Exercici 3:

a) Es fàcil veure que M_2 és espai vectorial (és un subconjunt de $\mathbb{R}_2[x]$ tancat per la suma i el producte per escalars). Òbviament, la dimensió de M_2 ha de ser com a molt 2 ($\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$ i M_2 no és $\mathbb{R}_2[x]$). Comencem per buscar una base de M_2: Si $p(x) = ax^2 + bx + c \in M_2$, llavors s'ha de verificar que $\int_0^1 (ax^2 + bx + c)\, dx = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = 0$ o, el que és el mateix, que $2a + 3b + 6c = 0$. Per determinar una base senzilla, podem fer $a = 0$ i agafar $b = 2$, $c = -1$ per tenir $p_1(x) = 2x - 1$, i fer $b = 0$ i agafar $a = 3$, $c = -1$ per tenir $p_2(x) = 3x^2 - 1$. Clarament p_1 i p_2 són linealment independents, per tant $\dim M_2 = 2$ i $p1$, $p2$ són base. Podríem ara buscar una base ortogonal però com el sistema d'equacions normals serà 2×2, no ho fem.

Abans d'escriure les equacions normals, calculem alguns productes escalars que ens faran falta:

$$\begin{aligned}
\langle p_1, p_1 \rangle &= \int_0^1 (2x-1)^2\, dx = \frac{1}{3}, \qquad \langle p_2, p_2 \rangle = \int_0^1 (3x^2-1)^2\, dx = \frac{4}{5}, \\
\langle p_1, p_2 \rangle &= \int_0^1 (2x-1)(3x^2-1)\, dx = \frac{1}{2}, \\
\langle p_1, f \rangle &= \int_0^1 (2x-1) f(x)\, dx = 2\int_0^1 x f(x)\, dx - \int_0^1 f(x)\, dx = 1, \\
\langle p_2, f \rangle &= \int_0^1 (3x^2-1) f(x)\, dx = 3\int_0^1 x^2 f(x)\, dfx - \int_0^1 f(x)\, dx = 1.
\end{aligned}$$

Per tant, si la funció que busquem es $f^* = c_1 p_1 + c_2 p_2$, les equacions normals són

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{2}c_2 &=& 1 \\ \frac{1}{2}c_1 + \frac{4}{5}c_2 &=& 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c_1 &=& 18 \\ c_2 &=& -10 \end{array}\right.$$

Per tant, $f^*(x) = 18p_1(x) - 10p_2(x) = -30x^2 + 36x - 8$.

b) Noteu que D_2 no és un espai vectorial. Com estem buscant f^* tal que $\|f - f^*\|$ sigui mínima, podem fer $\|f - f^*\| = \|(f-1) - (f^*-1)\| = \|g - g^*\|$, on $g = f - 1$ i $g^* = f^* - 1$. Ara, $\int_0^1 g(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx - \int_0^1 1\, dx = 0$ i $\int_0^1 g^*(x)\, dx = \int_0^1 f^*(x)\, dx - \int_0^1 1\, dx = 0$. Per tant, el que volem és trobar la millor aproximació a g per una funció $g^* \in M_2$ (és el M_2 de l'apartat anterior). Per aplicar l'apartat anterior, fem els següents càlculs:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x g(x)\, dx &= \int_0^1 x f(x)\, dx - \int_0^1 x\, dx = 0, \\
\int_0^1 x^2 g(x)\, dx &= \int_0^1 x^2 g(x)\, dx - \int_0^1 x^2\, dx = 0, \\
\langle p_1, g \rangle &= \int_0^1 (2x-1) g(x)\, dx = 2\int_0^1 x g(x)\, dx - \int_0^1 g(x)\, dx = 0, \\
\langle p_2, g \rangle &= \int_0^1 (3x^2-1) g(x)\, dx = 3\int_0^1 x^2 g(x)\, dx - \int_0^1 g(x)\, dx = 0.
\end{aligned}$$

Les equacions normals són

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{2}c_2 &=& 0 \\ \frac{1}{2}c_1 + \frac{4}{5}c_2 &=& 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c_1 &=& 0 \\ c_2 &=& 0 \end{array}\right.$$

Per tant, $g^* = 0$, el que implica que $f^* = 1$.