Solució al problema 6 I

1. Definim la funció

$$F(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} x + y^3 - \lambda \\ y^2 - x^2 - \lambda x + \lambda \end{pmatrix}.$$

LLavors

$$DF(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 3y^2 & -1 \\ -2x - \lambda & 2y & 1 - x \end{pmatrix}.$$

Per tant

$$DF(1,-1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

el que implica, via el TFI que existeixen les funciones cercades.
Per altra banda, derivant $F(x(\lambda), y(\lambda), \lambda)$ respecte de λ obtenim

$$\begin{aligned} x' + 3y^2 y' - 1 &= 0, \\ 2yy' - 2xx' - x - \lambda x' + 1 &= 0, \end{aligned}$$

Solució al problema 6 II

i fent $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} x'(0) + 3y'(0) - 1 &= 0, \\ -2y'(0) - 2x'(0) &= 0, \end{aligned}$$

amb el que $x'(0) = -1/2$ i $y'(0) = 1/2$.
Ara tornem a derivar i obtenim

$$\begin{aligned} x'' + 6y(y')^2 + 3y^2y'' &= 0, \\ 2(y')^2 + 2yy'' - 2(x')^2 - 2xx'' - 2x' - \lambda x'' &= 0, \end{aligned}$$

i fent novament $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} x''(0) + 3y''(0) - \frac{3}{2} &= 0, \\ -2x''(0) - 2y''(0) + 1 &= 0, \end{aligned}$$

amb el que $x''(0) = 0$, $y''(0) = \frac{1}{2}$.

Solució al problema 6 III

2. Ara tenim
$$DF(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
Usant el TFI tenim que existeixen funcions $x = x(y)$, $\lambda = \lambda(y)$ tals que $x(0) = 0$, $\lambda(0) = 0$, i $F(x(y), y, \lambda(y))$ si $|y|$ prou petit. Com abans, calculem les derivades per $y = 0$ de x i λ :
$$\begin{aligned} x' + 3y^2 - \lambda' &= 0, \\ 2y - 2xx' - x\lambda' - \lambda x' + \lambda' &= 0, \end{aligned}$$
amb el que
$$\begin{aligned} x'(0) - \lambda'(0) &= 0, \\ \lambda'(0) &= 0, \end{aligned}$$
i per tant, $x'(0) = \lambda'(0) = 0$.