Grau de Matemàtiques. Curs 2018-2019. Semestre de tardor

MÈTODES NUMÈRICS II

SOLLUCIÓ DELS PROBLEMES DE L'EXAMEN FINAL DEL 14/01/19

Exercici 1: 1.

$$\|A^\top A - I\|_2 = \|V\Sigma^2 V^\top - VV^\top\|_2 = \|\Sigma^2 - I\|_2 = \max_{1\le i\le n} |\sigma_i^2 - 1| = \epsilon.$$

Per tant, per a tot i

$$1 - \epsilon \le \sigma_i^2 \le 1 + \epsilon.$$

Com que $\epsilon < 1$ llavors

$$(1-\epsilon)^2 \le 1 - \epsilon \le 1 + \epsilon \le (1+\epsilon)^2,$$

el que prova el que voliem.

2. Sigui $Q = UV^\top$. Llavors

$$\|A - Q\|_2 = \|U\Sigma V^\top - UV^\top\|_2 = \|\Sigma - I\|_2 \le \epsilon.$$

3. Notem que

$$|\det A| = \sqrt{\det A^\top A} = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n \le \rho(A)^n.$$

Per tant, $(1-\epsilon)^n \le \rho(A)^n$, el que implica la primera desigualtat. Per a la segona usem que $\rho(A) \le \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^\top A)} \le 1 + \epsilon$.

4. Pel teorema de Gerschgorin, la matriu Q té un valor propi simple (real) en el disc $D(q_{jj}, r_j)$. A més $\det(Q)\det(\Sigma) = \det A > 0$, i com que $\det(\Sigma) > 0$, tenim que $\det Q > 0$. Observem que com que els valors propis de Q tenen tots mòdul 1, llavors 1 o -1 és un valor propi simple de Q. Finalment, ha de ser 1, ja que si Q tingués un valor propi simple -1 això implicaria que $\det Q < 0$.

Exercici 2: 1. Sigui

$$x^{(k+1)} = D^{-1}\left[b + \epsilon f(x^{(k)}) - (L+U)x^{(k)}\right] \tag{1}$$

(a) Passant al límit l'equació (1), com que f és contínua, tenim que

$$\alpha = D^{-1}\left[b + \epsilon f(\alpha) - (L+U)\alpha\right],$$

d'on obtenim que α és solució de l'equació $Ax = b + \epsilon f(x)$.

(b) Definim la funció d'iteració

$$\Phi(x) = D^{-1}\left[b + \epsilon f(x) - (L+U)x\right].$$

Demostrarem que si $\epsilon_0 > 0$ és prou petit, llavors Φ és una contracció. Recordem que si A és diagonal dominant estricte per files tenim que $\beta = \|D^{-1}(L+U)\|_\infty < 1$. Aleshores:

$$\Phi(x) - \Phi(y) = \epsilon D^{-1}(f(x) - f(y)) - D^{-1}(L+U)(x-y).$$

Per tant, si anomenem $\gamma = \|D^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\min_{1\le i\le n}|a_{ii}|}$, tenim que

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \le (\gamma K|\epsilon| + \beta)\|x - y\|_\infty.$$

Si $\gamma K|\epsilon| + \beta < 1$ aleshores Φ és una contracció i tenim el resultat desitjat, ja que l'altra condició del teorema del punt fix es verifica trivialment. Notem que per això cal que

$$|\epsilon| < \epsilon_0 = \frac{1-\beta}{\gamma K}.$$

2. Definim $F(x,\epsilon) = Ax - b - \epsilon f(x)$. Aquí aplicarem el teorema de la funció implícita.

   (a) Notem que quan $\epsilon = 0$ tenim la solució $x^{(0)} = (-1,1)$. Per altra banda, $D_xF(-1,1,0) = A$, que és una matriu regular, i per tant, pel teorema de la funció implícita, existeix una funció diferenciable $x = x(\epsilon)$ per $|\epsilon|$ prou petit, tal que $x(0) = (-1,1)$ i $F(x(\epsilon),\epsilon) = 0$,.

   (b) Hem de derivar el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x_1 + 5x_2 &=& 2 + \epsilon\sin(x_1+x_2) \\ 2x_1 + 3x_2 &=& 1 + \epsilon\cos(x_2) \end{array}\right\}$$

   respecte de ϵ.

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x_1' + 5x_2' &=& \sin(x_1+x_2) + \epsilon\cos(x_1+x_2)(x_1'+x_2') \\ 2x_1' + 3x_2' &=& \cos(x_2) - \epsilon\sin(x_2)x_2' \end{array}\right\}$$

   Fent $\epsilon = 0$ obtenim

$$\begin{array}{rcl} 3x_1' + 5x_2' &=& 0 \\ 2x_1' + 3x_2' &=& \cos(1) \end{array}$$

   Per tant, $x_1'(0) = 5\cos(1)$, $x_2'(0) = -3\cos(1)$.
   Ara tornem a derivar respecte de ϵ i fem $\epsilon = 0$:

$$\begin{array}{rcl} 3x_1'' + 5x_2'' &=& 2\cos(x_1+x_2)(x_1'+x_2') \\ 2x_1'' + 3x_2'' &=& -2\sin(x_2)x_2' \end{array}$$

   Per tant:

$$\begin{array}{rcl} 3x_1'' + 5x_2'' &=& 4\cos(1) \\ 2x_1'' + 3x_2'' &=& 6\sin(1)\cos(1). \end{array}$$

   Per tant, $x_1''(0) = 30\sin(1)\cos(1) - 12\cos(1)$, $x_2''(0) = -18\sin(1)\cos(1) + 8\cos(1)$.
   Finalment

$$x_1(\epsilon) = -1 + 5\cos(1)\epsilon + (15\sin(1)\cos(1) - 6\cos(1))\epsilon^2 + O(\epsilon^3),$$

$$x_2(\epsilon) = 1 - 3\cos(1)\epsilon + (-9\sin(1)\cos(1) + 4\cos(1))\epsilon^2 + O(\epsilon^3).$$

Exercici 3: 1. La bilinealitat i la simetria es comproven fàcilment. També es comprova que $\langle f,f\rangle \geq 0$. Finalment, si $\langle f,f\rangle = 0$ llavors

$$\int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx + \int_{-1}^{1} f'(x)^2\,dx = 0.$$

Com que f^2 i f'^2 són funcions positives, tenim en particular, que

$$\int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx = 0.$$

Llavors $f \equiv 0$ ja que f^2 és contínua i positiva.

2. Sigui p_n el polinomi ortogonal mònic. Podem escriure $p_n = P_n + S_n$, on P_n és un polinomi de grau parell i S_n és un polinomi de grau senar. Obviament, grau $P_n \leq n$ i grau $S_n \leq n$. Si anomenem $\|\cdot\|$ a la norma induïda pel producte escalar, tenim que

$$\|p_n\|^2 = \langle P_n + S_n, P_n + S_n\rangle = \langle P_n, P_n\rangle + 2\langle P_n, S_n\rangle + \langle S_n, S_n\rangle.$$

Per altra banda, si P és un polinomi parell i S un polinomi senar, llavors PS és un polinomi senar i P' és senar o zero, Q' és parell, i per tant $P'S'$ és també senar o identicament igual a zero. Això implica que $\langle P, S\rangle = 0$. Aplicat al nostre cas

$$\|p_n\|^2 = \langle P_n, P_n\rangle + \langle S_n, S_n\rangle.$$

Ara si n és parell aleshores P_n és un polinomi mònic de grau n i $\|P_n\|^2 \leq \|p_n\|^2$. Per la propietat minimal dels polinomis mònics tenim que $\langle S_n, S_n\rangle = 0$ i, per tant $S_n = 0$, el que implica que $p_n = P_n$ és un polinomi parell. El cas de grau senar és anàleg.

També es pot tenir en compte que si $\bar{f}(x) = f(-x)$ llavors $\langle f, g\rangle = \langle \bar{f}, \bar{g}\rangle$. Llavors si $p_0, \ldots, p_n$ són polinomis mónics ortogonals, també ho són $\bar{p}_0, -\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, (-1)^n\bar{p}_n$. Per unicitat (degut a la propietat minimal dels polinomis mónics ortogonals), tenim que $p_i = (-1)^i\bar{p}_i$.

3. $p_0 \equiv 1$, $p_1(x) = x$. Sigui $p_2(x) = x^2 + a$. Imposant la condicions d'ortogonalitat $\langle p_0, p_2\rangle = 0$, tenim

$$0 = \int_{-1}^{1} (x^2 + a)\, dx = \frac{2}{3} + 2a,$$

i per tant $p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$.

Finalment, $p_3(x) = x^3 + bx$, i si imposem $\langle p_1, p_3\rangle = 0$ tenim

$$0 = \int_{-1}^{1} (x^4 + bx^2)\, dx + \int_{-1}^{1} (3x^2 + b)\, dx = \frac{12}{5} + \frac{8}{3}b = 0,$$

i per tant, $p_3(x) = x^3 - \frac{9}{10}x$.

4. Com que f és senar, $\langle f, p_0\rangle = \langle f, p_2\rangle = 0$, i podem escriure la millor aproximació com

$$P = c_1 p_1(x) + c_3 p_3(x),$$

on

$$c_1 = \frac{\langle f, p_1\rangle}{\langle p_1, p_1\rangle}, \qquad c_2 = \frac{\langle f, p_3\rangle}{\langle p_3, p_3\rangle}.$$

Fent càlculs: $\langle p_1, p_1\rangle = 8/3$, $\langle p_3, p_3\rangle = 302/175$, $\langle f, p_1\rangle = 20/9$, $\langle f, p_3\rangle = 94/33$. Finalment, $c_1 = 5/6$ i $c_3 = 8225/4983$.

Nota: No es pot usar la fórmula recurrent pel càlcul dels polinomis ortogonals, ja que el producte escalar no compleix que $\langle fg, h\rangle = \langle f, gh\rangle$, per a totes les funcions $f, g, h \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$.