Solució al problema 6 I

a) Suposem que f^* és el polinomi de grau $\leq n$ que millor aproxima a f. Escrivim $f^* = S + P$, on S és un polinomi senar i P un polinomi parell.

$\|f - f^*\|^2 = \langle f - S - P, f - S - P\rangle = \langle f - S, f - S\rangle - 2\langle f - S, P\rangle + \langle P, P\rangle.$

$\langle f - S, P\rangle = 0$ perquè és la integral d'una funció senar.

$$\|f - f^*\|^2 = \langle f - S, f - S\rangle + \langle P, P\rangle.$$

Per ser millor aproximació, $\langle P, P\rangle = 0$.
El cas en el que f és parell és similar.
b) Suposem que n és senar (si és parell és similar). Siqui p_n el polinomi ortogonal mònic de grau n. LLavors $p_n = S + P$, on $S \neq 0$ és un polinomi senar, i P és un polinomi parell. Tenim

$$\|p_n\|^2 = \langle S, S\rangle + 2\langle S, P\rangle + \langle P, P\rangle.$$

A més, $\langle S, P\rangle = 0$, i per tant $\|p_n\|^2 = \langle S, S\rangle + \langle P, P\rangle$.

Solució al problema 6 II

Com que p_n és el polinomi mònic de norma mínima, $P = 0$.
c) Sabem que la millor aproximació $f^* = c_0 p_0 + c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 + c_4 p_4$, on p_i és el polinomi ortogonal de grau i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, i que és un polinomi senar (primer apartat). Per tant, per l'apartat anterior,

$$f^* = c_1 p_1 + c_3 p_3,$$

on

$$c_1 = \frac{\langle f, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle}, \qquad c_3 = \frac{\langle f, p_3 \rangle}{\langle p_3, p_3 \rangle}.$$

Finalment, l'error és $\|f - f^*\|$, on

$$\|f - f^*\|^2 = \|f\|^2 - \|f^*\|^2 = \|f\|^2 - c_1^2 \|p_1\|^2 - c_3^2 \|p_3\|^2.$$

Ara cal fer els càlculs:

Solució al problema 6 III

- Càlcul dels polinomi ortogonals de graus p_1 i p_3 de graus 1 i 3. Sabem que són polinomis senars:

$$p_1(x) = x, \qquad p_2(x) = x^3 + ax.$$

$$0 = \langle p_1, p_3 \rangle = \int_{-1}^{1} (ax^2 + x^4)(1 + x^2)\, dx = \frac{2}{3}a + \frac{2}{5}a + \frac{2}{5} + \frac{2}{7}.$$

Per tant, $112a + 72 = 0$ o $a = -9/14$ amb el que

$$p_3(x) = x^3 - \frac{9}{14}x.$$

Ara tenim

$$\langle p_1, p_1 \rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 + x^4)\, dx = \frac{16}{15},$$

$$\langle p_3, p_3 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - \frac{9}{14}x \right)^2 (1 + x^2)\, dx = \frac{148}{2205},$$

Solució al problema 6 IV

$$\langle f, p_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^8(1+x^2)\,dx = \frac{40}{99},$$

$$\langle f, p_3 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(x^{10} - \frac{9}{14}x^8\right)(1+x^2)\,dx = \frac{76}{1001},$$

$$\langle f, f \rangle = \int_{-1}^{1} x^{14}(1+x^2)\,dx = \frac{64}{255}.$$

- Resultats demanats:

$$c_1 = \frac{25}{66}, \qquad c_3 = \frac{5985}{5291}, \qquad \|f - f^*\| = \sqrt{\frac{20927488}{1736426835}} \approx 0.34716.$$