Основные задачи

Задача 1

Условие: Корни уравнения $x^n = 1$, как действительные, так и комплексные, называются корнями n-й степени из единицы. Проверить, что корни n-й степени образуют группу по умножению. (а) Верно ли, что всякий корень 35-й степени из единицы является кубом некоторого корня 35-й степени из единицы? (б) Тот же вопрос про корни 36-й степени из единицы.

Пусть $X_n = \{\, x \mid x^n = 1 \,\}$. Проверим, является ли X_n группой по умножению. Для этого проверим выполнение аксиом группы:
1. *Ассоциативность.*
Если $x_1^n = 1$, $x_2^n = 1$, $x_3^n = 1$, то очевидно $(x_1^n x_2^n)x_3^n = x_1^n(x_2x_3)^n = (x_1x_2x_3)^n = 1$.
2. *Аксиома единицы.*
$\exists\ e = 1 \in X_n\ \forall x \in X_n : x * \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} * x = x$
3. *Обратный элемент.*
Если $x_1^n = 1$, то $\dfrac{1}{x_1^n} = \left(\dfrac{1}{x_1}\right)^n = 1$. Значит, для x_i обратным элементом является $\dfrac{1}{x_i}$.
4. *Коммутативность.*
Если $x_1^n = 1$, $x_2^n = 1$, то $(x_1x_2)^n = (x_2x_1)^n = 1$.
Итак, выполнены аксиомы группы, а также свойство коммуникативности. Значит,
X_n — **абелева группа**.

а) $x^{35} = 1$
Решения этого уравнения: $x_k = \boldsymbol{e}^{i\varphi}$, где $\varphi = \frac{2\pi k}{35}, k = 0, 1, \ldots, 34$.
Положим, $x_k = x_m^3$. Тогда $\boldsymbol{e}^{\frac{2i\pi k}{35}} = (\boldsymbol{e}^{\frac{2i\pi m}{35}})^3 = \boldsymbol{e}^{\frac{6\pi m}{35}} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{e}^{\frac{2i\pi(3m-k)}{35}} = 1 \Rightarrow$
$3m - k = 35p, p \in \mathbb{Z}$
Значит, $(35p + k) \vdots 3$.
1) $p = 3s \Rightarrow k = 3l$.
2) $p = 3s + 1 \Rightarrow k = 3l + 1$.
3) $p = 3s + 2 \Rightarrow k = 3l + 2$.
То есть k может принимать любые значения от 0 до 34. А значит, всякий корень уравнения $x^{35} = 1$ является кубом для некоторого другого корня этого уравнения.

Ответ: верно.

б) $x^{36} = 1$
Положим, $x_k = x_m^3$. Тогда $\boldsymbol{e}^{\frac{2i\pi k}{36}} = (\boldsymbol{e}^{\frac{2i\pi m}{36}})^3 = \boldsymbol{e}^{\frac{6\pi m}{36}} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{e}^{\frac{2i\pi(3m-k)}{36}} = 1 \Rightarrow$
$3m - k = 6p, p \in \mathbb{Z}$
Откуда получим, что $k = 3l$. А значит, не все корни уравнения $x^{36} = 1$ являются кубами некоторого другого корня этого уравнения.

Ответ: неверно.

Задача 2

Условие: C_{360} — цикличекая группа порядка 360. Найти число решений уравнения $x^k = \boldsymbol{e}$ и количество элементов порядка k в группе C_{360} при а) $k = 7$; б) $k = 12$; в) $k = 48$. Сколько в C_{360} порождающих элементов?

а) Порядок элемента — делитель порядка группы, а значит элементов порядка 7 нет. $(7, 360) = 1$, значит уравнение $x^7 = \boldsymbol{e}$ имеет единственное решение: $x = \boldsymbol{e}$.

б) Количество элементов порядка 12 равно: $\varphi(12) = 4$. Т. к. $x^{12} = (x^2)^6 = (x^3)^4 = (x^4)^3 = (x^6)^2$, то количество решений уравнения $x^{12} = \boldsymbol{e}$ равно количеству элементов порядка 1, 2, 3, 4, 6, 12. Тогда число решений равно $1 + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(12) = 12$.

в) Количество элементов порядка 48 равно 0, т. к. 360 не делится на 48. Аналогично пункту б) количество решений уравнения $x^{48} = \boldsymbol{e}$ равно:
$1 + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(8) + \varphi(12) + \varphi(24) = 24.$

Количество порождающих элементов — количество элементов порядка 360:
$\varphi(360) = \varphi(72) \cdot \varphi(5) = \varphi(8) \cdot \varphi(9) \cdot \varphi(5) = 96.$

Ответ: а) 1; б) 12; в) 24; порождающих элементов 96.