Solució al problema 5 I

a) **Espai prehilbertià:**

E és un espai vectorial i el producte escalar és bilineal i simètric.
A més $\langle f, f \rangle \geq 0$ i si $\langle f, f \rangle = 0$ llavors $f'(x) = 0$, $\forall x \in [-1, 1]$. Per tant $f \equiv c$, on $c \in \mathbb{R}$. Com que $c = f(-x) = -f(x) = -c$, $c = 0$.

Base:

Si $p \in E_3$ llavors $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Com que $p \in E$,
$p(-x) = -ax^3 + bx^2 - cx + d = -p(x) = -ax^3 - bx^2 - cx - d \Rightarrow$
$p(x) = ax^3 + bx$.
Prenem la base: $\{x, x^3\}$.

b) Recordem que la millor aproximació satisfà:

$$f^* = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1, \qquad \varphi_0(x) = x, \quad \varphi_1(x) = x^3.$$

Aleshores, tenim que

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, \varphi_0 \rangle \\ \langle f, \varphi_1 \rangle \end{pmatrix}.$$

Solució al problema 5 II

Calculant els productes escalars, tenim

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & \frac{18}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin 1 \\ 12\cos 1 - 6\sin 1 \end{pmatrix}.$$

Resolent, $c_0 \approx 0.647611$, $c_1 \approx 0.193859$.

c) Notem que $p \in F_3$ sii $p(x) = x + ax^3$. Obviament, F_3 no és un subespai vectorial. Però trobar l'element més proper a $f_0(x) = \sin x$ vol dir trobar $p_0 \in F_3$ tal que

$$\|f - p_0\| \leq \|f - p\|, \qquad \forall\, p \in F_3.$$

Això és el mateix que trobar un monomi de la forma $q_0 = a_0 x^3$ tal que

$$\|g - q_0\| \leq \|g - q\|,$$

per a tot $q(x) = ax^3$, on $g(x) = \sin x - x$.

Solució al problema 5 III

Com que $\tilde{F}_3 = \{ax^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$ és un subespai de dimensió finita de E i $\sin x - x \in E$, la millor aproximació $p^*(x) = x + ax^3$ satisfà:

$$a = \frac{\langle g, \varphi \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle} = \frac{12\cos 1 - 6\sin 1 - 2}{18/5} \approx -0.1569995.$$

Finalment, en el cas de $\cos x$, tenim que $\cos x - x \notin E$, i per tant no podem seguir la mateixa estratègia.