

Solució al problema 1: I

Ho farem per inducció sobre n . Per $n = 2$ és el teorema de Pitàgores. Suposem que és cert per $n - 1$. Llavors

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=0}^n c_i \varphi_i\right\|^2 &= \left\|\sum_{i=0}^{n-1} c_i \varphi_i + c_n \varphi_n\right\|^2 = \left\|\sum_{i=0}^{n-1} c_i \varphi_i\right\|^2 + \|c_n \varphi_n\|^2 = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i^2 \|\varphi_i\|^2 + c_n^2 \|\varphi_n\|^2.\end{aligned}$$

Aquí hem usat primer el teorema de Pitàgores, tenint en compte que $\sum_{i=0}^{n-1} c_i \varphi_i$ és ortogonal a $c_n \varphi_n$, i després la hipòtesi d'inducció.