Solució problema 1 I

1. Sigui $F(z) = G(z) + v$. Llavors

$$\|F(x) - F(y)\| = \|G(x) - G(y)\| \leq \alpha\|x - y\|.$$

A més, si $x_0 = 0$ i $x_1 = F(x_0) = G(0) + v = v$ llavors

$$\|x_1 - x_0\| = \|v\| \leq (1 - \alpha)r.$$

Pel teorema de contracció $\exists$ una solució única en en B_r. A més, si $\bar{x}$ és el punt fix, llavors

$$\|x_i - \bar{x}\| \leq \frac{\alpha^i}{1 - \alpha}\|x_1 - x_0\| = \frac{\alpha^i}{1 - \alpha}\|v\|,$$

on $x_i = F(x_{i-1})$.

Solució problema 1 II

2. $G(0)=0$ i $\|DG(z)\|_\infty < 1$ per tot $z\in\mathbb{R}^2$. En efecte,

$$DG(z_1,z_2)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cos(z_1+z_2) & \frac{1}{3}\cos(z_1+z_2) \\ -\frac{1}{3}\sin(z_1-z_2) & \frac{1}{3}\sin(z_1-z_2) \end{pmatrix}.$$

$$\|DG(z)\|_\infty=\frac{1}{3}\max\{|\cos(z_1+z_2)|+|\cos(z_1+z_2)|,|\sin(z_1-z_2)|+|\sin(z_1-z_2)|\}$$

i, per tant

$$\|DG(z)\|_\infty \le \frac{2}{3} < 1.$$

Per tant,

$$\|G(x)-G(y)\|_\infty \le \alpha\|x-y\|, \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}^2, \quad \alpha=\frac{2}{3}.$$

Si prenem $r\ge 3\|v\|_\infty$, llavors

$$\|v\|_\infty \le (1-\alpha)r.$$

Aplicant (1), existeix un punt fix únic en B_r. Fent $r\to\infty$, existeix un únic punt fix en $\mathbb{R}^2$.

Solució problema 1 III

3. Si $\bar{z}$ és el punt fix, cal que

$$\|x_i - \bar{z}\|_\infty \leq \frac{(2/3)^i}{1/3}\|v\|_\infty < 10^{-6},$$

el que és equivalent a

$$i > \frac{\log(10^{-6}/(3\|v\|_\infty))}{\log(2/3)}.$$