Solució al problema 9 I

1. $$\|A^\top A - I\|_2 = \|V\Sigma^2 V^\top - VV^\top\|_2 = \|\Sigma^2 - I\|_2 = \max_{1\leq i\leq n} |\sigma_i^2 - 1| = \epsilon.$$

   Per tant, $1-\epsilon \leq \sigma_i^2 \leq 1+\epsilon$, per a tot i. Com que $\epsilon < 1$ llavors

   $$(1-\epsilon)^2 \leq 1-\epsilon \leq 1+\epsilon \leq (1+\epsilon)^2,$$

   el que prova el que voliem.
2. Sigui $Q = UV^\top$. Llavors

   $$\|A - Q\|_2 = \|U\Sigma V^\top - UV^\top\|_2 = \|\Sigma - I\|_2 \leq \epsilon.$$

Solució al problema 9 II

3. Notem que

$$|\det A| = \sqrt{\det A^\top A} = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n \leq \rho(A)^n.$$

Per tant, $(1-\epsilon)^n \leq \rho(A)^n$, el que implica la primera desigualtat. Per a la segona usem que $\rho(A) \leq \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^\top A)} \leq 1+\epsilon$.

4.
   - Pel teorema de Gerschgorin, Q té un vap simple (real) en $D(q_{jj}, r_j)$.
   - Com que Q és ortogonal, si $\lambda \in \mathrm{Spec}(Q)$ llavors $|\lambda| = 1$.
   - Per tant, 1 o -1 és un vap simple de Q.
   - $\det(Q)\det(\Sigma) = \det A > 0$ i com que $\det(\Sigma) > 0$, $\det Q > 0$, el que implica que el vap simple és 1.