МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСТЕТ УКРАЇНИ «КИЇІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ» ННК «ІПСА»

Кафедра системного проектування

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА

з дисципліни
«Чисельні методи»

Тема: **Використання метода суперпозиції для вирішення крайових задач.**

Виконав студент групи ДА-72

Кондратюк Т. Є.

Київ 2019

Зміст

Вступ

Крайова задача — задача теорії диференціальних рівнянь, в якій граничні умови задаються в різних точках. Наприклад, при коливаннях струни із закріпленеми кінцями зміщення на кожному з кінців дорівнює нулю.

Крайові задачі складніше розв'язувати, ніж задачі Коші, особливо чисельно.

Крайові задачі виникають як в теорії звичайних диференційних рівнянь, так і в теорії диференційних рівнянь із частковими похідними, особливо рівнянь еліптичного типу.

Постановка задачі

Дано лінійне диференційне рівняння

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y + F(x) = 0 \qquad (1)$$

З крайовими умовами :

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = A \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = B \end{cases} \qquad (2)$$

де функції P(x), Q(x), F(x) неперервні, і $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, A, B$ – задані константи, причому :

$$\begin{cases} |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0 \\ |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0 \end{cases}$$

Необхідно знайти рішення y(x) рівняння (1), що задовольняє крайові умови (2)

Опис методу суперпозиції

Рішення диференціального рівняння (1) з крайовими умовами (2) будемо шукати у вигляді лінійної комбінації:

$$y = cu(x) + v(x) \quad (3)$$

де c = const.

Підставимо y(x) у вигляді (3) у вихідне диференціальне рівняння (1) і згрупуємо доданки при константі c, отримаємо вираз:

$$c[u'' + P(x)u' + Q(x)u] + v'' + P(x)v' + Q(x)v = F(x) \quad (4)$$

Зажадаємо, щоб рівняння (4) виконувалось для будь-якого c, для цього необхідно, щоб коефіцієнти при константі c були нульовими, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} u'' + P(x)u' + Q(x)u = 0 \\ v'' + P(x)v' + Q(x)v = F(x) \end{cases} \quad (5)$$

Із системи диференціальних рівнянь (5) видно, що функція u = u(x) - ненульове рішення відповідного однорідного рівняння, а v = v(x) - деяке рішення даного неоднорідного рівняння (1).

Щоб звести крайову задачу (1) - (2) до завдань Коші для функцій u = u(x) і v = v(x), підставимо в першу крайову умову (2) вираз для функції y(x) і згрупуємо доданки при константі c, матимемо:

$$c[\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a)] + \alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) = A \quad (6)$$

Для того щоб рівність (6) було справедливо при будь-якій c, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти при постійній c перетворювались в нуль, тобто мають бути виконані рівності:

$$\begin{cases} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \\ \alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) = A \end{cases} \quad (6)$$

Отримали систему (6) з двох рівнянь з чотирма невідомими. Рішень системи буде безліч. Знайдемо хоча б одне. Для забезпечення першої рівності системи, наприклад, можна підібрати:

$$\begin{cases} u(a) = \alpha_2 k \\ u'(a) = -\alpha_1 k \end{cases} \quad (7)$$

Де константа k відмінна від нуля, бо тривіальне рішення u(a) = 0 можна відкинути.
Для виконання другої рівності системи (6) можна взяти:

$$\begin{cases} v(a) = \dfrac{A}{\alpha_1} \\ v'(a) = 0 \text{ при } \alpha_1 \neq 0 \end{cases} \quad (8)$$

або

$$\begin{cases} v(a) = 0 \\ v'(a) = \dfrac{A}{\alpha_2} \text{ при } \alpha_2 \neq 0 \end{cases} \quad (9)$$

Тепер підберемо константу c так, щоб функція y(x) задовольняла крайову умову (2) на кінці x = b. Це дає:

$$c[\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b)] + [\beta_1 v(b) + \beta_2 v'(b)] = B \quad (10)$$

звідки:

$$c = \frac{B - [\beta_1 v(b) + \beta_2 v'(b)]}{\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b)} \quad (11)$$

при цьому припускається, що знаменник

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) \neq 0$$

Для вирішення отриманих рівнянь із системи (5) використовуватимемо метод Рунге-Кутта четвертого порядку, котрий має достатньо високу точність на всьому інтервалі.
Розглянемо другу диференціальне рівняння з системи (5) з початковою умовою (9). Диференціальні рівняння системи (5) є однотипними, тому рішення першого рівняння системи (5) з початковою умовою (8) здійснюється аналогічним способом, за умови

$$F(x_n) = 0$$

Для того щоб вирішити вказане диференціальне рівняння методом Рунге-Кутта, зробимо заміну:

$$v' = z, \qquad v(a) = \frac{A}{\alpha_1}$$

і підставимо її у друге диференціальне рівняння із системи (5), отримаємо:

$$\begin{cases} z' = F(x) - P(x) - Q(x)v \\ v'(a) = z(a) = 0 \end{cases}$$

Розрахунок проводиться наступним чином: виберемо крок h. Приріст x в залежності від кроку буде:

$$x_0 = a,$$

$$x_{n+1} = x_n + h, \text{де } n = \overrightarrow{0 \ldots k-1}$$

Відповідні значення v_n і z_n шуканих функцій v і z визначаються формулами:

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{6}[k_{1v} + 2k_{2v} + 2k_{3v} + k_{4v}]$$
$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}[k_{1z} + 2k_{2z} + 2k_{3z} + k_{4z}]$$

де:

$$k_{1v} = z_n$$
$$k_{1z} = F(x_n) - P(x_n)z_n - Q(x_n)v_n$$
$$k_{2v} = z_n + \frac{h}{2}k_{1z}$$
$$k_{2z} = F\left(x_n + \frac{h}{2}\right) - P\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\left(z_n + \frac{h}{2}k_{1z}\right) - Q(x_n + \frac{h}{2})(v_n + \frac{h}{2}k_{1v})$$
$$k_{3v} = z_n + \frac{h}{2}k_{2z}$$
$$k_{3z} = F\left(x_n + \frac{h}{2}\right) - P\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\left(z_n + \frac{h}{2}k_{2z}\right) - Q(x_n + h)(v_n + \frac{h}{2}k_{2v})$$
$$k_{4v} = z_n + hk_{3z}$$
$$k_{4z} = F(x_n + h) - P(x_n + h)(z_n + hk_{3z}) - Q(x_n + h)(v_n + hk_{3v})$$

Для метода Рунге-Кутта точність залежить від обраного кроку h, що визначається один раз безпосередньо перед розрахунком

Програмування методу в пакеті Mathematica

Спочатку прописуємо метод Рунге-Кутта для рішення диференціальних рівнянь:

```
ClassicalRungeKutta /: NDSolve`InitializeMethod[ClassicalRungeKutta, __] :=
  ClassicalRungeKutta[];

ClassicalRungeKutta[___]["Step"[f_, t_, h_, y_, yp_]] :=
  Block[{deltay, k1, k2, k3, k4}, k1 = yp;
  програмний блок
   k2 = f[t + 1 / 2 h, y + 1 / 2 h k1];
   k3 = f[t + 1 / 2 h, y + 1 / 2 h k2];
   k4 = f[t + h, y + h k3];
   deltay = h (1 / 6 k1 + 1 / 3 k2 + 1 / 3 k3 + 1 / 6 k4);
   {h, deltay}];
```

Тепер його можна використовувати як параметр оператора **NDSolve.**

Далі описуємо сам метод суперпозиції:

```
S1 = NDSolve[{w''[x] + p[x] w'[x] + q[x] w[x] == 0, w[lborder] == beta0,
     чисельні розв'язки диференційних рівнянь
    w'[lborder] == -alpha0}, w, {x, lborder, rborder}, Method → ClassicalRungeKutta];
                                                         метод
W[x_] = w[x] /. S1;
S2 = NDSolve[{v''[x] + p[x] v'[x] + q[x] v[x] == f[x], v[lborder] == ya / alpha0,
     чисельні розв'язки диференційних рівнянь
    v'[lborder] == 0}, v, {x, lborder, rborder}, Method → ClassicalRungeKutta];
                                                   метод

V[x_] = v[x] /. S2;
dw[x_] = D[w[x], x]; dv[x_] = D[v[x], x];
         диференціювати          диференціювати
A = (yb - alpha1 * V[rborder] - beta1 * dv[rborder]) /
   (alpha1 * W[rborder] + beta1 * dw[rborder]);
Plot[V[x] + A * W[x], {x, lborder, rborder}]
графік функції
```

Змінні, що задаються вручну в програмі:

y’’ + p(x) * y’ + q(x) * y = f(x), де p(x), q(x) – коефіцієнти з умови

[lborder, rborder] - права і ліва межі x;

alpha0 * y(lborder) + beta0 * y`(lborder) = gamma0,
alpha1 * y(rborder) + beta1 * y`(rborder) = gamma1 - крайові умови;

Наприклад для умови:

y’’+(x^3-1)y’+xy=1/20x^3

y(0) = 1, y(0.5) = 0

введення даних буде наступним

```
lborder = 0;
rborder = 0.5;
alpha0 = 1;
beta0 = 0;
alpha1 = 1;
beta1 = 0;
gamma0 = 1;
gamma1 = 0;
p[x_] = (x^3) - 1;
q[x_] = x;
f[x_] = 1 / 20 x^3;
```

Тест програми

Тестова програма для перевірки результатів:

```
NDSolve[{y''[x] + p[x] y'[x] + q[x] y[x] == f[x],
чисельні розв'язки диференційних рівнянь
  alpha0 y[lborder] + beta0 y'[lborder] == gamma0,
  alpha1 y[rborder] + beta1 y'[rborder] == gamma1}, y, {x, lborder, rborder}]
Plot[Evaluate[y[x] /. %], {x, lborder, rborder}]
граф· обчислити
```

1) Умова:

$$y'' + (x^3 - 1)y' + xy = \frac{1}{20}x^3$$

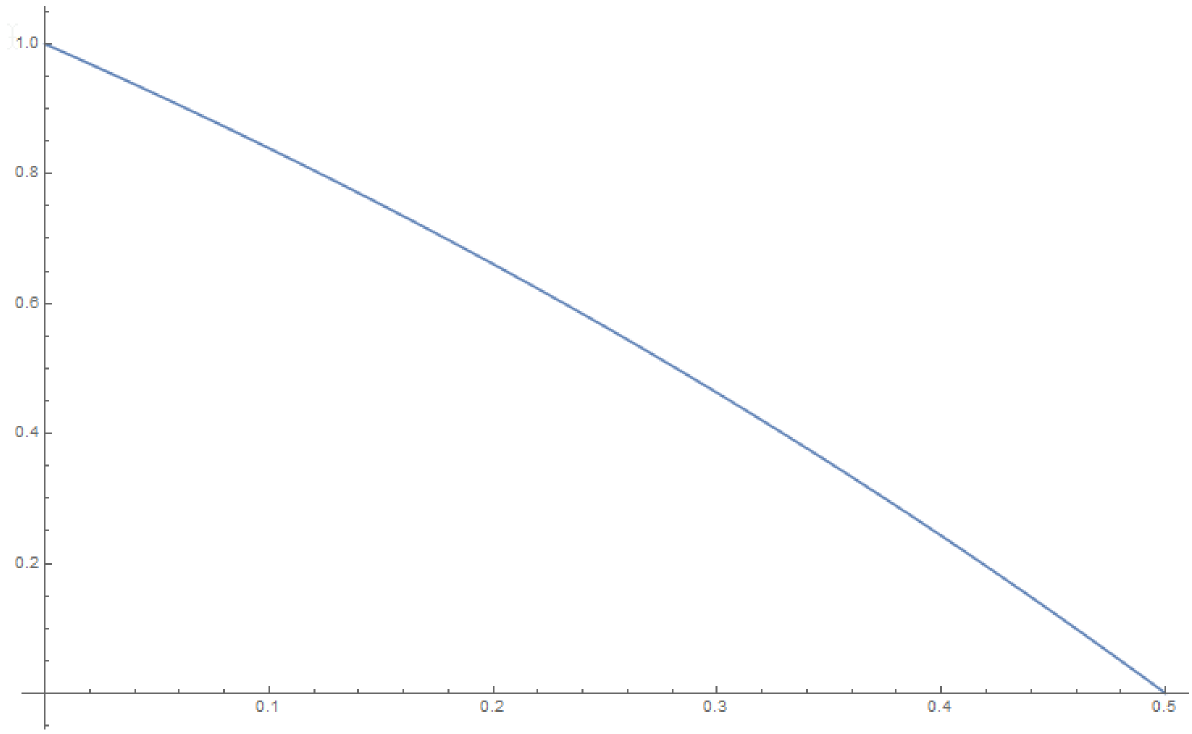
$$y(0) = 1,$$

$$y(0.5) = 0$$

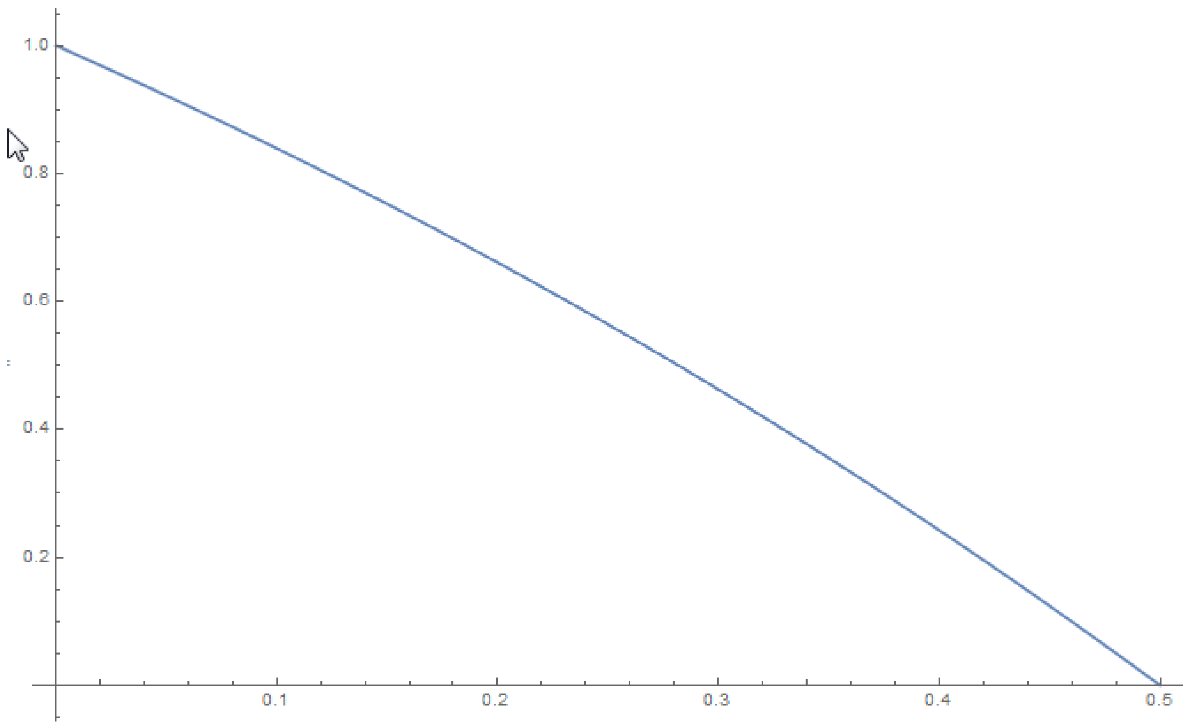
Отже, вносимо наступні дані:

```
lborder = 0;
rborder = 0.5;
alpha0 = 1;
beta0 = 0;
alpha1 = 1;
beta1 = 0;
gamma0 = 1;
gamma1 = 0;
p[x_] = (x^3) - 1;
q[x_] = x;
f[x_] = 1 / 20 x^3;
```

Результат розробленої програми:



Результат перевірочної програми:



2) Умова:

$$y'' - y = \cos(x) + 1$$

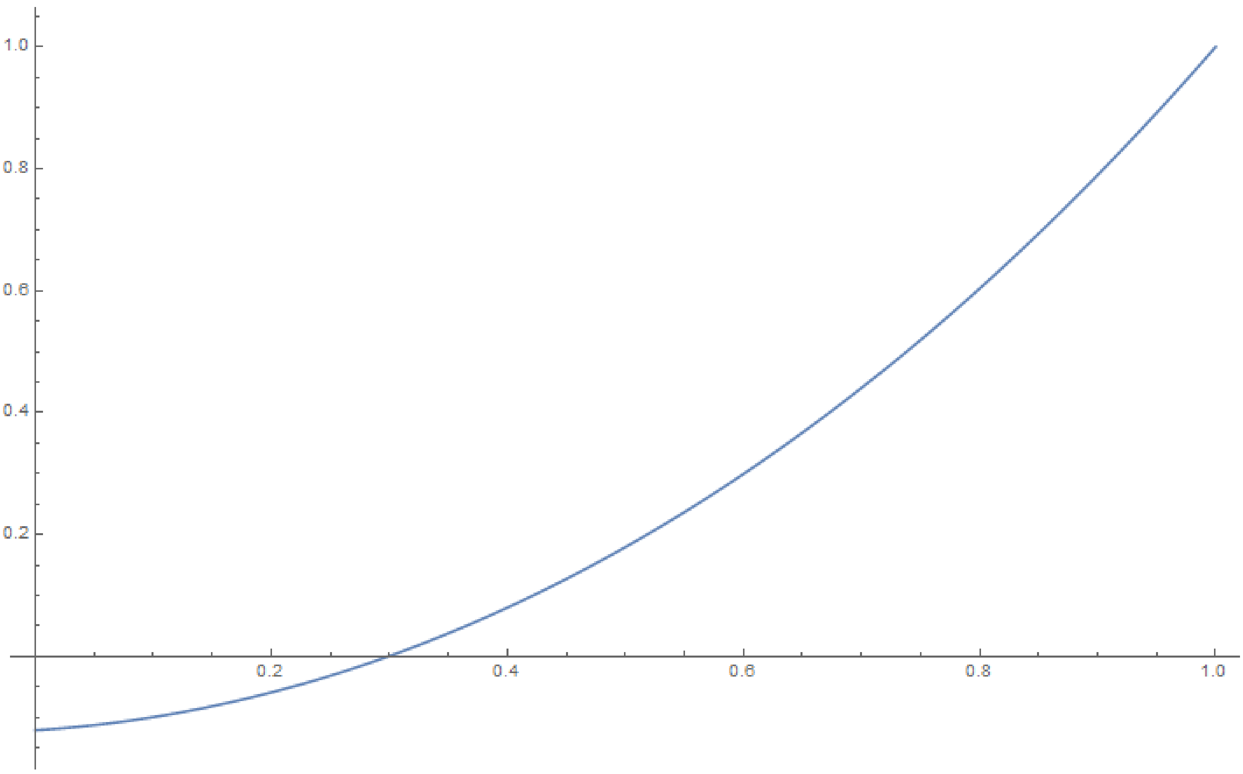
$$y(0) + y'(0) = 0$$

$$y(1) = 1$$

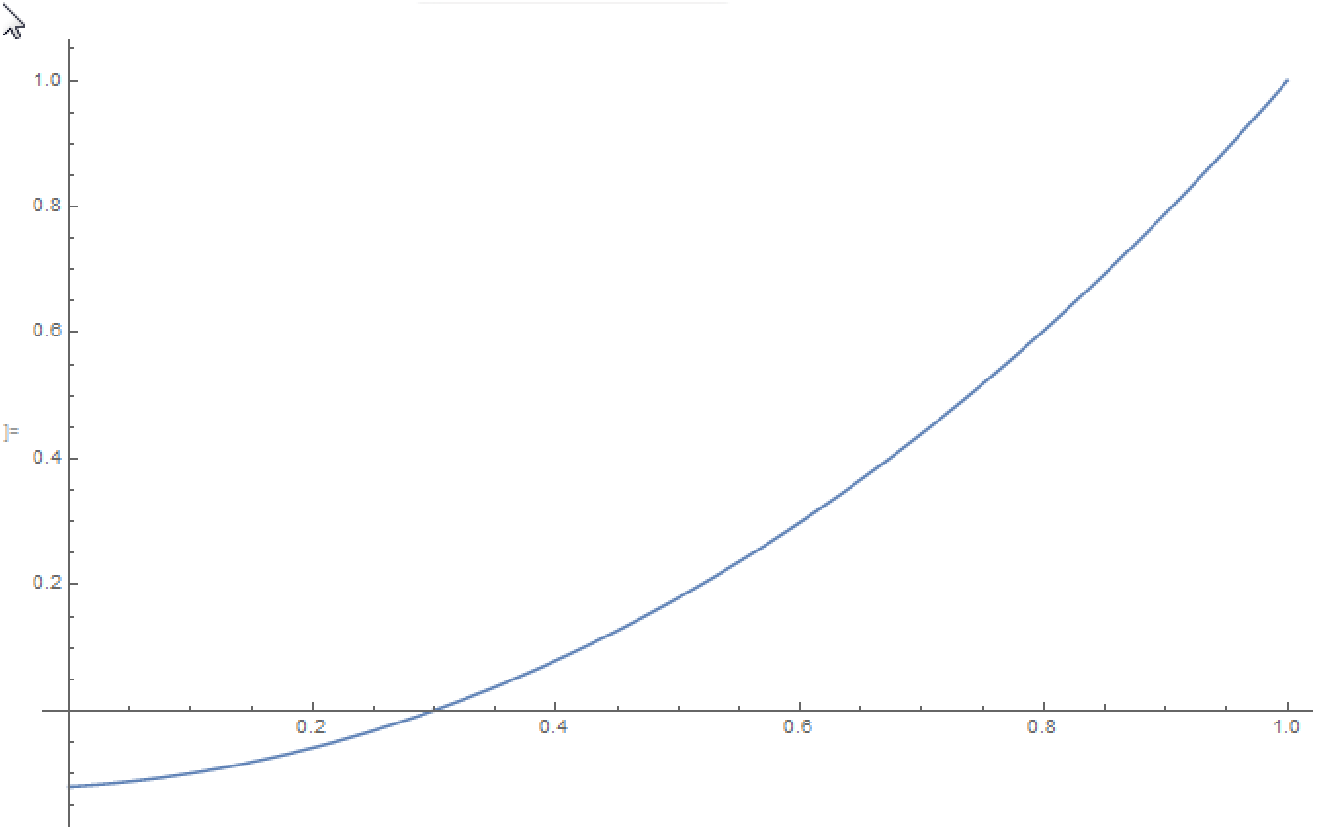
Отже, вносимо наступні дані:

```
lborder = 0;
rborder = 1;
alpha0 = 1;
beta0 = 1;
alpha1 = 1;
beta1 = 0;
gamma0 = 0;
gamma1 = 1;
p[x_] = 0;
q[x_] = -1;
f[x_] = Cos[x] + 1;
```

Результат розробленої програми:



Результат перевірочної програми:



Отже, можемо спостерігати, що результати розробленої програми повністю співпадають з тестовими.

Недоліки методу суперпозиції

1) З його допомогою неможливо вирішити нелінійну крайову задачу. Для цього зазвичай використовують метод прицілювання.

2) Незручно використовувати для системи рівнянь. У цьому випадку буде потрібне не обчислення константи c, а матриці c по матрично-векторному виразу.

3) Не дозволяє використовувати методи розв’язку задачі Коші зі змінним порядком і змінним кроком, бо на кожному кроці потрібно вираховувати вираз (3)

Висновки

У ході виконання даної розрахункової роботи було розглянуто метод суперпозиції для вирішення лінійних крайових задач. Також було розроблено програму в пакеті Математика для рішення крайових задач.

Розроблена програма показала досить високу точність, проте доволі високий час виконання. Це відбувається через те, що для вирішення диференціальних рівнянь був використаний метод Рунге-Кутта. Для досягнення високої точності в цьому методі доводиться виставляти дуже малий крок, що негативно відображається на швидкодії програми.

Список використаних джерел

https://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveExplicitRungeKutta.html

https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_суперпозиции

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ А.Ю. Крайнов, К.М. Моисеева