МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
„ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ”

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №6

з курсу: „*Чисельні методи*”

на тему: „ *ОБЧИСЛЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ І ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ МАТРИЦІ* ”

Виконав: студент II курсу
групи ДА-72
Кондратюк Т. Є.

КИЇВ
2018

	0.08	0.25	-0.77	0.32
№15	0.25	0.50	0.14	-1
	-0.77	0.14	0.06	-0.12

Порядок виконання роботи

1. Залишити ту матрицю коефіцієнтів, з якою у лабораторній роботі № 4 виконувався пошук розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь ітераційними методами.

2. За допомогою методів, що потребують застосування характеристичного рівняння матриці , визначити всі власні значення матриці, користуючись засобами пакету щодо розв'язку нелінійних або систем лінійних рівнянь. Непарні номери варіантів здійснюватимуть пошук методом Фаддєєва–Левер'є, парні - методом Крилова.

3. Порівняти отримані результати з власними значеннями, обчисленими за допомогою функції Eigenvalues [A]. За допомогою функції Eigenvectors [A] обчислити власні вектори матриці.

4. Використовуючи ітераційний метод, що базується на QR-перетворенні, отримати первісну декомпозицію матриці A на складові Q і R. Побудувати ітераційний процес, задаючись обмеженням на значення елементів, що знаходяться нижче головної діагоналі на рівні 0.05. Порівняти отримані результати з визначеними в п. 2. Для непарних номерів варіантів використати QR-декомпозиції, для парних-декомпозицію Хаусхолдера

5. Визначити кількість ітерацій, яка необхідна для досягнення розбіжності між отриманими в п.3 і п.4 значеннями на рівні 0.01.

6. Використовуючи степеневий метод, обчислити максимальне і мінімальне власні значення матриці A. Для непарних номерів варіантів – максимальне, для парних - мінімальне власні значення матриці A. Виключити отримане значення шляхом перетворення матриці і визначити наступне власне значення. Оцінити похибку.

7. Скласти звіт з отриманих результатів і математичних формул використаних методів по кожному пункту завдання, давши оцінку порівняльної точності отриманих рішень різними методами і кількості виконаних ітерацій.

Хід роботи

1. Запишемо вхідні дані, що використовувалися у лабораторній роботі №4.

Знайдемо коефіцієнти характеристичного рівняння матриці за допомогою метода Фадеєва-Левер'є.

```
In[1]:= A = {{0.08, 0.25, -0.77}, {0.25, 0.5, 0.14}, {-0.77, 0.14, 0.06}};
        n = Length[A];
            |довжина
        b[n] = -Tr[A];
                |слід
        b[n + 1] = 1;
        K[n] = IdentityMatrix[n];
               |одинична матриця
        Print["b[", n, "]= ", b[n], " K[", n, "]= ", K[n]];
        |надрукувати
        Do[K[n - i] = A.K[n - i + 1] + b[n - i + 1] * IdentityMatrix[n];
        |оператор циклу                               |одинична матриця
         b[n - i] = -1 / (i + 1) * Tr[A.K[n - i]];
                                   |слід
         Print["b[", n - i, "]= ", b[n - i], " K[", n - i, "]= ", K[n - i]], {i, 1, n}]
         |надрукувати
        b[3]= -0.64 K[3]= {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
        b[2]= -0.6002 K[2]= {{-0.56, 0.25, -0.77}, {0.25, -0.14, 0.14}, {-0.77, 0.14, -0.58}}
        b[1]= 0.353268 K[1]=
         {{0.0104, -0.1228, 0.42}, {-0.1228, -0.5881, -0.2037}, {0.42, -0.2037, -0.0225}}
        b[0]= 2.46829×10^-17 K[0]=
         {{0., -2.77556×10^-17, 5.20417×10^-17}, {-6.93889×10^-18, -5.55112×10^-17, -3.85976×10^-17},
          {2.08167×10^-17, -2.94903×10^-17, 5.55112×10^-17}}
```

2. Порівняємо отриманий у минулому пункті результат із істинним, знайденим за допомогою стандартного оператора:

```
         Eigenvalues[N[A]]
         |власні числа |числове наближення
         NSolve[0.353 - 0.6 x - 0.64 x^2 + x^3 == 0, x]
         |чисельне наближення розв'язку рівнянь
Out[23]= {0.86037, -0.76037, 0.54}

Out[24]= {{x -> -0.760171}, {x -> 0.539616}, {x -> 0.860555}}
```

Знайдені власні значення співпали

3. Користуючись методом QR-декомпозиції ітераційно знаходимо первісну декомпозицію матриці A на складові Q і R:

```
In[59]:= A1[1] = A;
n = 29;
Do[{Q[i], R[i]} = QRDecomposition[N[A1[i]]];
  A1[i + 1] = R[i].Transpose[Q[i]], {i, n}];
Print[A1[n + 1]]
MatrixForm[A1[29]]
```

$\{\{0.859208, 0.0433917, -4.47159\times10^{-6}\}, \{0.0433917, -0.759208, 0.000134448\}, \{-4.47159\times10^{-6}, 0.000134448, 0.54\}\}$

Out[63]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.858882 & -0.0490885 & 7.12377\times10^{-6} \\ -0.0490885 & -0.758882 & 0.000189287 \\ 7.12377\times10^{-6} & 0.000189287 & 0.54 \end{pmatrix}$$

Як бачимо, для необхідної точності 0.05 вистачило 29 ітерацій декомпозиції.

```
In[96]:= A1[1] = A;
n = 79;
Do[{Q[i], R[i]} = QRDecomposition[N[A1[i]]];
  A1[i + 1] = R[i].Transpose[Q[i]], {i, n}];
Print[A1[n + 1]]
MatrixForm[A1[55]]
```

$\{\{0.86037, 0.0000900958, 1.90822\times10^{-16}\}, \{0.0000900958, -0.76037, 4.97972\times10^{-12}\}, \{-3.43586\times10^{-16}, 4.97984\times10^{-12}, 0.54\}\}$

Out[100]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.860368 & -0.00197793 & 3.92031\times10^{-11} \\ -0.00197793 & -0.760368 & 2.58821\times10^{-8} \\ 3.92036\times10^{-11} & 2.58821\times10^{-8} & 0.54 \end{pmatrix}$$

Для точності 0.01 – 55 ітерацій.

4. Використаємо степеневий метод для отримання максимального за модулем власного значення матриці A:

```
In[7]:= n = Length[A]; z[1] = {1, 1, 1};
Do[k = N[z[i][[Ordering[Abs[z[i]], -1]]]]; z[i + 1] = A.z[i] / k[[1]];
  Print["k[", i, "]= ", k[[1]], " z[", i, "]= ", z[i]], {i, n^2}]
k[1]= 1. z[1]= {1, 1, 1}
k[2]= 0.89 z[2]= {-0.44, 0.89, -0.57}
k[3]= 0.703596 z[3]= {0.703596, 0.286742, 0.482247}
k[4]= -0.671821 z[4]= {-0.345877, 0.549725, -0.671821}
k[5]= -0.933379 z[5]= {-0.933379, -0.140422, -0.45098}
k[6]= -0.719948 z[6]= {-0.254429, 0.392866, -0.719948}
k[7]= -0.87815 z[7]= {-0.87815, -0.0444939, -0.288514}
k[8]= -0.743194 z[8]= {-0.160314, 0.32133, -0.743194}
k[9]= -0.860834 z[9]= {-0.860834, -0.0222547, -0.166628}
```

Отримали власне значення -0.860834.

Висновки

У ході виконання даної лабораторної роботи було виконано пошук власних значень матриці коефіцієнтів із використанням стандартних операторів Mathematica, методу Федеэва-Левер'є та методу QR-декомпозиції. Також був здійснений пошук найбільшого власного значення матриці.

Метод Фадеєва-Левер'є передбачає знаходження коефіцієнтів характеристичного рівняння. Кількість ітерацій для цього рівна порядку матриці. Дані значення повністю збіглися із отриманими з використанням стандартних операторів. За допомогою стандартного оператора розв'язання рівнянь було отримано власні значення матриці, які також співпали з істинними (обчисленими відповідними операторами) із заданою точністю.

Використання методу QR-декомпозиції виявилось достатньо ефективним для знаходження приблизних власних значень: для отримання похибки 0.05 знадобилося 29 ітерацій, у той час як подальше уточнення значень відбувається з досить великою кількістю ітерацій.

Також для матриці було знайдено максимальне за модулем власне значення із використанням степеневого методу при проходженні 9 ітерацій.