Тест по д.у. №3

1) определение устойчивости по Ляпунову

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, x) \\ \bar{x}(t_0) = \varphi(t_0) \end{cases}$$ – задача

$\bar{x}(t) = \bar{\varphi}(t)$ – решение

Определение: $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$ устойчиво по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \ \forall \bar{x}_0 : |\bar{\varphi}(t_0) - \bar{x}_0| < \delta:$

$$|\bar{\varphi}(t) - \bar{\psi}(t)| < \varepsilon \quad \forall t > t_0$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, x) \\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \end{cases}$$ $\bar{\psi}(t)$ – решение

задача: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 - 1 \\ x(0) = -1 \end{cases}$

$x = -1$ – стац. решение

$\varphi(t) = -1$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x(0)$ такого что $|x(0) + 1| < \delta$:

$\forall t \geq 0 \ \exists x(t)$ – решение, причем $|x(t) + 1| < \varepsilon$

2) т. об устойчивости по 1 приближению

1) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -2\sin x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0$ $\lambda = 1$, $\lambda = -2$ неуст.

2) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sin x_1 + x_1^2 \\ \dot{x}_2 = 2\ln(1+x_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$ $\lambda = -1$, $\lambda = 2$ неуст.

3) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0$ $\lambda = 1$, $\lambda = -2$ неуст

4) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2\sin x_1 + 2x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_2 = \ln(1 - x_1) \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} \lambda + 2 & -2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ $\quad \frac{D}{4} = 1 - 2 = -1$ $\quad \sqrt{\frac{D}{4}} = \pm i$

$\lambda = -1 \pm i$ $\quad Re\,\lambda < 0$

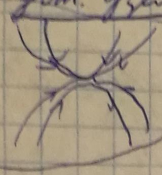
4 – устойчиво

③ Фазовые траектории лин. системы

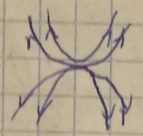
$\frac{dx}{dt} = Ax$ $\quad A[2\times 2]$ $\quad \lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 < 0$

уст. узел

$\lambda_1 < 0$
$\lambda_2 < 0$



$\lambda_1 > 0$
$\lambda_2 > 0$

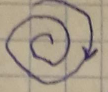
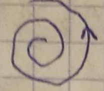
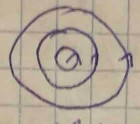


неуст. узел

$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

седло

$\lambda = \alpha \pm \beta i \qquad \alpha < 0 \qquad \alpha > 0 \qquad \alpha = 0$

фокус

центр

④. Классификация особых точек

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad \lambda = \pm 1$ седло (см. №3)

⑤. Характеристика лин. одн. УЧП I порядка

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

система характеристик: $\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}$

задача: $\underbrace{\cos x}_{X_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\cos y}_{X_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \underbrace{\cos x \cos y}_{X_3} \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

$$\frac{dx}{\cos x} = \frac{dy}{\cos y} = \frac{dz}{\cos x \cos y}$$

⑥. Характеристики квазилинейного

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = b$$

$$\Rightarrow \frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{b}$$

задача: $\underbrace{y}_{a_1} \frac{\partial z}{\partial x} + \underbrace{x}_{a_2} \frac{\partial z}{\partial y} = \underbrace{z}_{b} \Rightarrow \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}$

⑦. ОР линейного УЧП I порядка

$y\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 1). система характеристик $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{1}$

$dx = y\,dy$

2). $x = \frac{y^2}{2} + C$ $C = x - \frac{y^2}{2}$ - первый интеграл!!!

3). $z = f(t(x,y)) = f(C) = f\left(x - \frac{y^2}{2}\right) \Rightarrow t(x,y) = x - \frac{y^2}{2}$

⑧. ОР квазилинейного УЧП I порядка

$\underbrace{\frac{1}{x}}_{a_1}\frac{\partial z}{\partial x} - \underbrace{\frac{1}{y}}_{a_2}\frac{\partial z}{\partial y} = \underbrace{\frac{1}{z}}_{b}$ 1). система для характеристик

$\frac{dx}{1/x} = -\frac{dy}{1/y} = \frac{dz}{1/z}$

2). Берем любые 2 ур-я, находим n интегралов системы
(судя по ответам, берем 1 и 3 и 2 и 3)

$x\,dx = z\,dz$ $x^2 = z^2 + C_1$ $C_1 = z^2 - x^2$

$-y\,dy = z\,dz$ $-y^2 = z^2 + C_2$ $C_2 = z^2 + y^2$

3). ОР: $F(C_1, C_2) = 0 \Rightarrow f(z^2 + y^2, z^2 - x^2) = 0$

⑨. Задача Коши для линейного УЧП I порядка

$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \\ z|_{y=-x} = y \end{cases}$ $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1}$ $dx = dy$

$x = y + C$

– нашли 1 интеграл

$z = f(C) = f(x - y)$

$z|_{y=-x} = f(-y-y) = f(-2y) = y \Rightarrow f(t) = -\frac{t}{2}$

$z = \frac{y - x}{2}$; в точке (13; 5) $z = \frac{-13+5}{2} = -4$ -4

⑩. Задача Коши для квазилинейного УЧП I порядка

$\begin{cases} 2\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y} = e^z \\ z|_{x=2y} = -\ln(x-y) \end{cases}$ $\frac{dx}{2} = -\frac{dy}{3} = \frac{dz}{e^z}$

1). $x/2 = -y/3 + C_1$ $C_1 = \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$

2). $-\frac{dy}{3} = e^{-z}dz \Rightarrow \frac{y}{3} + C_2 = e^{-z}$ $C_2 = e^{-z} - \frac{y}{3}$

$\cancel{F(\frac{x}{2}-\frac{y}{3})}$, $\begin{cases} C_1 = \frac{x}{2} - \frac{y}{3} \\ C_2 = e^{-z} - \frac{y}{3} \end{cases}$ подставляем $x = 2y$, $z = -\ln(x-y)$

$\begin{cases} C_1 = \frac{4y}{3} \\ C_2 = x - y - \frac{y}{3} = \frac{2y}{3} \end{cases} \Rightarrow \underline{C_1 = 2C_2}$

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2e^{-z} - \frac{2y}{3}$

$2e^{-z} = \frac{x}{2} + y$

$z = -\ln\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right)$

$z(-2,3) = -\ln\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 0$

(11) <u>Функция Грина</u>

$L[y] = y''$ $\quad y'(0) - y(0) = 0 \quad y(1) = 0$

$\begin{cases} y'' = \delta(x) \\ y'(0) - y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

1) $0 \le x \le s$ $\quad y'' = 0 \quad y = Ax + B \quad y' = A$

$A - B = 0 \quad A = B$

$y_1 = Ax + A$

2) $s < x \le 1$ $\quad y'' = 0 \quad y = Cx + D \quad y(1) = 0 \quad C + D = 0$

$D = -C$

$y_2 = Cx - C$

3) $\begin{cases} y_1(s) = y_2(s) \\ y_1'(s) - y_2'(s) = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} As + A = Cs - C \\ A - C = 1 \end{cases}$ $\quad A = C + 1$

$\cancel{Cs} + s + C + 1 = \cancel{Cs} - C$

$2C = -s - 1 \quad C = -\frac{1}{2}(s+1)$

$A = -\frac{s}{2} - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2}(s-1)$

$G(x,s) = \begin{cases} y_1 & 0 < x \le s \\ y_2, & s < x < 1 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2}(s-1)(x+1) \\ -\frac{1}{2}(s+1)(x-1) \end{cases}$

$G = -\frac{1}{2}\begin{cases} (x+1)(s-1) & 0 \le x \le s \\ (s+1)(x-1) & s \le x \le 1 \end{cases}$