МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
„ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ”

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4

з курсу: „*Чисельні методи*”

на тему: „*Ітераційні методи рішення систем лінійних рівнянь”*

Виконав: студент ІІ курсу
групи ДА-72
Кондратюк Т.Є.

КИЇВ
2018

Порядок виконанняроботи

1. Вибрати варіант завдання згідно номера вашого прізвища у списку групи.

2.Скласти програми ітераційних методів Якобі і Гаусса- Зейделя, що реалізують безпосередньо співвідношення.

3. Вирішити методами простої ітерації, верхньої релаксації, Якобі і Гаусса-Зейделя задану систему рівнянь. При використанні методів Якобі і Зейделя можуть знадобитися еквівалентні перетворення системи рівнянь згідно формул.

4. Скласти звіт з отриманих результатів і математичних формул використаних методів по кожному пункту завдання , давши оцінку порівняльної точності отриманих рішень різними методами і кількості виконане них ітерацій.

№15	0.08	0.25	-0.77	0.32
	0.25	0.50	0.14	-1
	-0.77	0.14	0.06	-0.12

Хід роботи

1. Метод Якобі.

Вирішимо СЛАР ітераційним методом Якобі

```
In[18]:= A = {{0.08, 0.25, -0.77}, {0.25, 0.50, 0.14}, {-0.77, 0.14, 0.06}};
         b = {0.32, -1, -0.12};
         X = {x1, x2, x3};
         Print[MatrixForm[A], MatrixForm[X], "=", MatrixForm[b]]
```

$$\begin{pmatrix} 0.08 & 0.25 & -0.77 \\ 0.25 & 0.5 & 0.14 \\ -0.77 & 0.14 & 0.06 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.32 \\ -1 \\ -0.12 \end{pmatrix}$$

```
In[22]:= n = 3;
         D1 = Table[If[i == j, A[[i, j]], 0], {i, n}, {j, n}];
         MatrixForm[D1]
```

Out[24]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.08 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.06 \end{pmatrix}$$

```
In[29]:= M = -Inverse[D1].(A - D1)

Out[29]= {{0., -3.125, 9.625}, {-0.5, 0., -0.28}, {12.8333, -2.33333, 0.}}

In[31]:= g = Inverse[D1].b

Out[31]= {4., -2., -2.}

In[32]:= NM = Norm[M, Infinity]

Out[32]= 15.1667
```

Норма матриці M більша за 1, що свідчить про те, що похибка не збігається. Приведемо матрицю до нормального виду:

```
ATA = AT.A;
ATb = AT.b;
n = 3;
D1 = Table[If[i == j, ATA[[i, j]], 0], {i, n}, {j, n}];
MatrixForm[D1]
```

(Debug) Out[72]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.6618 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3321 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6161 \end{pmatrix}$$

(Debug) In[73]:=

$$\begin{pmatrix} 0.0064` & 0 & 0 \\ 0 & 0.25` & 0 \\ 0 & 0 & 0.0036` \end{pmatrix}$$

```
M = -Inverse[D1].(ATA - D1)
```

(Debug) Out[74]=

```
{{0., -0.0562103, 0.110003}, {-0.112014, 0., 0.343571}, {0.118163, 0.185197, 0.}}
```

(Debug) In[66]:=

```
g = Inverse[D1].ATb
```

(Debug) Out[66]=

```
{{4., 12.5, -38.5}, {-1., -2., -0.56}, {25.6667, -4.66667, -2.}}
```

(Debug) In[75]:=

```
NM = Norm[M, Infinity]
```

(Debug) Out[75]=

```
0.455586
```

Вона менша за 1, тож умова збіжності метода Якобі виконується. Задамо необхідну точність обчислень і початкове наближення та пройдемо необхыдну кількість кроків для обчислення x з відповідною точністю:

```
ep = 0.00001;
x0 = g;
x1 = M.x0 + g;
x2 = M.x1 + g;
S = NM / (1 - NM)
```

(Debug) Out[93]=

```
0.836836
```

(Debug) In[94]:=

```
ek = 10;
k = 0;
x = g;
While[ek > ep, y = N[M.x + g]; ek = Max[Abs[y - x]]; x = y; k = k + 1]
Print["x=", x, ", ek=", ek, ", k=", k]
```

x={-0.214364, -1.6227, -0.964707} , ek=9.70206×10^{-6}, k=12

Зробим о перевірку оператором LinearSolve:

```
LinearSolve[A, b]

(Debug) Out[99]=
{-0.214364, -1.6227, -0.964707}
```

2. Метод Гауса – Зейделя:

```
In[36]:= A = {{0.08, 0.25, -0.77}, {0.25, 0.50, 0.14}, {-0.77, 0.14, 0.06}};
         b = {0.32, -1, -0.12};
         MatrixForm [A]
         n = 3;

Out[38]//MatrixForm=
 0.08   0.25  -0.77
 0.25   0.5    0.14
-0.77   0.14   0.06

In[48]:= D1 = Table[If[i == j, A[[i, j]], 0], {i, n}, {j, n}];
         MatrixForm[D1];
         g = Inverse[D1].b;
         L = Table[If[i > j, l[i, j] = A[[i, j]] / A[[i, j]], l[i, j] = 0], {i, n}, {j, n}];
         MatrixForm[L]

Out[52]//MatrixForm=
 0   0   0
 1.  0   0
 1.  1.  0

In[53]:= U = Table[If[i < j, u[i, j] = A[[i, j]] / A[[i, j]], u[i, j] = 0], {i, n}, {j, n}];
         MatrixForm[U]

Out[54]//MatrixForm=
 0  1.  1.
 0  0   1.
 0  0   0

In[55]:= N[MJ = -Inverse[(IdentityMatrix[n] + L)].U];
         NMJ = Norm[MJ, Infinity]

Out[56]= 2.
```

Норма матриці М більша за 1, що свідчить про те, що похибка не збігається. Приведемо матрицю до нормального виду:

```
ATA = AT.A;
ATb = AT.b;
n = 3;
D1 = Table[If[i == j, ATA[[i, j]], 0], {i, n}, {j, n}];
MatrixForm[D1]
```

(Debug) Out[72]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.6618 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3321 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6161 \end{pmatrix}$$

(Debug) In[73]:=

$$\begin{pmatrix} 0.0064` & 0 & 0 \\ 0 & 0.25` & 0 \\ 0 & 0 & 0.0036` \end{pmatrix}$$

```
M = -Inverse[D1].(ATA - D1)
```

(Debug) Out[74]=

```
{{0., -0.0562103, 0.110003}, {-0.112014, 0., 0.343571}, {0.118163, 0.185197, 0.}}
```

(Debug) In[66]:=

```
g = Inverse[D1].ATb
```

(Debug) Out[66]=

```
{{4., 12.5, -38.5}, {-1., -2., -0.56}, {25.6667, -4.66667, -2.}}
```

(Debug) In[75]:=

```
NM = Norm[M, Infinity]
```

(Debug) Out[75]=

```
0.455586
```

Умова збіжності виконується, роз вяжемо методом Гауса-Зейделя:

```
S = NM / (1 - NM)
```

(Debug) Out[93]=

```
0.836836
```

(Debug) In[94]:=

```
ek = 10;
k = 0;
x = g;
While[ek > ep, y = N[M.x + g]; ek = Max[Abs[y - x] * S]; x = y; k = k + 1]
Print["x=", x, ", ek=", ek, ", k=", k]
```

x={-0.214364, -1.6227, -0.964707}, ek=9.70206×10^{-6}, k=6

3. Метод простої ітерації

```
In[36]:= A = {{0.08, 0.25, -0.77}, {0.25, 0.50, 0.14}, {-0.77, 0.14, 0.06}};
         b = {0.32, -1, -0.12};
         MatrixForm [A]
         n = 3;
```

Out[38]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.08 & 0.25 & -0.77 \\ 0.25 & 0.5 & 0.14 \\ -0.77 & 0.14 & 0.06 \end{pmatrix}$$

```
In[57]:= IE = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}};
         M = A - IE;
         MatrixForm[M]
```

Out[59]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.92 & 0.25 & -0.77 \\ 0.25 & -0.5 & 0.14 \\ -0.77 & 0.14 & -0.94 \end{pmatrix}$$

```
In[60]:= MNorm = Norm[M, Infinity]
Out[60]= 1.94
```

Норма матриці більше одиниці, отже спробуємо вирішити її за допомогою метода релаксації

4. Вирішимо СЛАР методом верхньої релаксації:

```
In[36]:= A = {{0.08, 0.25, -0.77}, {0.25, 0.50, 0.14}, {-0.77, 0.14, 0.06}};
         b = {0.32, -1, -0.12};
         MatrixForm [A]
         n = 3;
```

Out[38]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.08 & 0.25 & -0.77 \\ 0.25 & 0.5 & 0.14 \\ -0.77 & 0.14 & 0.06 \end{pmatrix}$$

```
In[61]:= NA = Norm[A, Infinity]
Out[61]= 1.1

In[62]:= omegaMax = N[1 / NA]
Out[62]= 0.909091

In[63]:= A1 = 0.909 * A;
         MatrixForm[A1]
```

Out[64]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.07272 & 0.22725 & -0.69993 \\ 0.22725 & 0.4545 & 0.12726 \\ -0.69993 & 0.12726 & 0.05454 \end{pmatrix}$$

```
In[67]:= MN = IdentityMatrix[Length[A1]] - A1;
         MatrixForm[MN]

Out[68]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0.92728 & -0.22725 & 0.69993 \\ -0.22725 & 0.5455 & -0.12726 \\ 0.69993 & -0.12726 & 0.94546 \end{pmatrix}$$

```
In[69]:= NMN = Norm[MN, Infinity]

Out[69]= 1.85446
```

Норма матриці більше одиниці, отже даний метод не підходить для розв. Цієї системі

ВИСНОВОК

Метод	X_1	X_2	X_3	Кількість ітерацій
Якобі	-0.214364	-1.6227	-0.964707	12
Гаусса-Зейделя	-0.214364	-1.6227	-0.964707	6
LinearSolve	-0.214364	-1.6227	-0.964707	-

У даній лабораторній роботі СЛАР було вирішено за допомогою 4х ітераційних методів. Для вирішення методом Гаусса-Зейделя матрицю було знормовано, щоб похибка збігалася. Метод Гаусса-Зейделя з результатів обчислень виявився вдвічі швидшим за Якобі, що зумовлено тим, що ми використовували окрім значення х минулої ітерації, значення поточної. Вирішити СЛАР методами поточної ітерації та верхньої релаксації не вдалося.