

# Амплітудно-частотні характеристики шаруватих пластин і гофрованих циліндричних оболонок

Горячко Тарас Всеволодович

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор  
Марчук М.В.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача  
НАН України



## Розділ 1. Огляд публікацій за проблемою визначення амплітудно-частотних характеристик шаруватих пластин і гофрованих циліндричних оболонок за лінійного та геометрично нелінійного деформування

Дослідження напружено-деформованого стану тонкостінних елементів конструкцій на основі уточнених теорій відображені в роботах С. О. Амбарцумяна, В. З. Власова, Й. І. Воровича, К. З. Галімова, О. Л. Гольденвейзера, Я. М. Григоренка, О. М. Гузя, Л. Донелла, Р. Міндліна, П. Нагді, Е. Рейснера, С. П. Тимошенка та інших учених.

Постановкам задач про геометрично нелінійні коливання пластин і оболонок та розробці методів їх розв'язання присвячені праці Н. А. Алумяе, О. І. Беспалової, В. В. Болотіна, В. Є. Вериженка, А. С. Вольміра, В. Т. Грінченка, Е. І. Григолюка, О. Я. Григоренка, Я. М. Григоренка, Я. О. Жука, Б. Я. Кантора, Я. Ф. Каюка, М. С. Корнішина, В. А. Криська, Л. В. Курпи, Р. М. Кушніра, М. В. Марчука, А. П. Мукоєда, С. П. Тимошенка, І. М. Турчина, М. Amabili, J. Awrejcewicz, I. K. Banerjee, I. C. Chen, Li. A. Dong, C. L. Dym, D. A. Evenren, P. B. Goncalves, E. L. Jansen, L. Librescu, M. Sundhakar, T. Ueda та інших учених.

Розробці та розвиненню методу скінченних елементів для нелінійних задач присвячені роботи А. С. Городецького, І. І. Дияка, В. Г. Піскунова, В. А. Постнова, О. О. Рассказова, Л. А. Розіна, Р. Б. Рікардса, М. В. Марчука, І. С. Мухи, Я. Г. Савули, А. С. Сахарова, М. М. Шалошнікова, Г. А. Шинкаренка, К.-J. Bathe, T. Belytschko, M. A. Crisfield, R. H. Gallagher, J. N. Reddy, J. T. Oden, G. Streng, E. L. Wilson, O. C. Zienkiewicz та інших учених.

## Розділ 1.

Застосуванню методу збурень для нелінійних задач стількості і коливань присвячені роботи D. A. Evensen, A. H. Nayfeh and D. T. Mook, L. W. Rehfield, B. Budiansky, J. Wedel-Heinen, E. L. Jansen, T. Rahman, R. Lewandowski, E. J. Hinch та інших учених.

Дослідженню коливань гофрованих оболонок і пластин присвячені роботи Н. П. Семенюка, Г. Р. Гулгазаряна, Л. Г. Гулгазаряна, К. М. Liew, N. K. Mandal, G. Kress, M. Winkler та інших учених.

### Мета дисертаційної роботи

Розвиток методу збурень в поєднанні з методом скінченних елементів стосовно задач визначення амплітудно-частотних характеристик шаруватих пластин і гофрованих циліндричних оболонок за лінійних та геометрично нелінійних коливань.

## Розділ 2. РІВНЯННЯ ДИНАМІЧНО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЗА ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ

Співвідношення просторової геометрично нелінійної динамічної теорії пружності в криволінійній системі координат

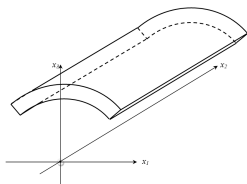


Рис. 2.1: Криволінійний пружний шар у декартовій системі координат

Напружено-деформований стан описується

$$\vec{u} = u^i \vec{R}_i = u_i \vec{R}^i, \quad (2.1)$$

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon^{ij} \vec{R}_i \vec{R}_j = \varepsilon_{ij} \vec{R}^i \vec{R}^j, \quad (2.2)$$

$$\hat{\Sigma} = \sigma^{ij} \vec{R}_i \vec{R}_j = \sigma_{ij} \vec{R}^i \vec{R}^j, \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^j \nabla_j u_k), \quad (2.4)$$

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (2.5)$$

## Розділ 2

### Рівняння руху

$$\operatorname{div} \hat{P} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (2.6)$$

де  $\hat{P}$  — перший несиметричний тензор Кірхгофа-Піюли,  $\rho$  — скалярне поле, яке визначає густину шару,  $t$  — змінна за часовою координатою.

### Граничні умови на лицевих поверхнях

$$P^{3i} \left( \alpha_1, \alpha_2, \pm \frac{h}{2}, t \right) = X_{3i}^{\pm} (\alpha_1, \alpha_2, t). \quad (2.7)$$

### Граничні умови на боковій поверхні $\Omega = \Omega_\sigma + \Omega_u$

$$P^{im} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) n_i = f^m (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t), i = 1, 2, 3, m = 1, 2, 3, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \Omega_\sigma; \quad (2.8)$$

$$u^i (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) = g^i (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t), i = 1, 2, 3, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \Omega_u. \quad (2.9)$$

### Початкові умови

$$u^i \Big|_{t=t_0} = u_0^i (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \frac{\partial u^i}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = v_0^i (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), i = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

## Розділ 2

### Побудова одновимірної моделі на основі двовимірної

Апроксимація переміщень  $u_1$  та  $u_3$ , за координатою  $\alpha_3$

$$u_1(\alpha_1, \alpha_3) = u_{10}(\alpha_1)p_0(\alpha_3) + u_{11}(\alpha_1)p_1(\alpha_3) + u_{12}(\alpha_1)p_2(\alpha_3), \quad (2.11)$$

$$u_3(\alpha_1, \alpha_3) = u_{30}(\alpha_1)p_0(\alpha_3) + u_{31}(\alpha_1)p_1(\alpha_3) + u_{32}(\alpha_1)p_2(\alpha_3), \quad (2.12)$$

де поліноми  $p_0$ ,  $p_1$  та  $p_2$  мають вигляд

$$p_0(\alpha_3) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha_3}{h}, p_1(\alpha_3) = \frac{1}{2} + \frac{\alpha_3}{h}, p_2(\alpha_3) = 1 - \left(\frac{2\alpha_3}{h}\right)^2, \quad (2.13)$$

$h$  — товщина шару.

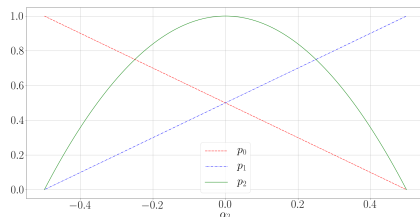


Рис. 2.2: Графіки поліномів  $p_0$ ,  $p_1$  та  $p_2$  на проміжку  $[-0.5; 0.5]$

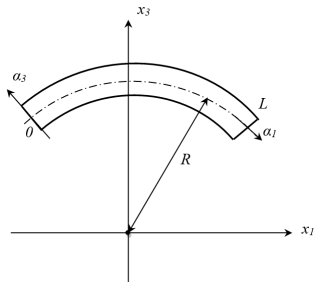


Рис. 2.3: Криволінійний пружний шар в декартовій системі координат.

$$\varepsilon_{ij}(\alpha_1, \alpha_3) = \frac{\varepsilon_{ij0}(\alpha_1)p_0(\alpha_3) + \varepsilon_{ij1}(\alpha_1)p_1(\alpha_3) + \varepsilon_{ij2}(\alpha_1)p_2(\alpha_3)}{1 + \alpha_3 K(\alpha_1)}, \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_{ijk} = e_{ijk}(\alpha_1) + \eta_{ijk}(\alpha_1), \quad i, j = 1, 3, k = 0, 1, 2,$$

де  $e_{ijk}(\alpha_1)$  — лінійна складова,  
 $\eta_{ijk}(\alpha_1)$  — нелінійна складова.

$$\begin{aligned}
e_{11k}(\alpha_1) &= \frac{1}{A(\alpha_1)} \frac{du_{1k}}{d\alpha_1} + u_{3k} K(\alpha_1), k = 0, 1, 2, \\
e_{130}(\alpha_1) &= u_{10} \left( -\frac{1}{h} - \frac{K(\alpha_1)}{2} \right) + u_{11} \left( \frac{1}{h} - \frac{K(\alpha_1)}{2} \right) + \\
&\quad + u_{12} \left( \frac{4}{h} - 2K(\alpha_1) \right) + \frac{1}{A(\alpha_1)} \frac{du_{30}}{d\alpha_1}, \\
e_{131}(\alpha_1) &= u_{10} \left( -\frac{1}{h} - \frac{K(\alpha_1)}{2} \right) + u_{11} \left( \frac{1}{h} - \frac{K(\alpha_1)}{2} \right) + \\
&\quad + u_{12} \left( -\frac{4}{h} - 2K(\alpha_1) \right) + \frac{1}{A(\alpha_1)} \frac{du_{31}}{d\alpha_1}, \\
e_{132}(\alpha_1) &= \frac{1}{A(\alpha_1)} \frac{du_{32}}{d\alpha_1} + u_{12} K(\alpha_1), \\
e_{330}(\alpha_1) &= u_{30} \left( -\frac{1}{h} + \frac{K(\alpha_1)}{2} \right) + u_{31} \left( \frac{1}{h} - \frac{K(\alpha_1)}{2} \right) + \\
&\quad + u_{32} \left( \frac{4}{h} - 2K(\alpha_1) \right), \\
e_{331}(\alpha_1) &= u_{30} \left( -\frac{1}{h} - \frac{K(\alpha_1)}{2} \right) + u_{31} \left( \frac{1}{h} + \frac{K(\alpha_1)}{2} \right) + \\
&\quad + u_{32} \left( -\frac{4}{h} - 2K(\alpha_1) \right), \\
e_{332}(\alpha_1) &= 2K(\alpha_1) u_{32}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$



$$\begin{aligned}\eta_{ik}(\alpha_1) &= [\omega_{20} \quad \omega_{21} \quad \omega_{22}] \Theta_k(\alpha_1) [\omega_{20} \quad \omega_{21} \quad \omega_{22}]^T, \\ \eta_{13k}(\alpha_1) &= 0, \quad k = 0, 1, 2, i = 1, 3,\end{aligned}\tag{2.16}$$

де

$$\begin{aligned}\Theta_0(\alpha_1) &= \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 16 + 6Kh + K^2h^2 & 4Kh + 2K^2h^2 & 16 + 16Kh + 4K^2h^2 \\ 4Kh + 2K^2h^2 & -2Kh + K^2h^2 & -16Kh + 4K^2h^2 \\ 16 + 16Kh + 4K^2h^2 & -16Kh + 4K^2h^2 & -16 + 8Kh + 4K^2h^2 \end{bmatrix}, \\ \Theta_1(\alpha_1) &= \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 2Kh + K^2h^2 & -4Kh + 2K^2h^2 & -16 + 4K^2h^2 \\ -4Kh + 2K^2h^2 & 16 - 6Kh + K^2h^2 & 16 - 16Kh + 4K^2h^2 \\ -16 + 4K^2h^2 & 16 - 16Kh + 4K^2h^2 & -16 - 8Kh + 4K^2h^2 \end{bmatrix}, \\ \Theta_2(\alpha_1) &= \frac{1}{32} \begin{bmatrix} -4 - 4Kh - K^2h^2 & 8 - 2K^2h^2 & 16 - 8Kh - K^2h^2 \\ 8 - 2K^2h^2 & -4 + 4Kh - K^2h^2 & 16 + 8Kh - 4K^2h^2 \\ 16 + 16Kh + 4K^2h^2 & 16 + 8Kh - 4K^2h^2 & 32 - 4K^2h^2 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{20}(\alpha_1) &= \frac{1}{2} \left[ u_{10} \left( -\frac{1}{h} + \frac{3K(\alpha_1)}{2} \right) + u_{11} \left( \frac{1}{h} - \frac{K(\alpha_1)}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + u_{12} \left( \frac{4}{h} - 2K(\alpha_1) \right) - \frac{1}{A(\alpha_1)} \frac{du_{30}}{d\alpha_1} \right], \\
\omega_{21}(\alpha_1) &= \frac{1}{2} \left[ -u_{10} \left( \frac{1}{h} + \frac{K(\alpha_1)}{2} \right) + u_{11} \left( \frac{1}{h} + \frac{3K(\alpha_1)}{2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - u_{12} \left( \frac{4}{h} + 2K(\alpha_1) \right) - \frac{1}{A(\alpha_1)} \frac{du_{31}}{d\alpha_1} \right], \\
\omega_{22}(\alpha_1) &= \frac{1}{2} \left[ 3K(\alpha_1) u_{12} - \frac{1}{A(\alpha_1)} \frac{du_{30}}{d\alpha_1} \right].
\end{aligned} \tag{2.18}$$

де  $A(\alpha_1)$  — коефіцієнт першої квадратичної форми серединної поверхні оболонки,  
 $K(\alpha_1)$  — головна кривина напрямної в напрямку осі  $\alpha_1$ .

## Розділ 2

### Варіаційна постановка задачі для одновимірної моделі

$$\int_0^L \delta \bar{u}'^T (E' + E'_{NL})^T C' (E' + E'^{(1)}_{NL}) \bar{u}' A(\alpha_1) d\alpha_1 + \\ + \int_0^L \rho_0 \delta \bar{u}'^T B' \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial t^2} A(\alpha_1) d\alpha_1 = 0, \quad (2.19)$$

де

$$\bar{u}' = \left( u_{10}, \frac{du_{10}}{d\alpha_1}, u_{11}, \frac{du_{11}}{d\alpha_1}, u_{12}, \frac{du_{12}}{d\alpha_1}, u_{30}, \frac{du_{30}}{d\alpha_1}, u_{31}, \frac{du_{31}}{d\alpha_1}, u_{32}, \frac{du_{32}}{d\alpha_1} \right)^T,$$

$$C' = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{13} & 0 \\ C'_{13} & C'_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C'_{55} \end{bmatrix}, \quad C'_{ij} = h C_{ij} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 8/15 \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 3, 5,$$

$$B' = \begin{bmatrix} B'_0 & 0 \\ 0 & B'_0 \end{bmatrix}, \quad B'_0 = h \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/6 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 8/15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

матриці  $E'$ ,  $E'_{NL}$  та  $E'^{(1)}_{NL}$  побудовані з (2.15), (2.17) та (2.18).

# Розділ 3. УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД ЗБУРЕНЬ У ЗАДАЧАХ ПРО ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОГО КРИВОЛІНІЙНОГО ШАРУ

## Метод скінченних елементів стосовно одновимірної моделі

$$V = \bigcup_{e=1}^N V^{(e)}. \quad (3.1)$$

Апроксимації переміщень на одновимірному скінченному елементі  $V^{(e)} = [\alpha_{1s}; \alpha_{1e}]$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} (1 - \xi) \quad \varphi_1 = \frac{1}{2} (1 + \xi) \quad (3.2)$$

де  $\xi \in [-1; 1]$ .

$$K'_L \bar{U}' + \left( K'^{(1)}_{NL} (\bar{U}') + K'^{(2)}_{NL} (\bar{U}', \bar{U}') \right) \bar{U}' + M' \ddot{\bar{U}}' = 0, \quad (3.3)$$

де

$$M' = \sum_{e=1}^N \left[ \int_{-1}^1 \rho_0 H'^{(e)T} B' H'^{(e)} J'^{(e)} A(\xi) d\xi \right], \quad (3.4)$$

$$K'_L = \sum_{e=1}^N \left[ \int_{-1}^1 H'^{(e)T} E'^T C' E' H'^{(e)} J'^{(e)} A(\xi) d\xi \right], \quad (3.5)$$

$$K'^{(1)}_{NL} = \sum_{e=1}^N \left[ \int_{-1}^1 H'^{(e)T} E'_{NL} (\bar{U}')^T C' E' H'^{(e)} J'^{(e)} A(\xi) d\xi + \int_{-1}^1 H'^{(e)T} E'^T C' E'^{(1)}_{NL} (\bar{U}') H'^{(e)} J'^{(e)} A(\xi) d\xi \right], \quad (3.6)$$

$$K'^{(2)}_{NL} = \sum_{e=1}^{NM} \left[ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H^{(e)T} B^T E_{NL} (\bar{U})^T C E^{(1)}_{NL} (\bar{U}) B H^{(e)} J^{(e)} d\xi d\eta \right]. \quad (3.7)$$

### Узагальнення методу збурень до розв'язання результуючої системи нелінійних рівнянь

$$K_L \bar{U} + \mu \left( K_{NL}^{(1)}(\bar{U}) + K_{NL}^{(2)}(\bar{U}, \bar{U}) \right) \bar{U} + M \ddot{\bar{U}} = 0, \quad (3.8)$$

де  $\mu \in [0; 1]$  — параметр збурення.

$$\bar{U}(t) = \bar{U}_0(t) + \mu \bar{U}_1(t) + O(\mu^2). \quad (3.9)$$

Узагальнення методу збурень

$$K_L = K - \mu K_{L1} + O(\mu^2). \quad (3.10)$$

Секулярний член

$$\bar{U}_S(t) = t \sin \omega t. \quad (3.11)$$

## Розділ 3

Методика відшукування розв'язку (3.3):

1. Розв'язання лінійної задачі:  $K_L \bar{\phi} + \omega_L^2 M \bar{\phi} = 0$ .
2. Апроксимація початкової умови  $\bar{A} \approx A \bar{\phi}$ :  $A = \min_{C \in R} \|\bar{A} - C \bar{\phi}\|$ .
3. Обчислення матриці:

$$K = K_L + \frac{3}{4} K_{NL}^{(2)} \left( A \bar{\phi}, A \bar{\phi} \right). \quad (3.12)$$

4. Знаходження власної частоти  $\omega$  геометрично нелінійних коливань:

$$\omega^2 = \bar{\phi}^T K \bar{\phi}. \quad (3.13)$$

5. Визначення амплітуд:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2\omega^2} \bar{\phi}^T K_{NL}^{(1)} \left( A \bar{\phi} \right) A \bar{\phi}, \\ x_2 &= \frac{1}{6\omega^2} \bar{\phi}^T K_{NL}^{(1)} \left( A \bar{\phi} \right) A \bar{\phi}, \\ x_3 &= \frac{1}{32\omega^2} \bar{\phi}^T K_{NL}^{(2)} \left( A \bar{\phi}, A \bar{\phi} \right) A \bar{\phi}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

6. Наближений розв'язок:

$$\bar{U}(t) = [(A - x_1 - x_2 - x_3) \cos \omega t + x_1 + x_2 \cos 2\omega t + x_3 \cos 3\omega t] \bar{\phi}. \quad (3.15)$$

## Розділ 4. ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИН-СМУГ ТА ВИДОВЖЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ

### Одношарова пластина-смуга

Геометричні та фізико-механічні характеристики

$$\begin{aligned} l &= 1\text{м}, h = 0.1\text{м}, \\ E_1 &= E, v_{13} = v_{31} = 0.3, G_{13} = G; \end{aligned} \quad (4.1)$$

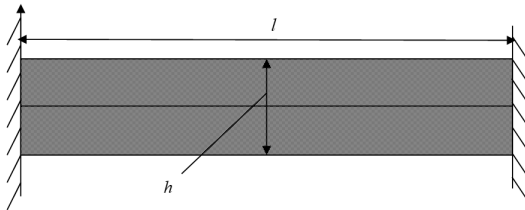


Рис. 4.1: Пластина-смуга з защемленими кінцями



## Розділ 4

### Лінійні коливання

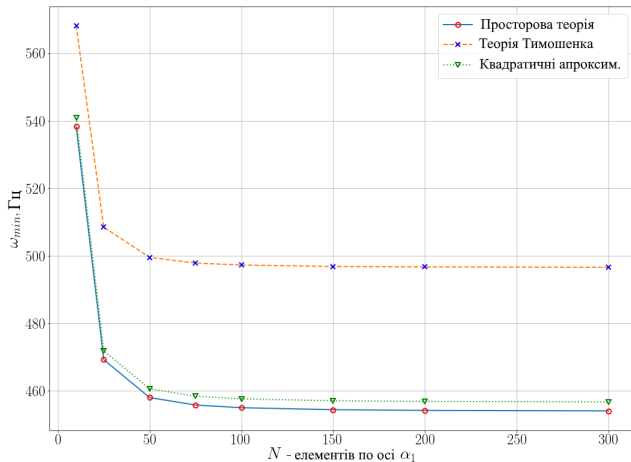


Рис. 4.2: Збіжність процесу відшукування значення мінімальної власної частоти при збільшенні кількості скінченних елементів вздовж осі  $\alpha_3$  для різних лінійних моделей.

**Геометрично нелінійні коливання**

З (3.12) і (3.13)

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 + \frac{3}{4} X \left( \frac{w_{max}}{h} \right)^2 \right) \quad (4.2)$$

де  $\omega_0^2$  — лінійна власна частота,  
 $\omega^2$  — нелінійна власна частота.

$$X = \frac{\bar{\phi}^T K_{NL}^{(2)} (h\bar{\phi}', h\bar{\phi}') \bar{\phi}}{\omega_0^2} \quad (4.3)$$

де  $\bar{\phi}'$  — нормований власний вектор  $\bar{\phi}$ .

**Табл. 4.1:** Значення параметра  $X$  для різних моделей панелі, видовжені краї якої заземлені

	$X$
Аналітичне значення <sup>1</sup>	0.8363
Зсувна модель Тимошенко	0.8694
Модель на основі квадратичних апроксимацій	1.4586
Модель на основі просторової теорії	3.2488

<sup>1</sup> Marchuk M., Pakosh V., Lesyk O., Hurayewska I. Influence of Pliability to Transversal Deformations of Shear and Compression on Correlation Frequency from Amplitude for Nonlinear Oscillations of Composite Plates // Vibrations in Physical Systems. - 2006. - Vol. XXII. - P. 251-256.

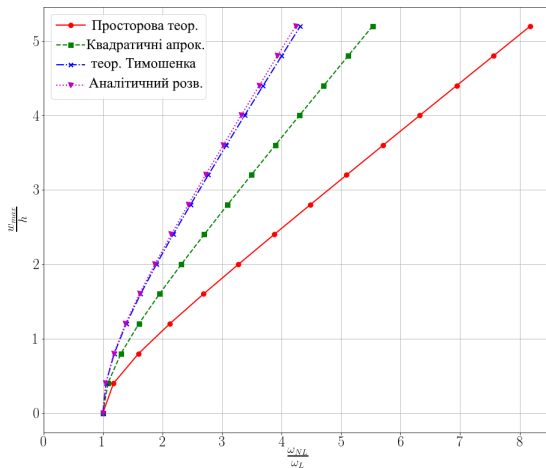


Рис. 4.3: Амплітудно-частотні характеристики, отримані за допомогою узагальненого методу збурень для панелі, видовжені краї якої заземлені

## Тришарова пластина-смуга

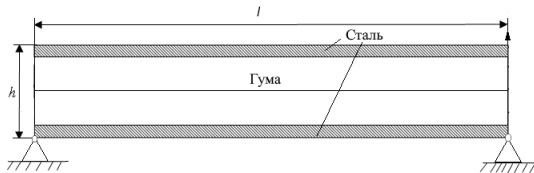


Рис. 4.4: Тришарова пластина-смуга з нерухомими шарнірами на видовжених краях

Умови контакту між шарами

$$u_i^{(k-1)}(\alpha_1, h_{k-1}, t) = u_i^{(k)}(\alpha_1, h_k, t), \quad (4.4)$$

$$S^{(k-1)3i}(\alpha_1, h_{k-1}, t) = S^{(k)3i}(\alpha_1, h_k, t), \quad (4.5)$$

$$i = 1, 3, \alpha_1 \in [0; L], k = 2, \dots, N.$$

Граничні умови на лицевих площинах панелі

$$S^{(m)31}(\alpha_1, h_m, t) = S^{(m)33}(\alpha_1, h_m, t) = 0, \alpha_1 \in [0; L], m = 0, N. \quad (4.6)$$

Геометричні та фізико-механічні характеристики

$$L = 1\text{м}, h = 0.1\text{м};$$

$$\text{Сталь: } E_1 = E_3 = 210 \cdot 10^9 \text{Па}, v_{13} = v_{31} = 0.3, \rho = 8000 \text{кг/м}^3; \quad (4.7)$$

$$\text{Гума: } E_1 = E_3 = 0.1 \cdot 10^9 \text{Па}, v_{13} = v_{31} = 0.48, \rho = 1200 \text{кг/м}^3.$$

Табл. 4.2: Вплив товщини шару гуми ( $h_r$ ) на мінімальну власну частоту

$\frac{h_r}{h}$	1	0.95	0.9	0.8	0.6	0.4	0
$\omega_0, \text{Гц}$	25.061	72.121	69.587	69.056	84.453	111.765	375.763

Табл. 4.3: Вплив товщини шару гуми ( $h_r$ ) на значення параметра нелінійності  $X$

$\frac{h_r}{h}$	1	0.95	0.9	0.8	0.6	0.4	0
$X$	16.1053	44.0470	73.2043	104.7005	92.1796	59.2721	5.7266

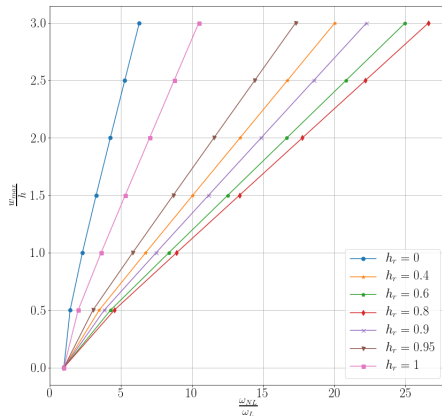


Рис. 4.5: Амплітудно-частотні характеристики для тришарової панелі з нерухомими шарнірами на видовжених краях для різних значень  $h_r$

## Розділ 4

### Видовжена циліндрична панель

$$A(\alpha_1) = 1, \quad K(\alpha_1) = \frac{1}{R}. \quad (4.8)$$

Геометричні та фізико-механічні характеристики

$$\begin{aligned} l &= 1\text{м}, h = 0.01\text{м}, \\ E_1 &= 40E_3, v_{13} = v_{31} = 0.25, G_{13} = 0.6E_3. \end{aligned} \quad (4.9)$$

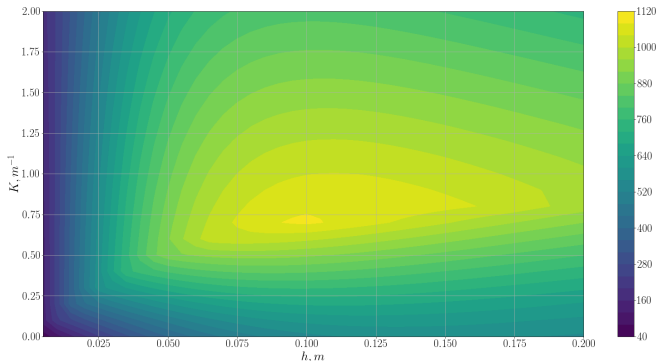
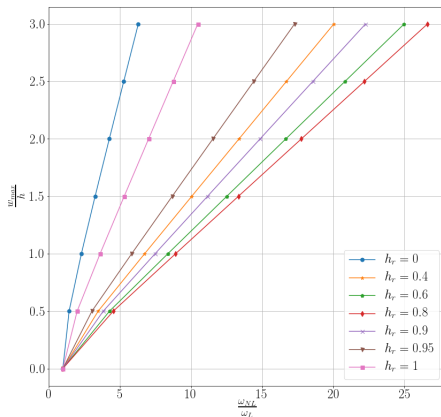


Рис. 4.6: Залежність найменшої власної частоти ( $\omega_0$ ) від радіуса кривини  $K$  і товщини  $h$  циліндричної панелі

Табл. 4.4: Вплив кривини напрямної ( $K$ ) на значення параметра  $X$ 

$K, \text{м}^{-1}$	0.5	0.8	1	1.5	2
$X$	4.442	4.203	4.002	3.421	2.855

Рис. 4.7: Амплітудно-частотні характеристики для панелі з вуглепластика з для різних значень кривини напрямної  $K$



## РОЗДІЛ 5. ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ГОФРОВАНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

**Геометричні співвідношення і базові вектори для видовженої  
циліндричної панелі з гофруванням**

$$\begin{aligned}x_1 &= (R + g_A \cos(g_v \theta)) \cos(\theta), \\x_2 &= \alpha_2, \\x_3 &= (R + g_A \cos(g_v \theta)) \sin(\theta),\end{aligned}\tag{5.1}$$

де  $L$  — довжина напрямної циліндричного шару,  
 $R$  — відстань від осі панелі до напрямної циліндричного шару,  
 $h$  — товщина гофрованого шару,  
 $g_A$  — амплітуда гофрування,  
 $g_v$  — частота гофрування,

$$\theta = \theta(\alpha_1) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{R} \left( \frac{L}{2} - \alpha_1 \right)$$

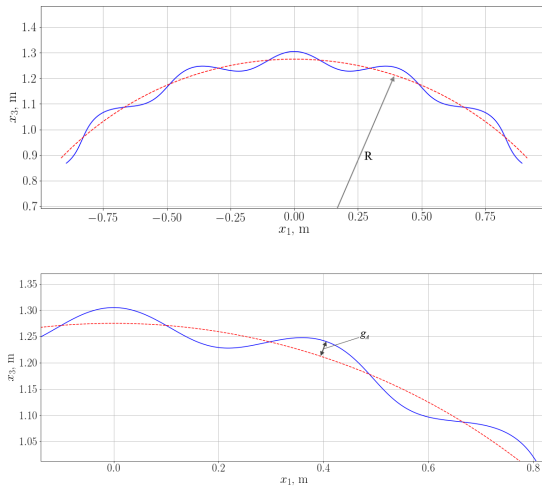


Рис. 5.1: Напрямна серединної поверхні шару в декартовій системі координат за  $g_v = 20$ .

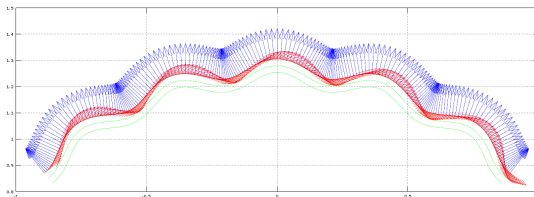


Рис. 5.2: Вектори коваріантної бази  $\vec{R}_1$  (червоний колір) і  $\vec{R}_3$  (синій колір) на верхній лицевій поверхні  $L = 2\text{м}$ ,  $h = 0.05\text{м}$ ,  $R = 1.25\text{м}$ ,  $g_A = 0.03\text{м}$ ,  $g_v = 20$ .

Коефіцієнт першої квадратичної форми і головна кривина

$$A(\alpha_1) = \sqrt{w^2 + z^2}, \quad (5.2)$$

$$K(\alpha_1) = \frac{(wy + 2z^2/R)}{A(\alpha_1)^{\frac{3}{2}}}, \quad (5.3)$$

де

$$w = 1 + \frac{g_A}{R} \cos(g_v \theta),$$

$$z = \frac{g_A g_v}{R} \sin(g_v \theta),$$

$$y = -\frac{w}{R} + \frac{g_A g_v^2}{R^2} \cos(g_v \theta).$$

## Розділ 5

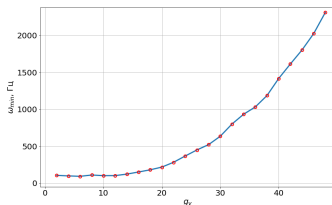
### Лінійні коливання

Геометричні та фізико-механічні характеристики

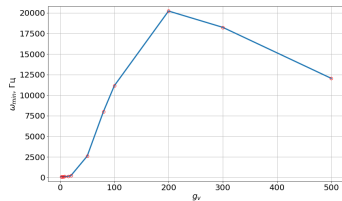
$$\begin{aligned}L &= 2\text{м}, h = 0.05\text{м}, R = 1.25\text{м}, g_A = 0.03\text{м}, g_v = 20, \\E_1 &= E_3 = 2.1 \cdot 10^{11}\text{Па}, v_{13} = v_{31} = 0.3, G_{13} = 8.1 \cdot 10^{10}\text{Па}, \\ \rho &= 8000\text{кг/м}^3.\end{aligned}\tag{5.4}$$

Табл. 5.1: Залежність найменшої власної частоти ( $\omega$ ) від частоти гофрування ( $g_v$ ) панелі

$g_v$	2	4	6	8	15	20	50	80	100	200	300	500
$\omega$ , Гц	105	98	92	110	132	217	2588	8007	11138	20220	18239	12042

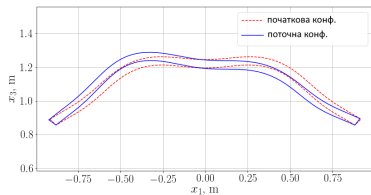


а)

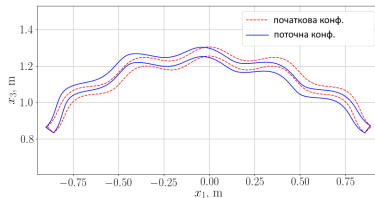


б)

Рис. 5.3: Залежність найменшої власної частоти ( $\omega$ ) від частоти гофрування ( $g_v$ ) панелі

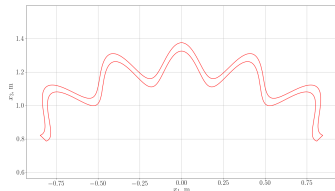


а)

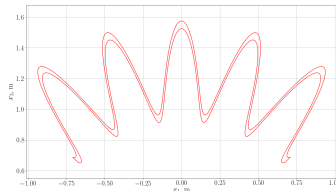


б)

Рис. 5.4: Перша мода гофрованої циліндричної панелі з різними частотами гофрування: а)  $g_v = 10$ ; б)  $g_v = 20$ .



а)



б)

Рис. 5.5: Вигляд гофрованої циліндричної панелі при а)  $g_A = 0.1\text{м}$ ; б)  $g_A = 0.3\text{м}$ .

Табл. 5.2: Залежність найменшої власної частоти ( $\omega$ ) від амплітуди гофрування ( $g_A$ ) панелі.

$g_A$ , м	0	0.015	0.03	0.06	0.1	0.2	0.25	0.3
$\omega$ , Гц	101	143	217	377	622	675	552	461

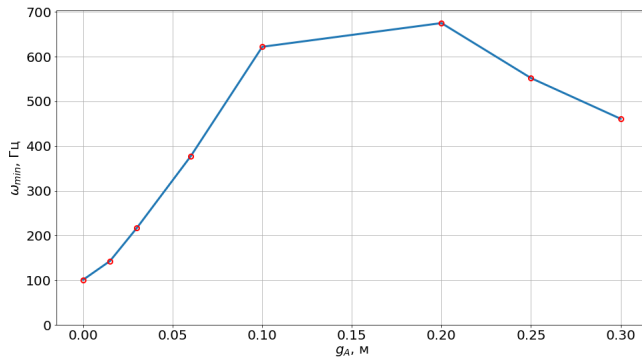


Рис. 5.6: Залежність найменшої власної частоти ( $\omega$ ) від амплітуди гофрування ( $g_A$ ) панелі.

Табл. 5.3: Вплив частоти гофрування ( $g_v$ ) на значення параметра нелінійності  $X$ 

$g_v$	2	6	15	20	50
$X$	6.6324	7.5217	2.9688	1.2465	0.0728

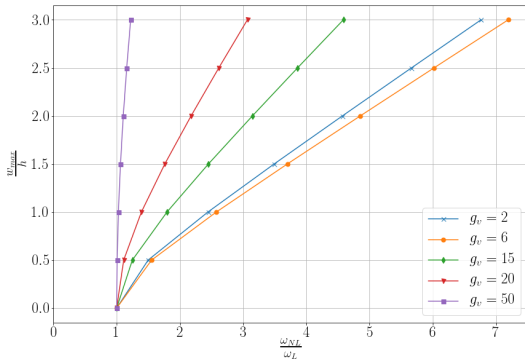
Рис. 5.7: Амплітудно-частотні характеристики гофрованої панелі для різних значень частоти гофрувань  $g_v$ .

Табл. 5.4: Вплив амплітуди гофрування ( $g_A$ ) на значення параметра нелінійності  $X$

$g_A, \text{м}$	0	0.03	0.1	0.2	0.25	0.3
$X$	6.5853	1.2465	0.0815	2.4986	7.5377	40.1717

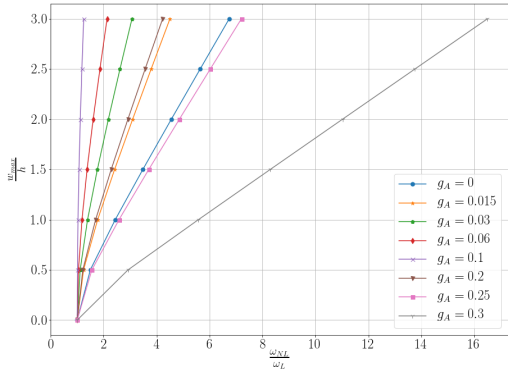


Рис. 5.8: Амплітудно-частотні характеристики гофрованої панелі для різних значень амплітуди гофрування ( $g_A$ ).



## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено науково практичне завдання визначення амплітудо-частотних характеристик шаруватих пластин і гофрованих у коловому напрямку циліндричних оболонок. При цьому отриматі наступні результати:

- ▶ Побудовано нову модель геометрично нелінійного деформування видовжених циліндричних оболонок на основі квадратичних апроксимацій компонент вектора переміщень за нормальною координатою до серединної поверхні шару та показано її ефективність.
- ▶ Узагальнено метод збурень для розв'язування систем нелінійних алгебричних рівнянь, які отримуються у задачах визначення амплітудно-частотних характеристик пластин і оболонок за геометрично нелінійного деформування.
- ▶ Розроблено нову методику знаходження розв'язку задачі про вільні коливання за геометрично нелінійного деформування на основі методу скінченних елементів і методу збурення. Показано її ефективність шляхом порівняння з розв'язками, отриманими іншими авторами.

## ВИСНОВКИ

- ▶ Досліджено лінійні та геометрично нелінійні коливання тришарових пластин-смуг, які складаються з двох металевих лицевих та гумового середнього шарів. Встановлено кількісний вплив товщини гумового шару на мінімальну власну частоту за лінійного та геометрично нелінійного деформування, а також визначено співвідношення між товщинами шарів, при якому вона досягає максимального значення.
- ▶ Проаналізовано лінійні та геометрично нелінійні коливання видовжених циліндричних панелей. Встановлено характер впливу кривини панелей та типу коливань на їхню жорсткість.
- ▶ Сформульовано постановки задач про лінійні та геометрично нелінійні коливання гофрованої циліндричної оболонки на основі використання співвідношень просторових теорій пружності. Встановлено вплив частоти та амплітуди гофрування оболонки на її жорсткість. Виявлено інтервали зростання та спадання першої власної частоти видовженої гофрованої циліндричної панелі за геометрично нелінійного деформування.