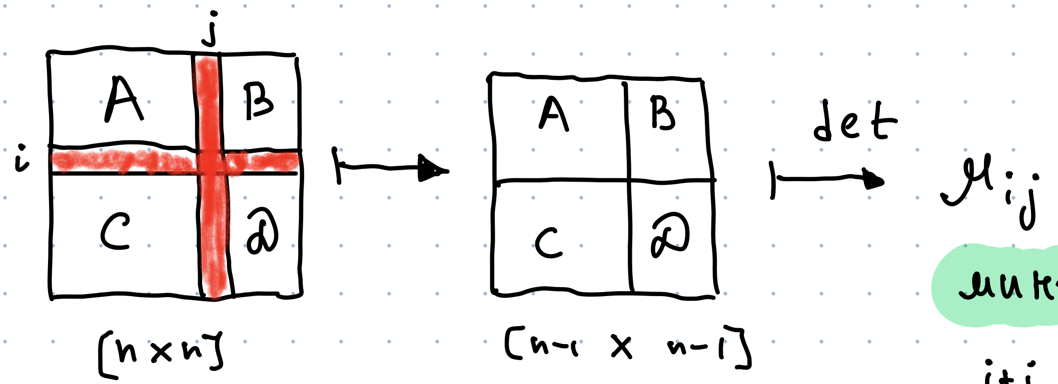
Определитель, Ранг, лин. нез., базис

① Миноры и алгебраические дополнения



минор

$$(-1)^{i+j} M_{ij} = A_{ij}$$

алгебраическое дополнение

$$\hat{A}_{ij} = A_{ji}$$

формула разложения по строке:

$$\det \begin{pmatrix} & & \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ & & \end{pmatrix} = a_{i1}\cdot \overbrace{A_{i1}}^{\hat{A}_{1i}} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$$

По столбцу тоже можно разложить

Упражнение

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} =$$

Буду раскладывать по второму столбцу

$$\det(A_1\ A_2\ A_3) = \det(A_1, A_2' + \tilde{A}_2, A_3) =$$
$$= \det(A_1, A_2', A_3) + \det(A_1, \tilde{A}_2, A_3)$$

$(1)+\frac{1}{2}(2)$

$$= \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^2 \cdot \det\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^3 \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$$

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{matrix}$$

$$= \underbrace{(-1)^1}_{(-1)^{1+2}} \cdot 2 \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}}_{M_{12}} + \underbrace{(-1)^2}_{(-1)^{2+2}} \cdot 5 \underbrace{\det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}}_{M_{22}} + \underbrace{(-1)^3}_{(-1)^{3+2}} \cdot 8 \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}}_{M_{32}}$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Явная формула для A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = ? \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

$\boxed{\det A \neq 0 \text{ тогда } A^{-1} \text{ есть}}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$A\hat{A} = \hat{A}A = \det A \cdot I$$

$$A \cdot \frac{\hat{A}}{\det A} = \underbrace{\frac{\hat{A}}{\det A}}_{A^{-1}} \cdot A = I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \hat{A}$$

Упражнение Единственный полезный случай – [2×2]

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad-cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2,1 1,2 2,2 2,2

$(-1)^{2+1} \cdot M_{21}$ $(-1)^{2+2} \cdot M_{22}$

Утверждение

$$A\hat{A} = \det A \cdot I$$

■ $(A\hat{A})_{ii} = \det A$

$$(A\hat{A})_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \hat{A}_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \overbrace{A_{ij}}^{(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}} = \det A$$

i — i

$(A\hat{A})_{ij} = 0 \quad i \neq j$

$a_{ik} = a_{jk}$

$A_{jk} = A_{ik}$

$$(A\hat{A})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \hat{A}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \overbrace{(-1)^{j+k} M_{jk}} = 0$$

$$A' = \begin{pmatrix} & * & \\ a_{i1} \dots & a_{ik} & \dots a_{in} \\ & * & \\ a_{i1} \dots & a_{ik} & \dots a_{in} \\ & * & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}$$

$\sum a_{ik} \cdot A_{jk}$ $\shortparallel$ $\det A' = 0$

■

Формулы Крамера

$$\boxed{A}_{[n\times n]} \cdot \boxed{x} = \boxed{b} \qquad \det A \neq 0$$

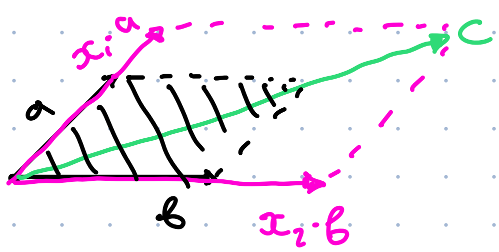
$$\boxed{x} = A^{-1}\cdot\boxed{b}$$

$$\Delta = \det A \qquad \Delta_i = \det \begin{array}{ccc} & i & \\ \left(\begin{array}{c|c|c} A & b & A \end{array}\right) \end{array} \qquad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

Почему это так?

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{a} x_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}}_{b} x_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}}_{c}$$

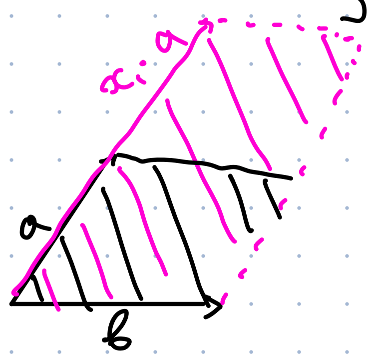


$$\det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = S(a, b)$$

$$\det\begin{pmatrix} | & | \\ a & b \\ | & | \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} | & | \\ a+b\cdot\lambda & b \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$S(a,b) = S(a+b\lambda, b)$$

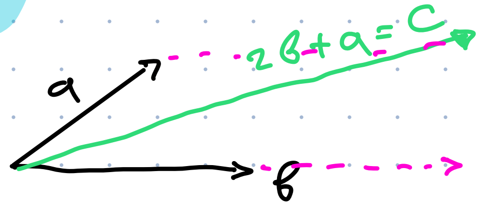
$$x_1 = \frac{S(x_1\cdot a, b)}{S(a,b)}$$



$$S(x_1 a + x_2 b, b) = S(x_1 a, b) = S(c, b)$$

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} | & | \\ c & b \\ | & | \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} | & | \\ a & b \\ | & | \end{pmatrix}}$$

② Линейная независимость



Опр. $v_1,\dots,v_n$ — вектора

$\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ — линейная комбинация

$v_1,\dots,v_n$ линейно зависимы $\exists\, \lambda_1,\dots,\lambda_n$:

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$

и хотя бы одно из $\lambda_i \neq 0$

линейно незав. $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$

$\Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i$

Упражнение

$\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}} \ \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \ \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$v_1 = 2 \cdot v_2 + 3 v_3$

порождающие

$\underset{\lambda_1}{1} \cdot v_1 - \underset{\lambda_2}{2} v_2 - \underset{\lambda_3}{3} v_3 = 0$

линейно зав.

$\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \ \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\lambda_1 \cdot 1 = -\lambda_1 \cdot 1 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\lambda_2 \cdot (-2) = \lambda_2 \cdot 1 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

- один вектор линейно зависим. Что это значит?

  $\{v\}$ $\exists\, \lambda \neq 0$: $\lambda v = 0 \Leftrightarrow v = 0$

- два вектора лин. зав. — они лежат на 1 прямой
- три вектора лин. зав. — они лежат на 1 плоскости

Опр. Линейная оболочка – мн-во векторов, содержащее все возможные линейные комбинации

$\text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$

$$\text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^3$$

$$\text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

Опр. Размерность лин. пр-ва порожденного $v_1, \dots, v_n$ – число лин. нез. векторов.

$\dim V$

$\dim \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$

Опр. $v_1, \dots, v_n \in V$ порождающие если $\forall v \in V$ $\exists \lambda_i:$ $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

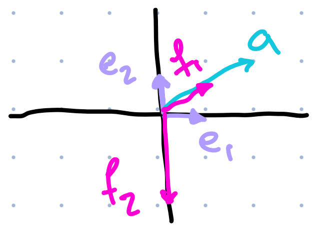
Опр. Если V – векторное пр.-во, $v_1, \dots, v_n \in V$ и они удовлетворяют одному из условий ниже, они наз. базисом

(1) $v_1, \dots, v_n$ – лин. нез. и порождающие

(2) $v_1, \dots, v_n$ – являются максимальным лин. нез. мн. т.е. если добавить еще один то возникнет зависимость

Сокральный смысл базиса:

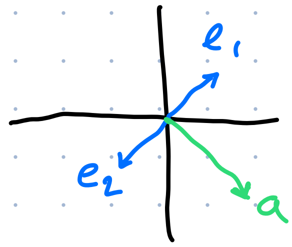
V $\quad \mathbb{R}^2$



ортонормир. базис

$a = 2\cdot e_1 + 1\cdot e_2 \quad \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$a = 2f_1 + 0\cdot f_2 \quad \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$



$e_1 = -e_2$

лин.

не базис

Базисов бывает много, оне все имеют одно и то же число векторов $= \dim V$

Утверждение

Разложение вектора через базис только одно

■
$$
\begin{array}{l}
v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \\
- \\
v = \tilde{\lambda}_1 v_1 + \ldots + \tilde{\lambda}_n v_n \\
\hline
0 = \underbrace{(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)}_{=0} v_1 + \ldots + \underbrace{(\lambda_n - \tilde{\lambda}_n)}_{=0} v_n
\end{array}
$$
■

Упражнение

$\mathbb{R}^3 \quad \underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}} \quad \underset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}} \quad \underset{v_3}{\begin{pmatrix}5\\12\\7\end{pmatrix}} \quad \underset{v_4}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} \quad \underset{v_5}{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}$

а) найти базис

б) остальные разлом. по базису

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\\\lambda_5\end{pmatrix} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_5 v_5 = 0$$

$Ax = 0$

система

Решаю систему и её решение — все возможные лин. комбинации из векторов

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_4 \end{pmatrix}$$

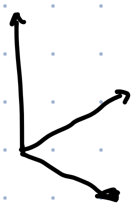
даст разл. v_4 по базису если в нем есть v_1, v_2, v_3

Можно сделать за 1 Гаусса:

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

свободные

главные



$$v_3 = 2v_1 + 3v_2 + 0 \cdot v_4$$

$$v_5 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 - 2 v_4$$

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 \cdot v_5$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Опр. 1 Мн-во V произвольных объектов наз. конечномерным лин. пр-вом если

1) мн-во V вз. одн. сопоставимо $\mathbb{R}^n$
2) Определено сложение объектов из V и оно аналогично сложению векторов из $\mathbb{R}^n$
3) Определено умн. на число и оно соотв.

умн. вектора на число

Пример:

$$V = \{at^3 + bt^2 + ct + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

$$5t^3 - 7t^2 + t \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^4$$

$$V = \{ f(t) \mid f(t) = 0 \quad \forall t \neq \pm 1 \}$$

$$\mathbb{R}^2 \qquad f \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(1) \end{pmatrix}$$

Опр. 2 Абстрактное векторное пр-во над $\mathbb{R}$

лин. пр-во:

① Данные:

- V – мн-во, его эл. наз. вектора
- $+ : V \times V \to V$

  $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$
- $\times : \mathbb{R} \times V \to V$

  $(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$

② Аксиомы

1) $(v+u)+w = v+(u+w)$
2) $v+u = u+v$
3) $\forall v \ \exists -v: \ v+(-v) = 0$
4) $\exists 0 \in V: \ 0+v = v$
5) $\lambda \cdot (u+v) = \lambda u + \lambda v$
6) $(\lambda + \mu) u = \lambda u + \mu u$
7) $(\lambda \mu) u = \lambda (\mu u)$
8) $1 \cdot v = v, \ v \neq 0$

$$\mathbb{R}^n$$

$$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$