Solució al problema 3 I

a) Per a trobar una base ortonormal, usarem l'ortonormalització de Gram-Schmidt. Sigui $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = e^x$, $\varphi_3(x) = e^{-x}$. Definim

- $\psi_0(x) = \varphi_0$,
- $\psi_1 = \varphi_1 - a\psi_0$, i ortogonal a ψ_0 :

$$\langle \varphi_0, \psi_1 \rangle = \langle \psi_0, \varphi_1 \rangle - a \langle \psi_0, \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, \varphi_1 \rangle - a = 0.$$

  Per tant, $a = \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle$. Com que

$$\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = \int_0^1 e^x \, dx = e - 1,$$

  tenim que $\psi_1(x) = 1 - (e - 1)e^x$.

Solució al problema 3 II

- $\psi_2 = \varphi_2 - a\varphi_1 - b\varphi_0$, tal que

$$\langle \psi_2, \varphi_1 \rangle = \langle \psi_2, \varphi_0 \rangle = 0.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle a + b &= \langle \varphi_2, \varphi_0 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle a + \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle b &= \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle \end{aligned}$$

Fent els càlculs, obtenim els sistema:

$$\begin{aligned} (e-1)a + b &= 1 - e^{-1} \\ \frac{1}{2}(e^2-1)a + (e-1)b &= 1 \end{aligned}$$

Llavors

$$a = \frac{2(e^2 - 3e + 1)}{(e^2 - 3e)(e-1)}, \qquad b = \frac{2e - e^2 + 1}{e - 3},$$

Solució al problema 3 III

i

$$\psi_3 = \varphi_3 - \frac{2(e^2-3e+1)}{(e^2-3e)(e-1)}\varphi_2 - \frac{2e-e^2+1}{e-3}\varphi_1.$$

Finalment normalitzem: $\tilde{\psi}_1(x) = \psi_1/\|\psi_1\|$, $\tilde{\psi}_2(x) = \psi_2/\|\psi_2\|$.

b) Com que tenim una base ortonormal, la millor aproximació és

$$f^* = \langle f, \psi_0\rangle\psi_0 + \langle f, \tilde{\psi}_1\rangle\tilde{\psi}_1 + \langle f, \tilde{\psi}_2\rangle\tilde{\psi}_2.$$

c) Usem que $\|f - f^*\| = \|f\|^2 - \|f^*\|^2$ i que

$$\langle f^*, f^*\rangle = \langle f, \psi_0\rangle^2 + \langle f, \tilde{\psi}_1\rangle^2 + \langle f, \tilde{\psi}_2\rangle^2.$$