МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
„ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ”

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №7

з курсу: „*Чисельні методи*”
на тему: „*ІНТЕРПОЛЯЦІЯ І НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ*”

Виконала: студент ІІ курсу
групи ДА-72
Кондратюк Т. Є.

КИЇВ
2018

Варіант 15:

15	Xi Yi	0.40 0.50	0.60 1.375	0.80 1.50	1.00 1.75	1.20 1.625

15	$\lg(x) - 1/x^2=0$

Порядок виконання роботи

1. Для вашого варіанта за даними таблиці 7.1 побудувати інтерполяційний багаточлен відповідно формулі, що вказана в таблиці 7.1. По тим же точкам, використавши засоби пакета Mathematica, за допомогою функції `InterpolatingPolynomial` отримати поліном і порівняти з побудованим раніше.

2. Обчислити значення функції у середніх точках двух відрізків, розташування яких повинно узгоджуватись з формулою інтерполяції варіанта завдання.

3. Побудувати графіки отриманих функцій і нанести на них початкові дані з таблиці.

4. По аналітично заданої функції (табл. 7.2) сформувати регулярну таблицю вузлів (бажано, щоб амплітуда інтервалу не перевищувала 1), приблизити отримані дані інтерполяційним поліномом і оцінити отриману похибку, порівнявши на інтервалі початкову аналітично задану функцію і значення поліному. Визначити максимальну розбіжність.

5. Для функції з п.4 розташувати ту ж кількість вузлів за допомогою формул Чебишева. Порівняти розбіжності, що були отримані двома способами.

6. Побудувати графіки (побудову виконувати на одному рисунку).

7. По даним таблиці 7.1 сформувати систему лінійних рівнянь і виконати сплайн-інтерполяцію. Порівняти отримані залежності з поліномом з п.1 за допомогою графіків.

8. Виконати наближення функції, що задана таблицею, за допомогою метода найменших квадратів, обираючи для цього ступені полінома від першої до максимально можливої. Побудувати графіки. Визначити для кожного випадку значення середньоквадратичне відхилення.

9. Скласти звіт з отриманих результатів і математичних формул використаних методів по кожному пункту завдання , давши оцінку порівняльної точності отриманих рішень різними методами.

Хід роботи

Будуємо інтерполяційний поліном за формулою Ньютона:

```
In[25]:= X = {0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2};
F = {0.5, 1.375, 1.5, 1.75, 1.625};
n = 5;
j = Table[i, {i, 0, n}];
    таблиця значень
G = (-1) ^ (n - j) * t * Product[(t - i), {i, 1, n}] / (Factorial[j] * Factorial[n - j] * (t - j))
                         добуток                          факторіал       факторіал
Y = Sum[G[[i]] * F[[i]], {i, 1, 5}]
    сума
```

$$\text{Out[29]=}\ \left\{-\frac{1}{120}(-5+t)(-4+t)(-3+t)(-2+t)(-1+t),\ \frac{1}{24}(-5+t)(-4+t)(-3+t)(-2+t)t,\ -\frac{1}{12}(-5+t)(-4+t)(-3+t)(-1+t)t,\ \frac{1}{12}(-5+t)(-4+t)(-2+t)(-1+t)t,\ -\frac{1}{24}(-5+t)(-3+t)(-2+t)(-1+t)t,\ \frac{1}{120}(-4+t)(-3+t)(-2+t)(-1+t)t\right\}$$

$$\text{Out[30]=}\ -0.00416667(-5+t)(-4+t)(-3+t)(-2+t)(-1+t)+0.0572917(-5+t)(-4+t)(-3+t)(-2+t)t-0.125(-5+t)(-4+t)(-3+t)(-1+t)t+0.145833(-5+t)(-4+t)(-2+t)(-1+t)t-0.0677083(-5+t)(-3+t)(-2+t)(-1+t)t$$

```
In[31]:= Y1 = Y /. t → (x - 0.4) / 0.2
Expand[Y1]
розкрити дужки
```

$$\text{Out[31]=}\ -0.00416667(-5+5.(-0.4+x))(-4+5.(-0.4+x))(-3+5.(-0.4+x))(-2+5.(-0.4+x))(-1+5.(-0.4+x))+0.286458(-5+5.(-0.4+x))(-4+5.(-0.4+x))(-3+5.(-0.4+x))(-2+5.(-0.4+x))(-0.4+x)-0.625(-5+5.(-0.4+x))(-4+5.(-0.4+x))(-3+5.(-0.4+x))(-1+5.(-0.4+x))(-0.4+x)+0.729167(-5+5.(-0.4+x))(-4+5.(-0.4+x))(-2+5.(-0.4+x))(-1+5.(-0.4+x))(-0.4+x)-0.338542(-5+5.(-0.4+x))(-3+5.(-0.4+x))(-2+5.(-0.4+x))(-1+5.(-0.4+x))(-0.4+x)$$

$$\text{Out[32]=}\ -18.375+109.448x-234.505x^2+239.583x^3-113.932x^4+19.5312x^5$$

```
In[19]:= TA = {{0.2, 1.5}, {0.4, 1.275}, {0.6, 1.225}, {0.8, 1.125}, {1., 1.1}};
n = Length[TA];
rd[ta_, n_] :=
  Sum[ta[[i, 2]] / Product[If[j != i, (ta[[i, 1]] - ta[[j, 1]]), 1], {j, 1, n}],
   {i, 1, n}];
New[ta_, n_, x_] := Sum[rd[ta, k] * Product[(x - ta[[i, 1]]), {i, 1, k - 1}],
   {k, 1, n}];
q = New[TA, Length[TA], x]
Expand[q]
```

$$\text{Out[23]=}\ 1.5-1.125(-0.2+x)+2.1875(-0.4+x)(-0.2+x)-4.6875(-0.6+x)(-0.4+x)(-0.2+x)+9.11458(-0.8+x)(-0.6+x)(-0.4+x)(-0.2+x)$$

$$\text{Out[24]=}\ 2.475-8.14583x+20.5729x^2-22.9167x^3+9.11458x^4$$

Отримаємо поліном для тих самих точок за допомогою вбудованого оператора:

Побудуємо графік отриманого поліному і позначимо точки, задані в умові:

In[33]:=
```
TA = {{0.4, 0.5}, {0.6, 1.375}, {0.8, 1.5}, {1, 1.75}, {1.2, 1.625}};
yp[z_] := InterpolatingPolynomial[TA, z];
```
інтерполяційний многочлен
```
yp[z]
```

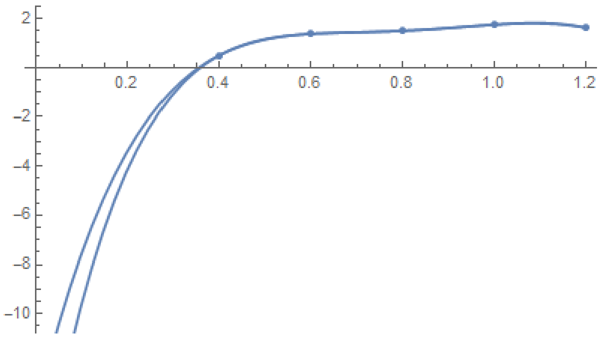
Out[35]= 1.625 + (1.40625 + (-2.73438 + (11.0677 - 35.8073 (-0.6 + z)) (-0.8 + z)) (-0.4 + z)) (-1.2 + z)

In[36]:=
```
Expand[yp[z]]
```
розкрити дужки

Out[36]= $-13.875 + 76.8229 z - 143.88 z^2 + 118.49 z^3 - 35.8073 z^4$

In[55]:=
```
p1 = Plot[-18.37499999999997` + 109.4479166666664` x - 234.50520833333303` x^2 + 239.58333333333258` x^3 -
    113.9322916666664` x^4 + 19.531249999999915` x^5, {x, 0, 1.2}];
```
графік функції
```
p2 = ListPlot[{{0.4, 0.5}, {0.6, 1.375}, {0.8, 1.5}, {1, 1.75}, {1.2, 1.625}}];
```
діаграма розсіву даних
```
p3 = Plot[-13.875000000000007` + 76.82291666666671` x - 143.8802083333334` x^2 + 118.4895833333334` x^3 -
    35.807291666666686` x^4, {x, 0, 1.2}];
```
графік функції
```
Show[p1, p2, p3]
```
показати

Out[58]=



Як бачимо, точки належать побудованому графіку

Для вказаної функції обчислимо значення для обраних вузлів і оцінимо розбіжність

In[1]:=
```
P[x_] = Log10[x] - 1 / x^2;
```
десятковий логарифм
```
Px = {0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2};
P[Px]
```

Out[3]= $\left\{-6.64794, -1.65941, -0.615263, -0.186505, -\frac{1}{4} + \frac{\text{Log}[2]}{\text{Log}[10]}\right\}$

In[4]:=
```
TA1 = {{0.4, P[0.4]}, {0.8, P[0.8]}, {1.2, P[1.2]}, {1.6, P[1.6]}, {2, P[2]}};
yp1[z_] = Expand[InterpolatingPolynomial[TA1, z]]
```
розкр··· інтерполяційний многочлен

Out[5]= $-21.8147 + 57.65 z - 59.6087 z^2 + 27.5809 z^3 - 4.72791 z^4$

In[6]:=
```
FindMaximum[Abs[P[x] - yp1[x]], {x, 0.4, 2}]
```
знайти макс··· абсолютне значення

Out[6]= {0.441588, {x → 0.511661}}

Створимо таблицю значень та наблизимо її інтерполяційним поліномом:

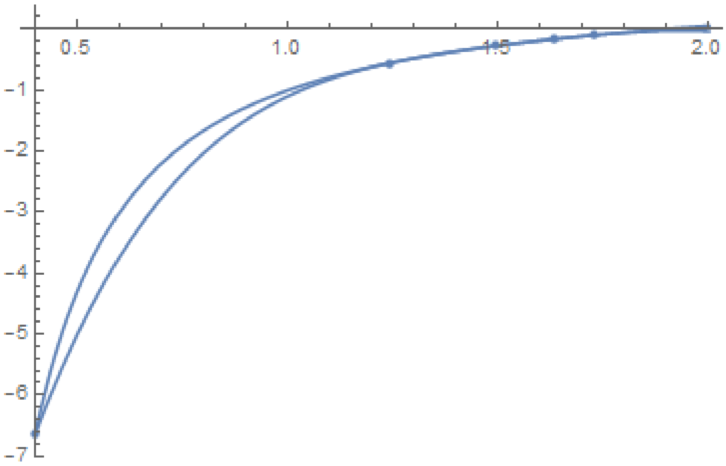
```
In[13]:= n = 5;
a = 0.4;
b = 2;
Do[y[i] = Log10[i] - 1 / i^2, {i, 1, n}];
оператор ⋯ десятковий логарифм
Do[Uzel[i] = N[(b + a) / 2 + y[i] * (b - a) / 2], {i, 1, n}];
оператор циклу  числове наближення
TA = Table[Uzel[i], {i, n}]
таблиця значень

Out[18]= {0.4, 1.24082, 1.49281, 1.63165, 1.72718}

In[19]:= K2 = Log10[x] - 1 / x^2;
десятковий логарифм
x = TA;
Y2 = N[K2]
числове наближення

Out[21]= {-6.64794, -0.555791, -0.274733, -0.162992, -0.097881}

In[24]:= TA1 = Table[{TA[[i]], Y2[[i]]}, {i, 1, 5}];
таблиця значень
G = InterpolatingPolynomial[TA1, z]
інтерполяційний многочлен

Out[25]= -0.097881 +
 (4.93534 + (-4.74988 + (3.66768 - 2.52907 (-1.49281 + z)) (-1.24082 + z)) (-0.4 + z))
  (-1.72718 + z)

In[26]:= Y2 = Expand[G]
розкрити дуж
```

Out[26]= $-18.2842 + 41.9951\, z - 38.2408\, z^2 + 15.961\, z^3 - 2.52907\, z^4$

Побудуємо графік

```
In[27]:= z = TA;
         Y2

Out[28]= {-6.64794, -0.555791, -0.274733, -0.162992, -0.097881}

In[32]:= Clear[z];
         очистити
         p1 = Plot[Y2, {z, 0.4, 2}];
              графік функції
         p2 = ListPlot[TA1];
              діаграма розсіву даних
         p3 = Plot[Log10[x] - 1/x^2, {x, 0.4, 2}];
              граф· десятковий логарифм
         Show[p1, p2, p3]
         показати
```

Out[36]=



За табл 7.1

Для першої параболи

```
In[15]:= X = {0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2};
         F = {0.5, 1.375, 1.5, 1.75, 1, 625};
         TA = {{0.4, 0.5}, {0.6, 1.375}, {0.8, 1.5}, {1, 1.75}, {1.2, 1.625}};
         SplineY = Interpolation[TA, InterpolationOrder → 2]
                   інтерполювати           порядок інтерполяції
         Spline1 = Take[X, 3]
                   витягти

Out[18]= InterpolatingFunction[ Domain: {{0.4, 1.2}} Output: scalar ]

Out[19]= {0.4, 0.6, 0.8}

In[20]:= Spline2 = N[Spline1^2]
                   числове наближе

Out[20]= {0.16, 0.36, 0.64}

In[21]:= Spline3 = Transpose[{{1, 1, 1}, Spline1, Spline2}]
                   транспозиція

Out[21]= {{1, 0.4, 0.16}, {1, 0.6, 0.36}, {1, 0.8, 0.64}}

In[22]:= Spline4 = Take[F, 3]
                   витягти

Out[22]= {0.5, 1.375, 1.5}

In[23]:= Spline5 = LinearSolve[Spline3, Spline4]
                   розв'язати систему лінійних рівнянь

Out[23]= {-3.5, 13.75, -9.375}

In[24]:= Spline11 = Spline5[[1]] + Spline5[[2]] x + Spline5[[3]] x^2
Out[24]= -3.5 + 13.75 x - 9.375 x²
```

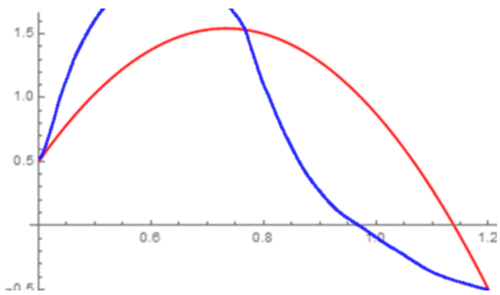
Для другої параболи

```
In[34]:= Spline21 = Take[X, -3]
                    витягти
Out[34]= {0.8, 1, 1.2}

In[35]:= Spline22 = N[Spline21^2]
                    числове наближен
Out[35]= {0.64, 1., 1.44}

In[36]:= Spline23 = Transpose[{{1, 1, 1}, Spline21, Spline22}]
                    транспозиція
Out[36]= {{1, 0.8, 0.64}, {1, 1, 1.}, {1, 1.2, 1.44}}

In[37]:= Spline24 = Take[F, -3]
                    витягти
Out[37]= {1.75, 1, 625}

In[38]:= Spline25 = LinearSolve[Spline23, Spline24]
                    розв'язати систему лінійних рівнянь
Out[38]= { 2.25,-1.6,7.37}

In[39]:= Spline12 = Spline25[[1]] + Spline25[[2]] x + Spline25[[3]] x^2
```

Out[39]= $2.25 - 1.6\,x + 7.37\,x^2$

Графіки

Out[81]=



Застосуємо метод найменших квадратичних відхилень

In[17]:=
```
z = {0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2};
y = z^2;
A = {{1, 0.4, 0.16}, {1, 0.6, 0.36}, {1, 0.8, 0.64}, {1, 1, 1}, {1, 1.2, 1.44}};
AT = Transpose[A];
```
транспозиція
```
g = {0.5, 1.375, 1.5, 1.75, 1};
G := AT.g;
A2 = AT.A;
B = LinearSolve[A2, G]
```
розв'язати систему лінійних рівнянь

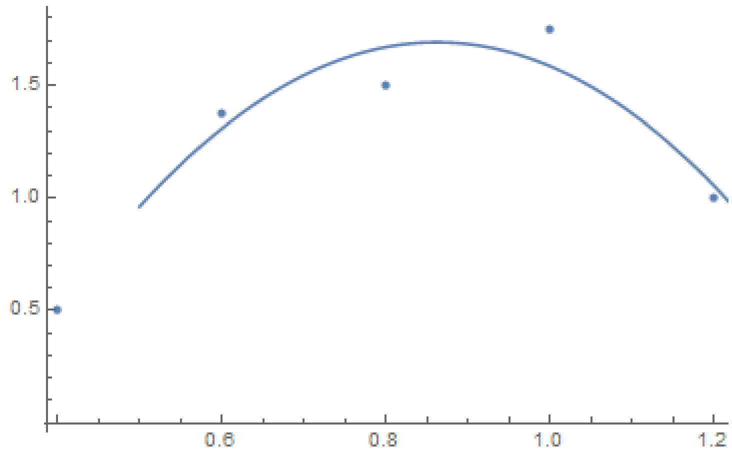
Out[24]= {-2.45, 9.61607, -5.58036}

In[25]:=
```
Y5[x_] = Sum[B[[i]] * x^(i - 1), {i, 3}];
```
сума
```
Y5[x]
```

Out[26]= $-2.45 + 9.61607\,x - 5.58036\,x^2$

In[27]:=
```
g1 = ListPlot[{{0.4, 0.5}, {0.6, 1.375}, {0.8, 1.5}, {1, 1.75}, {1.2, 1}}];
```
діаграма розсіву даних
```
g2 = Plot[Y5[x], {x, 0.5, 3.5}];
```
графік функції
```
Show[g1, g2]
```
показати

Out[29]=



Оцінимо відхилення в вузлах

```
x = z;
Y6 = N[Y5[x]]
     числове на
{0.503571, 1.31071, 1.67143, 1.58571, 1.05357}

Y7 = {0.5, 1.375, 1.5, 1.75, 1};
Y8 = Y6 - Y7

{0.00357143, -0.0642857, 0.171429, -0.164286, 0.0535714}

M = Sum[Y8[[i]]^2, {i, 5}] / 5
    сума

0.0126786

In[1]:= TA = {{0.4, 0.5}, {0.6, 1.375}, {0.8, 1.5}, {1, 1.75}, {1.2, 1}};
        Fit[TA, {1, x}, x]
        узгодити

Out[2]= 0.675 + 0.6875 x

In[3]:= Fit[TA, {1, x, x^2}, x]
        узгодити
```

Out[3]= $-2.45 + 9.61607\,x - 5.58036\,x^2$

```
In[4]:= Fit[TA, {1, x, x^2, x^3}, x]
        узгодити
```

Out[4]= $-1.4 + 4.97024\,x + 0.669643\,x^2 - 2.60417\,x^3$

```
In[5]:= Fit[TA, {1, x, x^2, x^3, x^4}, x]
        узгодити
```

Out[5]= $-17. + 96.875\,x - 190.104\,x^2 + 164.062\,x^3 - 52.0833\,x^4$

Висновки

У ході виконання лабораторної роботи було використано декілька способів обчислення наближеного інтерполяційного поліному за заданими значеннями у вузлах функції, а також розглянуто вибір вузлів інтерполяції за формулами Чебишева.

Загалом, при побудові інтерполяційного поліному отриманий результат стає тим точнішим, чим вищим є степінь поліному, тому досить точним виявляється використання формул Лагранжа та Ньютона. Важливим для отримання найбільш точного результату є також вибір вузлів інтерполяції. Як показали обчислення, поліном для вузлів, отриманих за формулами Чебишева, дав на порядок меншу розбіжність, ніж поліном, побудований за точками, обраними випадковим чином.

Була також використана апроксимація сплайнами. Оскільки точок було 5, то відбувалась апроксимація двома параболами. Як видно з графіка, така апроксимація виявилась досить неточною. Апроксимація методом найменших квадратів також показала, що малий степінь вихідного поліному дозволяє отримати низьку точність.