Solució al problema 11 I

a) Sí.
Si $\text{rang}(u, v) = 2$ (u, v no paral·lels), $\exists$ una submatriu M, 2×2, de la matriu (u, v) t. q. $\det M \neq 0$.
Suposem, per exemple que M correspon a les variables y i z. El TFI implica que (1) defineixen localment una corba C^1 que passa per (x_0, y_0, z_0) i que podem escriure

$$y = \psi_1(x), \qquad z = \psi_2(x).$$

El mateix raonament es fa en els altres casos.

Solució al problema 11 II

b) Definim $f(x,y,z) = x^4 + y^4 - 2$ i $g(x,y,z) = xz + y - 2$. Aleshores, $\nabla f(1,1,1) = (4,4,0)$, $\nabla g(1,1,1) = (1,1,1)$. Podem usar a) per a demostrar l'existència de la corba passant per $(1,1,1)$.
També podem veure que

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} (1,1,1) = \det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 4 \neq 0,$$

i usar el TFI per veure que la corba es pot escriure com $y = y(x)$, $z = z(x)$, t.q. $y(1) = 1$ i $z(1) = 1$.

Calculem les derivades de la corba en el punt:

$$\begin{array}{rcl} 4x^3 + 4y^3y' & = & 0, \\ z + xz' + y' & = & 0, \end{array} \xrightarrow[y=z=1]{x=1} \begin{array}{rcl} 4 + 4y' & = & 0, \\ 1 + z' + y' & = & 0, \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} y' & = & -1, \\ z' & = & 0. \end{array}$$

Solució al problema 11 III

Com $z' = 0$, calculem les derivades segones.

$$\begin{array}{rcl} 12x^2 + 12y^2(y')^2 + 4y^3y'' & = & 0, \\ 2z' + xz'' + y'' & = & 0, \end{array} \xrightarrow[y'=-1,\, z'=0]{x=y=z=1} \begin{array}{rcl} 24 + 4y'' & = & 0, \\ z'' + y'' & = & 0, \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{rcl} y'' & = & -6, \\ z'' & = & 6. \end{array}$$

Això implica que la coordenada z té un mínim quan la corba passa per $(1, 1, 1)$.