Solució al problema 13 I

a) Demostrem que si $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{11} v_{11} = 0$ llavors $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Això és equivalent a que el sistema lineal homogeni

$$\alpha_1 {v_i}^T v_1 + \cdots + \alpha_{11} {v_i}^T v_{11} = 0, \quad i = 1, \ldots, 11.$$

té la solució nul·la com a única solució. Indicació: Useu el t. de Gerschgorin.

b) Usem t. de Gershgorin. Demostració indicació:

- Si $\lambda \in \mathrm{Spec}(EF)$, $\exists\, v \in \mathbb{R}^{11} \setminus \{0\}$ t.q. $EFv = \lambda v$.
- Definint $u = Fv$, tenim $FEu = \lambda u$.
  - i) Si $u \neq 0$, aleshores $\lambda \in \mathrm{Spec}(FE)$.
  - ii) Si $u = 0$, com que $EFv = \lambda v$ i $Fv = 0$, aleshores $\lambda = 0$ ($v \neq 0$). Per tant, $\det(EF)\det(FE) = 0$, i també és vap de FE.
- i) i ii) impliquen $\mathrm{Spec}(EF) \subset \mathrm{Spec}(FE)$.
- Intercanviant E i F: $\mathrm{Spec}(FE) \subset \mathrm{Spec}(EF)$.

c) Indicació: Semblant al problema 3.