Solució al problema 12 I

a) Sigui

$$F(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix} x^4+y^4-2 \\ (x-1)^2+(y-1)^2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Llavors

$$DF(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix} 4x^3 & 4y^3 & 0 \\ 2(x-1) & 2(y-1) & -1 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, quan $x=y=1,\ \lambda=0:$

$$DF(1,1,0)=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, pel TFI deduim que existeix en un entorn de $x=1$ una funció $(x,y(x),\lambda(x))$ tal que $y(1)=1,\ \lambda(1)=0$. Derivant les equacions respecte de λ obtenim

$$\begin{aligned} 4x^3+4y^3y' &= 0 \\ 2(x-1)+2(y-1)y' &= \lambda' \end{aligned}$$

Solució al problema 12 II

Fent $x = 1$:

$$\begin{aligned} 4 + 4y' &= 0 \\ 0 &= \lambda' \end{aligned}$$

Per tant, $y'(1) = -1$ i $\lambda'(1) = 0$. Tornant a derivar:

$$\begin{aligned} 12x^2 + 12y^2(y')^2 + 4y^3y'' &= 0 \\ 2 + 2(y')^2 + 2(y-1)y'' &= \lambda'' \end{aligned}$$

Fent $x = 1$:

$$\begin{aligned} 24 + 4y'' &= 0 \\ 4 &= \lambda'' \end{aligned}$$

Solució al problema 12 III

Per tant, $y''(1) = -6$, $\lambda''(1) = 4$, i

$$\begin{aligned} y(x) &\approx 1 - (x-1) - 3(x-1)^2 \\ \lambda(x) &\approx 2(x-1)^2 \end{aligned}$$

Per tant, per $\lambda = 0.01$ tenim

$$0.01 \approx 2(x-1)^2,$$

el que implica que $x \approx 1 \pm \sqrt{0.005}$. Per tant, $x_1 \approx 1.070710678$, $x_2 \approx 0929289322$, $y_1 \approx 0.914289322$, $y_2 \approx 1.055710678$.

b) Si definim

$$F(x, y, \lambda) = \left(\begin{array}{c} f(x, y) \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \lambda \end{array} \right),$$

Solució al problema 12 IV

tenim que

$$DF(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla f(x,y)^T & & 0 \\ 2(x - x_0) & 2(y - y_0) & -1 \end{pmatrix}.$$

Aleshores

$$DF(x_0, y_0, 0) = \begin{pmatrix} \nabla f(x_0, y_0)^T & 0 \\ 0^T & -1 \end{pmatrix}.$$

Sabem que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Suposem que la segona derivada és diferent de zero (l'altre cas és similar). Llavors, pel TFI tenim que existeix $(y(x), \lambda(x))$ tal que $y(x_0) = y_0$, $\lambda(x_0) = 0$ i

$$\begin{aligned} f(x, y(x)) &= 0 \\ (x - x_0)^2 + (y(x) - y_0)^2 &= \lambda(x) \end{aligned}$$

Solució al problema 12 V

si $|x - x_0|$ és prou petit. A més

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))y'(x) &= 0 \\ 2(x - x_0) + 2(y(x) - y_0)y'(x) &= \lambda'(x). \end{aligned}$$

Quan $x = x_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y'(x_0) &= 0 \\ 0 &= \lambda'(x_0). \end{aligned}$$

Per tant $\lambda'(x_0) = 0$ i

$$y'(x_0) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Solució al problema 12 VI

Derivant una segona vegada la segona equació i fent $x = x_0$, $y = y_0$ i $\lambda = 0$:

$$2 + 2y'(x_0)^2 = \lambda''(x_0).$$

Per tant,

$$\lambda''(x_0) = 2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]^{-2} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right]^2 .$$

Per tant la funció $\lambda(x)$ té un mínim local en x_0, és a dir, existeix $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ llavors $\lambda(x) > 0$. Per tant, si $\lambda > 0$ existeixen dues solucions. Sigui $\lambda = h^2$. Si escrivim $x = x_0 + hx_1(h)$ podem trobar el desenvolupament de Taylor de les dues solucions.