Solució al problema 12 I

a) Trobar x^* t.q. $\|Ax - b\|_2$ és el mínim possible, és equivalent a trobar l'element de $\text{Im}(A)$ més proper a b.
Definint, $E = \mathbb{R}^m$, $E^* = \text{Im}(A) \subset E$, volem trobar l'element de E^* més proper a $b \in E$.

b) Necessitem una base de E^*.
Notem que $E^* = \text{Im}(A)$ si $A = [a_1 a_2 \ldots a_n]$ llavors $E^* = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ i els vectors són linealment independents perquè $\text{rang} A = n$.
Per tant, les equacions normals són

$$\sum_{j=1}^{n} \langle a_i, a_j \rangle x_j = \langle a_i, b \rangle \,, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Solució al problema 12 II

c) Obviament, $A^T A = (\langle a_i, a_j \rangle)_{i,j}$ i $A^T b = (\langle a_i, b \rangle)_i$.

d) Si $\text{rang}(A) < n$, aleshores $\{a_1, \ldots, a_n\}$ no és una base de E^* i no podem aplicar l'apartat b).
Escollim un subconjunt de $a_1, \ldots, a_n$ que tingui vectors linealment independents i formin una base de $\text{Im}(A)$. Aleshores apliquem el mateix procediment.
Encara que $\exists!\ b^* \in E^*$, com que l'aplicació lineal donat per A no és injectiva, existeixen molts x^* t.q. $Ax^* = b^*$.