МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

ННК “ІПСА”

Кафедра Системного проектування

Лабораторна робота №5
з курсу «Чисельні методи»
Тема: «Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь»

Виконав:

студент групи ДА-72

Кондратюк Тарас

Варіант 15

2019

Мета роботи: придбання практичних навичок в чисельному інтегруванні звичайних диференційних рівнянь при заданих межових умовах, дослідження впливу значення кроку обчислень на точність і збіжність рішення. Визначення можливості застосування засобів стандартних пакетів для отримання результатів

Порядок виконання роботи

1. Запрограмувати на мові Mathematica розв'язання заданої крайової задачі, використовуючи загальний розв'язок диференціального рівняння і методом зведення до задачі Коші.

2. Визначити лімітну довжину кроку для метода скінчених різниць , якщо отримане значення не суперечить заданому в таблиці значенню кроку для методу прогону, знайти розв'язок крайової задачі методом скінченних різниць, скориставшись заданою в таблиці величиною кроку. В іншому випадку скористатись отриманим лімітним значенням кроку.

3. Знайти розв'язки крайової задачі методом колокацій (непарні варіанти) і найменших квадратів (парні варіанти). Порівняти отримані розв'язки з тими, що були знайдені у п.2. Порівняння провести за допомогою графіків.

4. Запрограмувати на мові Mathematica розв'язання заданої крайової задачі методом Гальоркіна.

5. Запрограмувати на мові Mathematica розв'язання заданої крайової задачі методом кінцевих елементів, скориставшись величиною кроку, заданої таблиці для апроксимації. Порівняти покрокові похибки розв'язання у співпадаючих точках, отриманих в пунктах 2 і 5.

6. Скористатися можливостями пакету і за допомогою оператора NDSolve знайти шуканий розв'язок. Графічно порівняти з вже отриманими розв'язками.

7. Скласти звіт з отриманих результатів і математичних формул використаних методів по кожному пункту завдання , давши оцінку порівняльної точності отриманих рішень різними методами.

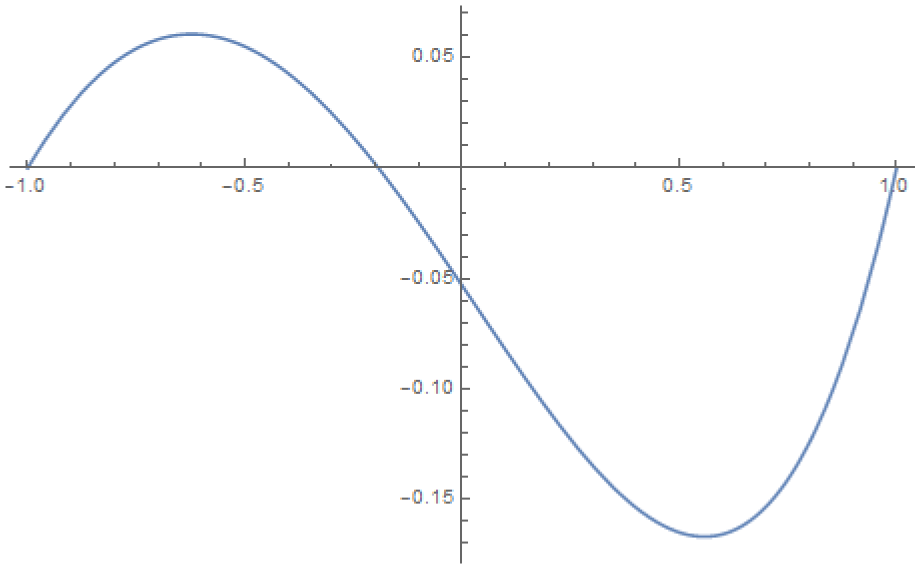
Завдання:

$y'' - (1+x^2)y = f(x)$	0.2	0.5	
$y(-1) = 0,\ y(1) = 0$			x^2+2x

Виконання:

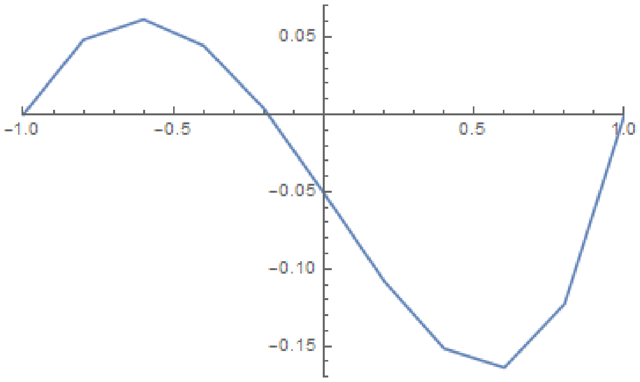
1. Запрограмувати на мові Mathematica розв'язання заданої крайової задачі, використовуючи загальний розв'язок диференціального рівняння і методом зведення до задачі Коші.

```
a = -1; b = 1; a0 = 1; b0 = 0; a1 = 1; b1 = 0; g0 = 0; g1 = 0;
S1 = NDSolve[{w''[x] - (1 + x^2) * w[x] == 0, w[-1] == b0, w'[-1] == -a0}, w, {x, -1, 1}];
       чисельні розв'язки диференційних рівнянь
W[x_] = w[x] /. S1;
S2 = NDSolve[{v''[x] - (1 + x^2) * v[x] == (x^2) + 2 * x, v[-1] == g0 / a0, v'[-1] == 0},
       чисельні розв'язки диференційних рівнянь
   v, {x, -1, 1}];

V[x_] = v[x] /. S2;
dw[x_] = D[w[x], x]; dv[x_] = D[v[x], x];
         диференціювати        диференціювати
A = (g1 - a1 * V[b] - b1 * dv[b]) / (a1 * W[b] + b1 * dw[b]);
Plot[V[x] + A * W[x], {x, -1, 1}]
графік функції
```



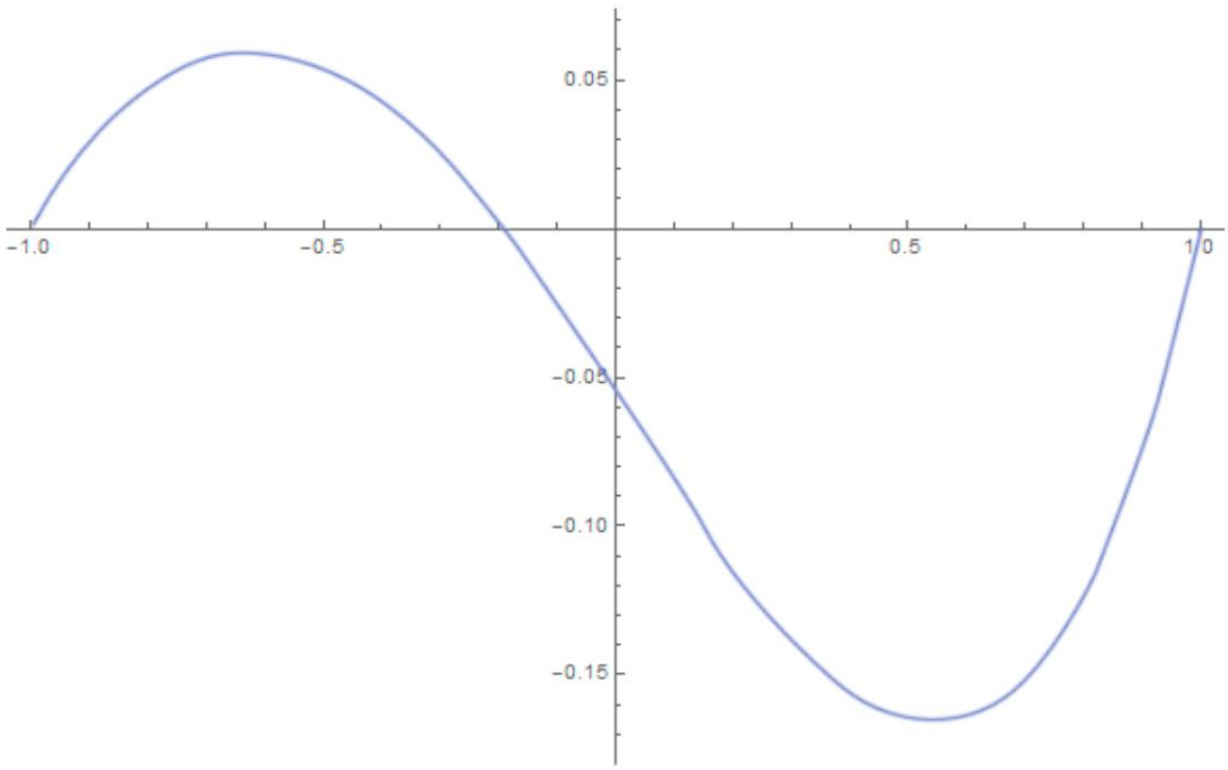
2. Визначити лімітну довжину кроку для метода скінчених різниць, і якщо отримане значення не суперечить заданому в таблиці значенню кроку для методу прогону, знайти розв'язок крайової задачі методом скінченних різниць, скориставшись заданою в таблиці величиною кроку. В іншому випадку скористатись отриманим лімітним значенням кроку. p(t) = -(1+t^2)
Оскільки в даному випадку p(t) < 0 ∀t, визначити лімітну довжину кроку для метода скінчених різниць за формулою $\tau \le \frac{2}{\max|p(t)|}$ $t \in [a,b]$ неможливо. Згідно таблиці h_{min}=0.2. Тобто (tn - t0)/n= =0.2=> (1-(-1))/n=0.2=> 2/n=0.2 => n=10. Підставивши отримане значення n, отримали наступне рішення крайової задачі методом скінченних різниць:

```
n = 10; t0 = -1; tn = 1; h = (tn - t0) / n;
Array[L, n, 0]; Array[M, n, 0]; Array[u, {n, 2}, 0];
|масив          |масив          |масив
u[0, 0] = t0; u[n, 0] = tn;

u[0, 1] = 0; u[n, 1] = 0;
L[0] = 0;
M[0] = 0;
Do[aa = -2 - h^2 * (1 + (t0 + i * h) ^2); bb = 1; c = 1;
|оператор циклу
  d = h^2 * (((t0 + i * h) ^2) + 2 * (t0 + i * h));
  L[i] = -c / (bb * L[i - 1] + aa) + 0.0;
  M[i] = (d - bb * M[i - 1]) / (bb * L[i - 1] + aa), {i, 1, n}];
u[n] = M[n];
Do[u[n - i, 0] = tn - i * h; u[n - i, 1] = L[n - i] * u[n - i + 1, 1] + M[n - i], {i, 1, n}];
|оператор циклу
Show[ListPlot[Table[{u[i, 0], u[i, 1]}, {i, 0, n}], Joined → True, PlotRange → {{-1, 1}, {-0.17, 0.07}}]]
|пок⋯ |діаграма ⋯ |таблиця значень                              |з'єднані   |істина |діапазон значень на графіку
```



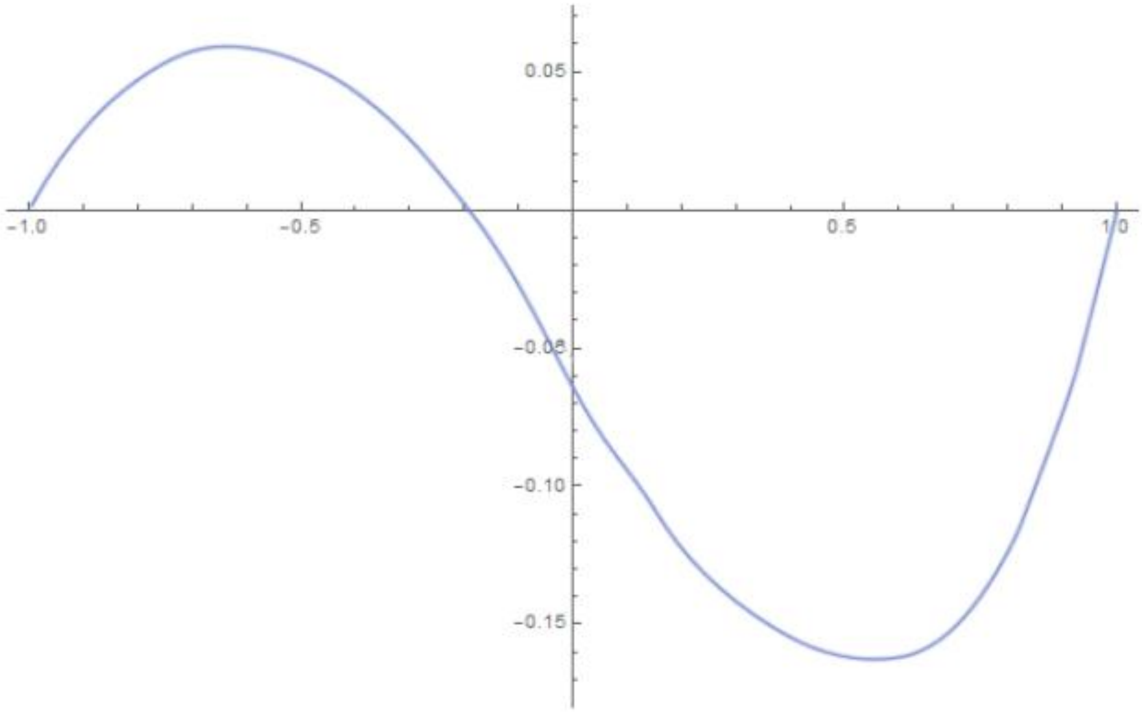
3. Знайти розв’язки крайової задачі методом найменших квадратів. Порівняти отримані розв’язки з тими, що були знайдені у п.2. Порівняння провести за допомогою графіків.

```
LY[y_, r_, p_, q_, x_] := r[x] D[y, {x, 2}] + p[x] D[y, x] + q[x] y;
                             диференціювати        диференціювати
g[aa_, bb_, y_, x_] = 0; q[x_] = -(1 + x^2);
f[x_] = ((x^2) + 2 * x);
a = -1; b = 1;
a0 = 1;
b0 = 0;
g0 = 0;
a1 = 1;
b1 = 0;
g1 = 0;
Lu[x_] = LY[u[x], r, p, q, x];
f0[x_] := -0.2 * ((x^2) + 2 * x);
f1[x_] := -1 / 20 * ((2 * x^2) + 4 * x);
f2[x_] := 1 / 20 * ((3 * x^2) + 3 * x);
u[x_, c1_, c2_] := f0[x] + c1 * f1[x] + c2 * f2[x];
R[x_] = f[x] - u[x];
S = Solve[{Integrate[R[x] * D[R[x], c1], {x, -1, 1}] == 0.0,
  розв'я··· інтегрувати     диференціювати
  Integrate[R[x] * D[R[x], c2], {x, -1, 1}] == 0.0}, {c1, c2}]
  інтегрувати      диференціювати
Plot[u[x, c1, c2] /. S, {x, -1, 1}]
графік функції
{{c1 → 5.42871, c2 → 2.31273}}
```



4. Запрограмувати на мові Mathematica розв'язання заданої крайової задачі методом Гальоркіна.

```
LY[y_, r_, p_, q_, x_] := r[x] D[y, {x, 2}] + p[x] D[y, x] + q[x] y;
                                 диференціювати           диференціювати
g[aa_, bb_, y_, x_] := aa * y + bb D[y, x];
                                   диференціювати
r[x_] = 1; p[x_] = 0;
q[x_] = - (1 + x^2);
f[x_] = ((x^2) + 2 * x);
a = -1; b = 1;
a0 = 1;
b0 = 0;
g0 = 0;
a1 = 1;
b1 = 0;
g1 = 0;
Lu[x_] = LY[u[x], r, p, q, x];
f0[x_] := -0.04 * ((x^2) + 2 * x);
f1[x_] := 0.01 * ((2 * x^2) + 4 * x);
f2[x_] := 0.01 * ((3 * x^2) + 3 * x);
u[x_, c1_, c2_] := f0[x] + c1 * f1[x] + c2 * f2[x];
R[x_] = f[x] - u[x];
S = Solve[{Integrate[R[x] * D[R[x], c1], {x, -1, 1}] == 0.0,
   розв'я··· інтегрувати        диференціювати
   Integrate[R[x] * D[R[x], c2], {x, -1, 1}] == 0.0}, {c1, c2}]
   інтегрувати        диференціювати
Plot[u[x, c1, c2] /. S, {x, -1, 1}]
графік функції
```



5. Запрограмувати на мові Mathematica розв’язання заданої крайової задачі методом кінцевих елементів, скориставшись величиною кроку, заданої в таблиці для апроксимації. Порівняти покрокові похибки розв’язання у співпадаючих точках, отриманих в пунктах 2 і 5.

Для n=10 маємо наступне розв’язання:

```
v[x]'' - (1 + x^2) * v[x] = F[x];
F[x_] := (x^2) + 2 * x;
P[l_] := Integrate[-1 + p[x] * (x - x[l - 1]) + q[x] * (x - x[l - 1])^2, {x, x[l - 1], x[l]}] / h / h;
H[l_] := Integrate[-1 + p[x] * (x - x[l + 1]) + q[x] * (x - x[l + 1])^2, {x, x[l], x[l + 1]}] / h / h;
P1[l_] := Integrate[1 - p[x] * (x - x[l - 1]) - q[x] * (x - x[l + 1]) * (x - x[l]), {x, x[l], x[l + 1]}] / h / h;
P0[l_] := Integrate[1 - p[x] * (x - x[l - 1]) + q[x] * (x - x[l - 1]) * (x - x[l]), {x, x[l - 1], x[i]}] / h / h;
n = 10;
Array[a, {n - 1, n - 1}]; Array[b, n - 1];
Array[x, n + 1, 0]; x[0] = -1.0;
h = (x[n] - x[0]) / n;
Do[x[i] = x[0] + i * h, {i, 1, n}];
p[x_] := 0;
q[x_] := -(1 + x^2);
Do[Do[If[Abs[(i - k)] > 1, a[i, k] = 0];
  If[i == k, a[i, k] = N[P[i] + H[i]] + 0.0];
  If[i == k - 1, a[i, k] = N[P1[i]] + 0.0];
  If[i == k + 1, a[i, k] = N[P0[i]] + 0.0], {i, 1, n - 1}], {k, 1, n - 1}]
Do[b[i] = 1 / h * (Integrate[F[x] * (x - x[i - 1]), {x, x[i - 1], x[i]}] - Integrate[F[x] * (x - x[i + 1]), {i, 1, n - 1}])
MatrixForm[A = Array[a, {n - 1, n - 1}]]
B = Array[b, n - 1]
V = LinearSolve[A, B]
Clear[u];
Array[u, {n + 1, 2}, {0, 0}];
u[0, 0] = -1;
u[n, 0] = 1;
u[0, 1] = 0;
u[n, 1] = 0;
Do[u[i, 0] = x[i];
  u[i, 1] = V[[i]], {i, 1, n - 1}];
Do[Print[u[i, 0], "  ", u[i, 1]], {i, 0, n}]
Show[ListPlot[Table[{u[i, 0]}, {i, 0, n + 1}], Joined → True]]
```

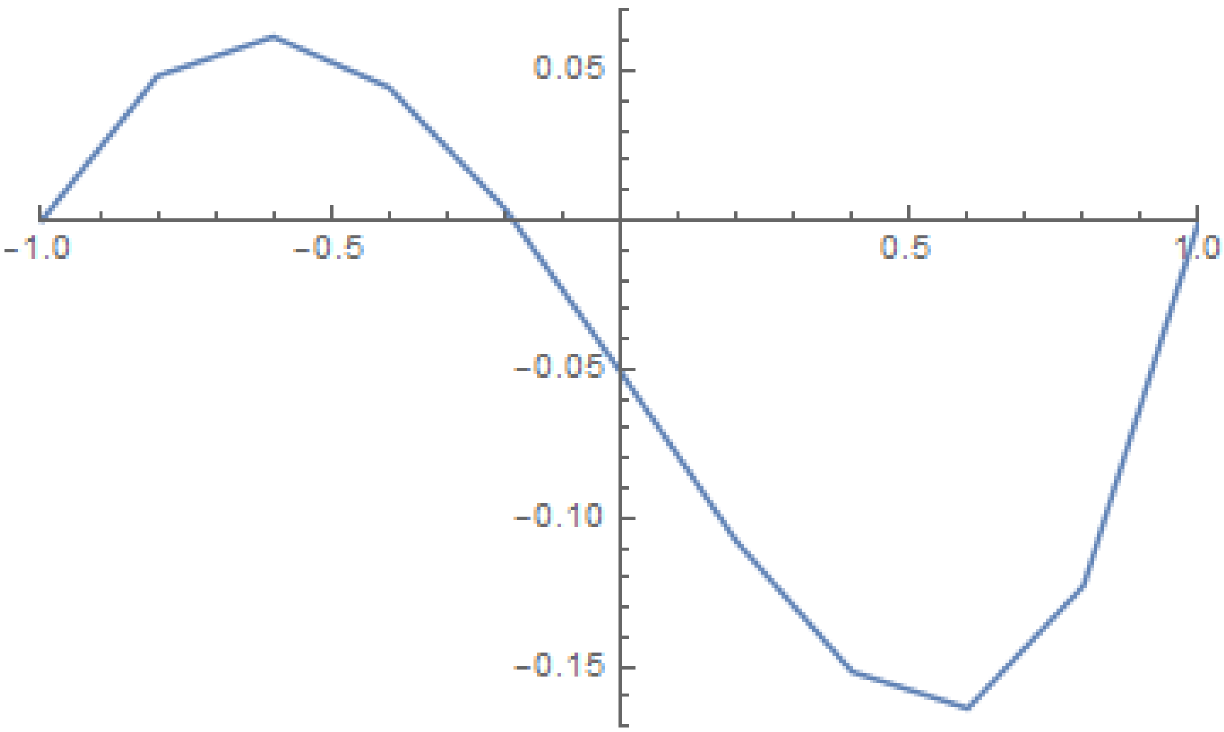
latrixForm=

$$\begin{pmatrix}
-10.2192 & 4.95027 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5.04973 & -10.1819 & 4.95827 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 5.04173 & -10.1552 & 4.9636 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 5.0364 & -10.1392 & 4.96627 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 5.03373 & -10.1339 & 4.96627 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5.03373 & -10.1392 & 4.9636 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.0364 & -10.1552 & 4.95827 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.04173 & -10.1819 & 4.95027 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.04973 & -10.2192
\end{pmatrix}$$

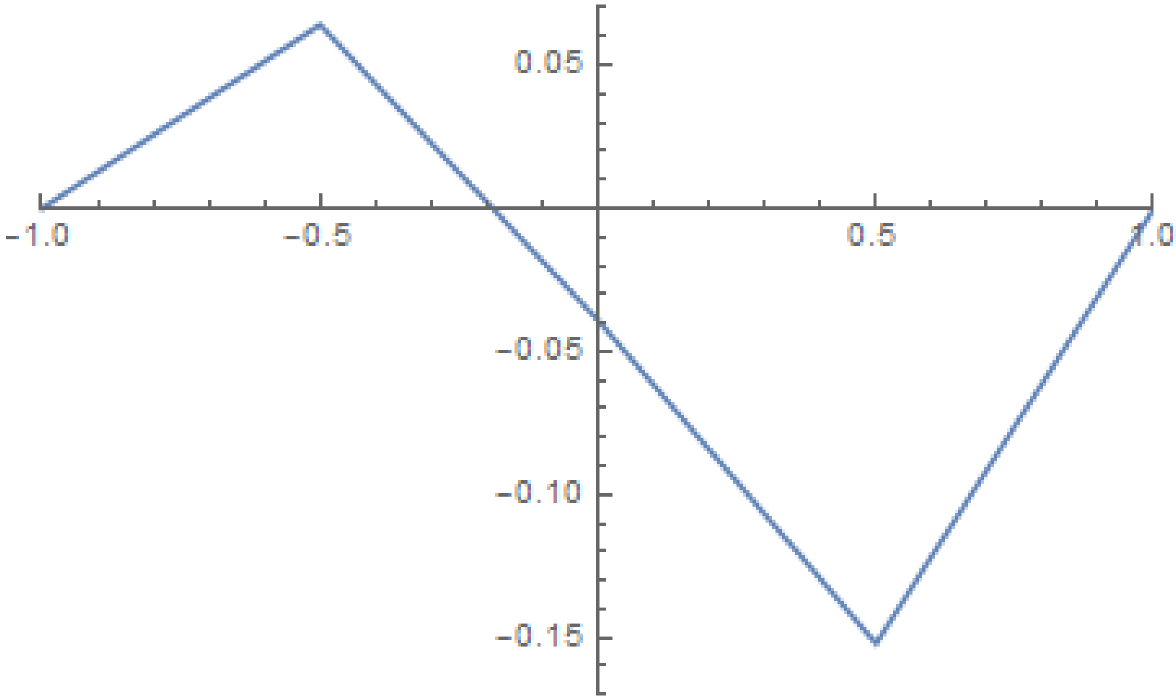
$\{-0.142994, -0.112553, -0.0776244, -0.0396016, 1.95156\times10^{-17}, 0.0396016, 0.0776244, 0.112553, 0.142994\}$

{0.0408818, 0.0555092, 0.049653, 0.0295651, 0.00203218, -0.02582, -0.0468253, -0.0540221, -0.0406872}

-1	0
-0.8	0.0408818
-0.6	0.0555092
-0.4	0.049653
-0.2	0.0295651
0.	0.00203218
0.2	-0.02582
0.4	-0.0468253
0.6	-0.0540221
0.8	-0.0406872
1	0



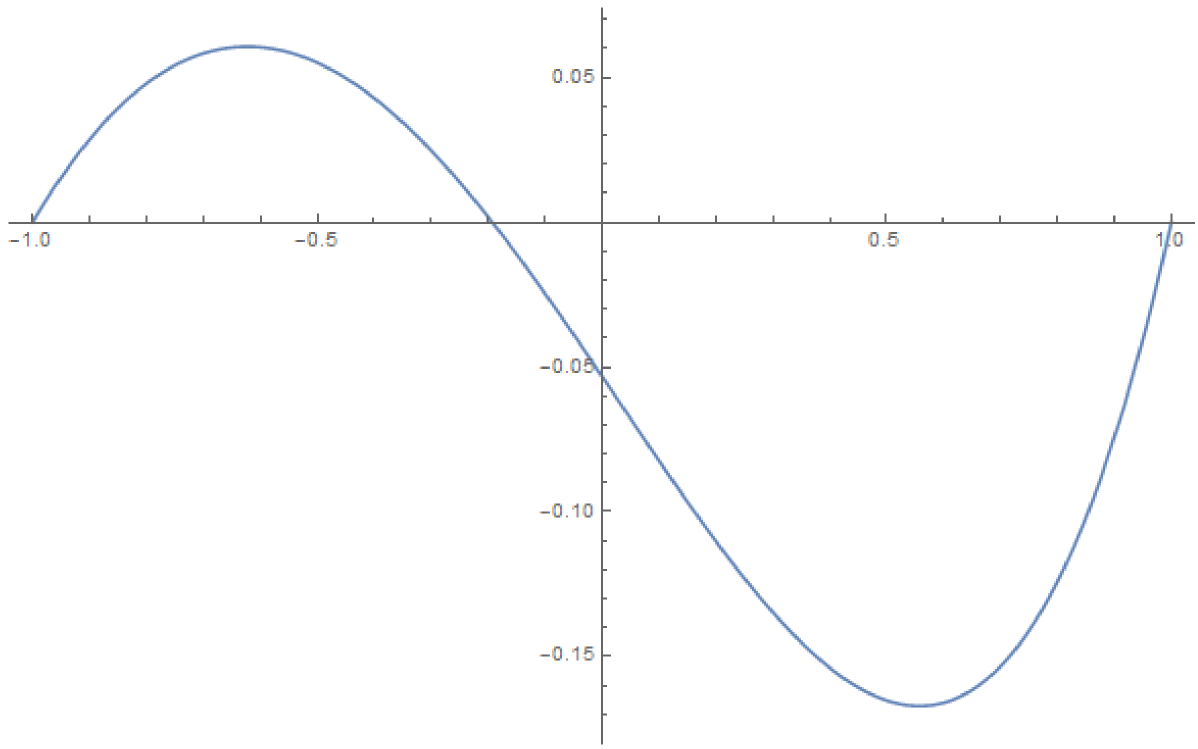
Проте величина кроку, задана в таблиці для апроксимації h=0.5. Тобто (tn - t0)/n=0.5=> (1-(-1))/n= =0.5=> 2/n=0.5 => n=4. Підставивши отримане значення n, отримали наступне рішення крайової задачі:



6. Скористатися можливостями пакету і за допомогою оператора NDSolve знайти шуканий розв’язок. Графічно порівняти з вже отриманими розвязками.

```
NDSolve[{y''[x] - (1 + x^2) * y[x] == (x^2) + 2 * x, y[-1] = 0, y[1] == 0}, y, {x, -1, 1}]
```
чисельні розв'язки диференційних рівнянь

```
Plot[Evaluate[y[x] /. %], {x, -1, 1}]
```
граф· обчислити



Висновок:

Під час виконання цієї роботи було досліджено чисельне інтегрування звичайних диференційних рівнянь при заданих граничних умовах.

З отриманих графіків можна побачити, що метод композиції двох задач Коші дав досить точний результат, проте в ньому не можна використовувати методи розв’язку задачі Коші змінного порядку і змінного кроку. Тому не підходить для розв’язку нелінійних крайових задач. Метод скінченних різниць дав досить неточні результати, але зате він потребує меншої кількості обчислень. Методи найменших квадратів і Гальоркіна дали схожий результат (доволі неточний). Метод кінцевих елементів дав найточніші результати, що не дивно, зважаючи на його трудоємкість.