# Solució al problema 4 I

a) És clar que és bilineal i simètric. A més

$$\langle f, f\rangle = f(0)^2 + \int_0^1 f'(x)^2\,dx \geq 0,$$

i és $> 0$ sii $f \neq 0$. En efecte, $\langle f, f\rangle = 0$ implica que $f(0) = 0$ i $f'(x) = 0$, $\forall\, x \in [0,1]$. Per tant, $f \equiv 0$.
Finalment, $(\cdot,\cdot)$ no és un producte escalar, ja que si $f \equiv c \neq 0$, $(f, f) = 0$.

b) Agafarem $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x + a$ i $\varphi_2(x) = x^2 + bx + c$. Imposant ortogonalitat: $\langle \varphi_0, \varphi_1\rangle = a = 0$, d'on $\varphi_1(x) = x$, i

$$\langle \varphi_0, \varphi_2\rangle = c = 0,$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2\rangle = \int_0^1 (2x + b)\,dx = x^2 + bx\big|_{x=0}^1 = 1 + b = 0.$$

Per tant, $\varphi_2(x) = x^2 - x$.

# Solució al problema 4 II

c) Recordem que la millor aproximació és $c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$, on

$$c_j = \frac{\langle f, \varphi_j \rangle}{\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle}.$$

En el nostre cas:

$$\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = 1, \quad \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = 1, \quad \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = \frac{1}{3},$$

$$\langle f, \varphi_0 \rangle = 1, \quad \langle f, \varphi_1 \rangle = -\int_0^1 \sin x \, dx = \cos 1 - 1,$$

$$\langle f, \varphi_2 \rangle = -\int_0^1 \sin x(2x-1)\, dx =$$

$$= (2x-1)\cos x \big|_{x=0}^{1} - 2\int_0^1 \cos x \, dx = \cos 1 + 1 - 2\sin 1.$$

# Solució al problema 4 III

Per tant,

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \cos 1 - 1, \quad c_2 = 3(\cos 1 + 1 - 2\sin 1).$$

d) Observem que la millor aproximació que hem trobat abans, que anomenem $f^* \in \{p \in \mathbb{R}_2[x] / p(0) = 1\}$. Per tant, continua sent millor aproximació per a qualsevol subconjunt de $\mathbb{R}_2[x]$.