Матрицы и СЛАУ

① Матрицы

$[n \times 1]$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

вектор-столбец

$x \in \mathbb{R}^n$

$[n \times m]$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

матрица - таблица из чисел

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Что можно делать?

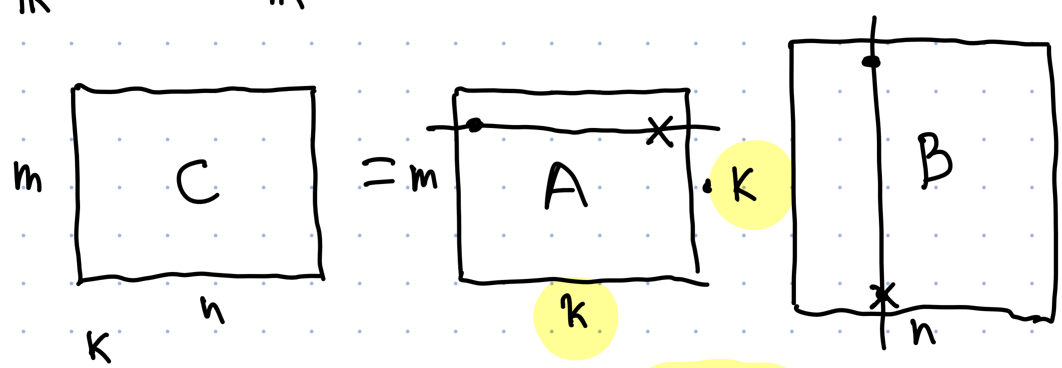
1) $C = A \pm B$ — размеры совпадают

$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

2) $\underset{\mathbb{R}^{n\times m}}{C} = \underset{\mathbb{R}}{\lambda} \cdot \underset{\mathbb{R}^{n\times m}}{A}$

$c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$

3)



$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} \cdot b_{rj}$$

Размеры - важны

$$\underset{[3\times 3]}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}} \underset{[3\times 1]}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = \underset{[3\times 1]}{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{[2\times 3]}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}} \underset{[3\times 2]}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}} = \underset{[2\times 2]}{\begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}}$$

скалярное произведение:

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^T \cdot y = \underset{[1\times n]}{(x_1 \ldots x_n)} \cdot \underset{[n\times 1]}{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}} = \underset{[1\times 1]}{\bullet}$$

Транспонирование

$$\underset{[k\times n]}{A} \cdot \underset{[n\times k]}{B} \neq \underset{[n\times k]}{B} \cdot \underset{[k\times n]}{A}$$

$$[k\times k] \qquad\qquad [n\times n]$$

4) Транспонирование

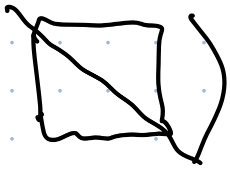
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij}) \quad A^T = (a_{ji})$

$(AB)^T = B^T A^T$

Задание: доказать

5) След квадратной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$tr(A) = tr($  $) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$$tr(\lambda \cdot A + B) = \lambda \cdot tr(A) + tr(B)$$

$$tr(A \cdot B) = tr(BA)$$

$$tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA)$$

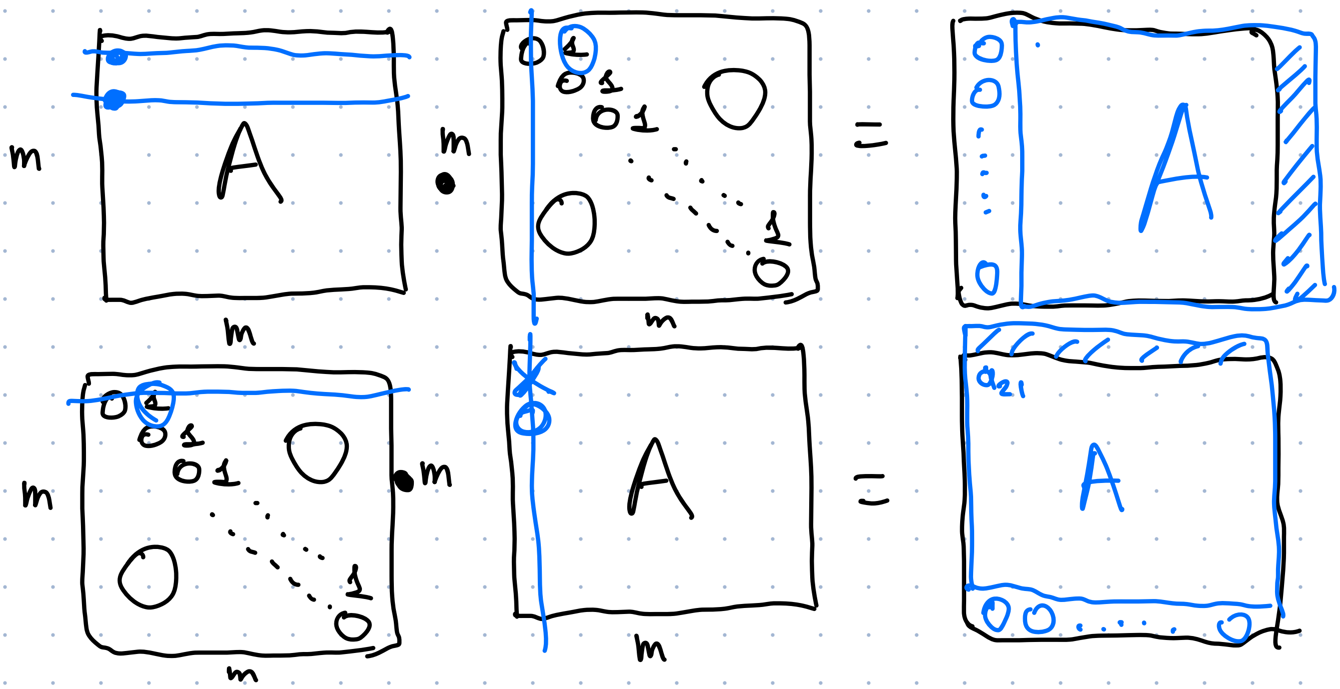
можно двигать по циклу если размерности не ломаются

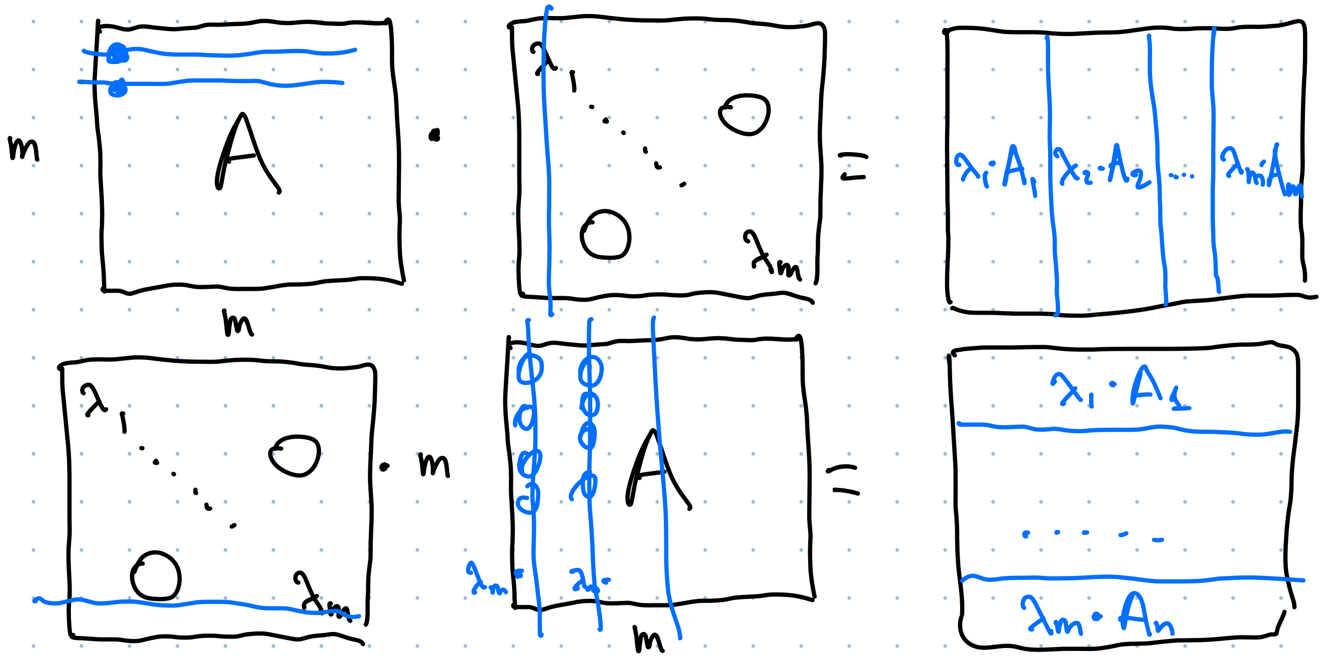
$$\underset{[n\times k]\,[k\times n]}{tr(AB)} = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{k} A_{ir} B_{ri}$$

$$tr(BA) = \sum_{r=1}^{k} (BA)_{rr} = \sum_{r=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} B_{ri} A_{ir}$$

Упражнение

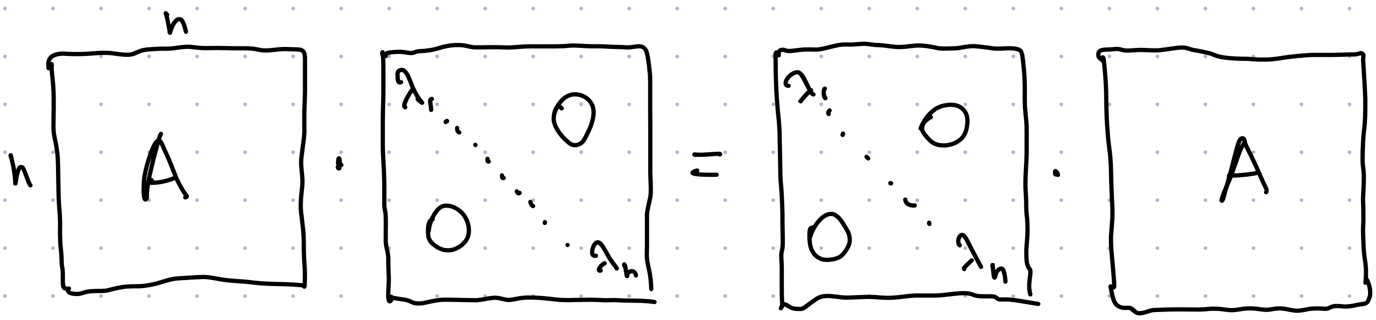
Что произойдёт с A?





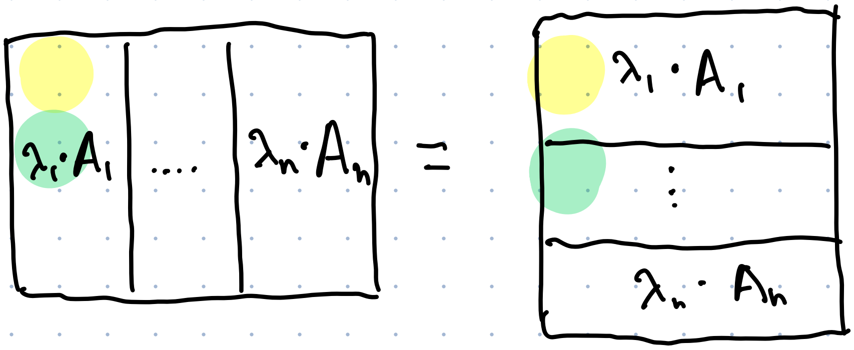
Действие на A слева – над строками
справа – над столбцами

Упражнение



$i \neq j \quad \lambda_i \neq \lambda_j$

Как выглядит A ?



$\lambda_1 a_{11} = \lambda_1 \cdot a_{11}$

$\lambda_1 \cdot a_{21} = \lambda_2 \cdot a_{21}$

$\Rightarrow a_{21} = 0$

Перебор $\Rightarrow$ все эл. вне диагонали нули

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & & 0 \\ & \lambda_2\mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

② СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad x_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

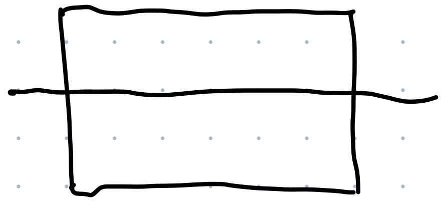
Цель: решить систему => Алгоритм Гаусса

Элементарные преобразования:
(не меняют мн-во решений)

(I) $(i)\ \times \lambda \neq 0$, (j) $\oplus$ $(i)\cdot\lambda + (j) = (j)$

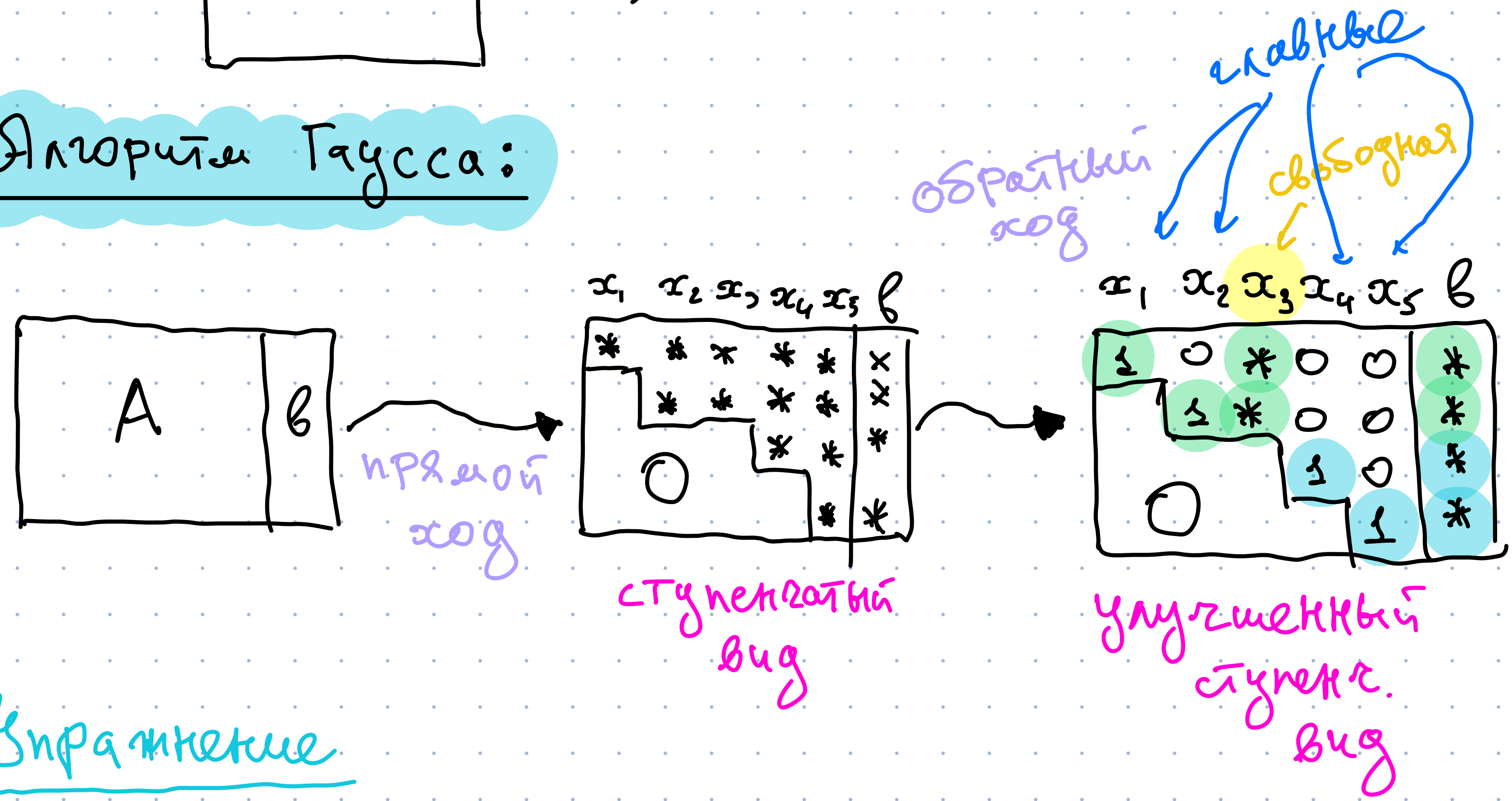
(II) i, j swap

(III)



$(i) \times \lambda \neq 0$

Алгоритм Гаусса:



Упражнение

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} -x + y = 0 \\ 0 \cdot x + 3 \cdot y = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{(2)+(1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{-1\cdot(1) \\ 1/3\cdot(2)}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right) \underset{(1)+(2)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} 1 \cdot x + 0 \cdot y = 1/3 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y = 1/3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \end{cases}$$

Упражнение

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right)$$
$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$$

Научились записывать главные через свободные

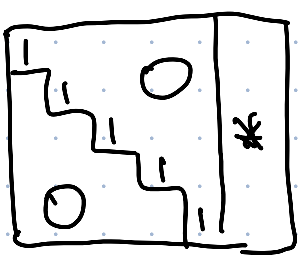
$\Rightarrow$ умею решать

∞ решений

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - 2x_4 \\ x_3 = 4 - 5x_4 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

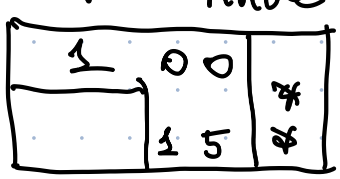
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ситуации:



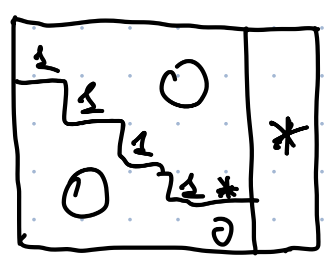
1 решение

$\exists$ свободные переменные



∞ решений

решений нет



$0 = b$

$\varnothing$

важно не перепутать с линейной зависимостью

Упражнение

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 = 2/3 - 1/3\, x_3 \\ x_2 = -1/3 - 1/3\, x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$(3) = 2\cdot(2)$

лин. зав.

③ Элементарные матрицы

Единичная матрица: $I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$

$I_n A = A$

$A I_n = A$

(I) $(i) \longleftarrow (i) + \lambda\cdot(j)$

$$S_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} & i & & j & & \end{array} \\ \hline & \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ i & & 1 & & \lambda & \\ & & & 1 & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

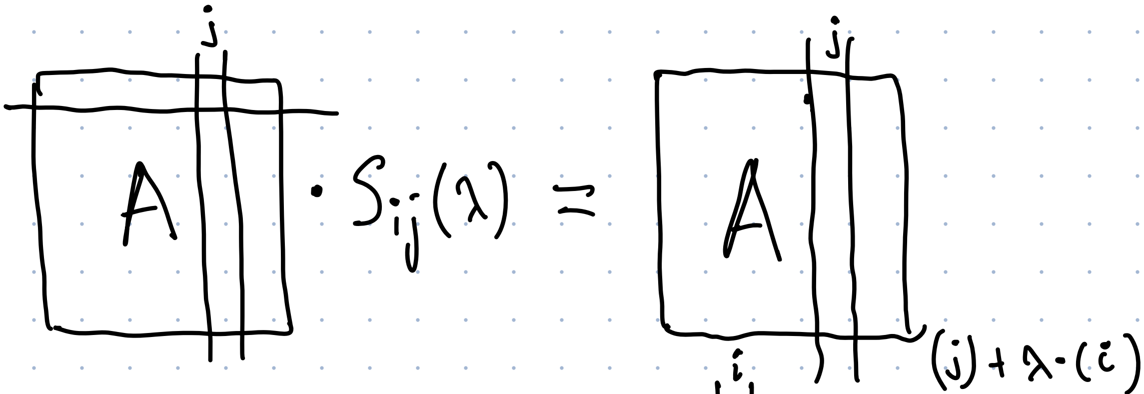
$[n \times n]$

$S_{ij}(\lambda)\cdot \begin{bmatrix} 1\cdot a_{i1} + \lambda\cdot a_{j1} & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ (i)+\lambda\cdot(j) \\ A \end{bmatrix}$ i

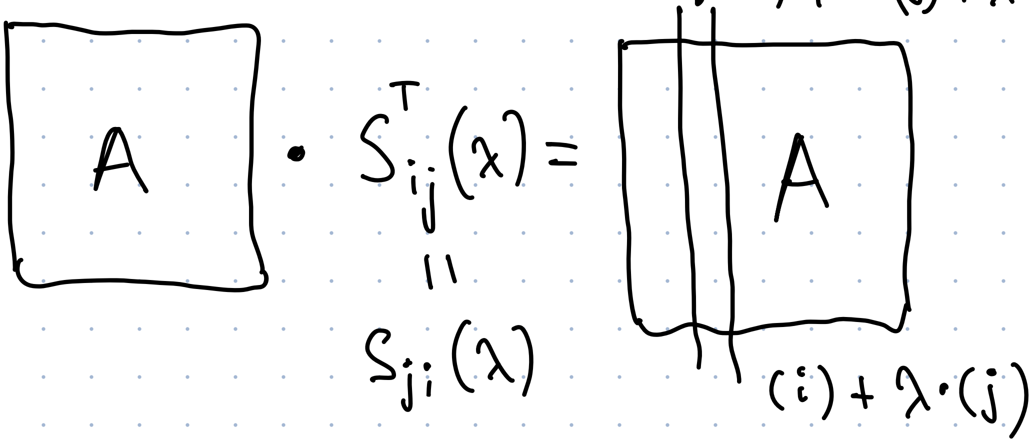
меняется только строка i

Задание:

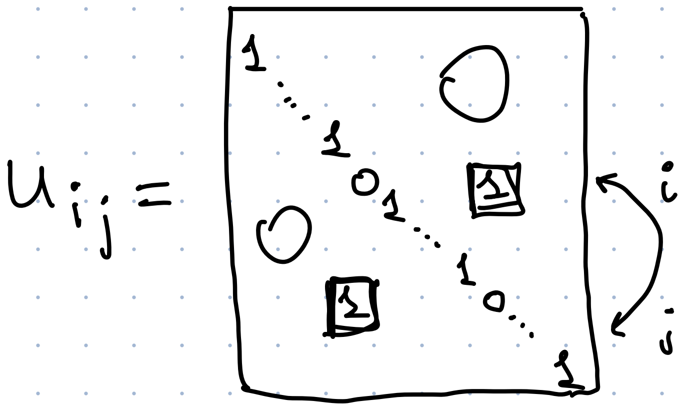
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$



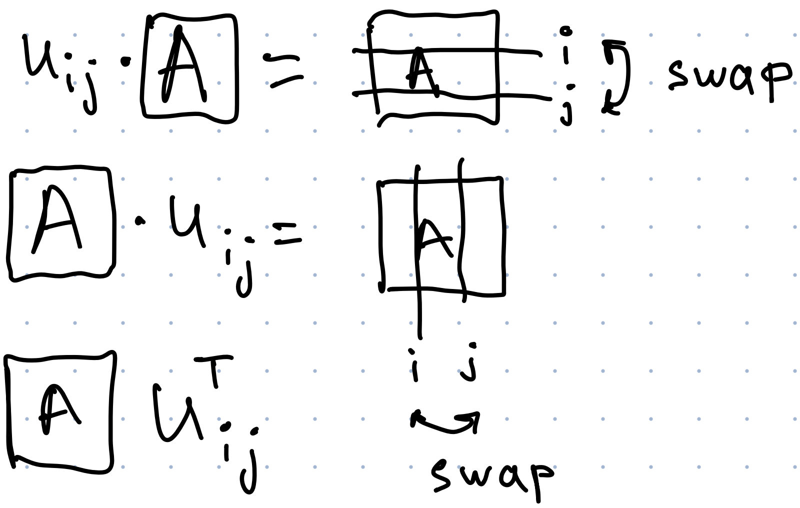
изменится только один столбик



(II)



В I_n поменяли местами строки i и j



$U^T_{ij} = U_{ij}$

(III) $D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{\lambda} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$

$D_i(\lambda)\cdot\boxed{A}$ — строка i умн. на λ

$\boxed{A}\cdot D_i(\lambda)$ — столбик i умн. на λ

Алгоритм Гаусса:

$$Ax = b$$

$$A^{-1}\cdot A = I_n$$

A^{-1} - обратная матрица

$$x = A^{-1}\cdot b$$

$$I_n$$

$$\underbrace{u_{ij}\cdot\ldots\cdot u_{kl}}_{\text{перестановки}}\cdot\underbrace{D_n S_n\cdot\ldots\cdot D_1 S_1}\, A \qquad x = u_{ij}\cdot\ldots\cdot u_{kl}\, D_n S_n\cdot\ldots\cdot D_1 S_1\cdot b$$

Дальше можно получить LU-разложение

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$