Тестирование по оптике №1

Составил: Пригорный Игорь (210), 2018 г.

Раздел 1. Геометрическая оптика. Формула тонкой линзы.

Формула тонкой линзы и коэффициент увеличения:[1]

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F} \qquad \Gamma=\frac{b}{a}$$

1.1 Фокусное расстояние собирающей линзы $F = 0{,}2$ м. Если линза дает мнимое изображение объекта с увеличением $\Gamma = 5$, то расстояние от объекта до линзы равно ...

Так как изображение мнимое, то b надо взять со знаком минус:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{F} \\[2ex] \Gamma=\dfrac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a\Gamma}=\dfrac{1}{F} \\[2ex] \dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a\Gamma} \end{cases}$$

$$\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{\Gamma}\right) \Rightarrow a=F\left(1-\frac{1}{\Gamma}\right)=0{,}2\left(1-\frac{1}{5}\right)\approx 0{,}16 \text{ м}$$

Ответ: $a=F\left(1-\dfrac{1}{\Gamma}\right)\approx 0{,}16$ м.

1.2 Фокусное расстояние собирающей линзы $F = 0{,}25$ м. Если линза дает действительное изображение такого же размера, то расстояние от объекта до изображения равно ...

Если поставить объект в двойной фокус собирающей линзы, то его изображение будет того же размера:

$$\frac{1}{2F}+\frac{1}{2F}=\frac{1}{F} \qquad \Gamma=\frac{2F}{2F}=1$$

Тогда расстояние от объекта до изображения:

$$L=a+b=2F+2F=4F=1 \text{ м}$$

Ответ: $L = 1$ м.

Раздел 2. Прохождение лучей через линзу.

2.1 Необходимо указать ход лучей в собирающей линзе.

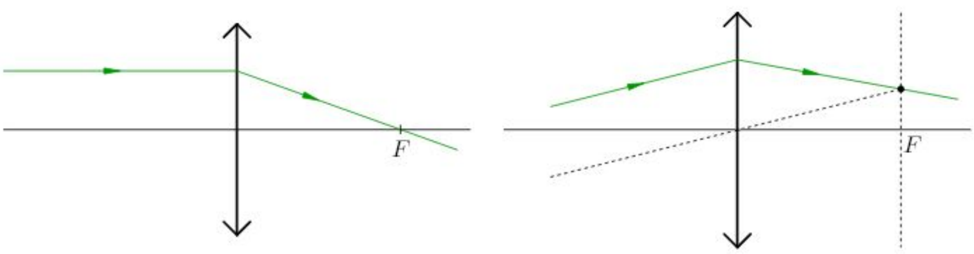


Рис. 1. Ход лучей в собирающей линзе.

2.2 Необходимо указать ход лучей в рассеивающей линзе.

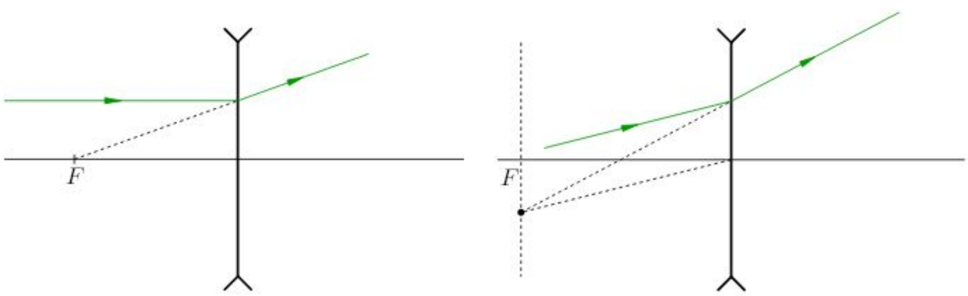


Рис. 2. Ход лучей в рассеивающей линзе.

[1]Здесь a – расстояние от объекта до линзы, b – расстояние от линзы до изображения, F – фокусное расстояние. В случае мнимого изображения, b необходимо брать со знаком минус.

Раздел 3. Бегущие и стоячие волны.

3.1 В пространстве установилась стоячая электромагнитная волна, магнитная компонента которой:

$$\vec{B} = \vec{e}_y B_0 \cos(\omega t)\sin(kx)$$

Учитывая, что $E_0 > 0$ и $B_0 > 0$, указать закон изменения соответствующей электрической компоненты $\vec{E}$.

Для решения данной задачи необходимо воспользоваться следующим уравнением Максвелла и следующими линейными материальными уравнениями (в случае, если в задаче фигурируют $\vec{D}$ или $\vec{H}$):

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$$

Пусть $\vec{E} = \vec{e}_x E_x + \vec{e}_y E_y + \vec{e}_z E_z$, тогда:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{e}_y B_0\cos(\omega t)\sin(kx) = \vec{e}_y B_0\omega\sin(\omega t)\sin(kx)$$

В силу единственности разложения по базису, выражения при $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ и $\vec{e}_z$ должны быть равны. Таким образом получаем систему уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = B_0\omega\sin(\omega t)\sin(kx) \\[2ex] \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Следует также учесть, что световая электромагнитная волна – поперечная. Это означает, что $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{v}$, то есть направления колебания электрической и магнитной компонент, а также направление распространения волны должны быть взаимно перпендикулярны. В условии задачи $\vec{B} = \vec{e}_y f(x,t)$, то есть $\vec{B}$ колеблется вдоль $\vec{e}_y$ и распространяется вдоль $\vec{e}_x$. Тогда, очевидно, $\vec{E}$ колеблется вдоль $\vec{e}_z$ и распространяется вдоль $\vec{e}_x$. То есть $\vec{E} = \vec{e}_z f(x,t)$. Таким образом, из второго уравнения системы будем иметь:

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} = B_0\omega\sin(\omega t)\sin(kx)$$

$$\vec{E} = -\vec{e}_z\int B_0\omega\sin(\omega t)\sin(kx)dx = \vec{e}_z B_0\frac{\omega}{k}\sin(\omega t)\cos(kx)$$

Учитывая, что $k = 2\pi/\lambda$ и $\omega = 2\pi/T$, окончательно имеем:

$$\vec{E} = \vec{e}_z B_0\frac{2\pi}{T}\frac{\lambda}{2\pi}\sin(\omega t)\cos(kx) = \vec{e}_z B_0 c\sin(\omega t)\cos(kx)$$

Ответ: $\vec{E} = \vec{e}_z B_0 c\sin(\omega t)\cos(kx)$.

3.2 В пространстве установилась бегущая электромагнитная волна, электрическая компонента которой:

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_0\sin(\omega t - kz)$$

Учитывая, что $E_0 > 0$ и $H_0 > 0$, указать закон изменения соответствующей магнитной компоненты $\vec{H}$.

Пусть $\vec{E} = \vec{e}_x E_x + \vec{e}_y 0 + \vec{e}_z 0 = \vec{e}_x E_x$, тогда:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_y\frac{\partial E_x}{\partial z} - \vec{e}_z\frac{\partial E_x}{\partial y} = \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial z}E_0\sin(\omega t - kz) = -\vec{e}_y E_0 k\cos(\omega t - kz) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\vec{B} = \frac{1}{\mu\mu_0}\vec{e}_y\int E_0 k\cos(\omega t - kz)dt = \frac{1}{\mu\mu_0}\vec{e}_y E_0\frac{k}{\omega}\sin(\omega t - kz) = \vec{e}_y\frac{E_0}{c\mu\mu_0}\sin(\omega t - kz)$$

Ответ: $\vec{H} = \vec{e}_y\dfrac{E_0}{c\mu\mu_0}\sin(\omega t - kz)$.

Раздел 4. Электромагнитные волны – 1.

4.1 В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна с частотой $\nu = 2 \cdot 10^{14}$ Гц. Волновое число k равно ...

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 10^8} \approx 4 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}$$

Ответ: $k = \dfrac{2\pi\nu}{c} \approx 4 \cdot 10^6$ м$^{-1}$.

4.2 В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна с длинной волны λ. В произвольной точке изменение фазы волны за промежуток времени $\delta t = 10^{-15}$ с равно $\delta\varphi = \pi$ радиан. Длина волны λ равна ...

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{\lambda} = \omega\frac{T}{\lambda} = \frac{\delta\varphi}{\delta t}\frac{1}{c} \Rightarrow \lambda = 2\pi c\frac{\delta t}{\delta\varphi} = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{10^{-15}}{\pi} \approx 6 \cdot 10^{-7} \text{ м} \approx 0{,}6 \text{ мкм}$$

Ответ: $\lambda = 2\pi c\dfrac{\delta t}{\delta\varphi} \approx 0{,}6$ мкм.

Раздел 5. Электромагнитные волны – 2.

Соотношения на электрические и магнитные амплитуды, скорость света и выражение для интенсивности:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu\mu_0}H_0$$
$$v = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$$
$$I = \frac{1}{2}E_0H_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E_0^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}H_0^2$$

5.1 В вакууме распространяется плоская монохроматическая волна интенсивностью $I_0 = 20$ Дж/(м^2·с). Найти амплитуду напряженности H_0 магнитного поля. Значения $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 1{,}26 \cdot 10^{-6}$ Гн/м даны.

В вакууме $\varepsilon = \mu = 1$:

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}H_0^2 \Rightarrow H_0 = \sqrt{2I} \cdot \sqrt[4]{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \sqrt{2 \cdot 20} \cdot \sqrt[4]{\frac{8{,}85 \cdot 10^{-12}}{1{,}26 \cdot 10^{-6}}} \approx 0{,}326 \text{ А/м}$$

Ответ: $H_0 = \sqrt{2I} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \approx 0{,}326$ А/м.

Раздел 6. Давление света.

Сила и давление света:[2]

$$\begin{cases} f_{\vec{n}} = (1 + \rho - \tau)\dfrac{I_0}{c}\delta S\cos^2\varphi \\[2ex] f_{\vec{\tau}} = (1 - \rho - \tau)\dfrac{I_0}{c}\delta S\dfrac{\sin 2\varphi}{2} \end{cases}$$

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{dW}{\delta S \cdot cdt} = \frac{I_0}{c} \quad p = \frac{f_{\vec{n}}}{\delta S} = (1 + \rho - \tau)\frac{I_0}{c}\cos^2\varphi$$

6.1 Плоская световая волна интенсивности I_0 падает на плоскую зеркальную поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0{,}3$. Угол падения равен 60°. Если давление света на поверхность $= 0{,}36$ мкПа, то интенсивность волны равна ...

Поскольку поверхность зеркальная, то коэффициент пропускания $\tau = 0$:

$$p = \frac{f_{\vec{n}}}{\delta S} = (1 + \rho)\frac{I_0}{c}\cos^2\varphi \Rightarrow I_0 = \frac{pc}{1 + \rho}\frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{0{,}36 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8}{1 + 0{,}3}\frac{1}{\cos^2 60^\circ} \approx 332{,}3 \text{ Дж/(м}^2\text{·с)}$$

Ответ: $I_0 = \dfrac{pc}{1 + \rho}\dfrac{1}{\cos^2\varphi} \approx 332{,}3$ Дж/(м^2·с).

[2]Здесь $f_{\vec{n}}$ и $f_{\vec{\tau}}$ – нормальные и тангенциальные компоненты силы, ρ – коэффициент отражения, τ – коэффициент пропускания, I_0 – интенсивность падающего света, w – объёмная плотность энергии, δS – элементарная площадка, φ – угол падения.

6.2 Плоская световая волна интенсивности $I_0 = 20$ Дж/(м^2·с) падает на плоскую зеркальную поверхность площади $\delta S = 1$ см^2 с коэффициентом отражения $\rho = 0{,}5$. Угол падения равен $45°$. Сила, действующая на зеркало, равна ...

Поскольку поверхность зеркальная, то коэффициент пропускания $\tau = 0$:

$$f = \sqrt{f_{\vec{n}}^2 + f_{\vec{\tau}}^2} = \delta S \frac{I_0}{c}\sqrt{(1+\rho)^2\cos^4\varphi + (1-\rho)^2\frac{\sin^2 2\varphi}{4}} = \frac{10^{-4}\cdot 20}{3\cdot 10^8}\cdot\sqrt{(1+0{,}5)^2\cos^4 45° + (1-0{,}5)^2\frac{\sin^2 90°}{4}} \approx 5{,}27{\cdot}10^{-12}\ \text{Н}$$

Ответ: $f = \delta S \frac{I_0}{c}\sqrt{(1+\rho)^2\cos^4\varphi + (1-\rho)^2\frac{\sin^2 2\varphi}{4}} \approx 5{,}27\cdot 10^{-12}$ Н.

Раздел 7. Схема Юнга.

Разность хода и расстояние между максимумами в схеме Юнга:[3]

$$\Delta = \frac{xd}{L} \qquad \Delta x = \frac{\lambda L}{d}$$

Вывести формулу для Δx можно из выражения для Δ:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \dfrac{x_1 d}{L} = m\lambda \\ \\ \Delta_2 = \dfrac{x_2 d}{L} = (m+1)\lambda \end{cases} \Rightarrow \quad \Delta_2 - \Delta_1 = \frac{(x_2 - x_1)d}{L} = \lambda \ \Rightarrow \ \Delta x = x_2 - x_1 = \frac{\lambda L}{d}$$

7.1 В схеме Юнга два когерентных источника (длина волны λ) находятся на расстоянии $d = 0{,}4$ мм друг от друга. Ширина интерференционных полос на экране, расположенном на расстоянии $L = 2$ м от источников, равна $\Delta x = 5$ мм. Найти длину волны λ.

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d} \ \Rightarrow \ \lambda = \Delta x \frac{d}{L} = 5\cdot 10^{-3}\frac{0{,}4\cdot 10^{-3}}{2} \approx 10^{-6}\ \text{м} \approx 1\ \text{мкм}$$

Ответ: $\lambda = \Delta x \frac{d}{L} \approx 1$ мкм.

Раздел 8. Бипризма Френеля.

Разность хода и расстояние между максимумами в схеме с бипризой Френеля:[4]

$$\Delta = x\cdot 2\alpha(n-1)\cdot\frac{a}{a+b} \qquad \Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha(n-1)}\frac{a+b}{a}$$

Вообще говоря, формулу для Δx можно вывести из выражения для Δ методом как в задаче выше.

8.1 В интерференционной схеме с бипризмой Френеля расстояние от точечного источника с $\lambda = 400$ нм до экрана равно $L_1 = 200$ см. Расстояние от бипризмы с показателем преломления $n = 1{,}5$ и преломляющим углом α до экрана равно $L_2 = 90$ см. Найти угол бипризмы α, если ширина интерференционной полосы равна $\Delta x = 0{,}12$ мм.

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha(n-1)}\frac{a+b}{a} = \frac{\lambda}{2\alpha(n-1)}\frac{L_1}{L_1 - L_2} \ \Rightarrow \ \alpha = \frac{\lambda}{2\Delta x(n-1)}\frac{L_1}{L_1 - L_2} = \frac{400\cdot 10^{-9}}{2\cdot 0{,}12\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}5}\frac{2}{1{,}1} \approx 6\cdot 10^{-3}\ \text{радиан}$$

Ответ: $\alpha = \frac{\lambda}{2\Delta x(n-1)}\frac{L_1}{L_1 - L_2} \approx 6\cdot 10^{-3}$ радиан.

Раздел 9. Временная когерентность.

Время когерентности $\tau_к$ – время, по истечении которого разность фаз волны $\delta\varphi$ в некоторой, но одной и той же точке пространства изменяется на π.

Длина когерентности $l_к$ – расстояние между точками, разность фаз $\delta\varphi$ в которых π.

При равенстве разности хода Δ длине когерентности $l_к$ функция видности V обращается в 0, то есть интерференционная картина пропадает.

$$l_к = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \qquad \tau_к = \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}$$

[3]Здесь d – расстояние между щелями, L – расстояние от экрана с щелями до экрана с интерференционной картиной.

[4]Здесь a – расстояние от источника до бипризмы, b – расстояние от бипризмы до экрана, α – угол в бипризме, n – коэффициент преломления.

9.1 Квазимонохроматическое излучение с длиной волны $\lambda = 600$ нм имеет спектральную ширину линии $\Delta\lambda = 0{,}02$ нм. Найти время когерентности излучения.

$$\tau_\text{к} = \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda} = \frac{(600 \cdot 10^{-9})^2}{3 \cdot 10^8 \cdot 0{,}02 \cdot 10^{-9}} \approx 6 \cdot 10^{-11} \text{ с}$$

Ответ: $\tau_\text{к} = \dfrac{\lambda^2}{c\Delta\lambda} \approx 6 \cdot 10^{-11}$ с.

9.2 Квазимонохроматическое излучение с длиной волны $\lambda = 690$ нм имеет ширину спектра излучения $\Delta\omega = 2 \cdot 10^{10}$ с$^{-1}$. Найти спектральную ширину излучения $\Delta\lambda$.

$$\lambda = cT \;\Rightarrow\; T = \frac{\lambda}{c} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \;\Rightarrow\; T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\Delta\lambda \equiv \hat{\Delta}\lambda = \hat{\Delta}(cT) = \hat{\Delta}\left(\frac{2\pi c}{\omega}\right) = -\frac{2\pi c}{\omega^2}\hat{\Delta}\omega \equiv 2\pi c\frac{\Delta\omega}{\omega^2} = 2\pi c\frac{T^2}{4\pi^2}\Delta\omega = 2\pi c\frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2}\Delta\omega = \frac{\lambda^2}{2\pi c}\Delta\omega$$

$$\Delta\lambda = \frac{(690 \cdot 10^{-9})^2}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8} \cdot 2 \cdot 10^{10} \approx 5 \cdot 10^{-12} \text{ м} \approx 0{,}005 \text{ нм}$$

Ответ: $\Delta\lambda = \dfrac{\lambda^2}{2\pi c}\Delta\omega \approx 0{,}005$ нм.

Раздел 10. Преобразование Фурье.

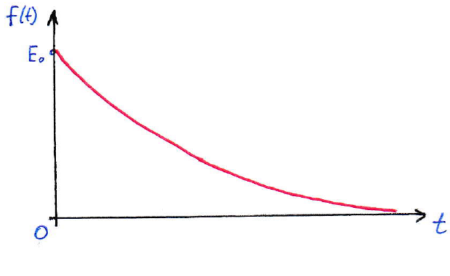
Необходимо указать по формуле сигнала $f(t)$ его Фурье-образ $\hat{f}(i\omega)$ и спектральную плотность интенсивности $S(\omega)$ или наоборот. Как правило, просят указать качественную зависимость (выбрать картинку с графиком).

$$\hat{f}(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(i\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad S(\omega) = \frac{|\hat{f}(i\omega)|^2}{\pi\tau'} \quad I = \int\limits_{0}^{+\infty} S(\omega)d\omega$$

10.1 Сигнал «экспонента»:

$$f(t) = \begin{cases} E_0 e^{-t/2\tau}, \; t \geqslant 0 \\ 0, \; t < 0 \end{cases} \qquad \hat{f}(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int\limits_{0}^{+\infty} E_0 e^{-t(1/2\tau + i\omega)}dt = E_0 \frac{e^{-t(1/2\tau+i\omega)}}{-(1/2\tau + i\omega)}\Bigg|_0^{+\infty} = E_0\frac{1/2\tau - i\omega}{1/4\tau^2 + \omega^2}$$

$$S(\omega) = \frac{|\hat{f}(i\omega)|^2}{\pi\tau'} = \frac{|\hat{f}(i\omega)|^2}{2\pi\tau} = \frac{E_0^2}{2\pi\tau}\left|\frac{1/2\tau - i\omega}{1/4\tau^2 + \omega^2}\right|^2 = \frac{E_0^2}{2\pi\tau}\frac{1/4\tau^2 + \omega^2}{(1/4\tau^2 + \omega^2)^2} = \frac{E_0^2}{2\pi\tau}\frac{1}{1/4\tau^2 + \omega^2} = E_0^2\frac{1/2\pi\tau}{(1/2\tau)^2 + \omega^2}$$



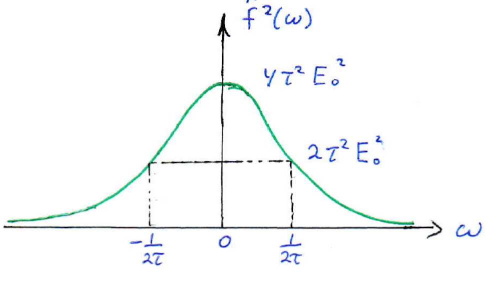


Рис. 3. График сигнала $f(t)$ (слева) и квадрата[5] его фурье-образа $|\hat{f}(i\omega)|^2$ (справа).

Таким образом, $|\hat{f}(i\omega)|^2$ и $S(\omega)$ у сигнала экспоненты имеют вид функции Лоренца[6].

10.2 Сигнал «модулированная экспонента»:

$$f(t) = \begin{cases} E_0 e^{-t/2\tau}\cos(\omega_0 t), \; t \geqslant 0 \\ 0, \; t < 0 \end{cases} \qquad \hat{f}(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int\limits_{0}^{+\infty} E_0 e^{-t(1/2\tau + i\omega)}\cos(\omega_0 t)dt = \int\limits_{0}^{+\infty} E_0 e^{-t(1/2\tau + i(\omega-\omega_0))}dt =$$

$$= E_0\frac{e^{-t(1/2\tau+i(\omega-\omega_0))}}{-(1/2\tau + i(\omega-\omega_0))}\Bigg|_0^{+\infty} = E_0\frac{1/2\tau - i(\omega-\omega_0)}{1/4\tau^2 + (\omega-\omega_0)^2} \qquad S(\omega) = \frac{|\hat{f}(i\omega)|^2}{\pi\tau'} = \frac{|\hat{f}(i\omega)|^2}{2\pi\tau} = E_0^2\frac{1/2\pi\tau}{(1/2\tau)^2 + (\omega-\omega_0)^2}$$

[5]Очевидно, качественно график спектральной плотности интенсивности $S(\omega)$ совпадает с графиком квадрата фурье-образа сигнала $|\hat{f}(i\omega)|^2$.
[6]Функция Лоренца (она же распределение Коши) имеет колоколообразный вид, но более «острая», чем функция Гаусса.

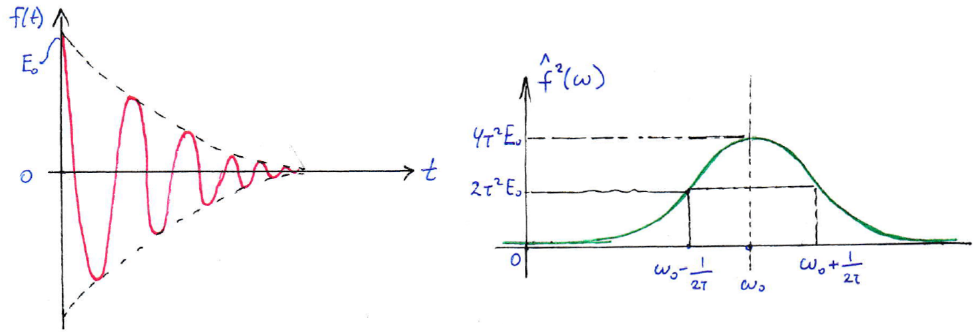


Рис. 4. График сигнала $f(t)$ (слева) и квадрата его фурье-образа $|\hat{f}(i\omega)|^2$ (справа).

Таким образом, $|\hat{f}(i\omega)|^2$ и $S(\omega)$ у сигнала модулированной экспоненты имеют вид функции Лоренца, смещённой на ω_0.

Отметим, что при модулировании любого сигнала $f(t)$ функцией $\cos(\omega_0 t)$ её $|\hat{f}(i\omega)|^2$ и $S(\omega)$ будут как у исходной, только смещённые вправо на ω_0.

$$f(t) \risingdotseq \hat{f}(i\omega) \;\Rightarrow\; f(t)\cos(\omega_0 t) \risingdotseq \hat{f}(i(\omega - \omega_0))$$

10.3 Сигнал «Гаусс-функция»:

$$f(t) = E_0 e^{-at^2},\; a > 0 \qquad \hat{f}(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \hat{f}(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_0 e^{-at^2 - i\omega t} dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_0 \exp\left(-a\left[t^2 + \frac{i\omega}{a} t\right]\right) dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_0 \exp\left(-a\left[t^2 + 2\frac{i\omega}{2a} t + \frac{i^2\omega^2}{4a^2} - \frac{i^2\omega^2}{4a^2}\right]\right) dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_0 \exp\left(-a\left[t + \frac{i\omega}{2a}\right]^2 - \frac{\omega^2}{4a}\right) dt = \left[t + \frac{i\omega}{2a} = y\right] =$$

$$= E_0 e^{-\omega^2/4a} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy = E_0 e^{-\omega^2/4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad S(\omega) = \frac{|\hat{f}(i\omega)|^2}{\pi\tau'} = \frac{E_0^2}{a\tau} e^{-\omega^2/2a}$$

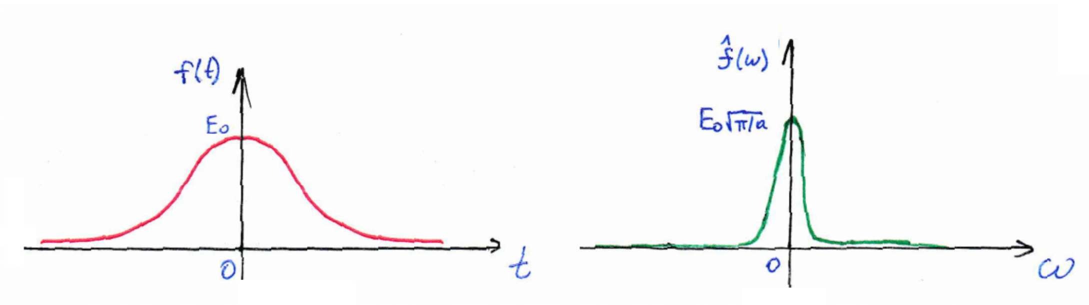


Рис. 5. График сигнала $f(t)$ (слева) и его фурье-образа $\hat{f}(i\omega)$ (справа).

Таким образом, Фурье-образ $\hat{f}(i\omega)$ у сигнала Гаусс-функции имеет тоже вид Гаусс-функции, а квадрат Фурье-образа $|\hat{f}(i\omega)|^2$ и спектральная плотность интенсивности $S(\omega)$ имеет вид квадрата Гаусс-функции.

10.4 Сигнал «модулированная Гаусс-функция»:

$$f(t) = E_0 e^{-at^2} \cos\omega_0 t,\; a > 0 \quad \hat{f}(i\omega) = E_0 e^{-(\omega-\omega_0)^2/4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad S(\omega) = \frac{E_0^2}{a\tau} e^{-(\omega-\omega_0)^2/2a}$$

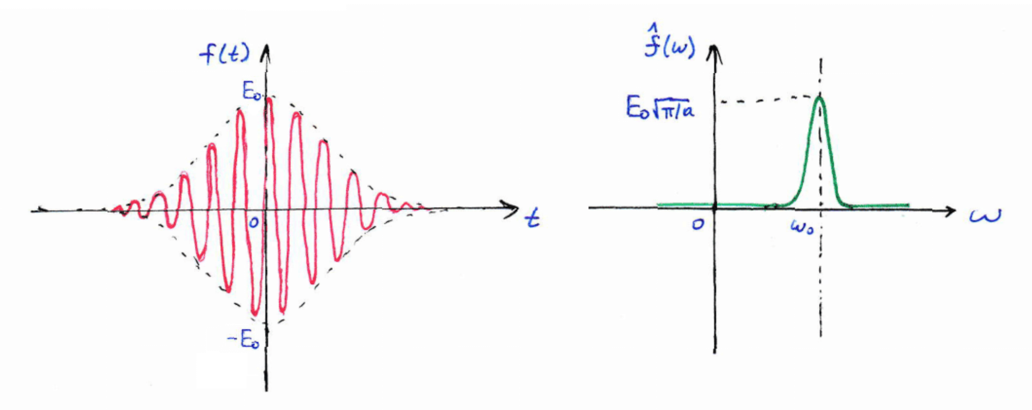


Рис. 6. График сигнала $f(t)$ (слева) и его фурье-образа $\hat{f}(i\omega)$ (справа).

Таким образом, Фурье-образ $\hat{f}(i\omega)$ у сигнала модулированной Гаусс-функции имеет тоже вид Гаусс-функции, смещённой на ω_0, а квадрат Фурье-образа $|\hat{f}(i\omega)|^2$ и спектральная плотность интенсивности $S(\omega)$ имеет вид квадрата Гаусс-функции, смещённой на ω_0.

10.5 Прямоугольный волновой пакет («ЦУГ»):

$$f(t) = \begin{cases} E_0, & |t| \leqslant \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases} \qquad \hat{f}(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int\limits_{-\tau/2}^{+\tau/2} E_0 e^{-i\omega t}dt = E_0 \frac{e^{-i\omega\tau/2} - e^{i\omega\tau/2}}{-i\omega} = E_0 \frac{2\sin(\omega\tau/2)}{\omega} = E_0\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} =$$

$$= E_0\tau \,\mathrm{sinc}\left(\omega\frac{\tau}{2}\right) \qquad S(\omega) = \frac{|\hat{f}(i\omega)|^2}{\pi\tau'} = \frac{E_0^2\tau^2}{\pi}\,\mathrm{sinc}^2\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)$$

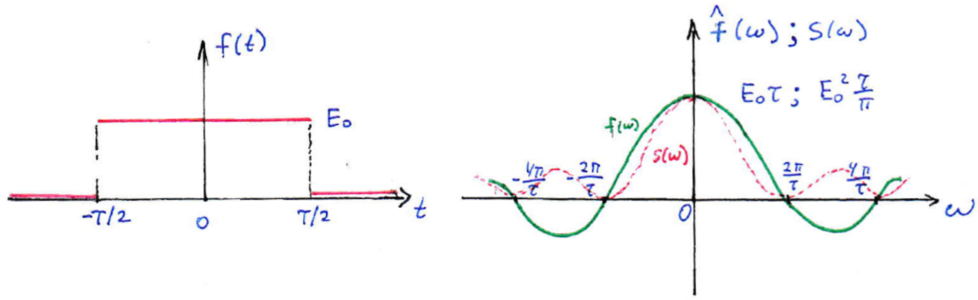


Рис. 7. График сигнала $f(t)$ (слева) и его фурье-образа $\hat{f}(i\omega)$ со спектр. плотностью интенсивности $S\omega$ (справа зелёным и красным соотвественно).

Таким образом, Фурье-образ $\hat{f}(i\omega)$ у сигнала прямоугольного волнового пакета имеет вид «осьминога» (функция синкус), а его квадрат $|\hat{f}(i\omega)|^2$ и спектральная плотность интенсивности $S(\omega)$ имеют вид «кракена» (функция синкус в квадрате).

10.6 Прямоугольный волновой пакет («ЦУГ») с модуляцией:

$$f(t) = \begin{cases} E_0\cos\omega_0 t & |t| \leqslant \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases} \qquad \hat{f}(i\omega) = E_0\tau \,\mathrm{sinc}\left((\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}\right) \qquad S(\omega) = \frac{E_0^2\tau^2}{\pi}\,\mathrm{sinc}^2\left((\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}\right)$$

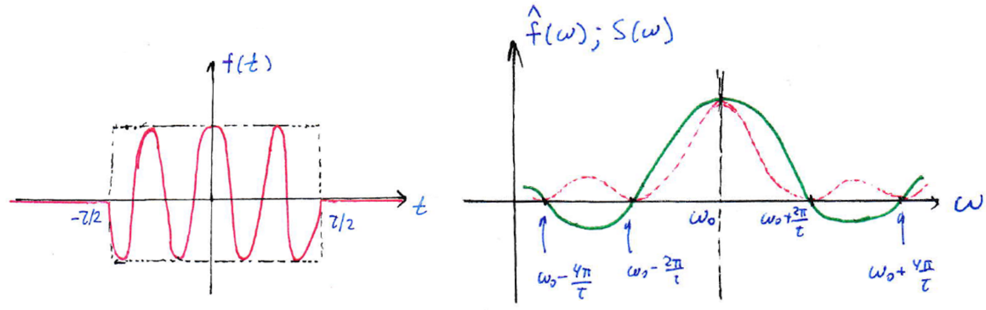


Рис. 8. График сигнала $f(t)$ (слева) и его фурье-образа $\hat{f}(i\omega)$ со спектр. плотностью интенсивности $S\omega$ (справа зелёным и красным соотвественно).

Таким образом, Фурье-образ $\hat{f}(i\omega)$ у сигнала прямоугольного волнового пакета с модуляцием имеет вид смещённого на ω_0 «осьминога» (функция синкус), а его квадрат $|\hat{f}(i\omega)|^2$ и спектральная плотность интенсивности $S(\omega)$ имеют вид смещённого на ω_0 «кракена» (функция синкус в квадрате).

Список литературы для самостоятельной подготовки:

1. Информация к семинарам по оптике на сайте И. В. Митина.

2. Волновые процессы. Основные законы. И. Е. Иродов.

3. Записи семинаров по оптике В. А. Овчинкина.