נושא מסתורי וחדש

וואלה נושא חדש, זורם

בעיית הפאזל (זו דוגמה לנושא, לא הנושא)

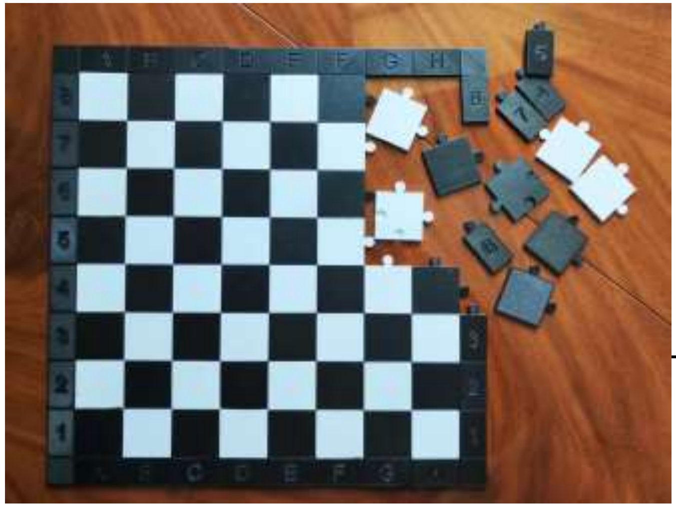
- פעם היה לאוסטד פאזל בגודל $n\times m$, כשבו כל זוג חלקים סמוכים השתלבו זה בזה באמצעות בליטות ושקעים תואמים.
- הוא איבד את הפאזל מזמן, אך זוכר שהחלק במיקום (i,j) הכיל $a_{i,j}$ בליטות ו־ $b_{i,j}$ שקעים. עליכם לבדוק האם הזיכרון הזה יכול לתאר פאזל תקני. לכל חלק יש עד 4 צדדים, והוא יכול להתחבר רק לחלקים סמוכים (למעלה, למטה, ימינה, שמאלה).
- כל בליטה בחלק אחד חייבת להתאים לשקע בחלק הסמוך, והצדדים החיצוניים של הפאזל צריכים להיות שטוחים. האם ניתן לבנות פאזל תקני מהנתונים הללו?

ציירו דוגמה קטנה!

אבחנה ראשונה

- שימו לב שניתן להסתכל על טבלת הפאזל כלוח שחמט אחד גדול – וכך נקבל שלא ייתכן כי שתי משבצות באותו צבע תהיינה מחוברות (רק לבן מחובר לשחור או שחור ללבן).

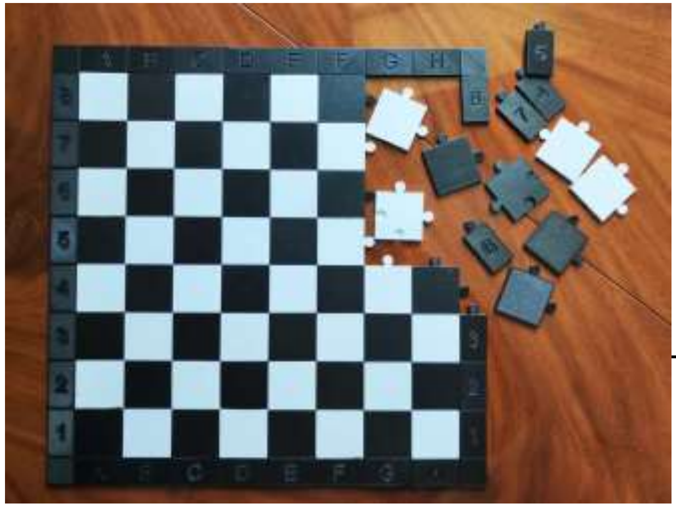
- אם כך, נוכל להביט על גרף דו צדדי $G = (W; B, E)$ שבו קבוצה W היא קבוצת המשבצות הלבנות, ו- B היא קבוצת השחורים. עכשיו צריך להבין את הקשרים ביניהם אבל לפני כן – חומר חדש.



אבחנה שנייה

- ברור שאם סכום דרגת היציאה הנדרשת ודרגת הכניסה הנדרשת לא שווה לסכום הדרגה הכולל עבור $u \in V$ כלשהו זה בלתי אפשרי.
- אותו הדבר גם עבור $\sum d_{out}(u) \neq \sum d_{in}(u)$.
- אחרת מספיק לוודא את d_{out} הנכון לכל הצמתים שכן הd_{in} יהיה נכון בעקבות זאת. במילים אחרות: אם לאחר וידוא התנאים שלעיל מצאנו סידור שמאפשר את d_{out} כרצוי,

  הוא גם מאפשר את d_{in} כרצוי.



זרימה ושידוך

Max Flow

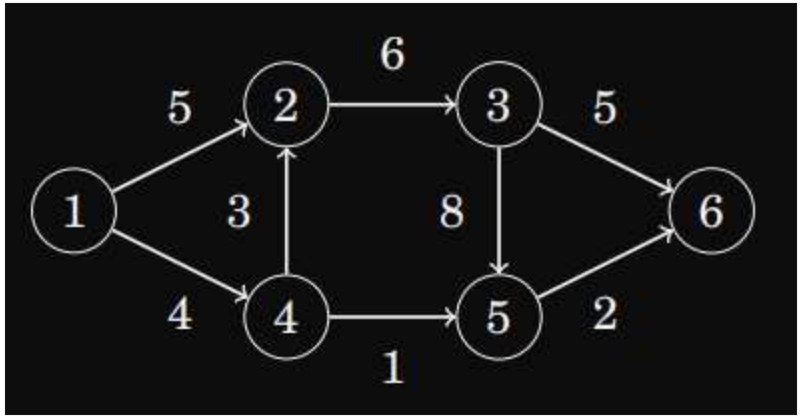
רשת זרימה - הגדרה

- בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$, ופונקציה $C: E \to \mathbb{N}^+$, אשר מתארת $capacity$ של קשת, נרצה להגדיר זרימה בתור פונקציה $f: E \to \mathbb{N}^+$ כך ש $0 \le f(e) \le c(e)$, לכל $e \in E$, f מתארת את הערך של הזרימה (לא כזה פורמלי אבל כן).

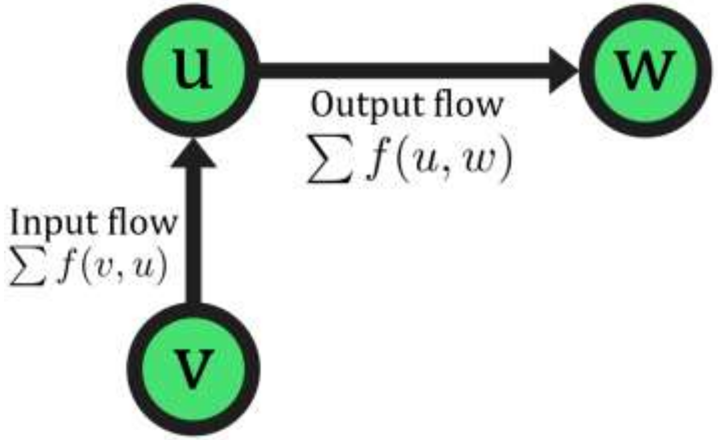
- ניתן לחשוב על זה כמו על הזרמת מים עם צינורות,

מה הכי הרבה מים שניתן להזרים במקביל?

- ערך זרימה $|f|$ מוגדר ע"י זוג צמתים $s,t \in V$ להיות סכום ערכי הזרימה f לקשתות הנכנסות מ t . מה הערך המקסימלי $|f|$ עבור $s,t \in V$ נתונים?



רשת זרימה - תכונות



כמה תכונות לפורמליות:

- זרימה תקינה f מקיימת את תנאי הצומת:

$$\sum_{v} f(v,u) = \sum_{w} f(u,w)$$

- בנוסף, שימו לב כי: עבור $s,t \in V$

$$|f| = \sum_{v} f(s,v) = \sum_{v} f(v,t)$$

פתרון

- איך נפתור את בעיית הזרימה?

פתרון

- איך נפתור את בעיית הזרימה?
- נשתמש באלגוריתם לפתרון

למה אין בשקופית הקודמת פתרון

- איך נפתור את בעיית הזרימה?
- נשתמש באלגוריתם לפתרון

- זו אפילו לא בדיחה, בקורס אלגוריתמים ראיתם/תראו מספר אלגוריתמים (כמובן) למציאת זרימה מקסימלית אבל האמת שזה לא ממש רלוונטי לתכנות תחרותי – יש בלאקבוקס ($BlackBox$) .

- במילים אחרות – במחברת חומר העזר יש מימוש יעיל לזרימה, בסיבוכיות מקרה הכי גרוע $O(VElog\ U)$, כאשר $U = \max_e\{|C(e)|\}$.

בחזרה לבעיית הפאזל

- כעת נוכל להשתמש בכלי העוצמתי הזה לפתרון הבעיה. זוכרים את הגרף הדו צדדי $G = (A; B, E)$?
- ובכן כעת נוכל להביט בגרף הזה ולהבין שלכל משבצת בצבע (בה"כ) w יש עד 4 שכנים לא מכוונים בצבע b וכעת נותרנו עם רדוקציה של הבעיה הזו לבעיה של בחירת כיוון הקשתות הלא מכוונות בצורה אופטימלית כך שנשיג את d_{in}, d_{out} הרצויים.

- עכשיו נביט על מקרה שימוש ידוע מאוד לרשתות זרימה – זיווג.

זיווג מקסימלי בגרף

זיווג - הגדרה

- בהינתן גרף לא מכוון $G=(\mathrm{V,E})$, זיווג בצמתים של הגרף הוא כל קבוצה $M\subseteq E$ כך ש $M\ni(u,w):V\in w\,\nexists\,:M\ni(u,v)=e$. או במילים בעברית: כל קבוצה של קשתות שאף קשת לא חולקת צומת עם קשת אחרת.

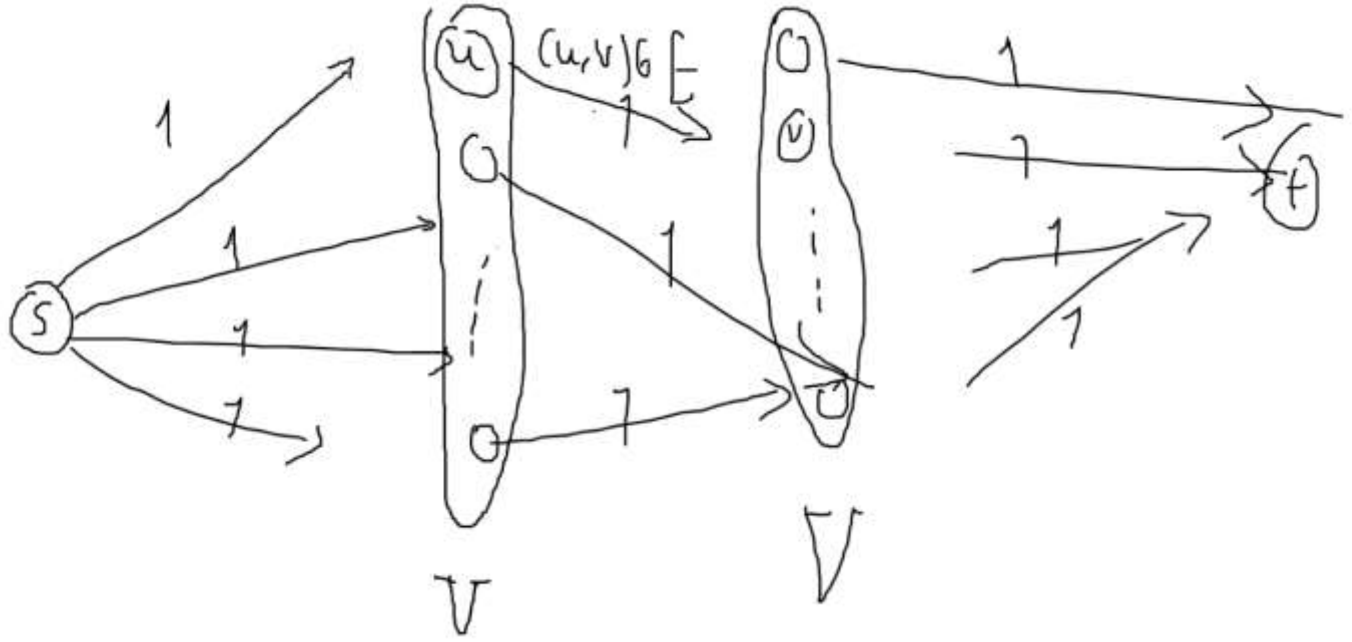
נציג דוגמה על הלוח:

גודל זיווג הוא פשוט גודל הקבוצה M ולכן נרצה לשאול מהו הזיווג התקין בגודל הגדול ביותר?

תת בעיה – עבור גרף דו צדדי?

באופן לא מפתיע - זרימה

- עבור גרף $G = (V,E)$, נוכל להביט על הגרף הבא:



פתרון

- שימו לב כי ברשת הזרימה הזו, כל הקיבולות הן 1, ועל כן ערך הזרימה המקסימלית יהיה גודל השידוך המקסימלי (כי האלגוריתם יבחר אופטימלית את קבוצת הקשתות! מקבלים את האופטימליות מהרדוקציה ולא מהאלגוריתם).

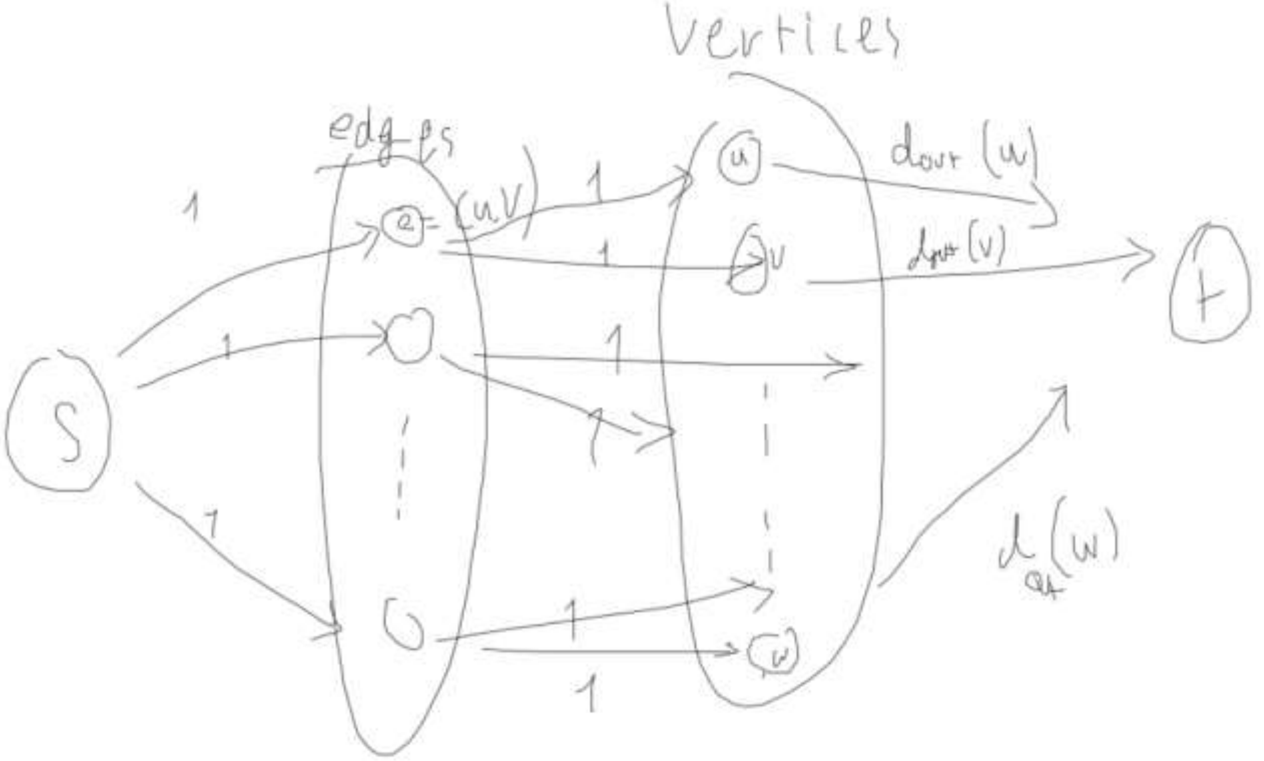
- עוד דרך להסתכל על זרימה מקסימלית בגרף שכזה (קיבולות 1) , היא כמות המסלול הזרים הצמתים השונים שיש בין s,t ודרך זו חזקה מאוד בהקשרים אחרים.
- שימו לב שניתן להסתכל על הזרימה המקסימלית כמעין בחירה של כל צומת בצורה אופטימלית לאיזה מבין הקשתות הוא מעדיף להזרים – וכאן חוזרים לשאלת הפאזל.

פתרון שאלת הפאזל

- ניזכר בקשתות הגרף $G=(A;B,E)$, קשתות אלו הן מהצורה $(white,black)$ ואנחנו נרצה לכוון אותן אופטימלית – כלומר לבצע בחירה בין כיוון w,b לבין כיוון b,w . נשים לב שמספיק לנו (ע"פ אבחנה 2) לקבוע כיוונים שמסכימים בd_{out} ועל כן כל קשת תצטרך לבחור בין הכיוון הראשון שלה מה שיוסיף ל out של w, או לכיוון השני שיוסיף לout של b.

- למה שלא ניתן לאלגוריתם לבחור ביניהם?

רשת הזרימה

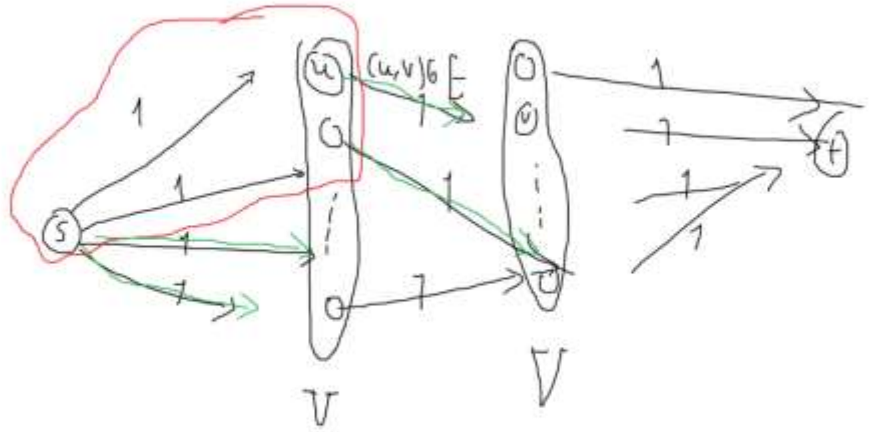


חתכים ברשת זרימה

- חתך הוא פשוט קבוצה של קשתות $cut_{s,t}(S)$, המוגדרת ע"י $\emptyset \neq S \subseteq V$ וזוג צמתים $s,t \in V$ כך ש $s \in S$ אבל

  $t \notin S$ והחתך מוגדר באופן הבא : $cut_{s,t}(S) = \{(u,v) : u \in S, v \notin S)\}$

בציור:



חתך מינימלי

- נגדיר ערך לחתך בתור סכום הקיבולות של הקשתות של החתך. במילים אחרות: (יש כמה סימונים)

$$Val\left(cut_{s,t}(S)\right) = C(S) = \sum_{(u,v)\in cut(S)} c(u,v)$$

אם כך, נרצה לשאול את השאלה "מהו ערך החתך הכי קטן?",

והתשובה לכך כבר נמצא בידינו. למעשה היא ערך הזרימה המקסימלית בגרף הזה, אבל למה?

הצבעה על האם לראות את ההוכחה

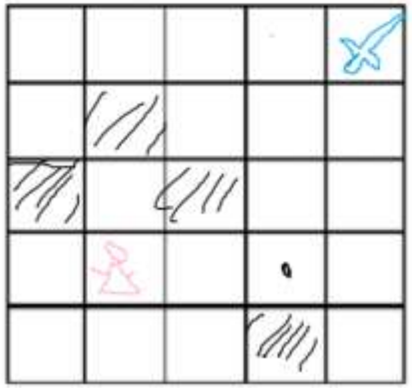
משפט min cut max flow

- אומר ש $\min C(S) = \max|f|$.

- זהו בגדול.

למה החתך הזה חשוב

- דמיינו שאתם נבל מרושע שאויבו המושבע הוא אביר. האביר אוהב נסיכה שכלואה בארמון שלך והוא רוצה לבוא להציל אותה.
- האביר לא אתלטי במיוחד אז הוא לא יכול לעבור את החומה שלך, אבל לאור שיפוצים וטילים איראניים החומה שלך שבורה. אתה רוצה לחסום אותה אבל אתה גם חסכן אז אתה רוצה לחסום אותה בכמה שפחות בלוקים (כל בלוק עולה 1).



- ניתן לעבור ממשבצת ל4 המשבצות לכל היותר שחולקות צלע איתה.

אולי נראה לכם פתרון אבל אנחנו מאמינים שתוכלו לפתור