МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
УКРАЇНИ „КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
„ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ”

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №10

з курсу: „*Чисельні методи*” на тему: *«Однокрокові методи розв’язання задачі Коші для звичайних диференційних рівнянь »*

виконав: студент II курсу
групи ДА-72
Кондратюк Т. Є.

КИЇВ
2019

Варіант: № 15

№	y' =f(t, y)	t_0	t_k	y_0
15	$y/(1-t^2)$	0	0.5	1

Порядок виконання роботи:

1. Запрограмувати на мові пакету Mathematica рішення заданого диференційного рівняння явним методом Рунне - Кутта четвертого порядку (2.6) і виконати рішення при кількох значеннях кроку, поки рішення не почне розбігатися. Спробуйте з'ясувати, чи існує аналітичне рішення задачі.
2. Порівняти отриманий максимально можливий крок h_{max} з значеннями, обчисленим за допомогою формули (2.19).
3. Запрограмувати на мові пакету Mathematica рішення заданого диференційного рівняння неявним методом Рунне - Кутта 4(5) і виконати рішення при максимальних значеннях кроку з пункту 1.
4. Запрограмувати на мові пакету Mathematica рішення заданого диференційного рівняння вкладеним явним методом Рунне - Кутта четвертого порядку (2.8) і виконати рішення при максимально можливому кроці h_{max} ,знайденому в пункті 2.
5. Користуючись стандартними операторами пакету Mathematica, знайти рішення заданого диференційного рівняння вкладеним явним методом Рунне - Кутта і порівняти покрокові похибки рішень, отриманих в пунктах 1, 3 і 5.
6. Користуючись стандартними операторами пакету Mathematica, знайти рішення заданого диференційного рівняння неявним методом Рунне – Кутта. Побудуйте графіки отриманої функції.
7. Скласти звіт з отриманих результатів і математичних формул використаних методів по кожному пункту завдання , давши оцінку порівняльної точності отриманих рішень різними методами.

Хід роботи:

Вирішимо рівняння явним методом Рунне-Кутта

```
In[69]:= f[t_, y_] := y / (1 - t^2);
k1[h_] := f[t, y];
k2[h_] := f[t + 0.5 * h, y + 0.5 * h * k1[h]];
k3[h_] := f[t + 0.5 * h, y + 0.5 * h * k2[h]];
k4[h_] := f[t + h, y + h * k3[h]];
t0 = 0;
tm = 0.5;
y0 = 1;
m = 10;
h = (tm - t0) / m;
U = Array[u, {2, m + 1}, {0, 0}];
    масив
u[0, 0] = t0;
u[1, 0] = y0;
t = t0;
y = y0;
Do[dy = h * (k1[h] + 2 * k2[h] + 2 * k3[h] + k4[h]) / 6;
оператор циклу
  t = t + h;
  y = y + dy;
  u[0, i] = t;
  u[1, i] = y, {i, 1, m}];
Print["h=", h, " " MatrixForm[U]]
надрукувати         матрична форма
```

h=0.05 $\begin{pmatrix} 0 & 0.05 & 0.1 & 0.15 & 0.2 & 0.25 & 0.3 & 0.35 & 0.4 & 0.45 & 0.5 \\ 1 & 1.05131 & 1.10554 & 1.16316 & 1.22474 & 1.29099 & 1.36277 & 1.44115 & 1.52753 & 1.62369 & 1.73205 \end{pmatrix}$

```
In[103]:= f[t_, y_] := y / (1 - t^2);
k1[h_] := f[t, y];
k2[h_] := f[t + 0.5 * h, y + 0.5 * h * k1[h]];
k3[h_] := f[t + 0.5 * h, y + 0.5 * h * k2[h]];
k4[h_] := f[t + h, y + h * k3[h]];
t0 = 0;
tm = 0.5;
y0 = 1;
m = 5;
h = (tm - t0) / m;
U = Array[u, {2, m + 1}, {0, 0}];
     масив
u[0, 0] = t0;
u[1, 0] = y0;
t = t0;
y = y0;
Do[dy = h * (k1[h] + 2 * k2[h] + 2 * k3[h] + k4[h]) / 6;
оператор циклу
  t = t + h;
  y = y + dy;
  u[0, i] = t;
  u[1, i] = y, {i, 1, m}];
Print["h=", h, " " MatrixForm[U]]
надрукувати        матрична форма
```

h=0.1 $\begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 1 & 1.10554 & 1.22474 & 1.36277 & 1.52753 & 1.73205 \end{pmatrix}$

```
In[137]:= f[t_, y_] := y / (1 - t^2);
k1[h_] := f[t, y];
k2[h_] := f[t + 0.5 * h, y + 0.5 * h * k1[h]];
k3[h_] := f[t + 0.5 * h, y + 0.5 * h * k2[h]];
k4[h_] := f[t + h, y + h * k3[h]];
t0 = 0;
tm = 0.5;
y0 = 1;
m = 3;
h = (tm - t0) / m;
U = Array[u, {2, m + 1}, {0, 0}];
    масив
u[0, 0] = t0;
u[1, 0] = y0;
t = t0;
y = y0;
Do[dy = h * (k1[h] + 2 * k2[h] + 2 * k3[h] + k4[h]) / 6;
оператор циклу
  t = t + h;
  y = y + dy;
  u[0, i] = t;
  u[1, i] = y, {i, 1, m}];
Print["h=", h, " " MatrixForm[U]]
надрукувати        матрична форма

h=0.166667 ( 0  0.166667  0.333333   0.5
             1  1.18322   1.41422   1.73206 )
```

Знайдемо максимальний крок

```
In[31]:= t0 = 0;
y0 = 1;
f[t_, y_] = y / (1 - t^2);
f1[t_, y_] = D[f[t, y], y];
             диференціювати
hmax = 2.7853 / Abs[f1[t0, y0]]
                абсолютне значення

Out[35]= 0.1372
```

Вирішимо неявним методом РуннеКутта

```
In[52]:= f[t_, y_] := y / (1 - t^2);
k1[h_] := f[t, y];
k2[h_] := f[t + 0.5 * h, y + 0.5 * h * k1[h]];
k3[h_] := f[t + 0.5 * h, y + 0.5 * h * k2[h]];
k4[h_] := f[t + h, y - h * k3[h]];
t0 = 0;
tm = 0.5;
y0 = 1;
m = 3;
h = (tm - t0) / m;
U = Array[u, {2, m + 1}, {0, 0}];
      масив
u[0, 0] = t0;
u[1, 0] = y0;
t = t0;
y = y0;
Do[dy = h * (k1[h] + 2 * k2[h] + 2 * k3[h] + k4[h]) / 6;
оператор циклу
  t = t + h;
  y = y + dy;
  u[0, i] = t;
  u[1, i] = y, {i, 1, m}];
Print["h=", h, " " MatrixForm[U]]
надрукувати            матрична форма
```

h=0.166667 $\begin{pmatrix} 0 & 0.166667 & 0.333333 & 0.5 \\ 1 & 1.17275 & 1.38742 & 1.67623 \end{pmatrix}$

Вирішимо вкладеним методом Рунге-Кутта

```
In[61]:= f[t_, y_] := y / (1 - t^2);
k1[h_] := f[t, y];
k2[h_] := f[t + 0.25 * h, y + 0.25 * h * k1[h]];
k3[h_] := f[t + (3 / 8) * h, y + (3 / 32) * h * k1[h] + (9 / 32) * h * k2[h]];
k4[h_] := f[t + (12 / 13) * h, y + h * ((1932 / 2197) * k1[h] - (7200 * 2197) * k2[h] + (7296 / 2197) * k3[h])];
k5[h_] := f[t + h, y + h * ((439 / 216) * k1[h] - 8 * k2[h] + (3680 / 513) * k3[h] - (845 / 4104) * k4[h])];
k6[h_] :=
  f[t + 0.5 * h, y + h * ((8 / 27) * k1[h] + 2 * k2[h] + (3544 / 2565) * k3[h] - (1859 / 4104) * k4[h] - (11 / 40) * k5[h])];
t0 = 0;
tm = 0.5;
y0 = 1;
m = 3;
h = (tm - t0) / m;
U = Array[u, {3, m + 1}, {0, 0}];
    масив
u[0, 0] = t0;
u[1, 0] = y0;
u[2, 0] = 0;
t = t0;
y = y0;
Do[dy = h * ((25 / 216) * k1[h] + (1408 / 2565) * k3[h] + (2197 / 4104) * k4[h] - 0.2 * k5[h]);
оператор циклу
  t = t + h;
  y = y + dy;
  u[0, i] = t;
  u[1, i] = y;
  epsilon = h * (k1[h] / 360 - (128 / 4275) * k3[h] - (2197 / 75240) * k4[h] + k5[h] / 50 + 0.4 * k6[h]);
  u[2, i] = epsilon, {i, 1, m}];
Print[MatrixForm[U]]
надру··· матрична форма
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.166667 & 0.333333 & 0.5 \\ 1 & 1.18322 & 1.41421 & 1.73205 \\ 0 & 0.118935 & 0.166654 & 0.272336 \end{pmatrix}$$

В результаті маємо значення змінної t, значення функції y(t), та відповідну похибку.

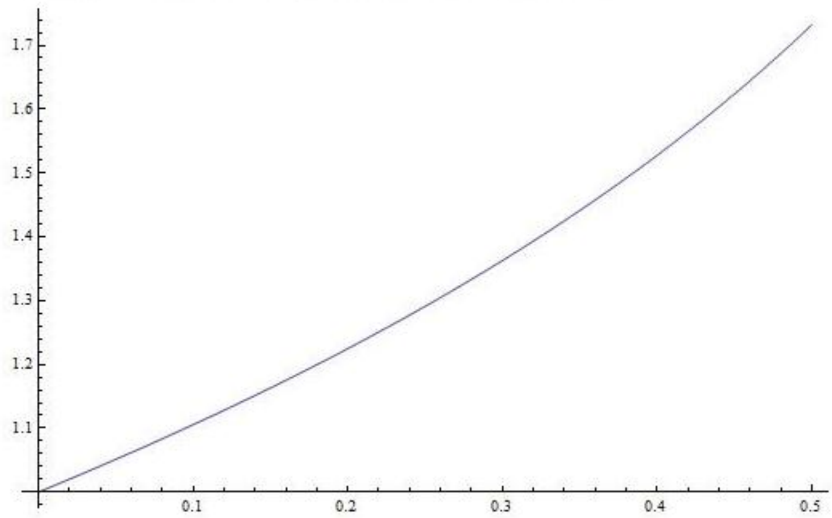
Вкладений явний метод

```
In[82]:= Y = NDSolve[{x'[a] == x[a] / (1 - a^2), x[0] == 1}, x, {a, 0, 1}, Method → "ExplicitRungeKutta"]
         чисельні розв'язки диференційних рівнянь                        метод
{{x → InterpolatingFunction[{{0, 1}}]}}
      інтерполяційна функція
x[a_] = x[a] /. Y
{InterpolatingFunction[{{0, 1}}][a]}
 інтерполяційна функція
Do[Print[i * 0.1, "  ", x[i * 0.1]], {i, 0, 5}]
··· надрукувати
```

Результати повністю співпадають з рішенням

Неявний методом Рунне - Кутта

```
sol = NDSolve[{x'[a] / (1 - a^2), x[0] == 1}, x, {a, 0, 1}, Method -> "ImplicitRungeKutta"]
        числельні розв'язки диференційних рівнянь                    метод
{{x → InterpolatingFunction[{{0, 1}}]}}
       інтерполяційна функція
Plot[Evaluate[x[a] /. sol], {a, 0, 0.5}, PlotRange → All]
граф· обчислити                                   діапазон зна··· все
```



Висновок : Під час лабораторної роботи було освоєно методи Рунге-Кутта. Для того щоб отримати найточніші значення треба виконувати як можна більшу кількість кроків. Чим менша кількість кроків – тим більша похибка. Великою перевагою даних методів є невелика кількість ітерацій при отриманні високої точності.