МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
„ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ”

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3
з курсу: „*Чисельні методи*”
на тему: „*Прямі методи рішення систем лінійних рівнянь”*

Виконав: студент ІІ курсу
групи ДА-72
Кондратюк Т. Є.

КИЇВ
2018

Порядок виконання роботи

1. Виберіть варіант завдання згідно положення вашого прізвища у списку групи.
2. Вирішити систему рівнянь, використовуючи матричну форму метода Гауса з вибором головного елементу по стовпцям, залишаючи у записі чисел лише три знаки після коми.
3. Перевірити отримане рішення системи рівнянь з допомогою оператора LinearSolve .
4. Виконати LU-розкладання матриці, використовуючи рекурентні формули (3.8), вирішити систему рівнянь.
5. Перевірити отримане розкладання, використовуючи відповідний оператор Mathematica.
6. Обчислити обернену матрицю, запрограмувавши вираз (3.15), і її визначник, користуючись отриманим LU- розкладанням матриці .
7. Вирішити систему рівнянь, використовуючи обернену матрицю.
8. Прийнявши знайдене методом Гауса рішення за початкове наближення, виконати його уточнення до 4-5 знаків ітераційним методом (3.13)
9. Скласти звіт з отриманих результатів і математичних формул використаних методів по кожному пункту завдання, давши оцінку порівняльної точності отриманих рішень.

№15	**0.12**	**-1**	**0.32**	**-0.18**	**0.72**
	0.08	**-0.12**	**-0.77**	**0.32**	**0.58**
	0.25	**0.22**	**0.14**	**-1**	**-1.56**
	-0.77	**-0.14**	**0.06**	**-0.12**	**-1.21**

Хід роботи

Завдання 2

Розв'яжемо систему рівнянь, використовуючи матричну форму метода Гауса з вибором головного елементу по стовпцям. Спочатку задаємо вхідні дані:

```
In[1]:= A = {{0.12, -1, 0.32, -0.18}, {0.08, 0 - 0.12, -0.77, 0.32}, {0.25, 0.22, 0.14, -1},
    {-0.77, -0.14, 0.06, -0.12}};
  b = {0.72, 0.58, -1.56, -1.21};
  X = {x1, x2, x3, x4};
  Print[MatrixForm[A], MatrixForm[X], " = ", MatrixForm[b]]
  |надр··· |матрична форма  |матрична форма       |матрична форма
```

$$\begin{pmatrix} 0.12 & -1 & 0.32 & -0.18 \\ 0.08 & -0.12 & -0.77 & 0.32 \\ 0.25 & 0.22 & 0.14 & -1 \\ -0.77 & -0.14 & 0.06 & -0.12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.72 \\ 0.58 \\ -1.56 \\ -1.21 \end{pmatrix}$$

У першому стовпці найбільший за модулем елемент міститься у 4му рядку, тому поміняємо його місцями з 1м, утворимо елементарну нижню матрицю L1 і перетворимо систему з її допомогою:

```
In[83]:= A = {{0.12, -1, 0.32, -0.18}, {0.08, 0 - 0.12, -0.77, 0.32}, {0.25, 0.22, 0.14, -1},
    {-0.77, -0.14, 0.06, -0.12}};
  b = {0.72, 0.58, -1.56, -1.21};
  X = {x1, x2, x3, x4};
  P14 = {{0, 0, 0, 1}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {1, 0, 0, 0}};
  A1 = P14.A;
  b1 = P14.b;
  Print[MatrixForm[A1], MatrixForm[X], " = ", MatrixForm[b1]]
  |надр··· |матрична форма  |матрична форма       |матрична форма
  L1 = {{1 / A1[[1, 1]], 0, 0, 0}, {-A1[[2, 1]] / A1[[1, 1]], 1, 0, 0},
    {-A1[[3, 1]] / A1[[1, 1]], 0, 1, 0}, {-A1[[4, 1]] / A1[[1, 1]], 0, 0, 1}};
  A2 = L1.A1;
  b2 = L1.b1;
  Print["L1 = ", MatrixForm[L1]]
  |надрукувати      |матрична форма

  Print[MatrixForm[A2], MatrixForm[X], " = ", MatrixForm[b2]]
  |надр··· |матрична форма  |матрична форма       |матрична форма
```

$$\begin{pmatrix} 1. & 0.181818 & -0.0779221 & 0.155844 \\ 0. & -0.134545 & -0.763766 & 0.307532 \\ 0. & 0.174545 & 0.159481 & -1.03896 \\ 0. & -1.02182 & 0.329351 & -0.198701 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.57143 \\ 0.454286 \\ -1.95286 \\ 0.531429 \end{pmatrix}$$

$$L1 = \begin{pmatrix} -1.2987 & 0 & 0 & 0 \\ 0.103896 & 1 & 0 & 0 \\ 0.324675 & 0 & 1 & 0 \\ 0.155844 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0.77 & -0.14 & 0.06 & -0.12 \\ 0.08 & -0.12 & -0.77 & 0.32 \\ 0.25 & 0.22 & 0.14 & -1. \\ 0.12 & -1. & 0.32 & -0.18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.21 \\ 0.58 \\ -1.56 \\ 0.72 \end{pmatrix}$$

Далі у другому стовпці найбільший за модулем елемент для виключення маємо у 4му рядку, тому поміняємо його місцями з 2м, утворимо елементарну нижню матрицю L2 і перетворимо систему з її допомогою:

```
P24 = {{1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}};
A3 = P24.A2;
b3 = P24.b2;
Print[MatrixForm[A3], MatrixForm[X], " = ", MatrixForm[b3]]
надр···  матрична форма  матрична форма  матрична форма
L2 = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1 / A3[[2, 2]], 0, 0}, {0, -A3[[3, 2]] / A3[[2, 2]], 1, 0},
   {0, -A3[[4, 2]] / A3[[2, 2]], 0, 1}};
Print["L2 = ", MatrixForm[L2]]
надрукувати  матрична форма
```

$$\begin{pmatrix} 1. & 0.181818 & -0.0779221 & 0.155844 \\ 0. & -1.02182 & 0.329351 & -0.198701 \\ 0. & 0.174545 & 0.159481 & -1.03896 \\ 0. & -0.134545 & -0.763766 & 0.307532 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.57143 \\ 0.531429 \\ -1.95286 \\ 0.454286 \end{pmatrix}$$

$$L2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.978648 & 0 & 0 \\ 0 & 0.170819 & 1 & 0 \\ 0 & -0.131673 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
A4 = L2.A3;
b4 = L2.b3;
Print[MatrixForm[A4], MatrixForm[X], " = ", MatrixForm[b4]]
надр···  матрична форма  матрична форма  матрична форма
```

$$\begin{pmatrix} 1. & 0.181818 & -0.0779221 & 0.155844 \\ 0. & 1. & -0.322318 & 0.194459 \\ 0. & 0. & 0.21574 & -1.0729 \\ 0. & 0. & -0.807133 & 0.333696 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.57143 \\ -0.520081 \\ -1.86208 \\ 0.384311 \end{pmatrix}$$

У третьому стовпці найбільший за модулем елемент міститься у 4му рядку, тому поміняємо його місцями з 3м, утворимо елементарну нижню матрицю L3 і пертворимо систему з її допомогою:

```
A4 = L2.A3;
b4 = L2.b3;

P34 = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}};
A5 = P34.A4;
b5 = P34.b4;
Print[MatrixForm[A5], MatrixForm[X], " = ", MatrixForm[b5]]
надр···  матрична форма  матрична форма  матрична форма
L3 = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1 / A5[[3, 3]], 0}, {0, 0, -A5[[4, 3]] / A5[[3, 3]], 1}};
Print["L3 = ", MatrixForm[L3]]
надрукувати  матрична форма
A6 = L3.A5;
b6 = L3.b5;
Print[MatrixForm[A6], MatrixForm[X], " = ", MatrixForm[b6]]
надр···  матрична форма  матрична форма  матрична форма
```

$$\begin{pmatrix} 1. & 0.181818 & -0.0779221 & 0.155844 \\ 0. & 1. & -0.322318 & 0.194459 \\ 0. & 0. & 1. & -0.413434 \\ 0. & 0. & 2.77556\times10^{-17} & -0.983709 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.57143 \\ -0.520081 \\ -0.476144 \\ -1.75936 \end{pmatrix}$$

$$L3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.23895 & 0 \\ 0 & 0 & 0.267291 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 0.181818 & -0.0779221 & 0.155844 \\ 0. & 1. & -0.322318 & 0.194459 \\ 0. & 0. & -0.807133 & 0.333696 \\ 0. & 0. & 0.21574 & -1.0729 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.57143 \\ -0.520081 \\ 0.384311 \\ -1.86208 \end{pmatrix}$$

Перетворюємо останній елемент головної діагоналі на 1:

```
L4 = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1 / A6[[4, 4]]}};
Print["L4 = ", MatrixForm[L4]]
|надрукувати   |матрична форма
A7 = L4.A6;
b7 = L4.b6;
Print[MatrixForm[A7], MatrixForm[X], " = ", MatrixForm[b7]]
|надр···  |матрична форма   |матрична форма   |матрична форма
```

$$\begin{pmatrix} 1. & 0.181818 & -0.0779221 & 0.155844 \\ 0. & 1. & -0.322318 & 0.194459 \\ 0. & 0. & 1. & -0.413434 \\ 0. & 0. & -2.82152\times10^{-17} & 1. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.57143 \\ -0.520081 \\ -0.476144 \\ 1.78849 \end{pmatrix}$$

$$L4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.01656 \end{pmatrix}$$

Отримуємо остаточні розв’язки:

```
x = Inverse[A7].b7
    |обернена матриця
```

Out[349]= {1.45558, -0.783009, 0.26328, 1.78849}

Завдання 3

Для перевірки попереднього результату скористаємось оператором LinearSolve:

```
y = LinearSolve[A, b]
    |розв'язати систему лінійних рівнянь
a = x - y
```

Out[375]= {1.45558, -0.783009, 0.26328, 1.78849}

Out[376]= $\{-2.22045\times10^{-16}, 1.11022\times10^{-16}, 0., 0.\}$

Отже різниця потрапляє у межі тієї точності, з якою обчислювалась задача.

Завдання 4

Виконати LU- розкладання матриці, використовуючи рекурентні формули (3.8), вирішити систему рівнянь. Спочатку виконаємо розклад матриці на дві трикутні, використовуючи рекурентні формули :

$$\left.\begin{aligned} u_{sj} &= a_{sj} - \sum_{k=1}^{s-1} l_{sk} u_{kj}, \quad j = \overline{s,n} \\ l_{is} &= (a_{is} - \sum_{k=1}^{s-1} l_{ik} u_{ks}) / u_{ss}, \quad i = \overline{s+1,n} \end{aligned}\right\} \quad s = \overline{1,n}$$

```
In[377]:= A = {{0.12, -1, 0.32, -0.18}, {0.08, 0 - 0.12, -0.77, 0.32}, {0.25, 0.22, 0.14, -1},
    {-0.77, -0.14, 0.06, -0.12}};
n = 4;
U = Table[0, {i, 1, n}, {j, 1, n}];
    таблиця значень
L = Table[0, {i, 1, n}, {j, 1, n}];
    таблиця значень
For[i = 1, i ≤ n, i++, L[[i, i]] = 1];
цикл ДЛЯ
For[s = 1, s <= n, s++,
цикл ДЛЯ
  For[j = s, j ≤ n, j++,
  цикл ДЛЯ
   U[[s, j]] = A[[s, j]] - Sum[L[[s, k]] * U[[k, j]], {k, 1, s - 1}]]];
                          сума
For[s = 1, s <= n, s++,
цикл ДЛЯ
  For[i = s + 1, i ≤ n, i++,
  цикл ДЛЯ
   L[[i, s]] = (A[[i, s]] - Sum[L[[i, k]] * U[[k, s]], {k, 1, s - 1}]) / U[[s, s]]]];
                            сума
Print[MatrixForm[L], MatrixForm[U]]
надр⋯ матрична форма   матрична форма
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.666667 & 1 & 0 & 0 \\ 2.08333 & -19.1944 & 1 & 0 \\ -6.41667 & 54.6389 & 315.609 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.12 & -1 & 0.32 & -0.18 \\ 0 & -0.12 & -0.77 & 0.32 \\ 0 & 0 & 0.14 & -1. \\ 0 & 0 & 0 & -0.12 \end{pmatrix}$$

Завдання 5

Перевірити отримане розкладання, використовуючи відповідний оператор Mathematica.

```
In[385]:= A = {{0.12, -1, 0.32, -0.18}, {0.08, 0 - 0.12, -0.77, 0.32}, {0.25, 0.22, 0.14, -1}, {-0.77, -0.14, 0.06, -0.12}};
{lu, p, c} = LUDecomposition[A];
             LU-розклад
l = lu SparseArray[{i_, j_} /; j ≤ i → 1, {4, 4}] + IdentityMatrix[4];
       розріджений масив                          одинична матриця

u = lu SparseArray[{i_, j_} /; j >= i → 1, {4, 4}];
       розріджений масив
Print[MatrixForm[l], MatrixForm[u]]
надр⋯ матрична форма   матрична форма
```

$$\begin{pmatrix} 0.23 & 0 & 0 & 0 \\ -0.155844 & -0.0218182 & 0 & 0 \\ -0.103896 & 0.131673 & 0.192867 & 0 \\ -0.324675 & -0.170819 & -0.267291 & 0.0162912 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.77 & -0.14 & 0.06 & -0.12 \\ 0 & -1.02182 & 0.329351 & -0.198701 \\ 0 & 0 & -0.807133 & 0.333696 \\ 0 & 0 & 0 & -0.983709 \end{pmatrix}$$

Завдання 6. Обчислити обернену матрицю та її визначник, користуючись отриманим LU- розкладанням матриці.

```
In[412]:= A = {{0.12, -1, 0.32, -0.18}, {0.08, 0 - 0.12, -0.77, 0.32}, {0.25, 0.22, 0.14, -1},
    {-0.77, -0.14, 0.06, -0.12}};

{lu, p, conditionNumber} = LUDecomposition[A];
                           LU-розклад
MatrixForm[lu]
матрична форма
U = lu * Table[If[i <= j, 1, 0], {i, Length[lu]}, {j, Length[lu]}];
         табл··· умовний оператор  довжина           довжина
MatrixForm[U]
матрична форма
L = lu - U + IdentityMatrix[Length[lu]];
             одинична матриця довжина
MatrixForm[L]
матрична форма
```

Out[414]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.77 & -0.14 & 0.06 & -0.12 \\ -0.155844 & -1.02182 & 0.329351 & -0.198701 \\ -0.103896 & 0.131673 & -0.807133 & 0.333696 \\ -0.324675 & -0.170819 & -0.267291 & -0.983709 \end{pmatrix}$$

Out[416]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.77 & -0.14 & 0.06 & -0.12 \\ 0. & -1.02182 & 0.329351 & -0.198701 \\ 0. & 0. & -0.807133 & 0.333696 \\ 0. & 0. & 0. & -0.983709 \end{pmatrix}$$

Out[418]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. \\ -0.155844 & 1. & 0. & 0. \\ -0.103896 & 0.131673 & 1. & 0. \\ -0.324675 & -0.170819 & -0.267291 & 1. \end{pmatrix}$$

```
P = {{0, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}}.{{0, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}
  };
Print[MatrixForm[L.U], MatrixForm[P.A]]
надр··· матрична форма    матрична форма
PAI = Inverse[U].Inverse[L];
      обернена м··· обернена матриця
MatrixForm[PAI.P.A]
матрична форма
Det[P.A]
детермінант
Det[U]
детермінант
```

Out[447]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1. & -2.77556\times10^{-17} & 0. & -2.77556\times10^{-17} \\ -2.77556\times10^{-17} & 1. & -4.68375\times10^{-17} & -2.08167\times10^{-17} \\ 0. & -2.08167\times10^{-17} & 1. & 6.93889\times10^{-17} \\ -5.55112\times10^{-17} & 2.08167\times10^{-17} & 2.08167\times10^{-17} & 1. \end{pmatrix}$$

Out[448]= 0.624706

Out[449]= 0.624706

$$\begin{pmatrix} -0.77 & -0.14 & 0.06 & -0.12 \\ 0.12 & -1. & 0.32 & -0.18 \\ 0.08 & -0.12 & -0.77 & 0.32 \\ 0.25 & 0.22 & 0.14 & -1. \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.77 & -0.14 & 0.06 & -0.12 \\ 0.12 & -1. & 0.32 & -0.18 \\ 0.08 & -0.12 & -0.77 & 0.32 \\ 0.25 & 0.22 & 0.14 & -1. \end{pmatrix}$$

Завдання 7

Вирішити систему рівнянь, використовуючи обернену матрицю.

За допомогою отриманої вище оберненої матриці можна розв'язати систему рівнянь:

$\boldsymbol{Ax = b}$ *при* $\boldsymbol{PA = LU}$

$\boldsymbol{PAx = Pb}$

$\boldsymbol{LUx = Pb}$, *нехай* $\boldsymbol{Ux = y}$

$\boldsymbol{Ly = Pb}$

$\boldsymbol{L^{-1}Ly = L^{-1}Pb}$

$\boldsymbol{L^{-1}Ly = L^{-1}Pb}$

$\boldsymbol{y = L^{-1}Pb}$

$\boldsymbol{Ux = L^{-1}Pb}$

$\boldsymbol{U^{-1}Ux = U^{-1}L^{-1}Pb}$

$\boldsymbol{x = U^{-1}L^{-1}Pb}$

```
b = {0.72, 0.58, -1.56, -1.21};
x = Round[Inverse[U].Inverse[L].P.b, 0.001];
    округ…  обернена м…  обернена матриця
MatrixForm[x]
матрична форма
```

Out[458]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1.456 \\ -0.783 \\ 0.263 \\ 1.788 \end{pmatrix}$$

Завдання 8

Прийнявши знайдене методом Гаусса рішення за початкове наближення, виконати його уточнення до 4-5 знаків ітераційним методом.

```
eps = b - A.x;
Print[eps]
надрукувати
y1 = LinearSolve[A, eps];
розв'язати систему лінійних рівнянь
x1 = x + y1;
MatrixForm[Round[x1, 0.00001]]
матрична ф··· округлити
```

```
{-0.00004, -0.00009, -0.00056, 0.00028}
Out[484]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1.45558 \\ -0.78301 \\ 0.26328 \\ 1.78849 \end{pmatrix}$$

Висновок:

У процесі виконання лабораторної роботи було вирішено рівняння з використанням: методу виключення Гауса з вибором опорного елемента, вбудованого оператора LinearSolve, методу рекурентного LU – розкладу, методу LU – розкладу, вбудованого оператора luDecomposition, методу оберненої матриці. А також обчислено ітеративне уточнення значень, отриманих у першому завданні. Було отримано такі результати:

Спосіб обчислення	X1	X2	X3	X4
Метод виключення Гауса з вибором опорного елемента	1.456	-0.783	0.263	1.788
LinearSolve	1.45558	-0.783009	0.26328	1.78849
Рекурентне LU-розкладання	1.45558	-0.783009	0.26328	1.78849
Метод оберненої матриці	1.456	-0.783	0.263	1.788
Ітеративне уточнення значень	1.45558	-0.78301	0.26328	1.78849

З таблиці бачимо, що найнеточнішими є значення, які були отримані методом Гауса. Це виклинано тим, що ми округлювали дані до 3го знаку після коми, і через це похибки обчислень складалися. Для того, щоб зменшити похибки при розрахунках цим способом потрібно використовувати метод ітеративного уточнення. Ітеративне уточнення значно зменшує похибки значень.

LU – розклад є дуже дієвим та простим у виконанні методом обчислення визначника матриці, а також знаходження оберненої та вирішення СЛАР.