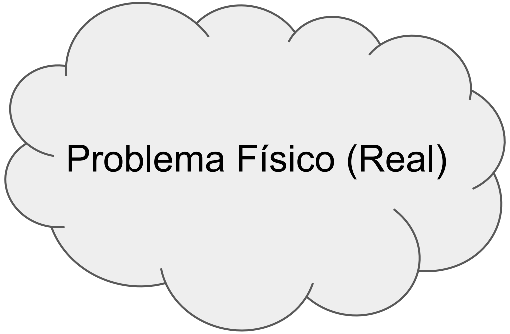
Método dos Volumes Finitos

Tarcísio Fischer

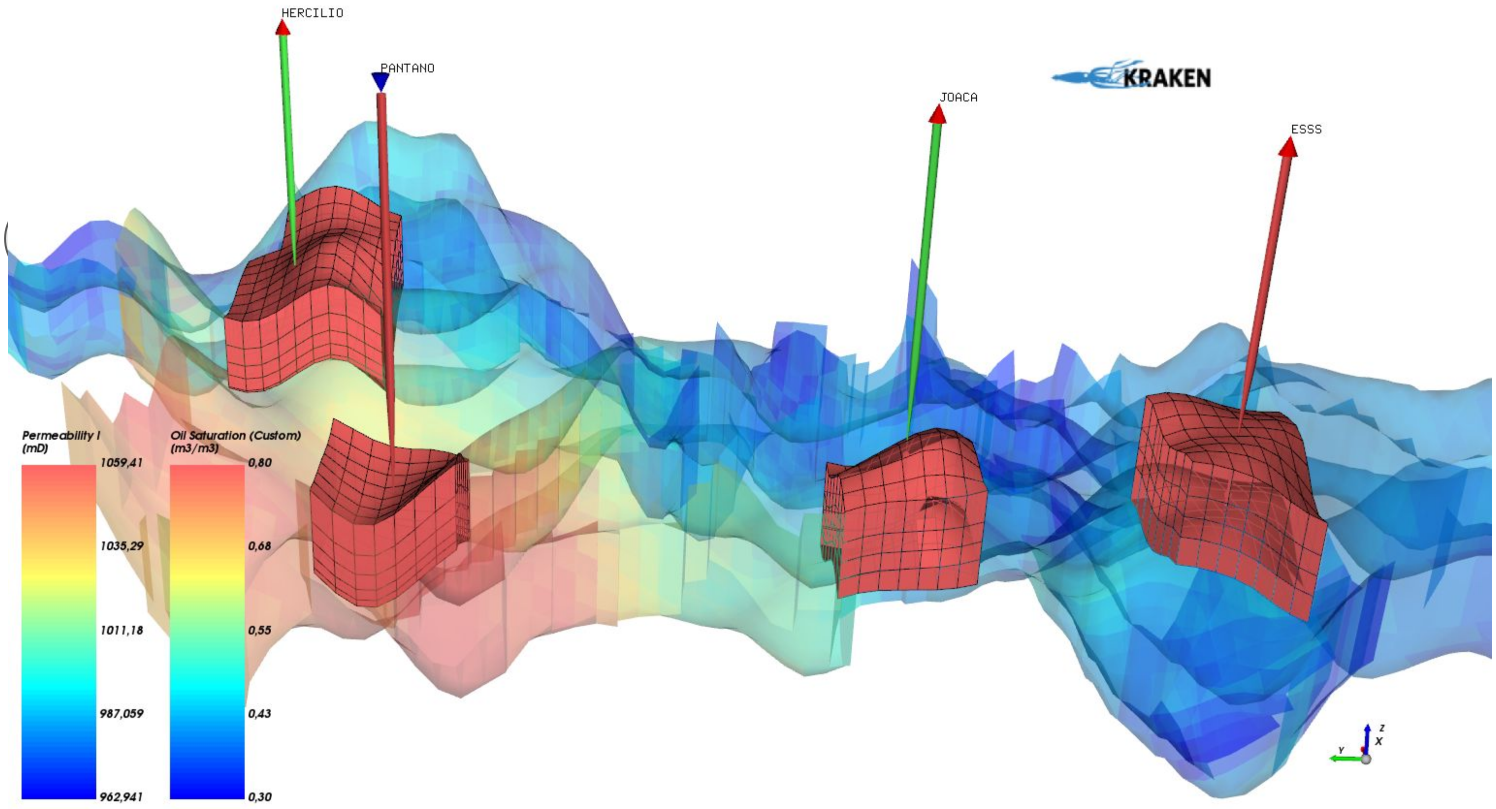
Agenda

Modelagem Matemática de Problemas Físicos
Equações Diferenciais
Soluções de Equações Diferenciais
Método de Volumes Finitos
Exemplo: Condução de Calor Unidimensional em Regime Permanente

Modelagem matemática de problemas físicos



Modelagem matemática de problemas físicos



Modelagem matemática de problemas físicos

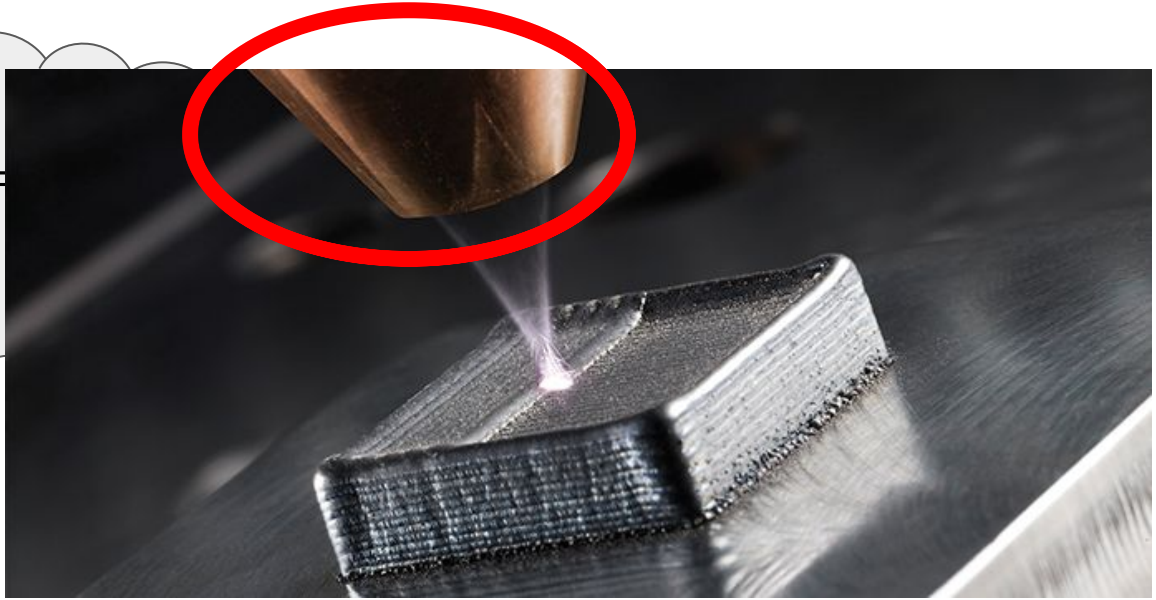
Problema Físico (Real)

Molde para Injeção de Plásticos

"Qual distribuição de furos no molde devo usar para conseguir produzir o produto de qualidade?

Modelagem matemática de problemas físicos

Problema F



Manufatura Aditiva

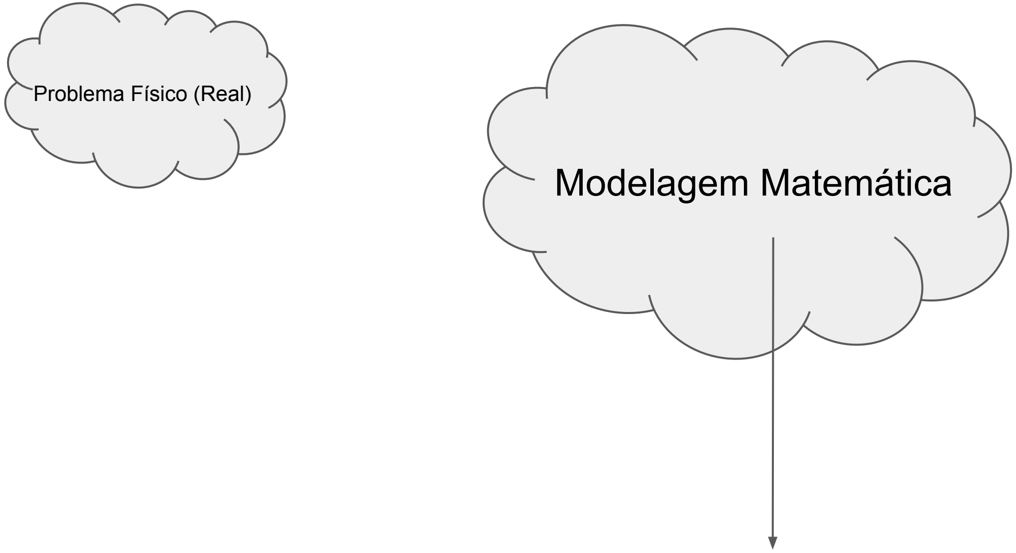
“Qual o melhor formato do bico para fazer o processo de manufatura aditiva?”

Modelagem matemática de problemas físicos

Problema Físico (Real)

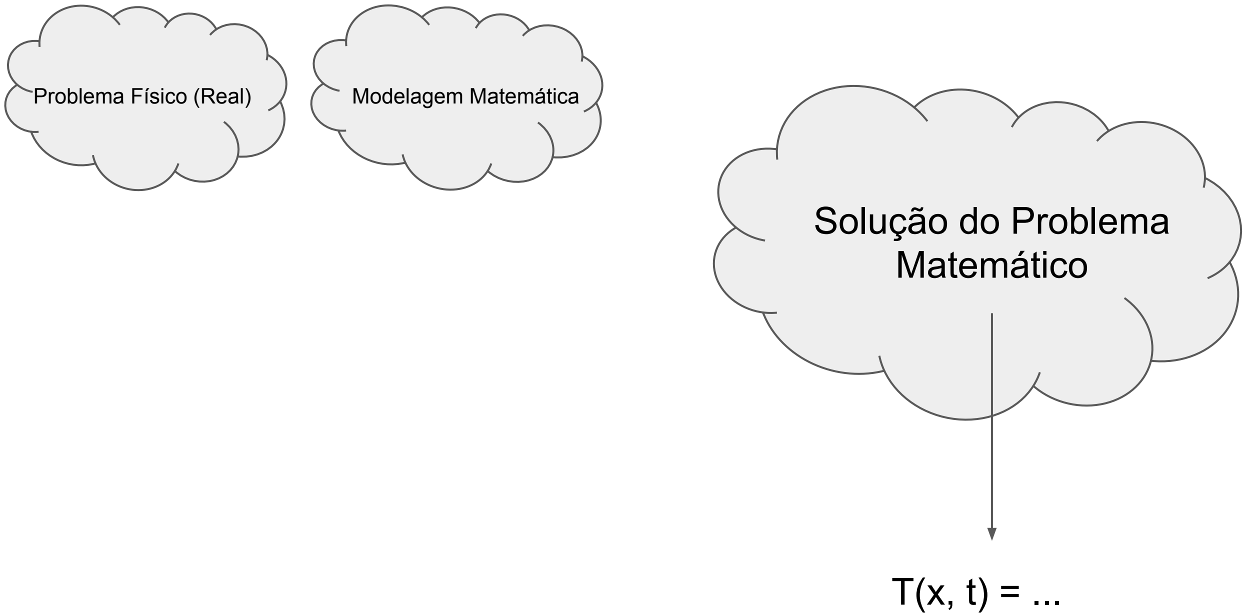
“Qual a temperatura no centro de um bastão de metal aquecido nas extremidades?”

Modelagem matemática de problemas físicos

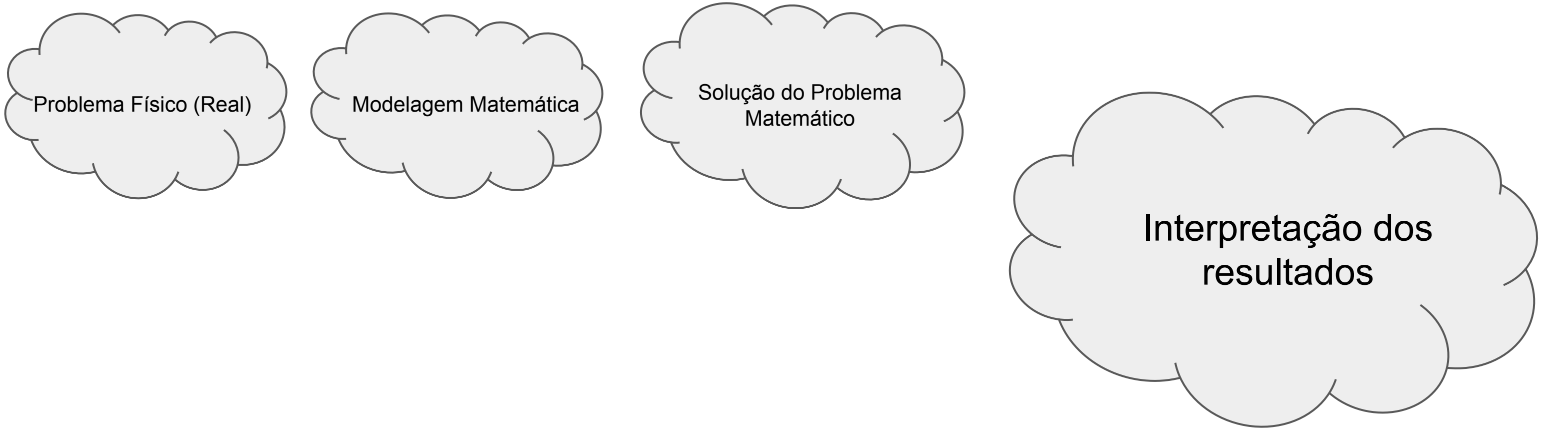


$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

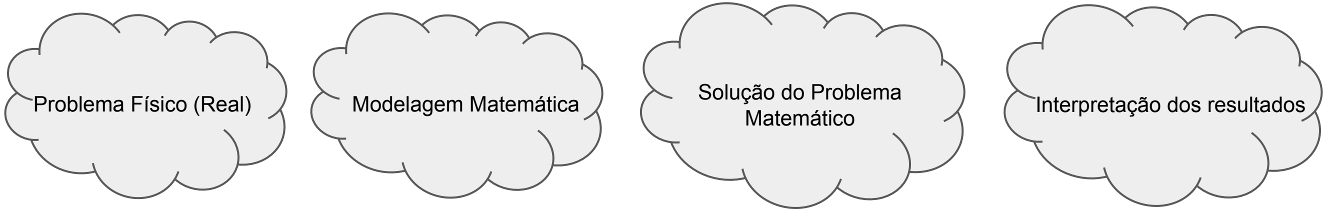
Modelagem matemática de problemas físicos



Modelagem matemática de problemas físicos



Modelagem matemática de problemas físicos



Equações Diferenciais

Problema: Qual a função u(x) que satisfaz a equação abaixo para qualquer x?

$$\frac{du}{dx} - 2x = 0$$

Soluções de Equações Diferenciais

Solução exata

Problema: Qual a função u(x) que satisfaz a equação abaixo para qualquer x?

$$\frac{du}{dx} - 2x = 0$$

Solução:

$$u(x) = x^2 + c$$

Prova real:

$$\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow 2x - 2x = 0$$

Equações Diferenciais

$$\frac{du}{dx} = cu + x^2.$$ → Equação Diferencial Ordinária (EDO/ODE) de Primeira ordem não homogênea

$$\frac{d^2u}{dx^2} - x\frac{du}{dx} + u = 0.$$ → Equação Diferencial Ordinária (EDO/ODE) de Segunda ordem homogênea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$ → Equação Diferencial Parcial (EDP/PDE) de Segunda ordem homogênea

Soluções de Equações Diferenciais

Solução aproximada

- Diferenças Finitas
- Método de Elementos Finitos (MEF / FEM)
- **Método de Volumes Finitos (MVF / FVM)**
- Método de Elementos de Contorno (MEC / BEM)
- Entre outros...

Método de Volumes Finitos

"Todo método que, para obter as equações aproximadas, satisfaz a conservação da propriedade em nível de volumes elementares é um método de volumes finitos"

- Maliska, 1995

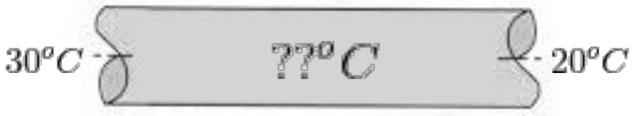
$$\mathcal{L}(\Phi) = 0$$

$Ax = B$

Equação diferencial (qualquer)
e suas condições de contorno

Problema discretizado
(Conjunto de equações algébricas)

MVF - Exemplo



"Qual a temperatura no centro de um bastão de metal aquecido nas extremidades?"

MVF - Exemplo

"Qual a temperatura no centro de um bastão de metal aquecido nas extremidades?"

Modelo matemático unidimensional:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

MVF - Exemplo

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

ρ : Densidade do material [kg/m³]

T : Temperatura [K]

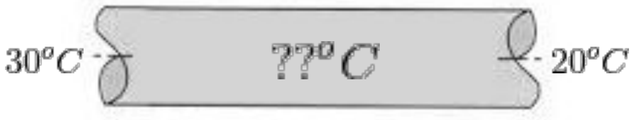
k : Condutividade térmica [K m/W]

c_p : Calor específico [$J/(kg.K)$]

x : Posição dentro da barra [m]

t : Tempo [s]

MVF - Exemplo

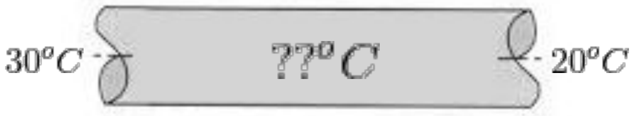


“Solução em regime permanente”
“Estado estacionário”

Motivação: Queremos a solução a partir do momento em que a temperatura não se altera mais com o tempo

$$\cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial t}(\rho T)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

MVF - Exemplo

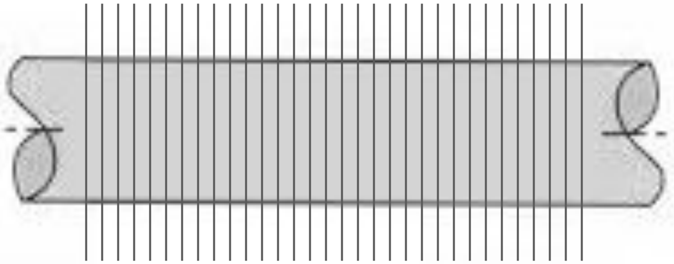


“Solução em regime permanente”
“Estado estacionário”

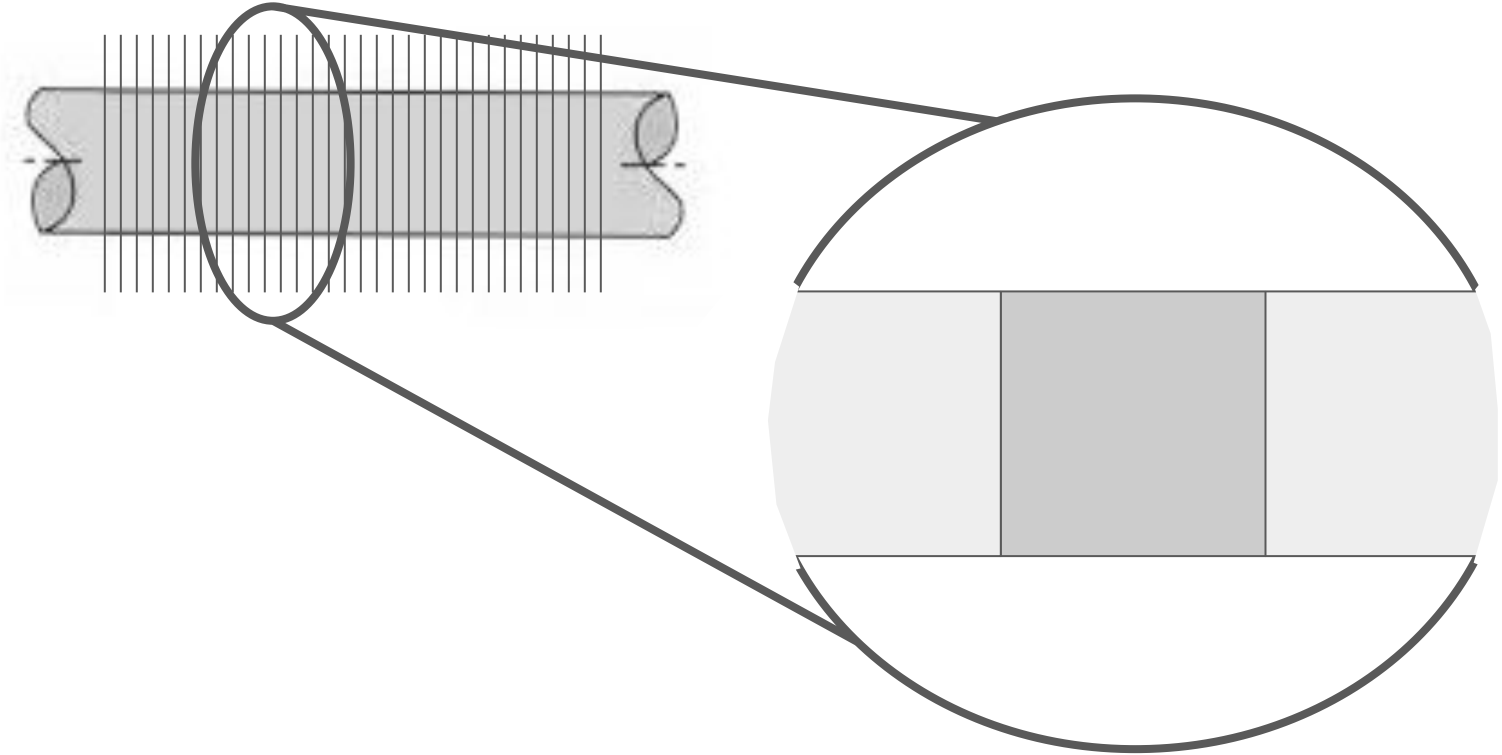
Motivação: Queremos a solução a partir do momento em que a temperatura não se altera mais com o tempo

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

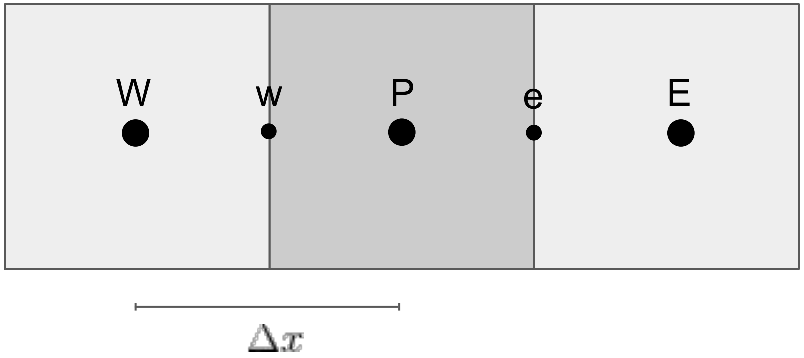
MVF - Exemplo



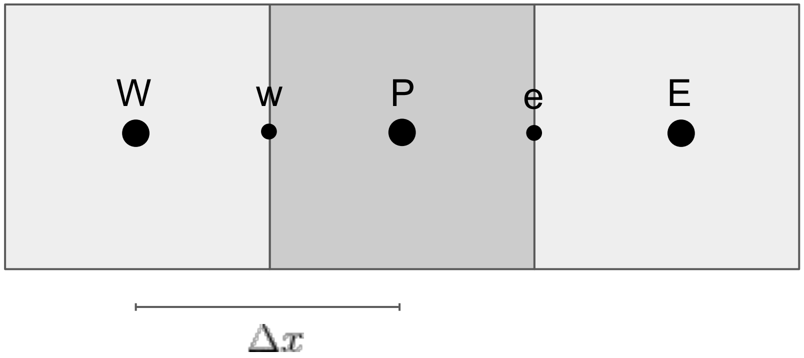
MVF - Exemplo



MVF - Exemplo

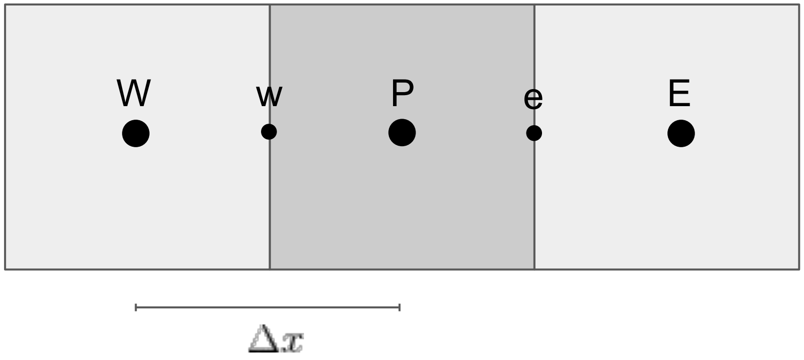


MVF - Exemplo



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$$

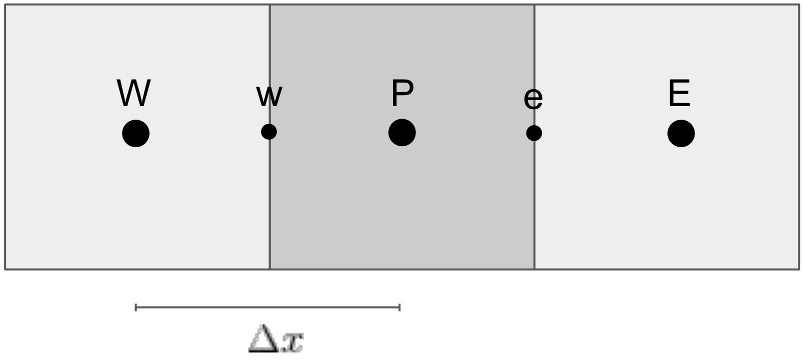
MVF - Exemplo



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$$

$$\int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx = 0$$

MVF - Exemplo

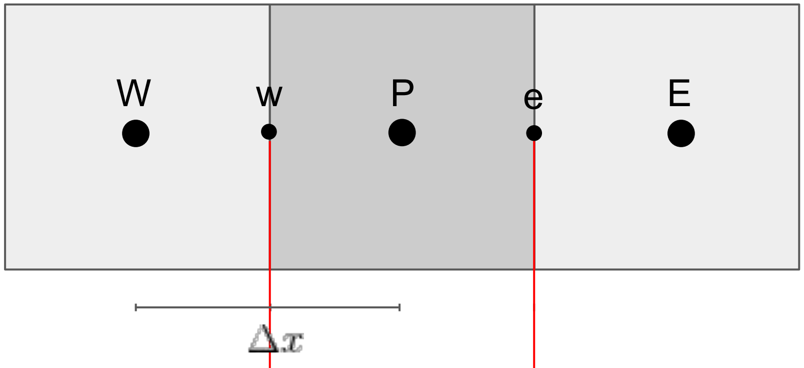


$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$$

$$\int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx = 0$$

$$\left.\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right|_e - \left.\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right|_w = 0$$

MVF - Exemplo



$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_w \approx \frac{T_P - T_W}{\Delta x}$$

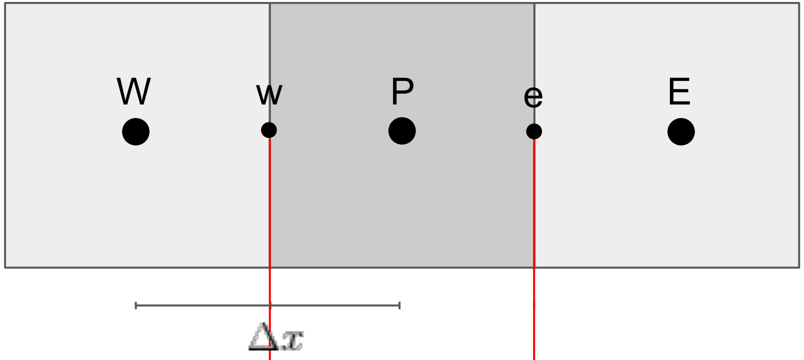
$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_e \approx \frac{T_E - T_P}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$$

$$\int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx = 0$$

$$\left.\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right|_e - \left.\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right|_w = 0$$

MVF - Exemplo



$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_w \approx \frac{T_P - T_W}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_e \approx \frac{T_E - T_P}{\Delta x}$$

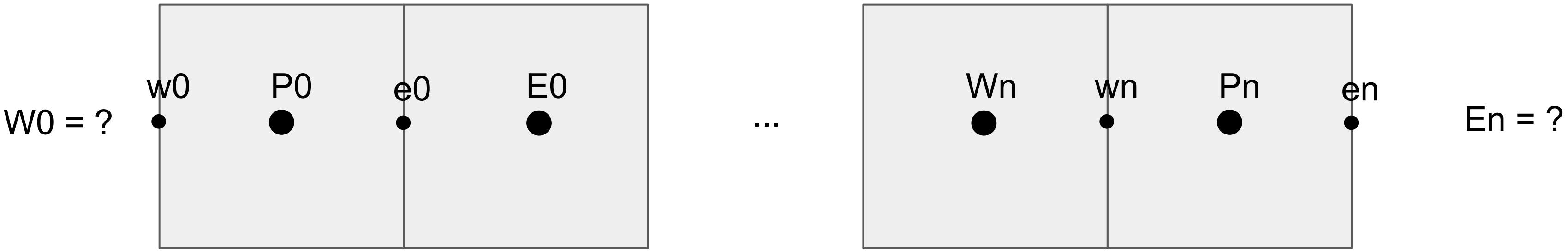
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$$

$$\int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx = 0$$

$$\left.\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right|_e - \left.\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right|_w = 0$$

$$\frac{k}{c_p}\left(\frac{T_E - 2T_P + T_W}{\Delta x}\right) = 0$$

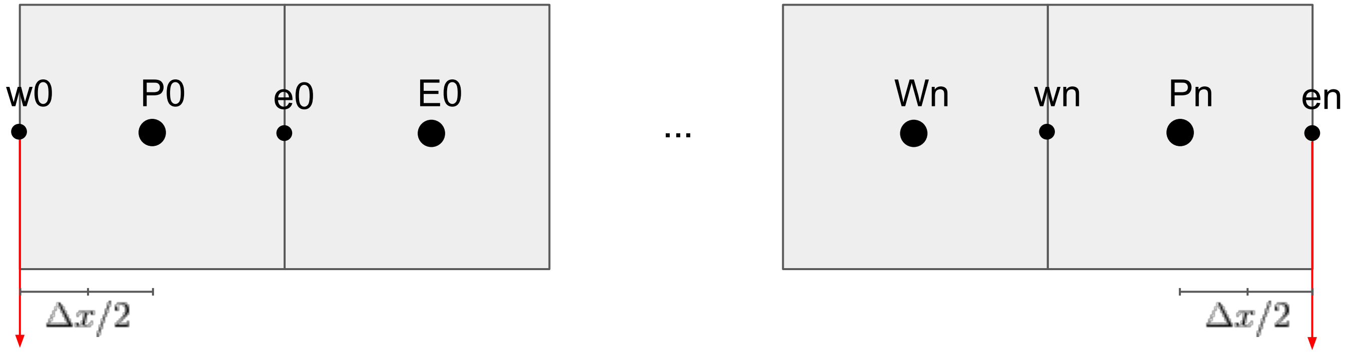
MVF - Exemplo - Tratamento das condições de contorno



$$\frac{k}{c_p}\left(\frac{\boxed{T_E} - 2T_P + \boxed{T_W}}{\Delta x}\right) = 0$$

MVF - Exemplo - Tratamento das condições de contorno

Abordagem 1: Temperatura prescrita nas faces

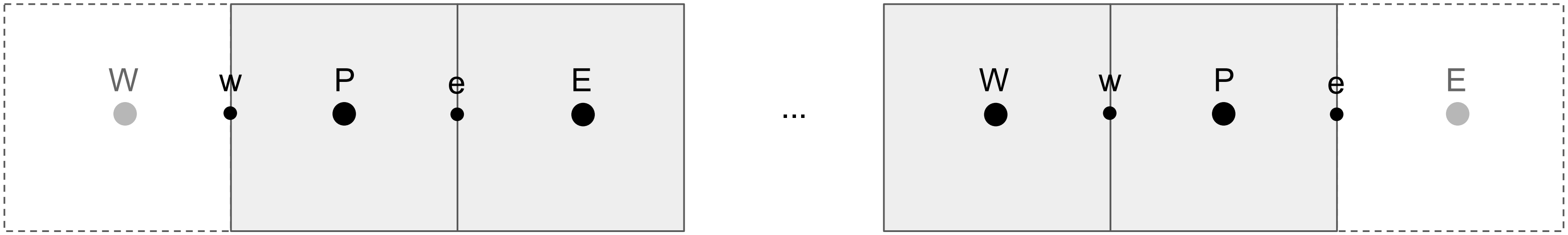


$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_w \approx \frac{T_P - T_w}{\Delta x/2}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_e \approx \frac{T_e - T_P}{\Delta x/2}$$

MVF - Exemplo - Tratamento das condições de contorno

Abordagem 2: Temperatura prescrita em volumes fictícios (“Ghost Cells”)



Aplica-se o valor das faces em um volume fictício externo. (Poderia ter sido feita uma extrapolação)

$$T_W = 300K$$
$$T_E = 200K$$

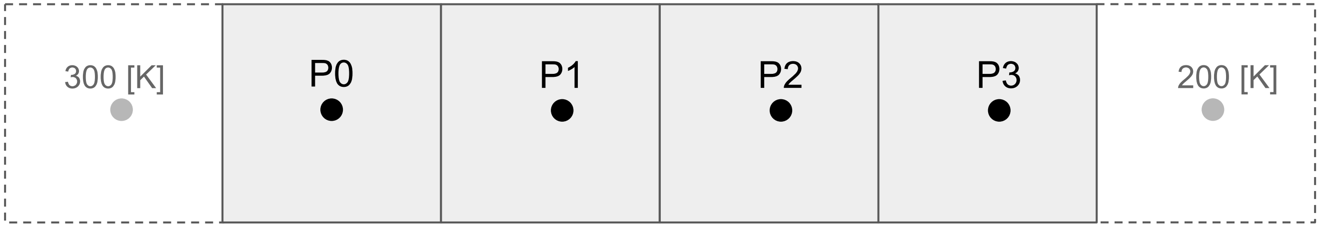
NOTA: O uso de “Ghost Cells” é apenas para simplificar o problema. O ideal seria colocar as condições de contorno exatamente nas faces.

MVF - Exemplo

Procedimento de solução: Montar o sistema de equações
(Cada volume de controle possui uma equação correspondente)

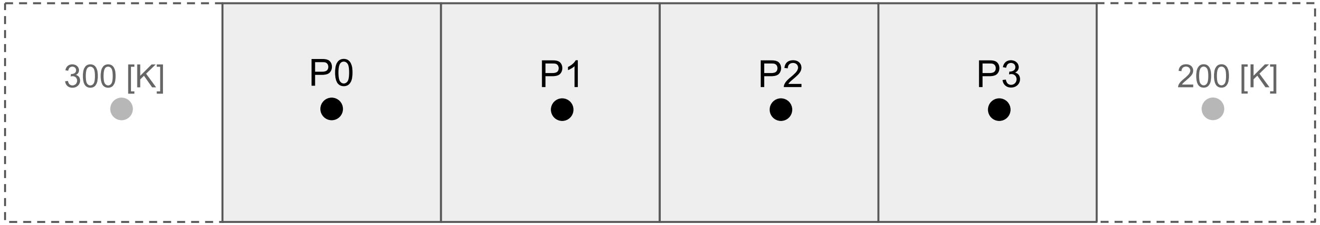
MVF - Exemplo

Procedimento de solução: Montar o sistema de equações
(Cada volume de controle possui uma equação correspondente)



MVF - Exemplo

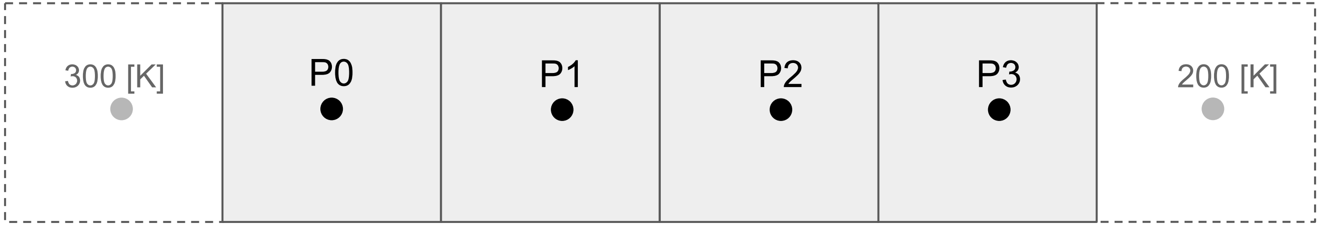
Procedimento de solução: Montar o sistema de equações
(Cada volume de controle possui uma equação correspondente)



$$\begin{cases} \frac{k}{c_p}\frac{T_{P1}-2T_{P0}+300}{\Delta x} = 0 \\ \frac{k}{c_p}\frac{T_{P2}-2T_{P1}+T_{P0}}{\Delta x} = 0 \\ \frac{k}{c_p}\frac{T_{P3}-2T_{P2}+T_{P1}}{\Delta x} = 0 \\ \frac{k}{c_p}\frac{200-2T_{P3}+T_{P2}}{\Delta x} = 0 \end{cases}$$

MVF - Exemplo

Procedimento de solução: Montar o sistema de equações
(Cada volume de controle possui uma equação correspondente)



$$
\begin{cases}
\frac{k}{c_p}\frac{T_{P1}-2T_{P0}+300}{\Delta x} = 0 \\
\frac{k}{c_p}\frac{T_{P2}-2T_{P1}+T_{P0}}{\Delta x} = 0 \\
\frac{k}{c_p}\frac{T_{P3}-2T_{P2}+T_{P1}}{\Delta x} = 0 \\
\frac{k}{c_p}\frac{200-2T_{P3}+T_{P2}}{\Delta x} = 0
\end{cases}
\Rightarrow
\boxed{\frac{k}{c_p \cdot \Delta x}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}
\boxed{\begin{bmatrix} T_{P0} \\ T_{P1} \\ T_{P2} \\ T_{P3} \end{bmatrix}}
=
\boxed{\begin{bmatrix} -300 \\ 0 \\ 0 \\ -200 \end{bmatrix}\frac{k}{c_p \Delta x}}
$$

Ax = B

MVF - Exemplo

Automatização: Código em Python

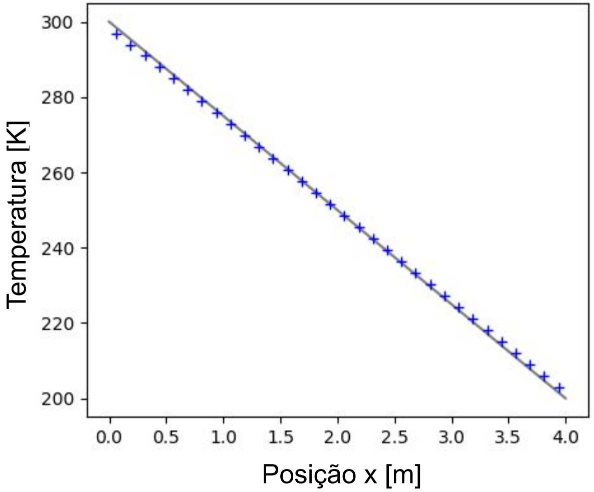
```
left_temperature = 300
right_temperature = 200
k = 1.0
cp = 1.0
nx = 32
l = 4.0
dx = l / nx

A = k / (cp*dx) * (
    np.diag([1] * (nx - 1), -1) +
    np.diag([-2] * nx, 0) +
    np.diag([1] * (nx - 1), 1)
)
B = k / (cp*dx) * np.array(
    [-left_temperature] +
    [0.0]* (nx - 2) +
    [-right_temperature]
)

x = linalg.solve(A, B)

plt.plot(np.linspace(dx / 2.0, l - (dx / 2.0), nx), x, 'ro')
plt.show()
```

Resultados:



MVF - Exemplo

Automatização: Código em Python

```python
left_temperature = 300
right_temperature = 200
k = 1.0
cp = 1.0
nx = 32
l = 4.0
dx = l / nx
```

Simulation setup
(App/Calc boundary code)

```python
A = k / (cp*dx) * (
    np.diag([1] * (nx - 1), -1) +
    np.diag([-2] * nx, 0) +
    np.diag([1] * (nx - 1), 1)
)
B = k / (cp*dx) * np.array(
    [-left_temperature] +
    [0.0]* (nx - 2) +
    [-right_temperature]
)
```

Equation preparation (Calc)

```python
x = linalg.solve(A, B)
```

Solver (Calc/Petsc/Scipy/...)

```python
plt.plot(np.linspace(dx / 2.0, l - (dx / 2.0), nx), x, 'ro')
plt.show()
```

Post-processing (App code)

Fim?

Não falamos sobre:

- Problemas 2D e 3D
- Problemas não lineares
- Problemas transientes (Formulação totalmente implicta vs explícita)
- Equações envolvendo fluido / Termo convectivo (Equações de NS vs lei de Darcy)
- Estruturas de dados (Grafos e Matrizes esparsas)
- Condições de contorno
- Geração de malhas
- Métodos de solução de sistemas lineares e não-lineares
- …