МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ННК «ІПСА»

Кафедра системного проектування

Лабораторна робота №6

з дисципліни «Чисельні методи»

на тему: «Розв'язання одновимірних параболічних крайових задач»

Варіант 15

Виконав:

студент групи ДА-72

Кондратюк Т.Є.

Київ – 2019

Завдання

Знайти розподіл температури u в тонкому стрижні довжиною l з теплоізольованої бічною поверхнею при його охолодженні протягом інтервалу часу [0, T]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad u(x,0) = f(x),$$
$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u(1,t) = \phi(t),$$
$$f(x) = A\sqrt{x} + B.$$

T - час настання встановленого режиму,

l = 1 (довжина стрижня).

№	a^2	A	B	$\varphi(t)$	$\phi(t)$
15	0.5	15	2	2	17

Стислі теоретичні відомості

Розглянемо розв'язання найпростішої одномірної крайової задачі:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t), \; 0 < x < l, 0 < t, u(x,0) = f(x),$$
$$u(0,t) = \varphi(t), u(1,t) = \phi(t).$$

Явна різницева схема для вирішення заданої задачі має вигляд:

$$u_m^0 = f_m, m = \overline{0,M};$$
$$u_0^{k+1} = \varphi^{k+1},$$
$$u_m^{k+1} = su_{m-1}^k + (1-2s)u_m^k + u_{m+1}^k) + \tau F_m^k, m = \overline{1,M-1}, k = 0,1,2,...$$
$$u_M^{k+1} = \phi^{k+1},$$

тут кроки сітки рівні відповідно h = 1 / M,
$$\tau \le 0.5(h/a)^2, s = a^2\tau / h^2.$$

Неявна різницева схема для заданої задачі має вигляд:

$$u_m^0 = f_m, m = \overline{0,M};$$
$$u_0^{k+1} = \varphi^{k+1},$$
$$su_{m-1}^{k+1} - (1+2s)u_m^{k+1} + su_{m+1}^{k+1} = -u_m^k - \tau F_m^{k+1}, m = \overline{1,M-1}, k = 0,1,2,...$$
$$u_M^{k+1} = \phi^{k+1}.$$

Для вирішення використовують метод прогонки, що полягає в обчисленні прогоночних коефіцієнтів з рекурентним формулами:

L0 = 0; N0 =φ^{k+1}; Lm = s / ((1 +2 s)-sLm-1),

Nm = ($u_m^k + \iota F_m^{k+1}$ + sNm-1) / ((1 +2 s)-sLm-1), m =$\overline{1, M-1}$,

а потім у визначенні рішення за формулою:

$$u_{m-1}^{k+1} = L_{m-1}u_m^{k+1} + N_{m-1}, \quad m = \overline{M,1.} \quad ,$$

Хоча явна різницева схема і є найбільш простий, однак застосування її обмежується тим, що вона є стійкою лише для s <1, тобто $\tau \le h^2/(2a^2).$ Умова стійкості накладає дуже сильне обмеження на крок за часом. Неявна схема володіє абсолютною стійкістю.

Неявна п'ятиточкова тришарова схема визначається такою формулою:

$$\frac{3}{2}\frac{v_m^{k+1} - v_m^k}{\tau} - \frac{1}{2}\frac{v_m^k - v_m^{k-1}}{\tau} = a^2\frac{v_{m+1}^{k+1} - 2v_m^{k+1} + v_{m-1}^{k+1}}{h^2} + f_m^{k+1}.$$

Абсолютно стійка, похибка апроксимації $r_m^{k+1} = O(\tau^2 + h^2)$

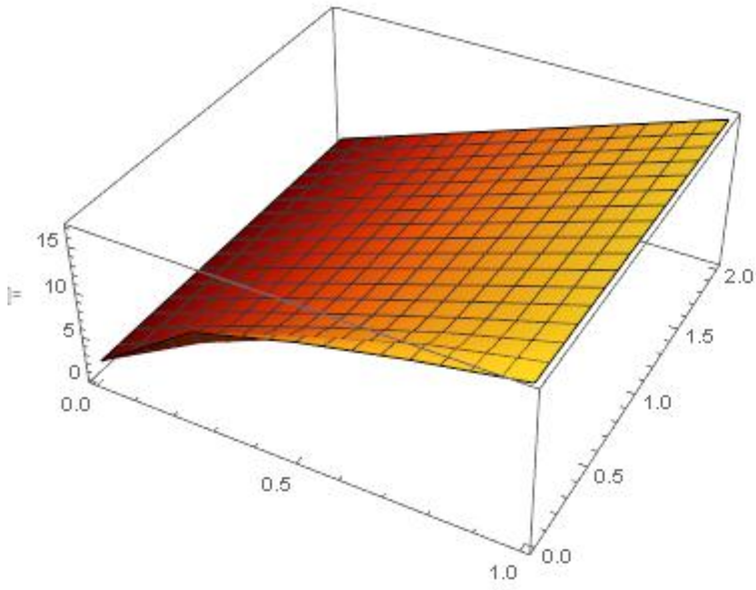
Хід роботи

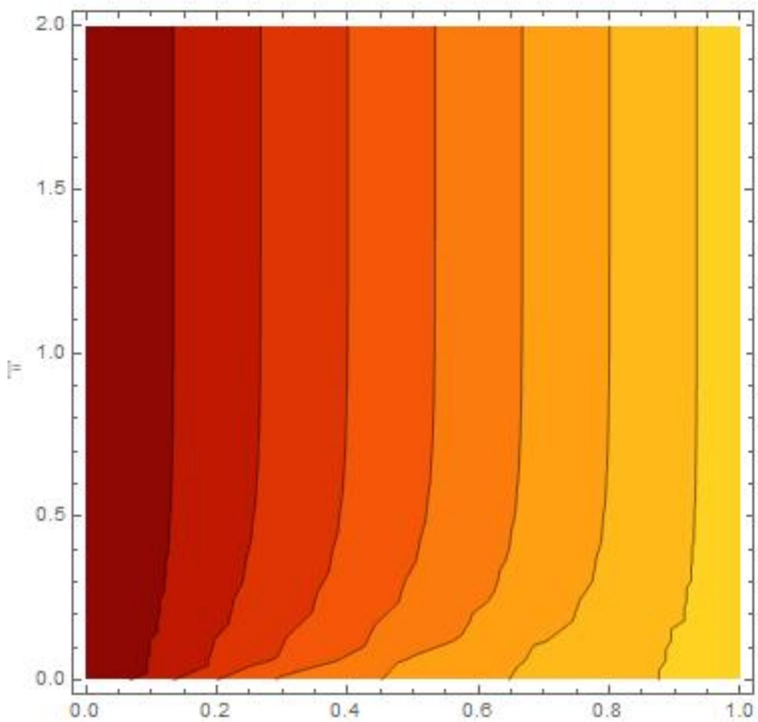
При використанні явних різницевих схем розрахунки будуть стійкими при виконанні умови s <1, тобто $\tau \le h^2/(2a^2)$, тому при використанні 10 вузлів у сітці по осі x ми маємо крок:

h = 1 / (10-1) = 0.111111 і a^2 =0.5, тоді $\tau \le \frac{0.111111^2}{3} \rightarrow \tau \le 0.004115$.

Розв’язання задачі **явною різницевою схемою**:

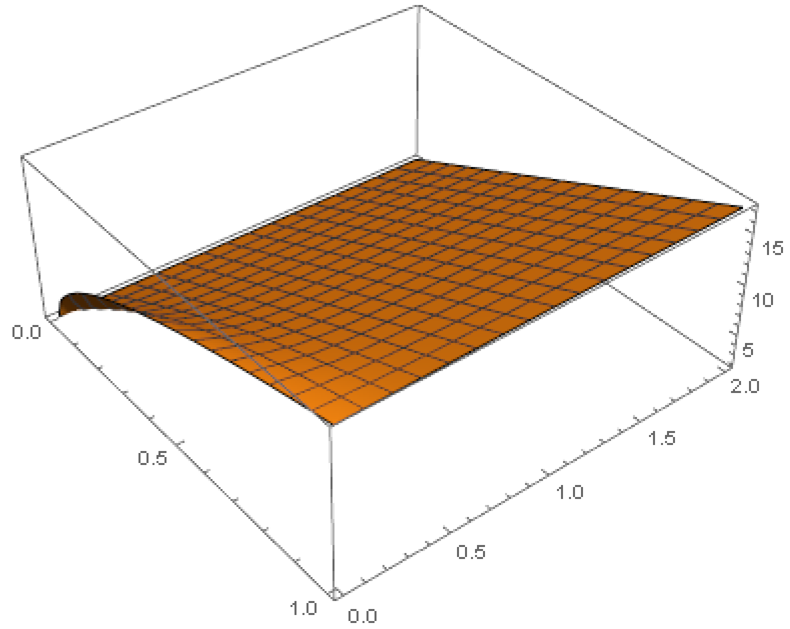
```
In[9]:= f[x_] := 15 Sqrt[x] + 2;
                    |квадратний корінь
q[t_] := 2;
w[t_] := 17;
a2 = 0.5;
l = 1; T = 2; n = 5;
h = 1 / (n - 1); m = Ceiling[(2 * T * a2) / h^2] + 2; y = T / (m - 1); g = (a2 * y) / h^2;
                     |округлення вгору
Array[U, {n, m}, {0, 0}];
|масив
Do[U[i, 0] = f[i h], {i, 0, n - 1}];
|оператор циклу
Do[U[0, j] = q[j y]; U[n - 1, j] = w[j y], {j, 0, m - 1}];
|оператор циклу
Do[U[i, j + 1] = g * U[i + 1, j] + (1 - 2 * g) U[i, j] + g * U[i - 1, j],
|оператор циклу
  {j, 0, m - 2}, {i, 1, n - 2}];
ListPlot3D[Transpose[Array[U, {n, m}, {0, 0}]], ColorFunction → "Warm", DataRange → {{0, 1}, {0, T}}]
|тримірна діа··· |транспози··· |масив          |функція забарвлювання   |протяжність даних
ListContourPlot[Transpose[Array[U, {n, m}, {0, 0}]], ColorFunction → "Warm", DataRange → {{0, 1}, {0, T}}]
|контурний графік п··· |транспози··· |масив   |функція забарвлювання   |протяжність даних
```

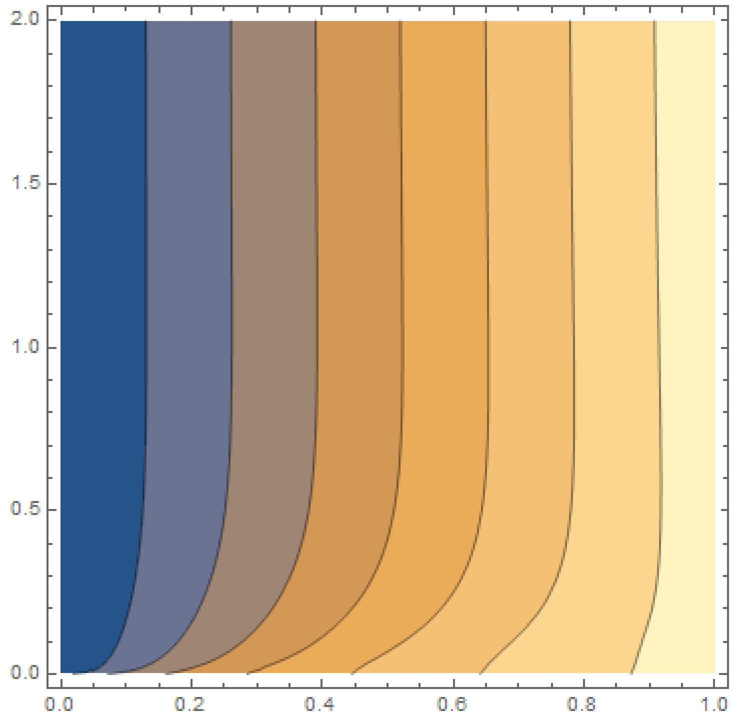




Розв’язання **неявною п’ятиточковою тришаровою схемою**:

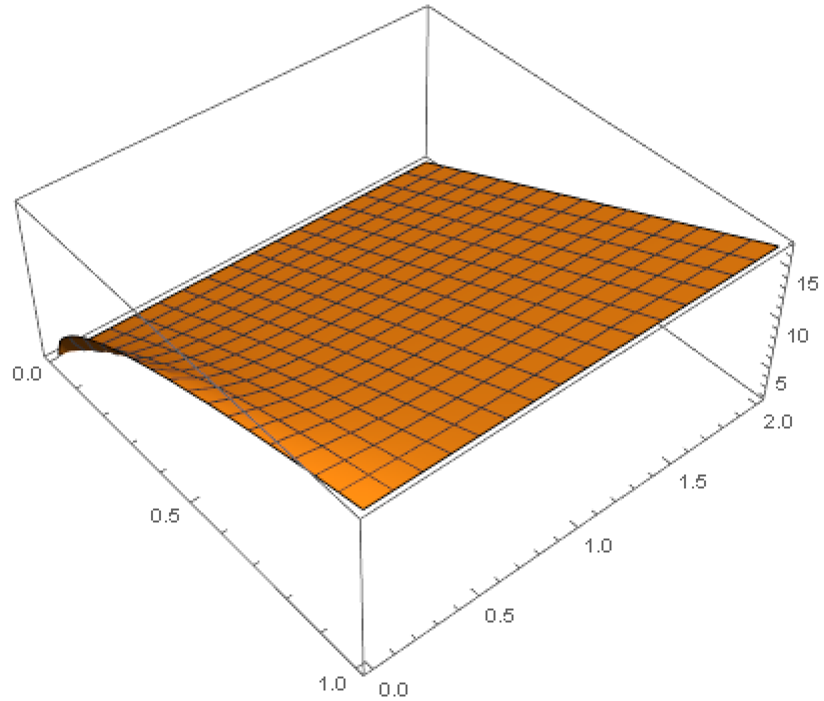
```
f[x_] := 15 Sqrt[x] + 2;
            |квадратний корінь
q[t_] := 2;
w[t_] := 17;
a2 = 0.5;
l = 1; T = 2; m = 31; k = 41; ep = 0.001;
h = 1 / (k - 1); y = T / (m - 1); g = a2 * y / h^2;
Array[U, {m, k}];
|масив
Do[U[i, j] = 0; If[i == 0 && 1 ≤ j ≤ k - 2, U[i, j] = f[j h]];
|оператор циклу |умовний оператор
  If[i == 1 && 1 ≤ j ≤ k - 2, U[i, j] = y[j h, y] /. s[[1]]];
  |умовний оператор
  If[j == 0, U[i, j] = q[i y]];
  |умовний оператор
  If[j == k - 1, U[i, j] = q[i y]], {j, 0, k - 1}, {i, 0, m - 1}];
  |умовний оператор
it = 0; eps = 1;
While[eps > ep, ++it; eps = 0;
|цикл-поки
  Do[V = U[i + 1, j];
  |оператор циклу
   U[i + 1, j] =
    ((4 U[i, j] - U[i - 1, j]) / (2 y) + g (U[i + 1, j + 1] + U[i + 1, j - 1]) / y) / (1.5 / y + 2 g / y);
   eps = Max[Abs[U[i + 1, j] - v], eps], {j, 1, k - 2}, {i, 1, m - 2}]];
         |м··· |абсолютне значення
Print["h=", N[h], " tau=", N[y], " k=", k];
|надрукувати |числове наближ··· |числове наближення
Return[Array[U, {m, k}, {0, 0}]];
|повер··· |масив
ListPlot3D[U]
|тримірна діаграма розсіву даних
ListContourPlot[U]
|контурний графік по масиву значень
```

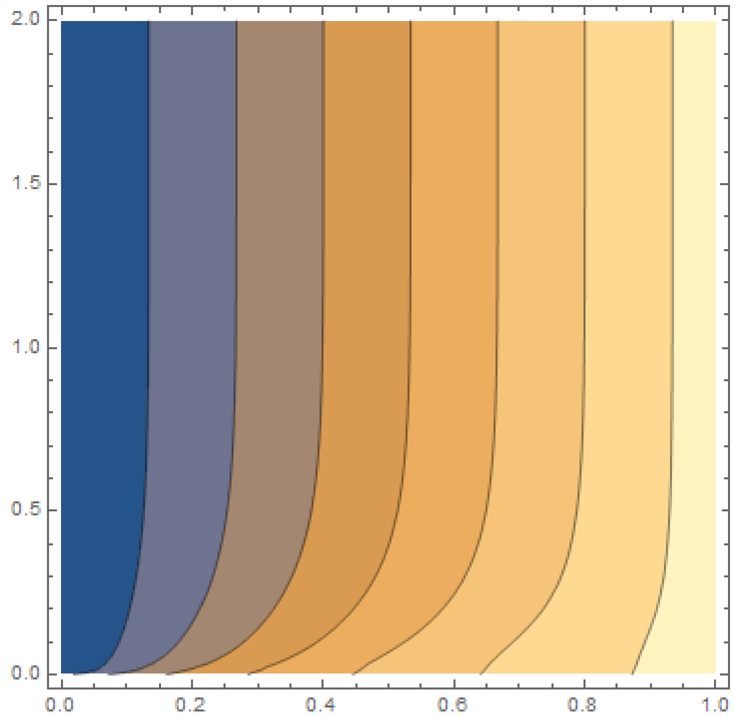




Тепер знайдемо розв'язок **стандартними засобами пакету Wolfram Mathematica**:

```
s = NDSolve[{D[y[x, t], t] == 0.5 D[y[x, t], x, x], y[x, 0] == 15 Sqrt[x] + 2, y[0, t] == 2,
    чисельні ⋯ диференціювати              диференціювати                  квадратний корінь
   y[1, t] == 17}, y, {x, 0, 1}, {t, 0, 2}];
Plot3D[Evaluate[y[x, t] /. s], {x, 0, 1}, {t, 0, 2}]
графік⋯ обчислити
ContourPlot[y[x, t] /. s, {x, 0, 1}, {t, 0, 2}]
контурний графік
```





Висновки

У ході даної лабораторної роботи була розв'язана одновимірна параболічна крайова задача. Було знайдено розподіл температури в тонкому стрижні з теплоізольованою бічною поверхнею при його охолодженні за допомогою явної різницевої та неявної п’ятиточкової тришарової схем. Результат перевірено стандартним оператором макету Mathematica. Обидва методи виявились досить точними.