой $E = OO'_m + O_mO_\infty$. Амплитуда будет максимальной, если OO'_m и O_mO_∞ будут сонаправлены, а вектор OO'_m будет максимален по модулю (второй $O_mO_\infty \approx OO_\infty = E_0$ постоянен). Причём $|OO'_m| = |OO_m|$. Выражение для интенсивности этого вектора уже было получено в задаче 2.1:

$$I = 2I_0(1 - \cos\pi m)$$

Максимум $I_{\max} = 4I_0$ достигается при $\cos\pi m = -1$, то есть при $m = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Вектор $OO'_m = -OO_m$, так как:

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)b = \frac{2\pi}{0{,}5}(1{,}5 - 1) \cdot 5{,}5 = 11\pi \equiv \pi + 2\pi l,\; l \in \mathbb{Z}$$

$$r_{\min} = \sqrt{m\lambda L} = \sqrt{(2k+1)\lambda L} = \sqrt{\lambda L} = \sqrt{0{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}1} \approx 223{,}6\text{ мкм}$$

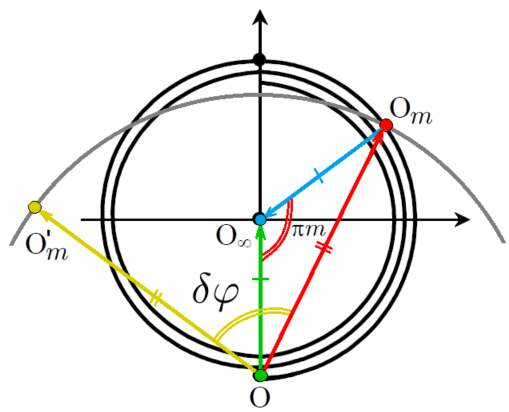


Рис. 4. Спираль Френеля.

Ответ: $r_{\min} = \sqrt{\lambda L} \approx 223{,}6$ мкм.

3.2 Плоская монохроматическая волна ($\lambda = 0{,}5$ мкм) падает нормально на стеклянный диск ($n = 1{,}5$) толщиной $b = 5{,}5$ мкм. На расстоянии $L = 10$ см от плоскости диска на его оси расположена точка наблюдения . При каком минимальном значении радиуса диска интенсивность в точке будет минимально возможной?

Амплитуда будет минимальной, либо если OO'_m и O_mO_∞ будут противонаправлены, а вектор OO'_m будет близок к O_mO_∞ по модулю, либо если OO'_m и O_mO_∞ будут сонаправлены, а вектор OO'_m будет минимален по модулю [1]. Так как $\delta\varphi \equiv \pi + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}$ (см. задачу 3.1), то реализуется второй случай. Выражение для интенсивности $|OO'_m| = |OO_m|$ уже было получено в задаче 2.1:

$$I = 2I_0(1 - \cos \pi m)$$

Минимум $I_{\text{min}} = 0$ достигается при $\cos \pi m = 1$, то есть при $m = 2k,\ k \in \mathbb{Z}_+$, тогда:

$$r_{\text{min}} = \sqrt{m\lambda L} = \sqrt{(2k)\lambda L} = \sqrt{2\lambda L} = \sqrt{2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}1} \approx 316{,}2 \text{ мкм}$$

Ответ: $r_{\text{min}} = \sqrt{2\lambda L} \approx 316{,}2$ мкм.

Раздел 4. Дифракция Фраунгофера – 1.

Выражение для интенсивности на решётке с периодом d, шириной щели b и числом щелей N:

$$I(\sin\varphi) = Cb^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kb\sin\varphi}{2}\right)\left(\frac{\sin\left(N\dfrac{kd\sin\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{kd\sin\varphi}{2}\right)}\right)^2$$

Главные дифракционные минимумы наблюдаются при:

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{b}; 2\frac{\lambda}{b};\ 3\frac{\lambda}{b};\ \ldots$$

Главные интерференционные максимумы наблюдаются при:

$$\sin\varphi = 0; \frac{\lambda}{d};\ 2\frac{\lambda}{d};\ 3\frac{\lambda}{d};\ \ldots$$

Добавочные интерференционные минимумы наблюдаются при:

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{Nd};\ 2\frac{\lambda}{Nd};\ \ldots;\ (N-1)\frac{\lambda}{Nd};\ (N+1)\frac{\lambda}{Nd};\ \ldots;\ (2N-1)\frac{\lambda}{Nd};\ (2N+1)\frac{\lambda}{Nd};\ \ldots$$

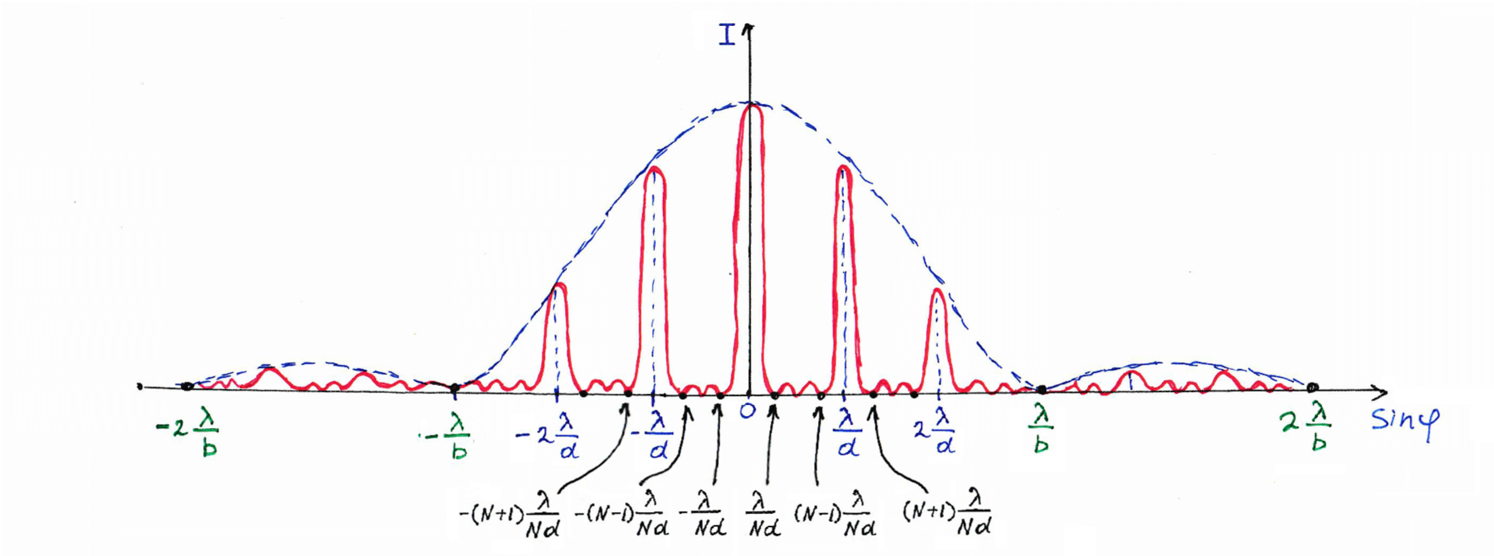


Рис. 5. Зависимость интенсивности в дифракционной картине на решётке в приближении Фраунгофера (картина для $N = 4$ щелей).

Также стоит отметить, что при N щелях между главными интерференционными максимумами получаем $N - 1$ добавочных минимумов и $N - 2$ добавочных максимумов.

Переходя к $\varphi \to 0$, будем иметь выражение для интенсивности в центре дифракционной картины:

$$I(0) = Cb^2N^2$$

[1] Вообще говоря, всё зависит от модулей векторов и угла между ними. Модуль вектора $|O_mO_\infty| \approx |OO_\infty| = E_0$ постоянен, $|OO'_m| = |OO_m|$ можно вычислить (результат получен в задаче 2.1), угол между векторами тоже можно посчитать как $\delta\varphi + \pi(1-m)/2$.

4.1 На дифракционную решетку (ширина щели b, период решетки d, число щелей N) нормально падает плоская монохроматическая волна. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы. Если число щелей N увеличить в 2 раза, а ширину щелей b уменьшить в 4 раза (d и λ не изменяются), то интенсивность в центре дифракционной картины...

$$\frac{I_2(0)}{I_1(0)} = \frac{Cb_2^2 N_2^2}{Cb_1^2 N_1^2} = \frac{Cb^2(2N)^2}{C(4b)^2 N^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Ответ: интенсивность в центре дифракционной картины уменьшится в 4 раза.

4.2 На дифракционную решетку нормально падает плоская монохроматическая волна. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы. Если число щелей N увеличить в 2 раза, а остальные параметры не менять, то как изменится число добавочных интерференционных минимумов и максимумов между главными интерференционными максимумами?

Ответ: число добавочных минимумов между главными интерференционными максимумами изменитя с $N-1$ до $2N-1$, а количество добавочных максимумов с $N-2$ до $2N-2$.

Раздел 5. Дифракция Фраунгофера – 2.

5.1 Плоская монохроматическая волна с длиной волны λ нормально падает на дифракционную решетку (ширина щели $b = 50$ мкм, период решетки $d = 100$ мкм). Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы. Чему равна длина волны λ, если угол дифракции для главного максимума второго порядка равен $\theta = 0{,}02$ радиан?

Записывая выражения для угла главного интерференционного максимума m-го порядка (см. в разделе 4) будем иметь:

$$\sin\theta_m = m\frac{\lambda}{d}$$

$$\sin\theta = 2\frac{\lambda}{d} \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{1}{2}d\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot 100\text{ мкм}\cdot\sin 0{,}02 \approx 1\text{ мкм}$$

Ответ: $\lambda \approx 1$ мкм.

5.2 Плоская монохроматическая волна нормально падает на дифракционную решетку. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы. Углы дифракции малы. Если период решётки d увеличить в 2 раза, то расстояние между главными максимумами нулевого и первого порядка. . .

Расстояние от m-го главного интерференционного максимума до главной оптической оси:

$$x_m = F\,\mathrm{tg}\,\varphi_m \approx F\sin\varphi_m = Fm\frac{\lambda}{d}$$

Тогда расстояние между нулевым и первым максимумом:

$$\Delta x = x_1 - x_0 = F\frac{\lambda}{d}$$

Если период d увеличить в 2 раза, то:

$$\Delta x_2 \div \Delta x_1 = F\frac{\lambda}{2d} \div F\frac{\lambda}{d} = \frac{1}{2}$$

Ответ: расстояние уменьшится в два раза.

Раздел 6. Спектральные приборы.

Угловая и линейная дисперсия прибора D_φ и D_l, разрешающая способность R, угловая ширина дифракционного максимума $\Delta\varphi_m$ и область свободной дисперсии $\Delta\lambda$:

$$D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} \quad D_l = \frac{dl}{d\lambda} \quad R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \quad \Delta\varphi_m \approx d\varphi_m \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$$

Для дифракционной решётки из условия максимума $d\sin\varphi_m = m\lambda$:

$$D_\varphi = \frac{m}{d\cos\varphi_m} \quad R = mN \quad \Delta\varphi_m = \frac{\lambda}{Nd\cos\varphi_m} \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$$

Для интерферометра Фабри-Перо из условия максимума $2h\cos\theta_m = m\lambda$:

$$D_\varphi = \frac{m}{d\sin\theta_m} \quad R = mF \quad \Delta\theta_m = \frac{\lambda(1-R)}{2\pi h\sin\theta_m\sqrt{R}} \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2h}$$

6.1 Монохроматическая волна с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм падает на дифракционную решетку, имеющую $n = 200$ штрихов на миллиметр. Найти угловую дисперсию решетки в третьем порядке.

$$d\sin\varphi_m = m\lambda \;\Rightarrow\; \cos\varphi_m = \sqrt{1-\frac{m^2\lambda^2}{d^2}} = \sqrt{1-m^2\lambda^2n^2}$$

$$D_\varphi = \frac{m}{d\cos\varphi_m} = \frac{mn}{\sqrt{1-m^2\lambda^2n^2}} = \frac{3\cdot 200\ \text{мм}^{-1}}{\sqrt{1-3^2\cdot(0{,}6\ \text{мкм})^2\cdot(200\ \text{мм}^{-1})^2}} = \frac{3\cdot 200\cdot 10^3\ \text{м}^{-1}}{\sqrt{1-9\cdot(0{,}6\cdot 10^{-6})^2\cdot(200\ \cdot 10^3)^2}} \approx 6{,}43\cdot 10^5\ \text{м}^{-1}$$

Ответ: $D_\varphi = \dfrac{mn}{\sqrt{1-m^2\lambda^2n^2}} \approx 6{,}43\cdot 10^5\ \text{м}^{-1} \approx 0{,}643\ \text{мкм}^{-1}$.

6.2 Монохроматическая волна с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм падает на дифракционную решетку шириной $L = 6{,}4$ мм, имеющую $n = 200$ штрихов на миллиметр. Найти ширину дифракционного максимума третьего порядка.

$$d\sin\varphi_m = m\lambda \;\Rightarrow\; \cos\varphi_m = \sqrt{1-\frac{m^2\lambda^2}{d^2}} = \sqrt{1-m^2\lambda^2n^2}$$

$$\Delta\varphi_m = \frac{\lambda}{Nd\cos\varphi_m} = \frac{\lambda}{L\sqrt{1-m^2\lambda^2n^2}} = \frac{0{,}6\ \text{мкм}}{6{,}4\ \text{мм}\sqrt{1-3^2\cdot(0{,}6\ \text{мкм})^2\cdot(200\ \text{мм}^{-1})^2}} = \frac{0{,}6/6,4\cdot 10^{-3}}{\sqrt{1-9\cdot(0{,}6\cdot 10^{-6})^2\cdot(200\ \cdot 10^3)^2}} \approx 10^{-4}$$

Ответ: $\Delta\varphi_m = \dfrac{\lambda}{L\sqrt{1-m^2\lambda^2n^2}} \approx 10^{-4}$ радиан.

Раздел 7. Фазовая и групповая скорости.

Выражение для фазовой и групповой скоростей $v_\text{ф}$ и $u_\text{г}$:

$$v_\text{ф} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \qquad u_\text{г} = \frac{d\omega}{dk}$$

Производя простые математические операции, получаем формулы Рэлея:

$$u_\text{г} = \frac{d}{dk}\left(v_\text{ф}k\right) = k\frac{dv_\text{ф}}{dk} + v_\text{ф} = \left[\;k = \frac{2\pi}{\lambda}\ \text{и}\ dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda\;\right] = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{dv_\text{ф}}{-\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda} + v_\text{ф} = v_\text{ф} - \lambda\frac{dv_\text{ф}}{d\lambda}$$

$$u_\text{г} = v_\text{ф} - \lambda\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{c}{n}\right) = v_\text{ф} + \lambda\frac{c}{n^2}\frac{dn}{d\lambda} = v_\text{ф}\left(1+\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right)$$

7.1 Закон дисперсии электромагнитной волны в некоторой среде задается соотношением $\omega(\lambda) = A\lambda^4$, где A – константа. Найти модуль отношения фазовой скорости к групповой $v_\text{ф}/u_\text{г}$ в этой среде.

Преобразуем зависимость $\omega(\lambda)$ в $\omega(k)$, учитывая $k = 2\pi/\lambda$:

$$\omega(k) = A\lambda^4 = 16\pi^4Ak^{-4}$$

Теперь вычислим скорости и их отношение:

$$v_\text{ф} = \frac{\omega}{k} = 16\pi^4Ak^{-5} \quad u_\text{г} = \frac{d\omega}{dk} = -64\pi^4Ak^{-5} \quad \left|v_\text{ф}/u_\text{г}\right| = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

Ответ: $\left|v_\text{ф}/u_\text{г}\right| = 1/4$.

7.2 Закон дисперсии электромагнитной волны в некоторой среде задается соотношением $\omega(k) = Ak^3$, где A – константа. Если для некоторого значения k_0 групповая скорость $u_\text{г}(k_0) = v_0$, то для $k = 3k_0$ групповая скорость $u_\text{г}(3k_0) = \ldots$

$$u_\text{г}(k) = \frac{d\omega}{dk} = 3Ak^2$$

$$u_\text{г}(k_0) = 3Ak_0^2 = v_0 \quad u_\text{г}(3k_0) = 3A\cdot(3k_0)^2 = 9v_0$$

Ответ: $u_\text{г}(3k_0) = 9v_0$.

7.3 Найти связь групповой $u_\text{г}$ и фазовой $v_\text{ф}$ скоростей, а также закон дисперсии $\omega(k)$, если $v_\text{ф}(\lambda) = a\lambda^{-2}$.

$$u_\text{г} = v_\text{ф} - \lambda\frac{dv_\text{ф}}{d\lambda} = a\lambda^{-2} + 2\lambda\cdot a\lambda^{-3} = 3a\lambda^{-2} = 3v_\text{ф}$$

$$v_\text{ф} = a\lambda^{-2} = \frac{\omega}{k} \;\Rightarrow\; \omega(k) = ka\lambda^{-2} = \left[\;k = \frac{2\pi}{\lambda} \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{2\pi}{k}\;\right] = ka\frac{k^2}{4\pi^2} = \frac{a}{4\pi^2}k^3$$

Ответ: $u_\text{г} = 3v_\text{ф}$ и $\omega(k) = \dfrac{a}{4\pi^2}k^3$.

Раздел 8. Отражение на границе сред.

Как известно, световая электромагнитная волна – поперечная. Это означает, что колебания электрических и магнитных полей с некоторыми амплитудами напряженностей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ происходят в плоскостях, причём взаимно перпендикулярных друг другу и одновременно перпендикулярных направлению распространения волны. Для описания явлений отражении волн на границе раздела двух сред, компоненту $\vec{E}$ принято раскладывать по базису[2] двух векторов $\vec{E}_p$ и $\vec{E}_s$ – лежащих в плоскости падения и в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, соответственно.

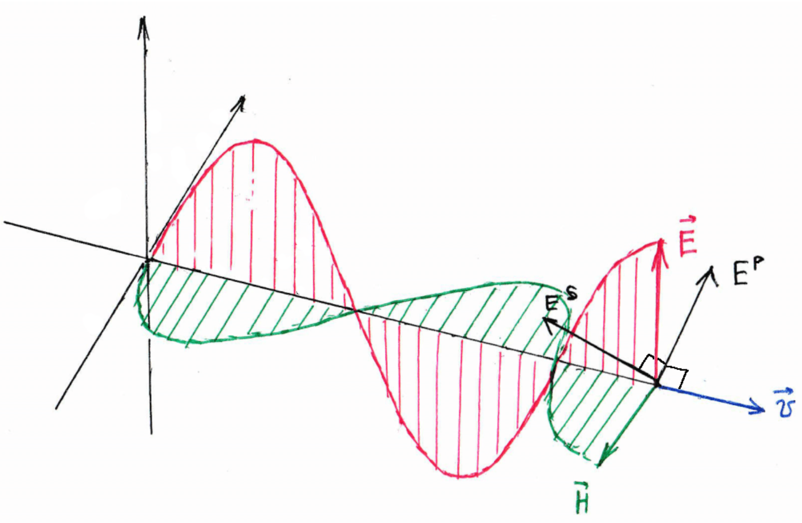


Рис. 6. Световая электромагнитная волна.

Если волна содержит компоненту только по $\vec{E}_p$, то говорят, что она поляризована в плоскости падения. Если же волна имеет компоненту только по $\vec{E}_s$, то говорят, что она поляризована в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Общее правило таково: при падении волны на границу раздела двух сред отражённая и прошедшая волна поляризованны так же, как и падающая[3]. Но при падении под угом Брюстера (углом полной поляризации отраженного света) у отражённой волны пропадает компонента по $\vec{E}_p$.

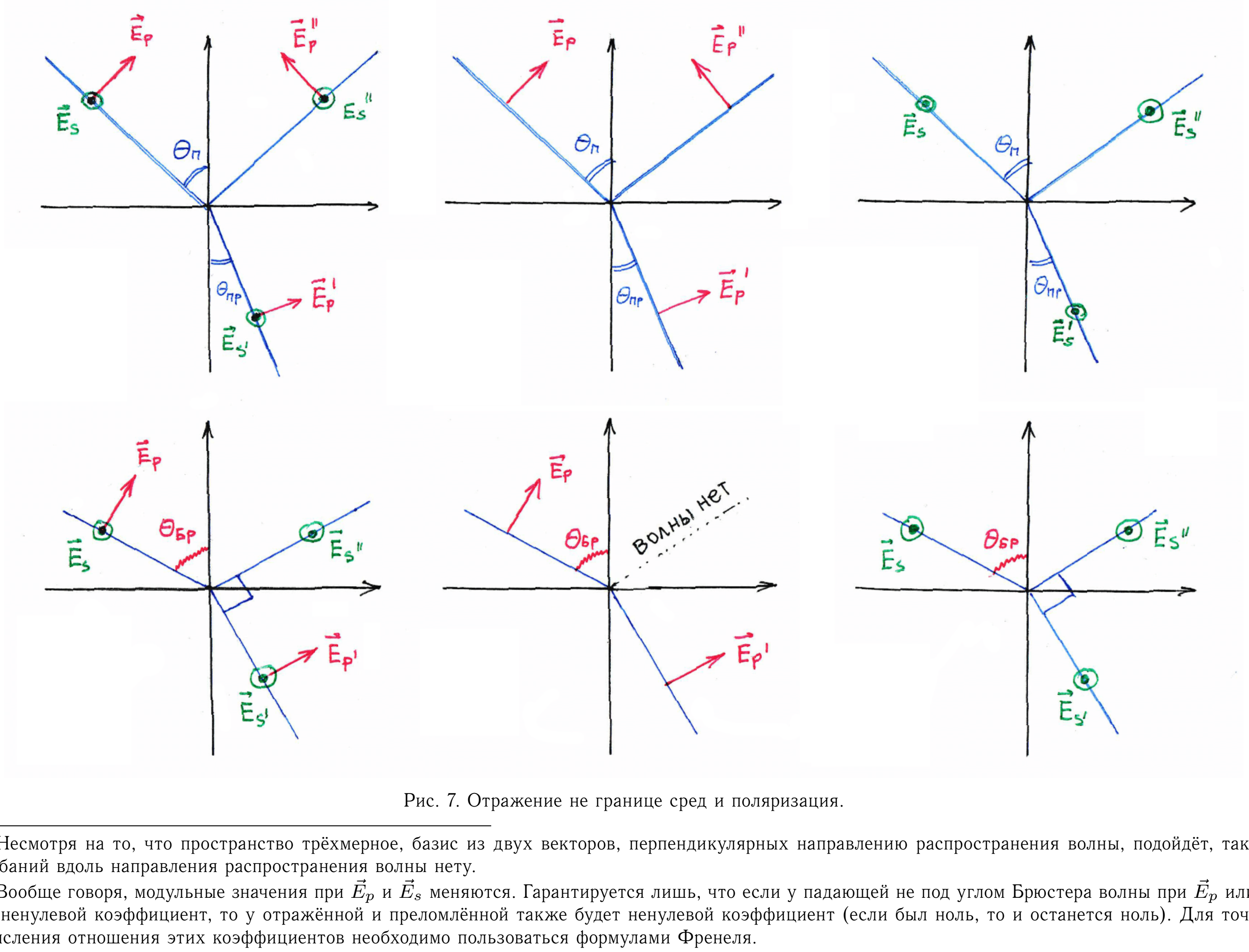


Рис. 7. Отражение не границе сред и поляризация.

[2]Несмотря на то, что пространство трёхмерное, базис из двух векторов, перпендикулярных направлению распространения волны, подойдёт, так как колебаний вдоль направления распространения волны нету.

[3]Вообще говоря, модульные значения при $\vec{E}_p$ и $\vec{E}_s$ меняются. Гарантируется лишь, что если у падающей не под углом Брюстера волны при $\vec{E}_p$ или $\vec{E}_s$ был ненулевой коэффициент, то у отражённой и преломлённой также будет ненулевой коэффициент (если был ноль, то и останется ноль). Для точного вычисления отношения этих коэффициентов необходимо пользоваться формулами Френеля.

Таким образом, при падении под углом Брюстера волны, поляризованной в плоскости падения, отражённой волны не будет вовсе, а при падении под углом Брюстера любой другой волны, отражённая волна будет поляризована в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Отсюда получаем, что при падении под углом Брюстера отражённый и преломлённый лучи взаимно перпендикулярны, а тангенс угла Брюстера:

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{Бр}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Также не следует забывать про угол полного внутреннего отражения $\alpha_{\text{Кр}}$ – угол, при падении из оптически более плотной в оптически менее плотную среду ($n_1 > n_2$) под которым или под большим углом ($\alpha \geqslant \alpha_{\text{Кр}}$) нет преломлённого луча.

$$\sin \alpha_{\text{Кр}} = \frac{n_2}{n_1}$$

8.1 Линейно поляризованная волна естественного света падает под углом Брюстера на границу вакуум-диэлектрик, при этом плоскость поляризации перпендикулярна плоскости падения. Каково состояние поляризации прошедшей и отражённой волн?

Ответ: обе волны будут поляризованны в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Причём это выполняется для любого угла, а не только угла Брюстера (правые картинки на рис. 7).

8.2 Линейно поляризованная волна естественного света падает под углом Брюстера на границу диэлектрик-вакуум, при этом плоскость поляризации перпендикулярна плоскости падения. Каково состояние поляризации прошедшей и отражённой волн?

Ответ: обе волны будут поляризованны в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Причём это выполняется для любого угла, меньшего угла полного внутреннего отражения (тогда не было бы прошедшей волны, так как $n_1 = \sqrt{\varepsilon} > n_2 = 1$). Для угла, большего угла полного внутреннего отражения, отражённая волна поляризована в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, а прошедшей волны нету.

8.3 Линейно поляризованная волна естественного света падает под углом Брюстера на границу вакуум-диэлектрик, при этом плоскость поляризации совпадет плоскостью падения. Каково состояние поляризации прошедшей и отражённой волн?

Ответ: прошедшая волна поляризована в плоскости падения, а отражённой волны нет (средняя картинка снизу на рис. 7).

8.4 Пучок естественного света падает на границу двух сред под углом Брюстера $\alpha_{\text{Бр}} = 30°$. Найти угол преломления.

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{Бр}} = \frac{n_2}{n_1} \qquad n_1 \sin \alpha_{\text{Бр}} = n_2 \sin \beta$$

$$\sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_{\text{Бр}} = \sin \alpha_{\text{Бр}} \operatorname{ctg} \alpha_{\text{Бр}} = \cos \alpha_{\text{Бр}} = \sin \big(90° - \cos \alpha_{\text{Бр}}\big)$$

$$\beta = 90° - \alpha_{\text{Бр}} = 90° - 30° = 60°$$

Таким образом, мы получили, что при падении под углом Брюстера, отражённый и преломлённый лучи взаимно перпендикулярны. Этим можно было воспользоваться сразу и получить:

$$\alpha_{\text{Бр}} + \beta = 90° \;\Rightarrow\; \beta = 90° - \alpha_{\text{Бр}} = 90° - 30° = 60°$$

Ответ: $\beta = 60°$.

Раздел 9. Интерференция поляризованного света.

Разность хода и разность фаз в анизотропных средах:

$$\Delta = (n_{\text{e}} - n_{\text{o}})d \quad \delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_{\text{e}} - n_{\text{o}})d$$

Разность хода и разность фаз для пластинки $\lambda/2$:

$$\Delta = \frac{\lambda}{2} + \lambda m \quad \delta\varphi = \pi + 2\pi m$$

Разность хода и разность фаз для пластинки $\lambda/4$:

$$\Delta = \frac{\lambda}{4} + \lambda \frac{m}{2} \quad \delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi m$$

Интенсивность прошедшего света:

$$I = I_0 \left(\cos^2(\alpha - \beta) - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \sin^2 \frac{\delta\varphi}{2}\right)$$

Если $\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{2}$, то есть поляризатор и анализатор скрещены:

$$I = I_0 \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\delta\varphi}{2}$$

Если $\alpha = \beta$, то есть поляризатор и анализатор параллельны:

$$I = I_0 \left(1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\delta\varphi}{2}\right)$$

9.1 Монохроматическая волна естественного света с интенсивностью $I_0 = 40$ мВт/см^2 падает на систему, состоящую из двух скрещенных идеальных поляризаторов. Между ними помещают кристаллическую пластинку $\lambda/4$. Какое максимальное значение интенсивности на выходе можно получить, вращая пластинку?

$$I = I_0 \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\delta\varphi}{2}$$

$$I_{\text{max}} = I_0 \cdot 1 \cdot \sin^2 \frac{\delta\varphi}{2} = I_0 \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2}\right) = \frac{I_0}{2} = 20 \text{ мВт/см}^2$$

Ответ: $I_{\text{max}} = \dfrac{I_0}{2} = 20$ мВт/см^2.

9.2 Монохроматическая волна естественного света с интенсивностью $I_0 = 20$ мВт/см^2 падает на систему, состоящую из двух скрещенных идеальных поляризаторов. Между ними помещают кристаллическую пластинку $\lambda/4$. Какое минимальное значение интенсивности на выходе можно получить, вращая пластинку?

$$I = I_0 \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\delta\varphi}{2}$$

$$I_{\text{min}} = I_0 \cdot 0 \cdot \sin^2 \frac{\delta\varphi}{2} = 0$$

Ответ: $I_{\text{min}} = 0$ мВт/см^2.

Раздел 10. Поляризация света.

Степень поляризации:

$$P = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}}$$

Уравнение бегущей волны в общем виде:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_0)}$$

В случае распространения бегущей волны вдоль оси z, её можно переписать покомпонентно как:

$$\begin{cases} E_x = A_x \sin(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y = A_y \sin(\omega t - kz + \varphi_y) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} E_x = A_x \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y = A_y \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \end{cases}$$

При этом разность фаз между компонентами по x и y:

$$\delta\varphi = \varphi_x - \varphi_y$$

Если $\delta\varphi = 0$ или π, то это линейная поляризация. Если $\delta\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$, то это эллиптическая поляризация. В частном случае, если $\delta\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$ и $A_x = A_y$, то это круговая поляризация. Если $\delta\varphi > 0$, то при распространении волны векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ вращаются в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, против часовой стрелки (говорят, что это левая поляризация), а если $\delta\varphi < 0$, то $\vec{E}$ и $\vec{H}$ вращаются по часовой стрелки (говорят, что это правая поляризация).

10.1 Частично поляризованный свет анализируется с помощью идеального поляризатора. При вращении поляризатора было найдено, что отношение максимальной интенсивности к минимальной равно 3. Чему равна степень поляризации света?

$$P = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}} = \frac{I_{\text{max}}/I_{\text{min}} - 1}{I_{\text{max}}/I_{\text{min}} + 1} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $P = \dfrac{1}{2}$.

10.2 Компоненты вектора напряжённости в электромагнитной волне изменяются по закону $E_x = A_0 \sin(\omega t - kz)$ и $E_y = 2A_0 \sin(\omega t - kz)$. Укажите состояние поляризации и направление распространения волны.

Так как $\delta\varphi = 0$, то это линейная поляризация. Так как компонента $\vec{k} \cdot \vec{r} = kz$ входит в уравнение со знаком минус, то волна распространяется по оси z в положительном направлении.

Ответ: линейная поляризация, волна распространяется вдоль оси z в положительном направлении.

10.3 Компоненты вектора напряжённости в электромагнитной волне изменяются по закону $E_x = A_0 \sin(\omega t + kz)$ и $E_y = 2A_0 \cos(\omega t + kz)$. Укажите состояние поляризации и направление распространения волны.

Приведём уравнение компонент бегущей волны к каноническому виду:

$$E_x = A_0 \sin(\omega t + kz) = A_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t - kz\right) = A_0 \cos\left(\omega t + kz - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{cases} E_x = A_0 \cos\left(\omega t + kz - \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \\ E_y = 2A_0 \cos(\omega t + kz) \end{cases}$$

Так как $\delta\varphi = -\pi/2$, а $A_x \neq A_y$, то это эллиптическая поляризация. Так как компонента $\vec{k} \cdot \vec{r} = kz$ входит в уравнение со знаком плюс, то волна распространяется по оси z в отрицательном направлении.

Ответ: эллиптическая поляризация, волна распространяется вдоль оси z в отрицательном направлении.

Раздел 11. Анизотропные пластины – 1.

11.1 Анизотропная пластинка вырезана параллельно оптической оси из материала с разностью показателей преломления $n_e - n_o = 0{,}02$. Для двух близких длин волн света $\lambda_1 = 0{,}574$ мкм и $\lambda_2 = 0{,}602$ мкм она будет полуволновой пластинкой (для остальных длин волн из интервала от λ_1 до λ_2 это утверждение несправедливо). Какова толщина пластины?

Запишем разность хода для полуволновой пластини и анизотропной пластинки в общем виде и приравняем их в двух случая. Так как для остальных длин волн из интервала от λ_1 до λ_2 она не будет полуволновой, то $|m_1 - m_2| = 1$. Но так как $\lambda_1 < \lambda_2$, то пусть $m_1 = m + 1$ и $m_2 = m$:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \dfrac{\lambda_1}{2} + \lambda_1(m+1) = (n_\text{e} - n_\text{o})d \\ \\ \Delta_2 = \dfrac{\lambda_2}{2} + \lambda_2 m = (n_\text{e} - n_\text{o})d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1\left(\dfrac{3}{2} + m\right) = (n_\text{e} - n_\text{o})d \\ \\ \lambda_2\left(\dfrac{1}{2} + m\right) = (n_\text{e} - n_\text{o})d \end{cases}$$

$$\lambda_1\left(\frac{3}{2} + m\right) = \lambda_2\left(\frac{1}{2} + m\right) \Rightarrow \frac{3}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)m \Rightarrow m = \frac{3\lambda_1 - \lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

$$d = \frac{\lambda_1}{n_\text{e} - n_\text{o}}\left(\frac{3}{2} + m\right) = \frac{\lambda_1}{n_\text{e} - n_\text{o}}\left(\frac{3}{2} + \frac{3\lambda_1 - \lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}\right) = \frac{1}{(n_\text{e} - n_\text{o})}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{0{,}02}\frac{574 \cdot 602}{602 - 574}\text{ нм} \approx 617050\text{ нм} \approx 0{,}6\text{ мм}$$

Ответ: $d = \dfrac{1}{(n_\text{e} - n_\text{o})}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \approx 0{,}6$ мм.

Раздел 12. Анизотропные пластины – 2.

Пластинка $\lambda/4$, оси которой ориентированы параллельно осям поляризации, может преобразовывать линейно поляризованный свет в эллиптически поляризованный и обратно.

Пластинка $\lambda/4$, оси которой ориентированы под углом $\beta = \pm 45^\circ$ к осям поляризации, может преобразовывать линейно поляризованный свет в свет с круговой поляризацией (горизонтально-поляризованный в право-поляризованный, вертикально-поляризованный в лево-поляризованный) и обратно.

Пластинка $\lambda/2$, оси которой ориентированы под углом $\beta = \pm 45^\circ$ к осям поляризации, может преобразовывать линейно поляризованный свет в линейно поляризованный свет с плоскостью поляризации, повёрнутой на 90° градусов относительно плоскости поляризации падающей волны и обратно.

12.1 Монохроматическая волна с эллиптической поляризацией падает на пластину $\lambda/4$. Укажите возможные состояния поляризации вышедшего излучения.

Ответ: может преобразовать в линейно или эллиптически поляризованный свет в зависимости от ориентации.

Раздел 13. Интерференция с помощью билинзы.

13.1 Из линзы с фокусным расстоянием $f = 0{,}4$ м вырезали центральную часть шириной $h = 2$ мм, и получившиеся половинки сдвинули до соприкосновения. На оси симметрии получившейся билинзы на расстоянии $a = 0{,}1$ м от нее поместили точечный монохроматичный источник света (длина волны $\lambda = 0{,}6$ мкм). С другой стороны от билинзы на расстоянии $b = 2$ м поместили экран для наблюдения интерференционной картины. Найти расстояние между интерференционными полосами.

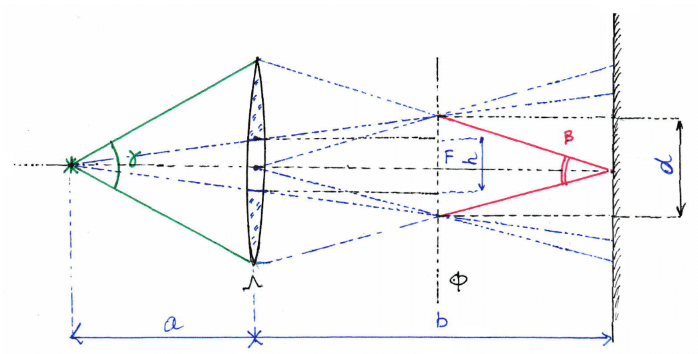


Рис. 8. Ход лучей при интерференции с помощью билинзы.

Из геометрических построений можно получить выражение для разности хода в билинзе:

$$\Delta = \frac{xha}{ab - f(a+b)}$$

Записывая условие максимума для двух соседних интерференционных полос, находим расстояние между ними:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \dfrac{x_1 ha}{ab - f(a+b)} = m\lambda \\ \\ \Delta_2 = \dfrac{x_2 ha}{ab - f(a+b)} = (m+1)\lambda \end{cases}$$

$$\Delta x = |x_2 - x_1| = \frac{\lambda}{ha}\Big|ab - f(a+b)\Big| = \frac{\lambda}{h}\left|b - f\frac{a+b}{a}\right|$$

$$\Delta x = \frac{0{,}6 \text{ мкм}}{2 \text{ мм}}\left|2 \text{ мм} - 0{,}4 \text{ м} \cdot \frac{0{,}1 \text{ м} + 2 \text{ м}}{0{,}1 \text{ м}}\right| \approx 2{,}5 \text{ мм}$$

Ответ: $\Delta x = \dfrac{\lambda}{h}\left|b - f\dfrac{a+b}{a}\right| \approx 2{,}5$ мм.

13.2 Из линзы с фокусным расстоянием $f = 10$ см вырезали центральную часть шириной $h = 0{,}5$ см, и получившиеся половинки сдвинули до соприкосновения. На оси симметрии получившейся билинзы на расстоянии $a = 5$ см от нее поместили точечный монохроматичный источник света (длина волны $\lambda = 0{,}5$ мкм). С другой стороны от билинзы на расстоянии $b = 15$ см поместили экран для наблюдения интерференционной картины. Сколько интерференционных полос наблюдается?

Найдём ширину интерференционной картины из подобных треугольников:

$$\frac{H}{b} = \frac{h/2}{a} \;\Rightarrow\; H = \frac{bh}{2a}$$

Теперь найдём число интерференционных полос:

$$N = \frac{H}{\Delta x} = \frac{h^2}{2a\lambda\,|1 - f/b - f/a|} = \frac{(0{,}5 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}\,|1 - 10/15 - 10/5|} \approx 300$$

Ответ: $N = \dfrac{h^2}{2a\lambda\,|1 - f/b - f/a|} \approx 300.$

13.3 Из линзы с фокусным расстоянием $f = 50$ см вырезали центральную часть шириной h, и получившиеся половинки сдвинули до соприкосновения. По одну сторону в фокус линзы помещён точеный монохроматический источник света (длина волны $\lambda = 0{,}6$ мкм). С противоположенной стороны линзы помещён экран, на котором наблюдаются полосы интерференции. Расстояние между соседними светлыми полосами $\Delta x = 0{,}5$ мм и не изменяется при перемещении экрана вдоль оптической оси. Найти h.

$$a = f \quad h = \frac{\lambda}{h}\left|b - f\frac{a+b}{a}\right| = \frac{\lambda}{h}\,|b - f - b| = \frac{\lambda f}{\Delta x} = \frac{0{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}5}{0{,}5 \cdot 10^{-3}} \approx 0{,}6 \text{ мм}$$

Ответ: $h = \dfrac{\lambda f}{\Delta x} \approx 0{,}6$ мм.

Раздел 14. Бегущие и стоячие волны.

14.1 В пространстве установилась стоячая электромагнитная волна, магнитная компонента которой:

$$\vec{B} = \vec{e}_y B_0 \cos(\omega t) \sin(kx)$$

Учитывая, что $E_0 > 0$ и $B_0 > 0$, указать закон изменения соответствующей электрической компоненты $\vec{E}$.

Для решения данной задачи необходимо воспользоваться следующим уравнением Максвелла и следующими линейными материальными уравнениями (в случае, если в задаче фигурируют $\vec{D}$ или $\vec{H}$):

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \quad \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

Пусть $\vec{E} = \vec{e}_x E_x + \vec{e}_y E_y + \vec{e}_z E_z$, тогда:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{e}_y B_0 \cos(\omega t) \sin(kx) = \vec{e}_y B_0 \omega \sin(\omega t) \sin(kx)$$

В силу единственности разложения по базису, выражения при $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ и $\vec{e}_z$ должны быть равны. Таким образом получаем систему уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = B_0 \omega \sin(\omega t) \sin(kx) \\[2ex] \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Следует также учесть, что световая электромагнитная волна – поперечная. Это означает, что $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{v}$, то есть направления колебания электрической и магнитной компонент, а также направление распространения волны должны быть взаимно перпендикулярны. В условии задачи $\vec{B} = \vec{e}_y f(x, t)$, то есть $\vec{B}$ колеблется вдоль $\vec{e}_y$ и распространяется вдоль $\vec{e}_x$. Тогда, очевидно, $\vec{E}$ колеблется вдоль $\vec{e}_z$ и распространяется вдоль $\vec{e}_x$. То есть $\vec{E} = \vec{e}_z f(x, t)$. Таким образом, из второго уравнения системы будем иметь:

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} = B_0 \omega \sin(\omega t) \sin(kx)$$

$$\vec{E} = -\vec{e}_z \int B_0 \omega \sin(\omega t) \sin(kx) dx = \vec{e}_z B_0 \frac{\omega}{k} \sin(\omega t) \cos(kx)$$

Учитывая, что $k = 2\pi/\lambda$ и $\omega = 2\pi/T$, окончательно имеем:

$$\vec{E} = \vec{e}_z B_0 \frac{2\pi}{T} \frac{\lambda}{2\pi} \sin(\omega t) \cos(kx) = \vec{e}_z B_0 c \sin(\omega t) \cos(kx)$$

Ответ: $\vec{E} = \vec{e}_z B_0 c \sin(\omega t) \cos(kx)$.

14.2 В пространстве установилась бегущая электромагнитная волна, электрическая компонента которой:

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_0 \sin(\omega t - kz)$$

Учитывая, что $E_0 > 0$ и $H_0 > 0$, указать закон изменения соответствующей магнитной компоненты $\vec{H}$.

Пусть $\vec{E} = \vec{e}_x E_x + \vec{e}_y 0 + \vec{e}_z 0 = \vec{e}_x E_x$, тогда:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} - \vec{e}_z \frac{\partial E_x}{\partial y} = \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial z} E_0 \sin(\omega t - kz) = -\vec{e}_y E_0 k \cos(\omega t - kz) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \vec{B} = \frac{1}{\mu\mu_0} \vec{e}_y \int E_0 k \cos(\omega t - kz) dt = \frac{1}{\mu\mu_0} \vec{e}_y E_0 \frac{k}{\omega} \sin(\omega t - kz) = \vec{e}_y \frac{E_0}{c\mu\mu_0} \sin(\omega t - kz)$$

Ответ: $\vec{H} = \vec{e}_y \dfrac{E_0}{c\mu\mu_0} \sin(\omega t - kz)$.

Раздел 15. Преобразование Фурье.

Необходимо указать по формуле сигнала $f(t)$ его Фурье-образ $\hat{f}(i\omega)$ и спектральную плотность интенсивности $S(\omega)$ или наоборот. Как правило, просят указать качественную зависимость (выбрать картинку с графиком).

$$\hat{f}(i\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \quad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(i\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad S(\omega)=\frac{|\hat{f}(i\omega)|^2}{\pi\tau'} \quad I=\int\limits_{0}^{+\infty} S(\omega)d\omega$$

15.1 Сигнал «экспонента»:

$$f(t)=\begin{cases}E_0e^{-t/2\tau},\ t\geqslant 0\\ 0,\ t<0\end{cases} \qquad \hat{f}(i\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=\int\limits_{0}^{+\infty} E_0e^{-t(1/2\tau+i\omega)}dt=E_0\left.\frac{e^{-t(1/2\tau+i\omega)}}{-(1/2\tau+i\omega)}\right|_0^{+\infty}=E_0\frac{1/2\tau-i\omega}{1/4\tau^2+\omega^2}$$

$$S(\omega)=\frac{|\hat{f}(i\omega)|^2}{\pi\tau'}=\frac{|\hat{f}(i\omega)|^2}{2\pi\tau}=\frac{E_0^2}{2\pi\tau}\left|\frac{1/2\tau-i\omega}{1/4\tau^2+\omega^2}\right|^2=\frac{E_0^2}{2\pi\tau}\frac{1/4\tau^2+\omega^2}{(1/4\tau^2+\omega^2)^2}=\frac{E_0^2}{2\pi\tau}\frac{1}{1/4\tau^2+\omega^2}=E_0^2\frac{1/2\pi\tau}{(1/2\tau)^2+\omega^2}$$

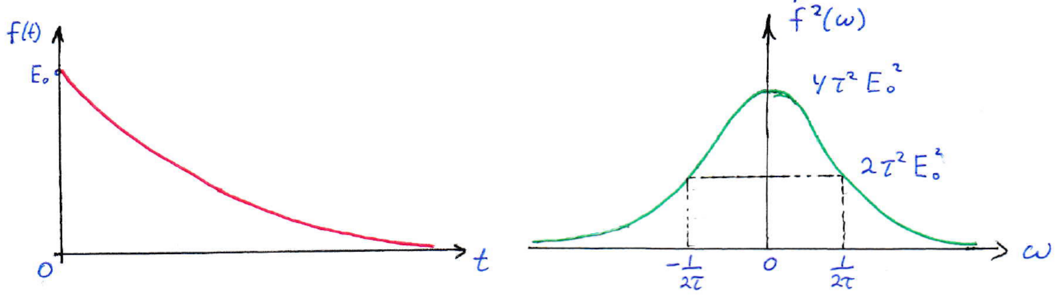


Рис. 9. График сигнала $f(t)$ (слева) и квадрата[4] его фурье-образа $|\hat{f}(i\omega)|^2$ (справа).

Таким образом, $|\hat{f}(i\omega)|^2$ и $S(\omega)$ у сигнала экспоненты имеют вид функции Лоренца[5].

15.2 Сигнал «модулированная экспонента»:

$$f(t)=\begin{cases}E_0e^{-t/2\tau}\cos(\omega_0t),\ t\geqslant 0\\ 0,\ t<0\end{cases} \qquad \hat{f}(i\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=\int\limits_{0}^{+\infty} E_0e^{-t(1/2\tau+i\omega)}\cos(\omega_0t)dt=\int\limits_{0}^{+\infty} E_0e^{-t(1/2\tau+i(\omega-\omega_0))}dt=$$

$$=E_0\left.\frac{e^{-t(1/2\tau+i(\omega-\omega_0))}}{-(1/2\tau+i(\omega-\omega_0))}\right|_0^{+\infty}=E_0\frac{1/2\tau-i(\omega-\omega_0)}{1/4\tau^2+(\omega-\omega_0)^2} \qquad S(\omega)=\frac{|\hat{f}(i\omega)|^2}{\pi\tau'}=\frac{|\hat{f}(i\omega)|^2}{2\pi\tau}=E_0^2\frac{1/2\pi\tau}{(1/2\tau)^2+(\omega-\omega_0)^2}$$

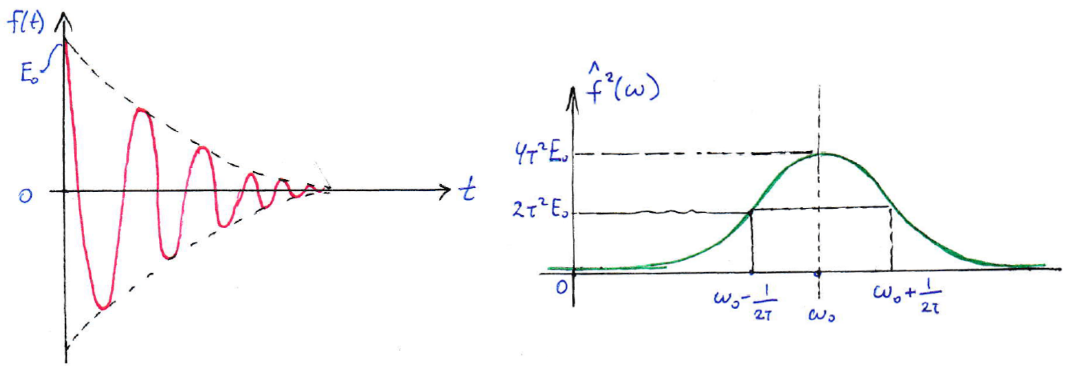


Рис. 10. График сигнала $f(t)$ (слева) и квадрата его фурье-образа $|\hat{f}(i\omega)|^2$ (справа).

Таким образом, $|\hat{f}(i\omega)|^2$ и $S(\omega)$ у сигнала модулированной экспоненты имеют вид функции Лоренца, смещённой на ω_0.

Отметим, что при модулировании любого сигнала $f(t)$ функцией $\cos(\omega_0t)$ её $|\hat{f}(i\omega)|^2$ и $S(\omega)$ будут как у исходной, только смещённые вправо на ω_0.

$$f(t)\risingdotseq\hat{f}(i\omega)\ \Rightarrow\ f(t)\cos(\omega_0t)\risingdotseq\hat{f}(i(\omega-\omega_0))$$

[4]Очевидно, качественно график спектральной плотности интенсивности $S(\omega)$ совпадает с графиком квадрата фурье-образа сигнала $|\hat{f}(i\omega)|^2$.
[5]Функция Лоренца (она же распределение Коши) имеет колоколообразный вид, но более «острая», чем функция Гаусса.

15.3 Сигнал «Гаусс-функция»:

$$f(t) = E_0 e^{-at^2},\ a > 0 \qquad \hat{f}(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \hat{f}(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_0 e^{-at^2 - i\omega t} dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_0 \exp\left(-a\left[t^2 + \frac{i\omega}{a} t\right]\right) dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_0 \exp\left(-a\left[t^2 + 2\frac{i\omega}{2a}t + \frac{i^2\omega^2}{4a^2} - \frac{i^2\omega^2}{4a^2}\right]\right) dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_0 \exp\left(-a\left[t + \frac{i\omega}{2a}\right]^2 - \frac{\omega^2}{4a}\right) dt = \left[t + \frac{i\omega}{2a} = y\right] =$$

$$= E_0 e^{-\omega^2/4a} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy = E_0 e^{-\omega^2/4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad S(\omega) = \frac{|\hat{f}(i\omega)|^2}{\pi\tau'} = \frac{E_0^2}{a\tau} e^{-\omega^2/2a}$$

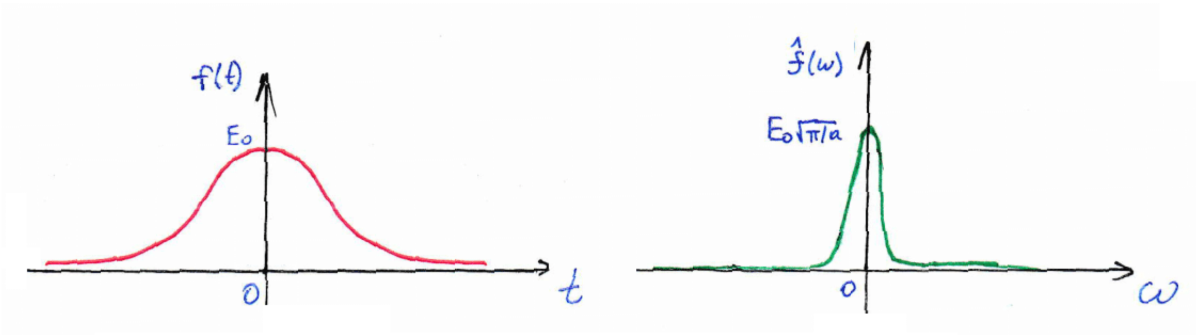


Рис. 11. График сигнала $f(t)$ (слева) и его фурье-образа $\hat{f}(i\omega)$ (справа).

Таким образом, Фурье-образ $\hat{f}(i\omega)$ у сигнала Гаусс-функции имеет тоже вид Гаусс-функции, а квадрат Фурье-образа $|\hat{f}(i\omega)|^2$ и спектральная плотность интенсивности $S(\omega)$ имеет вид квадрата Гаусс-функции.

15.4 Сигнал «модулированная Гаусс-функция»:

$$f(t) = E_0 e^{-at^2} \cos\omega_0 t,\ a > 0 \quad \hat{f}(i\omega) = E_0 e^{-(\omega-\omega_0)^2/4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad S(\omega) = \frac{E_0^2}{a\tau} e^{-(\omega-\omega_0)^2/2a}$$

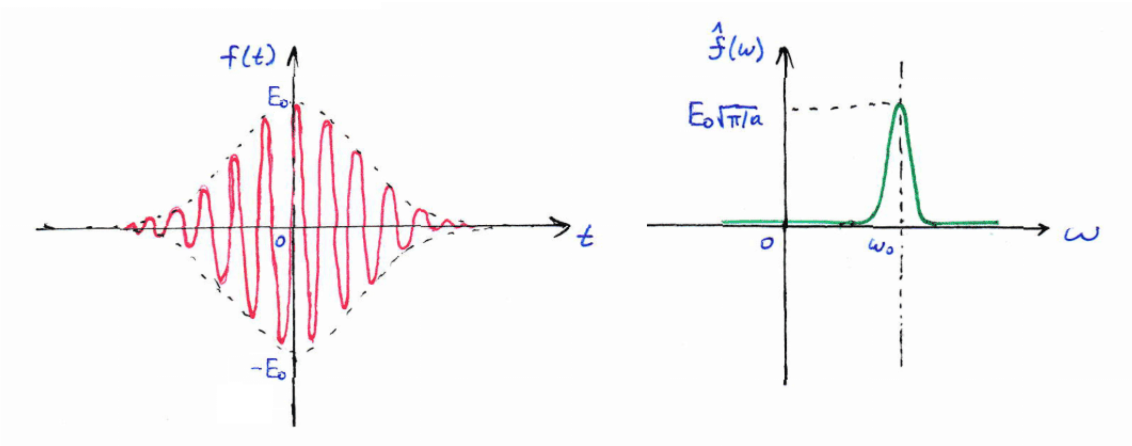


Рис. 12. График сигнала $f(t)$ (слева) и его фурье-образа $\hat{f}(i\omega)$ (справа).

Таким образом, Фурье-образ $\hat{f}(i\omega)$ у сигнала модулированной Гаусс-функции имеет тоже вид Гаусс-функции, смещённой на ω_0, а квадрат Фурье-образа $|\hat{f}(i\omega)|^2$ и спектральная плотность интенсивности $S(\omega)$ имеет вид квадрата Гаусс-функции, смещённой на ω_0.

15.5 Прямоугольный волновой пакет («ЦУГ»):

$$f(t) = \begin{cases} E_0,\ |t| \leqslant \tau/2 \\ 0,\ |t| > \tau/2 \end{cases} \qquad \hat{f}(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int\limits_{-\tau/2}^{+\tau/2} E_0 e^{-i\omega t} dt = E_0 \frac{e^{-i\omega\tau/2} - e^{i\omega\tau/2}}{-i\omega} = E_0 \frac{2\sin(\omega\tau/2)}{\omega} = E_0\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} =$$

$$= E_0\tau \,\mathrm{sinc}\left(\omega\frac{\tau}{2}\right) \quad S(\omega) = \frac{|\hat{f}(i\omega)|^2}{\pi\tau'} = \frac{E_0^2\tau^2}{\pi} \mathrm{sinc}^2\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)$$

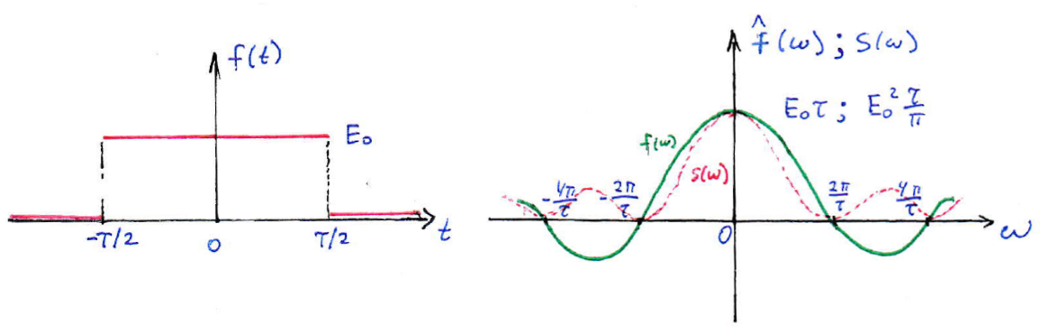


Рис. 13. График сигнала $f(t)$ (слева) и его фурье-образа $\hat{f}(i\omega)$ со спектр. плотностью интенсивности $S\omega$ (справа зелёным и красным соответственно).

Таким образом, Фурье-образ $\hat{f}(i\omega)$ у сигнала прямоугольного волнового пакета имеет вид «осьминога» (функция синкус), а его квадрат $|\hat{f}(i\omega)|^2$ и спектральная плотность интенсивности $S(\omega)$ имеют вид «кракена» (функция синкус в квадрате).

15.6 Прямоугольный волновой пакет («ЦУГ») с модуляцией:

$$f(t) = \begin{cases} E_0 \cos\omega_0 t \ |t| \leqslant \tau/2 \\ 0, \ |t| > \tau/2 \end{cases} \qquad \hat{f}(i\omega) = E_0\tau \operatorname{sinc}\left((\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}\right) \quad S(\omega) = \frac{E_0^2\tau^2}{\pi}\operatorname{sinc}^2\left((\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}\right)$$

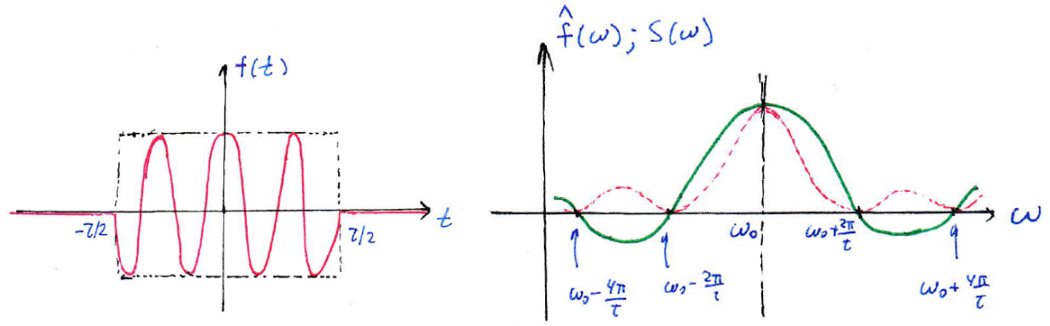


Рис. 14. График сигнала $f(t)$ (слева) и его фурье-образа $\hat{f}(i\omega)$ со спектр. плотностью интенсивности $S\omega$ (справа зелёным и красным соответственно).

Таким образом, Фурье-образ $\hat{f}(i\omega)$ у сигнала прямоугольного волнового пакета с модуляцием имеет вид смещённого на ω_0 «осьминога» (функция синкус), а его квадрат $|\hat{f}(i\omega)|^2$ и спектральная плотность интенсивности $S(\omega)$ имеют вид смещённого на ω_0 «кракена» (функция синкус в квадрате).

Раздел 16. Интерферометр Фабри-Перо.

Разность хода и разность фаз:

$$\Delta = 2h\cos\theta \quad \delta\varphi = k\Delta = \frac{4\pi h}{\lambda}\cos\theta$$

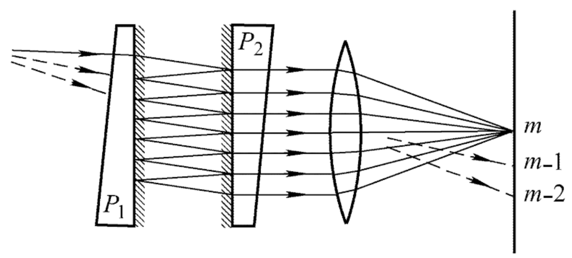


Рис. 15. Ход лучей в интерферометре Фабри-Перо.

Наблюдаемая интерференционная картина будет представлена в виде колец, номера которых не совпадают с номерами интерференционных максимумов. Записывая условие максимума интерференции и учитывая, что первому светлому кольцу соответствует максимальный порядок интерференции, находим порядок интерференции для n-го кольца[6]:

$$m_n = \left[\frac{2h}{\lambda}\right] - n$$

Отсюда, учитывая малость угла θ находим угол наклона и радиус n-го кольца:

$$\theta_n \approx \sqrt{n\frac{\lambda}{h}} \quad R_n \approx f\sqrt{n\frac{\lambda}{h}}$$

[6] Здесь $[2h/\lambda]$ – операция взятия целой части.

16.1 Излучение от точечного монохроматического источника света с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм падает на интерферометр Фабри-Перо (ИФП) с базой $h = 2$ мм. Интерференционную картину наблюдают за ИФП в фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием $f = 200$ мм, при этом в центре светлое пятно. Найти радиус пятого светлого кольца (в мм) и соответствующий ему порядок интерференции.

$$m_5 = \left[\frac{2h}{\lambda}\right] - 5 = \left[\frac{4000 \text{ мкм}}{0{,}5 \text{ мкм}}\right] - 5 = 7995$$

$$R_5 \approx f\sqrt{5\frac{\lambda}{h}} \approx 200 \text{ мм} \cdot \sqrt{5 \cdot \frac{0{,}5 \text{ мкм}}{2000 \text{ мкм}}} \approx 7 \text{ мм}$$

Ответ: $R_5 = 7$ мм, а $m_5 = 7995$.

16.2 Излучение от точечного монохроматического источника света с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм падает на интерферометр Фабри-Перо (ИФП) с базой $h = 5$ мм. Интерференционную картину наблюдают за ИФП в фокальной плоскости линзы, при этом в центре светлое пятно, а радиус четвёртого светлого кольца $R_4 = 5$ мм. Найти фокусное расстояние линзы (в мм) и область свободной дисперсии $\Delta\lambda$.

$$R_4 \approx f\sqrt{4\frac{\lambda}{h}} \;\Rightarrow\; f \approx R_4\sqrt{\frac{h}{4\lambda}} \approx 5 \text{ мм} \cdot \sqrt{\frac{5 \text{ мм}}{4 \cdot 0{,}5 \text{ мкм}}} \approx 250 \text{ мм}$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2h} = \frac{(0{,}5 \text{ мкм})^2}{2 \cdot 5 \text{ мм}} = \frac{\left(0{,}5 \cdot 10^{-6}\right)^2}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \text{ м} \approx 0{,}025 \cdot 10^{-9} \text{ м} \approx 0{,}025 \text{ нм}$$

Ответ: $f \approx 250$ мм, а $\Delta\lambda \approx 0{,}025$ нм.

Список литературы для самостоятельной подготовки:

1. Информация к семинарам по оптике на сайте И. В. Митина.

2. Волновые процессы. Основные законы. И. Е. Иродов.

3. Записи семинаров по оптике В. А. Овчинкина.