



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE TUCURUÍ  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

GLÁUCIA ALVES MACEDO

MODELAGEM, IDENTIFICAÇÃO E PROJETO DE CONTROLADORES DIGITAIS  
PARA CONTROLE DE UM MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA

Tucuruí –PA

2012

GLÁUCIA ALVES MACEDO

MODELAGEM, IDENTIFICAÇÃO E PROJETO DE CONTROLADORES DIGITAIS  
PARA CONTROLE DE UM MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA

Trabalho de Conclusão de  
Curso apresentado como parte dos  
requisitos necessários para obtenção do  
grau de Bacharel em Engenharia  
Elétrica, na Faculdade de Engenharia  
Elétrica da Universidade Federal do  
Pará.

Tucuruí – PA

2012

GLÁUCIA ALVES MACEDO

MODELAGEM, IDENTIFICAÇÃO E PROJETO DE CONTROLADORES DIGITAIS  
PARA CONTROLE DE UM MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
como parte dos requisitos necessários para  
obtenção do grau de Bacharel em Engenharia  
Elétrica, na Faculdade de Engenharia Elétrica  
da Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Cleison Daniel Silva

Tucuruí, 28 de junho de 2012

Aprovado por:

---

Prof. Msc. Cleison Daniel Silva  
(Orientador)

---

Prof. Msc. Raphael Barros Teixeira  
(Co-orientador)

---

Prof.<sup>a</sup>. Msc. Kátia Cilene F. da Silva  
(Membro da banca examinadora)

Tucuruí – Pa  
2012



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS DE TUCURUÍ  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
COORDENAÇÃO DE TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO

AUTOR(ES) / MATRÍCULA(S)

NOME: GLAUCIA ALVES MACEKO	MATRÍCULA: 06134002218
NOME: _____	MATRÍCULA: _____

ORIENTADOR (NOME/INSTITUIÇÃO/EMPRESA)

CLAYSON DANIEL SILVA

CO-ORIENTADOR (NOME/INSTITUIÇÃO/EMPRESA)

RAPHAEL BARROS TEIXEIRA

TÍTULO DO TRABALHO

MODELAGEM, IDENTIFICAÇÃO E PROJETO DE CONTROLADORES DIGITAIS PARA CONTROLE DE UM MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA.

MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA (NOME/INSTITUIÇÃO/EMPRESA)

	CONCEITO
1. CLAYSON DANIEL SILVA	EXC
2. RAPHAEL BARROS TEIXEIRA	EXC
3. KATIA CILENE FERREIRA DA SILVA	EXC
4. _____	

DIA DA DEFESA: 28/06/2012

HORA DA DEFESA: 8:00h

Clayson D. Silva

ORIENTADOR (A)

Raphael B. Teixeira

CO-ORIENTADOR (A)

Katia Cilene F. de Silva

MEMBRO (A) 1

MEMBRO (A) 2

Aos meus pais Antônio e Edivanda que me proporcionaram tudo o que tenho e sei, e por tantas vezes tornarem seus os meus sonhos. AMO VOCÊS!

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por estar sempre presente em minha vida e nas minhas decisões, e por me capacitar de toda sabedoria, por me dar forças nos momentos difíceis, e me proporcionar tantas bênçãos e vitórias.

Aos meus irmãos Deny e Anderson, minha cunhada Cíntia e meu sobrinho Nicollas, sei que vocês sempre torceram e acreditaram em mim, agradeço pelas palavras de incentivo e pelas orações. Ao meu irmão Vanderson e minha cunhada Suelane, que sempre me ajudaram e cuidaram de mim, o apoio de vocês foi fundamental para realização deste sonho.

Ao meu noivo David, pelo carinho e ter estado ao meu lado sempre me ajudando e dando força, você ajudou a tornar tudo mais fácil.

Aos amigos Karol, Zuleti, e Alan (parceiro de laboratório), a amizade de vocês e toda ajuda que me deram foi muito importante.

Aos professores Cleison, Claudomiro e Raphael Teixeira, por todo apoio, os ensinamentos de vocês foram fundamentais para realização deste trabalho.

A todos meus amigos que oraram por mim, e todas as pessoas que de alguma forma direta ou indireta contribuíram para concretização deste sonho, meu **MUITO OBRIGADA!**

## RESUMO

O trabalho a seguir irá apresentar estratégias de projeto de controladores digitais aplicados à regulação de velocidade para um motor de corrente contínua existente no Laboratório da WEG da Universidade Federal do Pará – Campus de Tucuruí .

Inicialmente é realizado e apresentado experimentos que definem os parâmetros para identificar a dinâmica do motor para controle de velocidade no eixo do rotor, em função da tensão aplicada nos terminais de armadura do motor.

Após definir o modelo matemático que representa a dinâmica do motor CC, é realizado um breve estudo para projeto de controladores digitais proporcional-integral (PI), proporcional-integral-derivativo (PID) e o RST. A estratégia adotada para os controladores PI e PID foi o método do Lugar Geométrico das Raízes (LGR), que permite determinar os pólos de malha fechada do sistema a partir dos pólos e zeros de malha aberta, em função do ganho do sistema.

Um estudo teórico sobre o LGR e a estrutura RST é realizado. Em seguida os controladores são projetados conforme as especificações previamente determinadas. O sistema com cada controlador é simulado, e a resposta é obtida para análise e discussão do desempenho do sistema a partir dos controladores projetados.

**Palavras chave: regulação de velocidade, controladores digitais, motor CC, LGR, RST.**

## **ABSTRACT**

The following work will present design strategies of digital controllers applied to speed regulation for a DC motor from WEG existing at the Laboratory of the Universidade Federal do Pará - Campus Tucuruí.

Initially, experiments are performed and presented on parameters to identify the nature of engine speed control rotor axis as a function of applied voltage at the terminals of the motor armature.

After defining the mathematical model that represents the dynamics of the DC motor, we conducted a brief study for design of digital controllers proportional-integral (PI), proportional-integral-derivative (PID) and RST. The strategy for PI and PID controllers is the method of the locus of the roots (LGR), which determines clusters of closed-loop system from the poles and zeros of open loop gain as a function of the system.

A theoretical study on the structure and LGR RST is performed, then the controllers are designed according to predetermined specifications. The system is simulated with each controller, and the response is obtained for analysis and discussion of system performance from the designed controllers.

**Keywords: speed control, digital controllers, DC motor, LGR, RST**



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Máquina de corrente contínua.....	18
Figura 2.2 - Principais partes constituintes do motor CC. (a) Rotor e estator (b)Comutador ..	20
Figura 2.3 - Circuito de um motor CC com excitação independente .....	21
Figura 2.4 - Circuito equivalente ao circuito de armadura do motor CC, em regime permanente.....	22
Figura 2.5 - Diagrama de blocos do motor CC relacionando a velocidade angular com a corrente .....	26
Figura 2.6 - Diagrama de blocos completo relacionando a tensão aplicada na armadura com a velocidade angular.....	27
Figura 2.7 - Ligação do motor CC com excitação independente .....	28
Figura 2.8 - Ligação do circuito de campo para o motor CC. (a) Motor Série (b)Motor Paralelo - <i>Shunt</i> (c) Motor Série-Paralelo - Compound .....	28
Figura 2.9 - Circuito montado para determinação de kw .....	30
Figura 2.10 - Procedimento experimental para determinação de J.....	31
Figura 3.1 - Diagrama de blocos de um sistema de controle.....	35
Figura 3.2 - (a) Conversor CC básico (b) Forma de onda de $V_o$ para o conversor CC .....	35
Figura 3.3 - Modulador PWM .....	37
Figura 3.4 - Circuito do conversor CC tipo <i>Buck</i> .....	37
Figura 3.5 - (a) Circuito equivalente para a chave ligada (b) Circuito equivalente para a chave desligada .....	38
Figura 4.1 – Diagrama de blocos do sistema com controle digital de velocidade .....	40
Figura 4.2 - Diagrama de blocos de um sistema amostrado com controlador digital .....	43
Figura 4.3 - Diagrama de blocos para o sistema com um controlador RST.....	45
Figura 4.4 - Localização dos pólos dominantes e pólos auxiliares .....	50
Figura 4.5 – Curva de módulo em dB com assíntotas. ....	52
Figura 5.1 - Medição da indutância de armadura da máquina CC .....	53
Figura 5.2 - Medição da resistência na armadura da máquina CC.....	54
Figura 5.3 - Motor CC com peso amarrado ao eixo para determinação de J .....	56
Figura 5.4 - Medição do diâmetro do rotor do motor CC.....	57

Figura 5.5 - Medição do comprimento do fio L .....	57
Figura 5.6 - Diagrama de simulação do motor CC em malha aberta .....	59
Figura 5.7 - Velocidade na saída do motor em malha aberta para uma tensão de entrada de 180V .....	59
Figura 5.8 - Velocidade na saída do motor em malha aberta para uma tensão de entrada de 182V .....	60
Figura 5.9 - Diagrama de bode do sistema .....	61
Figura 5.10 - Resposta normalizada de um sistema de segunda ordem para uma entrada degrau. Fonte: Landau (2006) .....	63
Figura 5.11 - LGR do sistema com controle proporcional .....	63
Figura 5.12 - Resposta do sistema em malha fechada com controle proporcional (azul) e o sinal de controle (verde). .....	64
Figura 5.13 - Mapa de pólos e zeros no plano z .....	65
Figura 5.14 - LGR do sistema com controle PI .....	67
Figura 5.15 - Resposta do sistema com controle PI .....	67
Figura 5.16 - Diagrama de simulação com controle PI .....	68
Figura 5.17 - Resposta do sistema com a inclusão do controlador PI .....	68
Figura 5.18 - Ação de controle do controlador PI .....	69
Figura 5.19 - Mapa de pólos e zeros (sistema em malha aberta) .....	70
Figura 5.20 - LGR do sistema com controle PID .....	72
Figura 5.21 - Diagrama de blocos do sistema com o controlador PID digital .....	72
Figura 5.22 - Resposta do sistema com o controlador PID digital .....	73
Figura 5.23 - Ação do controle PID no sistema .....	73
Figura 5.24 - Diagrama de blocos para o sistema com o controlador RST .....	75
Figura 5.25 - Resposta para o sistema com o controlador RST .....	76
Figura 5.26 - Ação do controlador RST no sistema .....	76
Figura 6.1 - Motor CC em malha aberta .....	77
Figura 6.2 - Janela para definição dos parâmetros do motor CC no <i>SimPowerSystems</i> .....	78
Figura 6.3 - Velocidade do motor em malha aberta .....	79
Figura 6.4 - Circuito do Modulador PWM .....	80
Figura 6.5 - Circuito para controle de velocidade com controlador PI .....	80

Figura 6.6 - Velocidade no motor CC. Velocidade de referencia (amarelo) e Velocidade no motor(magenta) .....	81
Figura 6.7 - Gráfico da corrente de armadura .....	81
Figura 6.8 - circuito para controle de velocidade do motor CC com torque de carga.....	82
Figura 6.9 - Velocidade do motor com distúrbio de torque .....	82
Figura 6.10 - Corrente de armadura na presença de distúrbio de torque.....	83
Figura 6.11 - Circuito para controle de velocidade no motor CC com o controlador PID .....	84
Figura 6.12 - Velocidade no motor com controlador PID. Velocidade de referencia (amarelo) Velocidade do motor (magenta) .....	84
Figura 6.13 - Corrente de armadura com controle PID .....	84
Figura 6.14 - Circuito para o controle de velocidade no motor CC com distúrbio de torque ..	85
Figura 6.15 - Velocidade do motor na presença de distúrbio de torque. Referência (amarelo) Velocidade no motor(magenta) .....	85
Figura 6.16 - Corrente de armadura na presença de distúrbio de torque.....	86
Figura 6.17 - Circuito para controle de velocidade do motor CC com controlador RST.....	86
Figura 6.18 - Velocidade na saída do motor com controle RST. Referência (azul) Velocidade no motor (vermelho).....	87
Figura 6.19 - Corrente de armadura com controle RST .....	87
Figura 6.20 - Circuito para o controle de velocidade no motor CC com distúrbio de torque ..	88
Figura 6.21 - Velocidade do motor na presença de distúrbio de torque. Referência (amarelo) Velocidade no motor (magenta). .....	88
Figura 6.22 - Corrente de armadura na presença de distúrbio de torque.....	89

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Dados de placa da máquina CC.....	18
Tabela 5.1 - Valores de $L_a$ medido para várias posições do rotor.....	53
Tabela 5.2 - Parametros medidos para determinação de $k_\omega$ .....	55
Tabela 5.3 - Valores experimentais de tempo para determinação de $J$ .....	56
Tabela 5.4 - Valores medidos no circuito da figura 2.12 .....	58

## LISTA DE SÍMBOLOS

$e$	tensão induzida	(V)
$L$	comprimento do condutor	(m)
$\phi$	fluxo magnético	(wb)
$R_a$	resistência de armadura	( $\Omega$ )
$L_a$	indutância de armadura	(mH)
$E_g$	tensão gerada na armadura	(V)
$R_f$	resistência de campo	( $\Omega$ )
$L_f$	indutância de campo	(mH)
$\omega_m$	velocidade angular	(rad/s)
$J$	momento de inércia	(Kg.m <sup>2</sup> )
$B$	coeficiente de atrito viscoso	(N.m.s/rad)
$T_e$	torque eletromagnético	(N.m)
$T_L$	torque de carga	(-)
$k_\omega$	constante de velocidade	(V.s/rad)
$k_t$	constante de torque	(N.m/A)
$T_s$	período de amostragem	(s)
$K_p$	ganho proporcional	(-)
$K_i$	ganho integral	(-)
$K_d$	ganho derivativo	(-)
$\xi$	coeficiente de amortecimento	(-)
$\omega_n$	frequência natural	(rad/s)
$t_r$	tempo de subida	(s)
$t_s$	tempo de assentamento	(s)

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>MÁQUINA DE CORRENTE CONTÍNUA.....</b>	<b>18</b>
<b>2.1</b>	<b>PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO .....</b>	<b>19</b>
<b>2.2</b>	<b>ASPECTOS CONSTRUTIVOS DA MÁQUINA CC .....</b>	<b>20</b>
<b>2.3</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA DO MOTOR CC .....</b>	<b>21</b>
2.3.1	Dinâmica da máquina CC .....	21
2.3.2	Conjugado mecânico .....	24
2.3.3	Função de transferência para o motor CC.....	25
<b>2.4</b>	<b>CARACTERÍSTICAS DE FUNCIONAMENTO E TIPOS DE LIGAÇÃO DO</b>	
<b>MOTOR CC</b>	<b>.....</b>	<b>27</b>
<b>2.5</b>	<b>DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DA MÁQUINA.....</b>	<b>29</b>
2.5.1	INDUTÂNCIA DE ARMADURA DO MOTOR ( $L_a$ ).....	29
2.5.2	RESISTÊNCIA DE ARMADURA DO MOTOR ( $R_a$ ) .....	29
2.5.3	DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES $k_t$ E $k_\omega$ . ....	30
2.5.4	MOMENTO DE INÉRCIA (J) DO MOTOR. ....	30
2.5.5	COEFICIENTE DE ATRITO VISCOSO (B).....	33
<b>3</b>	<b>CONVERSOR CC-CC .....</b>	<b>35</b>
<b>3.1</b>	<b>Modulação por largura de pulso.....</b>	<b>36</b>
<b>3.2</b>	<b>Conversor Buck.....</b>	<b>37</b>
<b>4</b>	<b>CONTROLE DIGITAL.....</b>	<b>39</b>
<b>4.1</b>	<b>TRANSFORMADA Z.....</b>	<b>40</b>
<b>4.2</b>	<b>CONTROLADORES PID e PI .....</b>	<b>41</b>
<b>4.3</b>	<b>MÉTODO DO LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES .....</b>	<b>42</b>
4.3.1	Projeto dos controladores digitais PI e PID via LGR.....	43
<b>4.4</b>	<b>CONTROLE DIGITAL NA ESTRUTURA RST .....</b>	<b>45</b>
4.4.1	Projeto de controle digital na estrutura RST .....	47
<b>4.5</b>	<b>SELEÇÃO PERÍODO DE AMOSTRAGEM.....</b>	<b>51</b>
<b>5</b>	<b>SIMULAÇÕES E RESULTADOS .....</b>	<b>53</b>
<b>5.1</b>	<b>INDUTÂNCIA DE ARMADURA <math>L_a</math>.....</b>	<b>53</b>
<b>5.2</b>	<b>RESISTÊNCIA DE ARMADURA .....</b>	<b>54</b>
<b>5.3</b>	<b>AS CONSTANTES <math>k_t</math> e <math>k_\omega</math>. ....</b>	<b>55</b>
<b>5.4</b>	<b>MOMENTO DE INÉRCIA (J) .....</b>	<b>55</b>

5.5	COEFICIENTE DE ATRITO VISCOSO ( $B$ ) .....	58
5.6	Simulação em Malha Aberta.....	59
5.7	Seleção do Período de Amostragem.....	60
5.8	Projeto do controlador PI digital.....	62
5.9	Projeto do controlador PID digital.....	69
5.10	Projeto de controle PID na estrutura RST .....	74
6	SIMULAÇÃO DA PLANTA REAL UTILIZANDO O <i>SIMPOWERSYSTEMS</i> . ..	77
6.1	Simulação em Malha Aberta.....	77
6.2	Controle PI no <i>SimPowerSwstems</i> .....	79
6.3	Controle PID no <i>SimPowerSystems</i> .....	83
6.4	Controle RST no <i>SimPowerSistems</i> .....	86
7	CONCLUSÃO .....	90
8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	92

## 1 INTRODUÇÃO

O controle de velocidade em máquinas de corrente contínua é comumente realizado isso porque esse tipo de máquina é bastante versátil, e devido à facilidade com que podem ser controladas são frequentemente usadas em aplicações que requerem uma ampla faixa de velocidades do motor ou o controle preciso da velocidade na saída do motor.

Ao longo do trabalho será apresentado o estudo de controladores digitais para velocidade no eixo do motor, o controle será realizado através da tensão aplicada nos terminais de armadura do motor. Se a corrente na armadura e o fluxo polar forem mantidos constantes e a tensão na armadura for variada, a velocidade do motor varia na mesma proporção que a tensão aplicada (Kosov, 1982), desta forma pode-se realizar o controle da velocidade em função da tensão na armadura. A função de transferência é obtida a partir das equações dinâmicas dos conjugados elétrico e mecânico do motor CC. É utilizado o motor com excitação independente (motor *shunt*) e com excitação de campo constante.

Todos os controladores propostos são digitais. A função de transferência que apresenta a dinâmica do motor CC é discretizada e os controladores projetados na forma digital. Inicialmente é adotada a estratégia de um controlador PI a fim de melhorar o desempenho do sistema, em seguida é proposto um controlador PID. O método utilizado para controle da velocidade no motor em ambos os controladores é através do Lugar Geométrico das Raízes, que mostra que as raízes de malha fechada estão relacionadas à estabilidade e desempenho do sistema. Esta técnica foi escolhida por ser uma ferramenta poderosa para análise e projeto de sistemas de controle.

Outra proposta é o controlador na estrutura RST, que introduz ao sistema dois graus de liberdade tornando possível analisar de forma separada o sinal de referência e a variável a ser controlada, permitindo analisar ainda a robustez e a dinâmica do sistema conforme as especificações de projeto desejadas.

Com a evolução tecnológica e o aumento do desempenho e da qualidade dos microcomputadores a utilização de controladores digitais tem aumentado consideravelmente nas últimas décadas principalmente nas áreas industriais. Apesar de apresentarem uma velocidade de operação mais lenta que os controladores analógicos, os controladores digitais são mais precisos, também mais flexíveis. Uma vez que são implementados em software, é



possível fazer alterações sem que seja necessária a substituição completa do controlador, possibilitando ainda estruturas de controle mais complexas.

A ferramenta computacional MATLAB é utilizada para simular os controladores projetados e consiste numa importante ferramenta de simulação que permite obter a resposta do sistema com a introdução dos controladores, permitindo assim analisar o comportamento da velocidade do motor para cada controlador estudado.

## 1.1 OBJETIVO GERAL DO TRABALHO

Este trabalho tem por objetivo geral a identificação do motor CC, existente no Laboratório da WEG localizado na Universidade Federal do Pará – Campus de Tucuruí, através de medições e ensaios realizados no mesmo. Uma vez obtido o modelo dinâmico para o motor CC, serão realizadas simulações utilizando o *MATLAB* a fim de constatar se o modelo identificado representa adequadamente o motor real.

É proposto então o projeto de controladores digitais PI, PID e RST para atuarem como reguladores de velocidade no motor. Para o projeto dos controladores PI e PID é utilizada a técnica do Lugar Geométrico das Raízes (LGR), e o controlador RST é projetado para emular um controle PID. Uma vez que os controladores não serão implementados na prática, utiliza-se o *SimPowerSystems* do *MATLAB* para realizar a simulação do sistema de controle de velocidade do motor, pois este programa permite a realização de simulações com resultados muito próximos de uma implementação prática.

## 2 MÁQUINA DE CORRENTE CONTÍNUA.

A máquina de corrente contínua consiste em uma máquina elétrica girante capaz de converter energia mecânica em energia elétrica funcionando como gerador, ou ainda converter energia elétrica em energia mecânica funcionando como motor. Apesar de existirem muitos motores que podem em muitos casos, substituir os motores CC este tipo de máquina é ainda bastante utilizada na indústria quando se necessita controle de velocidade com necessidade crítica de torque, uma vez que é capaz de manter um torque considerável, mesmo variando a velocidade.

A figura 2.1 mostra a máquina de corrente contínua que será utilizada no desenvolvimento do trabalho.



**Figura 2.1 - Máquina de corrente contínua**

A tabela 2.1 mostra os dados de placa da máquina de corrente contínua (figura 2.1).

<b>Tabela 2.1 - Dados de placa da máquina CC</b>	
<b>Dados</b>	<b>Máquina CC</b>
Potência	1,25 CV
Velocidade angular	1.800 rpm
Tensão nominal	180 V
Corrente nominal	6 A

## 2.1 PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO

Assim como todas as máquinas elétricas rotativas o funcionamento da máquina CC baseia-se no fenômeno da indução eletromagnética, no qual o movimento relativo entre o campo magnético e um condutor de eletricidade gera uma “tensão induzida” nos seus terminais, pois não há contato físico efetivo entre o campo magnético e o condutor. Esta tensão é também chamada de *fem* (força eletromotriz) e pode ser equacionada da seguinte forma:

$$e = Blv \quad (2.1)$$

Onde:  $e \Rightarrow$  *tensão induzida*  
 $B \Rightarrow$  *densidade de fluxo magnético*  
 $v \Rightarrow$  *velocidade relativa entre o condutor e o campo*  
 $l \Rightarrow$  *comprimento do condutor de eletricidade*

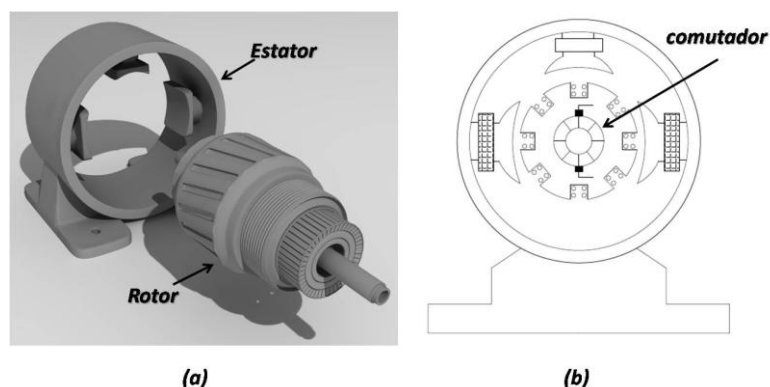
O enrolamento de campo está no estator da máquina e é excitado por corrente contínua. O enrolamento de armadura está no rotor, que é a parte girante da máquina, e a corrente é conduzida até estes enrolamentos através das escovas de carvão. A *fem* induzida surge no enrolamento de armadura. Este enrolamento é formado por um conjunto de espiras montado sobre o rotor. O rotor é normalmente girado a uma velocidade constante por meio de uma fonte de potência ligada ao eixo da máquina (Fitzgerald, 1975).

Ao circular corrente através dos condutores de armadura e estando estes submetidos a um campo magnético, cada condutor sofre ação de uma força perpendicular ao campo e à direção da corrente que tendem a girar o rotor. Essa força  $F$  está relacionada com o comprimento  $l$  do condutor, com a densidade de fluxo magnético  $B$  e com a corrente  $i$  conforme a equação 2.2 abaixo:

$$F = Bli \quad (2.2)$$

## 2.2 ASPECTOS CONSTRUTIVOS DA MÁQUINA CC

As principais partes que constituem a máquina CC são: estator, rotor e o comutador de escovas, como mostra a figura 2.2.



**Figura 2.2 - Principais partes constituintes do motor CC. (a) Rotor e estator (b) Comutador**

### *Estator*

O estator é a parte fixa da máquina CC. É composto pela carcaça que serve como suporte para as demais partes que constituem a máquina. É também onde está localizado o conjunto de pólos, podendo conter um ou mais enrolamentos por pólo, os quais estão prontos para receber corrente contínua e produzir o campo magnético fixo. Os enrolamentos no estator são também chamados de enrolamentos de campo. (Kosow, 1982)

### *Rotor*

O rotor é a parte girante da máquina e está centrado no interior do estator. Nele estão contidos os enrolamentos de armadura onde surge a tensão induzida devido ao giro da armadura. Os enrolamentos são constituídos de bobinas isoladas entre si cujo contato elétrico é fornecido pelo comutador.

### *Comutador*

O comutador possui segmentos de cobre isolados entre si e do eixo, estão eletricamente conectados aos enrolamentos da armadura por meio das escovas. Sua principal função é transformar a tensão induzida alternada em tensão contínua.

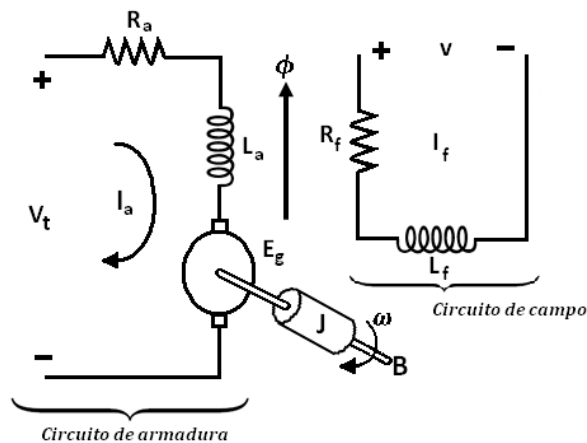
## 2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA DO MOTOR CC

Pra que seja possível desenvolver um controle do motor CC é necessário à obtenção do seu modelo matemático e consequentemente a função de transferência que descreve a dinâmica da máquina.

Para o projeto de controle de velocidade do motor CC, é analisado o seu comportamento dinâmico (sistema eletromecânico) a seguir. (Del Toro, 1994)

### 2.3.1 Dinâmica da máquina CC

A figura 2.3 mostra o circuito esquemático do motor CC :



**Figura 2.3 - Circuito de um motor CC com excitação independente**

O circuito de armadura é composto de uma resistência  $R_a$  constante em série com uma indutância  $L_a$  representando os enrolamentos de armadura, e uma força contra eletromotriz (fcem)  $E_g$  gerada na armadura, que será proporcional a velocidade do rotor da máquina.

O circuito de campo é representado por uma resistência  $R_f$  e uma indutância  $L_f$  constantes, o campo magnético é gerado por uma bobina de corrente contínua e representado por um fluxo magnético  $\phi$ .

A velocidade angular no eixo da armadura é representada por  $\omega$  e expressa em rad/s, J representa o momento de inércia do rotor da máquina, B é o coeficiente de atrito viscoso e representa o atrito viscoso do motor e da carga em relação ao eixo do motor.

Uma tensão  $V_t$  é aplicada aos terminais de armadura fazendo o motor girar. Ao girar o eixo da máquina, surge na armadura uma tensão (fcm)  $E_g$  devido às bobinas de armadura cortarem as linhas de fluxo. Quando isso ocorre a fcm  $E_g$  se opõe a tensão  $V_t$  produzindo a corrente necessária para acelerar o motor.

Aplicando a *Lei das Tensões de Kirchhoff* para o circuito de armadura tem-se a seguinte equação.

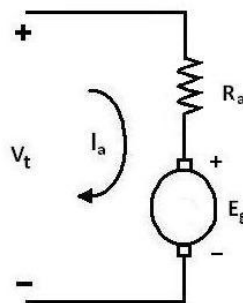
$$V_t = R_a i_a + L \frac{di_a}{dt} + E_g \quad (2.3)$$

Pela *Lei de Faraday* da indução eletromagnética, sabe-se que o valor da *fem* induzida na armadura é proporcional ao fluxo magnético  $\phi$  e a velocidade de rotação  $\omega_m$ , ou seja:

$$E_g = k_a \omega_m \phi \quad (2.4)$$

Onde  $k_a$  é uma constante de proporcionalidade adimensional.

O circuito de armadura de um motor CC pode ser representado em regime permanente esquematicamente conforme a figura 2.4.



**Figura 2.4 - Circuito equivalente ao circuito de armadura do motor CC, em regime permanente**

A equação para o circuito da figura 2.4 será:

$$V_t = R_a i_a + E_g \quad (2.5)$$

Substituindo 2.4 em 2.5, e isolando a variável da velocidade obtém-se:

$$\omega_m = \frac{V_t - i_a R_a}{k_a \phi} \quad (2.6)$$

Dessa forma pode-se observar que é possível controlar a velocidade do motor CC manipulando três variáveis, a saber: a tensão  $V_t$  aplicada no circuito de armadura, a resistência  $R_a$  ou o fluxo magnético  $\phi$ . Estes são os três métodos mais comuns de controle de velocidade.

O método de controle aplicado ao motor CC em estudo baseia-se no ajuste da tensão na armadura, uma vez que permite ajustes relativamente rápidos, limitados pela dinâmica eletromecânica do sistema.

Se não houver saturação magnética (circuito magnético linear) o fluxo será:

$$\phi = k_f i_f \quad (2.7)$$

Onde:  $i_f \Rightarrow$  corrente de campo

$k_f \Rightarrow$  constante de proporcionalidade

Assim a equação 2.4 pode ser reescrita:

$$E_g = k i_f \omega_m \quad (2.8)$$

Com  $k = k_f k_a$ .

Considerando a corrente de campo constante a equação 2.8 pode ser escrita da seguinte forma:

$$E_g = k_\omega \omega_m \quad (2.9)$$

Em que  $k_\omega$  é a constante de velocidade.

Desta forma, tem-se a equação fundamental da velocidade para o motor CC (Kosov, 1982):

$$\omega_m = \frac{V_t - i_a R_a}{k_\omega} \quad (2.10)$$

Para o circuito de campo tem-se a seguinte equação:

$$v = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} \quad (2.11)$$

### 2.3.2 Conjugado mecânico

A potência mecânica desenvolvida no eixo do rotor é produto do torque eletromagnético  $T_e$  e da velocidade angular.

$$P_e = T_e \omega_m \quad (2.12)$$

Onde a potência elétrica na armadura é  $P_e = E_g i_a$ .

Substituindo 2.4 em 2.12, obtem-se a equação para o conjugado eletromagnético.

$$T_e = k_a \phi i_a \quad (2.13)$$

Considerando o circuito magnético linear conforme a equação 2.7, o torque  $T_e$  pode ser escrito:

$$T_e = k_a k_f i_a i_f \quad (2.14)$$

Supondo a corrente de campo como sendo constante, o fluxo de campo torna-se constante e  $T_e$  resulta:

$$T_e = k_t i_a \quad (2.15)$$



Onde  $k_t$  é a constante de torque do motor.

Aplicando a *Primeira Lei de Newton* (equação 2.16) para o torque resultante no eixo do rotor  $T_r$ , considerando " $m$ " como sendo o momento de inércia do rotor ( $J$ ) e a aceleração " $a$ " a taxa de variação da velocidade angular em relação ao tempo, tem-se (equação 2.17):

$$(F = m \times a) \quad (2.16)$$

$$T_r = J \frac{d\omega_m}{dt} \quad (2.17)$$

O torque eletromagnético no eixo do motor deve ser igual à soma de todos os torques em oposição. Dessa forma  $T_e$  será:

$$T_e = T_r + T_L + B\omega_m \quad (2.18)$$

Onde  $T_L \Rightarrow$  torque exigido pela carga  
 $B \Rightarrow$  coeficiente de atrito viscoso

Substituindo 2.17 em 2.18 e rearranjando os termos, resulta na equação mecânica do motor:

$$T_e - T_L = J \frac{d\omega_m}{dt} + B\omega_m \quad (2.19)$$

### 2.3.3 Função de transferência para o motor CC.

Para determinar o comportamento da velocidade do motor em relação à variação de tensão aplicada aos terminais da armadura, define-se a função de transferência que relaciona essas duas grandezas.

Inicialmente, aplica-se a transformada de *Laplace* na equação 2.19:

$$T_e(s) - T_L(s) = Js\omega_m(s) + B\omega_m(s) \quad (2.20)$$

Assim, substituindo  $T_e$  da equação 2.15 na equação 2.20 e rearranjando os termos, a equação pode ser escrita:

$$\frac{\omega_m}{k_t I_a(s) - T_L(s)} = \frac{1}{sJ + B} \quad (2.21)$$

A equação 2.21 pode ser representada conforme o diagrama de blocos da figura 2.5.

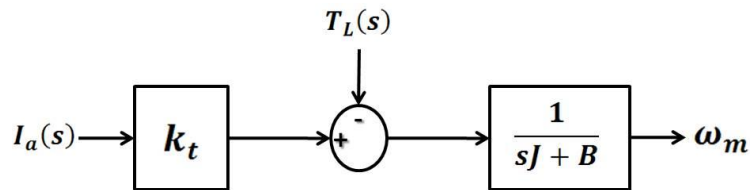


Figura 2.5 - Diagrama de blocos do motor CC relacionando a velocidade angular com a corrente

Para obter a velocidade angular em função da tensão aplicada é preciso relacionar essas duas grandezas com a corrente de armadura mostrada no diagrama de blocos da figura 2.5.

Para relacionar a corrente de armadura com a velocidade e a tensão aplicada, substitui-se a equação 2.9 na equação 2.3, reescrevendo assim:

$$V_t - k_\omega \omega_m = R_a i_a + L \frac{di_a}{dt} \quad (2.22)$$

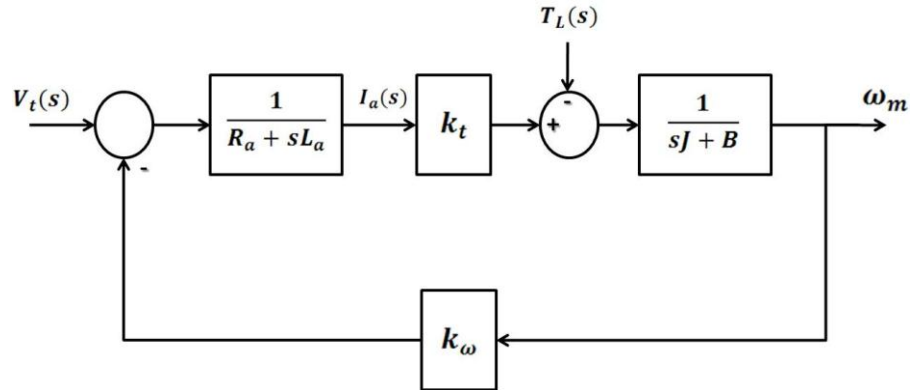
Calculando-se a transformada de *Laplace* para a equação 2.22, considerando as condições iniciais nulas, tem-se:

$$V_t(s) - k_\omega \omega_m(s) = I_a(s)(R_a + sL_a) \quad (2.23)$$

Isolando a corrente  $I_a(s)$  resulta a equação que determina a corrente em função da diferença entre a tensão aplicada  $V_t$  e a *fcem* na armadura.

$$I_a(s) = \frac{V_t(s) - k_\omega \omega_m(s)}{R_a + sL_a} \quad (2.24)$$

O diagrama de blocos completo que relacionam a velocidade do rotor em função da tensão aplicada é mostrado na figura 2.6.



**Figura 2.6 - Diagrama de blocos completo relacionando a tensão aplicada na armadura com a velocidade angular**

Considerando o diagrama de blocos da figura 2.6, e assumindo que não haja carga no motor ( $T_L(s) = 0$ ), a função de transferência é definida como:

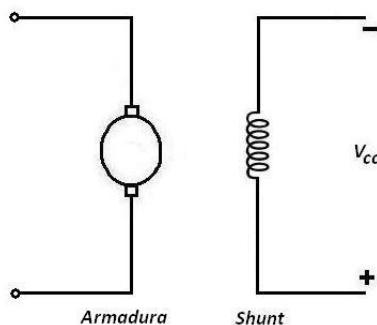
$$\frac{\omega_m(s)}{V_t(s)} = \frac{k_t}{(sL_a + R_a)(sJ + B) + k_t k_\omega} \quad (2.25)$$

$$\frac{\omega_m(s)}{V_t(s)} = \frac{\frac{k_t}{JL_a}}{s^2 + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{B}{J}\right)s + \left(\frac{R_a B}{JL_a} + \frac{k_t k_\omega}{JL_a}\right)} \quad (2.26)$$

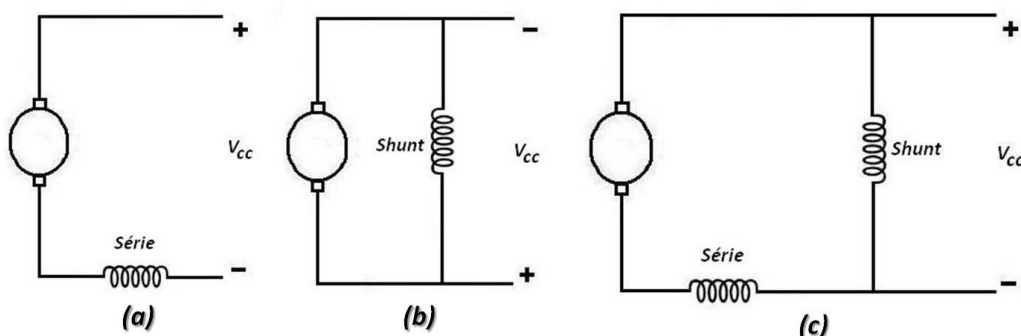
## 2.4 CARACTERÍSTICAS DE FUNCIONAMENTO E TIPOS DE LIGAÇÃO DO MOTOR CC.

O comportamento dos motores CC pode ser representado através da variação do conjugado pela velocidade no seu eixo, ou ainda a relação entre corrente e tensão, ou ainda a relação entre o conjugado motor e a corrente absorvida, entre outras relações. Sabe-se então que os motores CC apresentam comportamentos distintos para cada forma de excitação nos enrolamentos de campo.

Estes enrolamentos podem ser excitados de forma independente, como pode ser visto na figura 2.7, através de uma fonte CC, ou auto-excitados onde o enrolamento de campo está ligado em série, ou em paralelo, com o enrolamento de armadura conforme mostra a figura 2.8.



**Figura 2.7 - Ligação do motor CC com excitação independente**



**Figura 2.8 - Ligação do circuito de campo para o motor CC. (a) Motor Série (b) Motor Paralelo - Shunt (c) Motor Série-Paralelo - Compound**

A figura 2.7 mostra o motor de corrente contínua com excitação independente onde a fonte CC produz excitação no enrolamento *shunt*. Este motor é normalmente utilizado quando há necessidade de uma rápida resposta e com certa precisão a um controle externo de aumento ou redução da tensão de armadura, com a máquina sob carga variável.

O motor série é excelente em aplicações onde há uma alta carga de inércia. O motor com este tipo de ligação tem um excelente torque de partida, porém a regulação de velocidade é ruim, pois todo aumento de carga resulta num aumento de corrente e, por consequência, a diminuição da velocidade. Ademais o motor série deve sempre partir com carga, pois pode alcançar velocidades tão altas que podem destruir o motor.

No motor paralelo ou *shunt* o enrolamento *shunt* está ligado em paralelo com a armadura e ambos estão ligados à alimentação. Este tipo de ligação possui um controle de

velocidade mais simples, pois com o aumento da carga tem-se redução da tensão na armadura e, por consequência, a diminuição da corrente o que ajuda a manter o torque.

Combinando o melhor das ligações série e *shunt*, os motores compound são bastante utilizados onde há necessidade de velocidade constante com variações extremas de carga.

## 2.5 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DA MÁQUINA

Nesta seção serão descritos os procedimentos para determinação dos parâmetros  $R_a$ ,  $L_a$ ,  $k_t$ ,  $k_\omega$ ,  $J$  e  $B$  da máquina CC mostrada na figura 2.1. Os parâmetros são obtidos com a finalidade de determinar a função de transferência descrita pela equação 2.25.

### 2.5.1 INDUTÂNCIA DE ARMADURA DO MOTOR ( $L_a$ )

Para determinar o valor da indutância de armadura ( $L_a$ ) no motor CC em função do deslocamento do rotor da máquina, foi conectado um indutímetro nos terminais de armadura da máquina.

Verificou-se o valor da indutância para várias posições do rotor. Em seguida foi obtida a média aritmética dos valores encontrados, determinando o valor da indutância  $L_a$ .

### 2.5.2 RESISTÊNCIA DE ARMADURA DO MOTOR ( $R_a$ )

Para determinar a resistência de armadura  $R_a$  foi feito um procedimento semelhante ao realizado para a determinação de  $L_a$ .

Nos terminais de armadura do motor foi conectado um multímetro, na função ohmímetro, e observado o valor da resistência para várias posições do rotor, a fim de medir a resistência na armadura.

### 2.5.3 DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES $k_t$ E $k_\omega$ .

Os parâmetros  $k_t$  e  $k_\omega$  quando expressos em unidades do sistema internacional possuem o mesmo valor, dessa forma basta determinar uma das constantes (Mohan, Underland, Robbins, 2003)

Assim, para determinar o parâmetro  $k_\omega$  foi realizado um ensaio na máquina CC a vazio, o circuito montado é mostrado na figura 2.9, onde o motor é ligado na configuração *shunt* em que os enrolamentos de armadura são ligados em paralelo com os enrolamentos de campo e ambos conectados a fonte de energia CC.

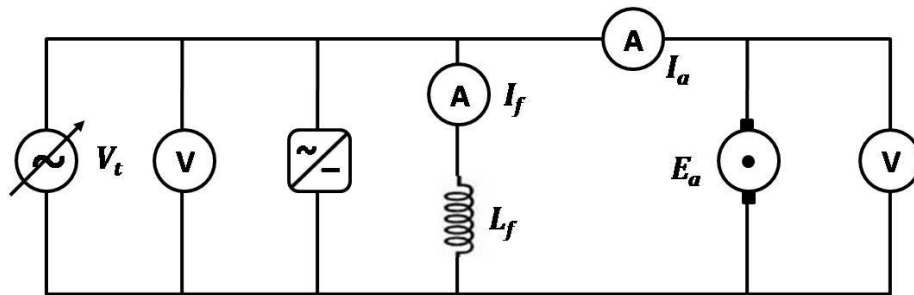


Figura 2.9 - Circuito montado para determinação de  $k_\omega$

A constante de velocidade  $k_\omega$  é obtida da equação 2.10 por:

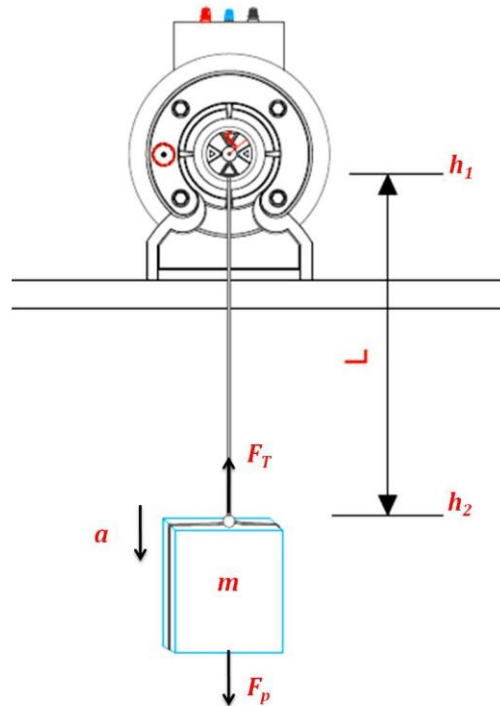
$$k_\omega = \frac{V_t - R_a i_a}{\omega_m} \quad (2.27)$$

Em que  $V_t$  é a tensão aplicada aos terminais da máquina, e os parâmetros  $i_a$  e  $\omega_m$  são obtidos através dos instrumentos de medição.

### 2.5.4 MOMENTO DE INÉRCIA (J) DO MOTOR.

A determinação deste parâmetro foi realizada a partir de um procedimento experimental, conforme mostra a figura 2.10, onde um corpo é amarrado por meio de um fio

que é enrolado no eixo da máquina de modo que o peso vença a inércia do motor fazendo o eixo girar. Salienta-se que neste procedimento o motor encontra-se desligado, a aceleração é considerada constante e o fio inextensível e de massa desprezível.



**Figura 2.10 - Procedimento experimental para determinação de J**

Aplicando as leis básicas da dinâmica e da cinemática conforme a figura 2.10, e considerando que o corpo desloca-se na vertical tem-se as seguintes equações:

$$h_2 = h_1 + v_1 t + \frac{at^2}{2} \quad (2.28)$$

$$\sum F = ma \quad (2.29)$$

$$\sum M = J\alpha_c \quad (2.30)$$

A aceleração “ $a$ ” da equação 2.28, pode ser determinada admitindo-se que o corpo de massa “ $m$ ” desloca-se do ponto  $h_1$  até o ponto  $h_2$ , com velocidade inicial nula e o tempo “ $t$ ” gasto no percurso seja conhecido.

$$a = \frac{2\Delta h}{t^2} \quad (2.31)$$

Aplicando-se a equação 2.29 para a massa “ $m$ ”, sabendo-se que a força peso sobre a massa é  $F_p = mg$  determina-se a força de tração do fio  $F_T$  assim:

$$\begin{aligned} F_p - F_T &= ma \\ F_T &= m(g - a) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Onde:  $g \Rightarrow$  *aceleração da gravidade* ( $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ )  
 $a \Rightarrow$  *aceleração vertical da massa*

Aplicando a equação 2.30 ao rotor da máquina tem-se:

$$rF_T = J\alpha_c + T_a \quad (2.33)$$

Considerando que o torque de atrito  $T_a$  seja compensado pela massa auxiliar que está amarrada verticalmente ao eixo da máquina de modo a deixar o eixo na iminência de movimento tem-se a equação:

$$rF_T = J\alpha_c \quad (2.34)$$

Onde:  $r \Rightarrow$  *raio do eixo do motor*  
 $\alpha_c \Rightarrow$  *aceleração angular do rotor*

Sabendo-se que  $\alpha_c = a/r$  e substituindo a equação 2.32 na equação 2.33 obtém-se:

$$\begin{aligned} m(g - a)r &= \frac{Ja}{r} \\ J &= mr^2 \left( \frac{g}{a} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Substituindo 2.31 em 2.35, tem-se a equação para o momento de inércia do motor:



$$J = mr^2 \left( \frac{gt^2}{2\Delta h} - 1 \right) \quad (2.36)$$

O tempo  $t$  da equação 2.36, corresponde ao tempo gasto para que o fio amarrado ao eixo do motor desenrole,  $\Delta h$  é o comprimento  $L$  do fio e é obtido por medição assim como  $r$  e  $m$ . De posse desses parâmetros basta calcular o momento de inércia  $J$  pela equação 2.36.

#### 2.5.5 COEFICIENTE DE ATRITO VISCOSO (B)

O último parâmetro a ser determinado é o coeficiente de atrito viscoso “B” (equação 2.37).

$$B = \frac{J}{\tau_m} \quad (2.37)$$

Onde  $\tau_m$  corresponde à constante de tempo mecânica (da carga), que descreve o tempo gasto para que o motor perca velocidade quando seu circuito de armadura é aberto, e  $J$  é o momento de inércia que já foi anteriormente obtido na seção 2.5.4. Assim sendo basta encontrar a constante de tempo  $\tau_m$  para obter o valor de  $B$ .

Outra forma de obtenção da constante  $B$  é dada por:

$$B = \frac{T_B}{\omega_m} \quad (2.38)$$

Onde  $T_B$  é o torque devido ao atrito viscoso, e  $\omega_m$  é a velocidade angular do motor.

Igualando as equações 2.37 e 2.38 tem-se:

$$\tau_m = \frac{J}{T_B} \omega_m \quad (2.39)$$

Para o motor operando a vazio (sem carga) não haverá variação na velocidade de rotação do motor, portanto o torque devido o atrito viscoso será igual ao torque magnético do motor ( $T_m$ ) que é obtido através da equação 2.40.

$$T_m = \frac{E_g \times I_a}{\omega_m} \quad (2.40)$$

$$E_g = V_T - R_a \times I_a \quad (2.41)$$

Para a obtenção dos parâmetros  $V_T$  (tensão de armadura) e  $i_a$ , foi realizado o ensaio a vazio no motor. O circuito deste ensaio é mostrado na figura 2.9, utilizado na determinação das constantes  $k_t$  e  $k_\omega$ .

Com os valores obtidos nos dispositivos de medição é possível calcular o valor de B através das equações 2.37 ou 2.38.

### 3 CONVERSOR CC-CC

Na prática, a implementação de um sistema de controle em malha fechada é realizado conforme a figura 3.1, onde se faz necessário um elemento atuador que fornece a tensão necessária para que o motor gire de acordo com a velocidade de referência.

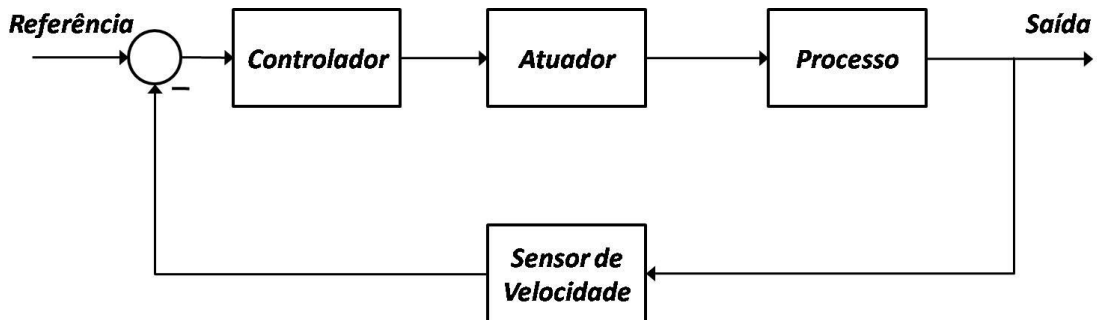


Figura 3.1 - Diagrama de blocos de um sistema de controle

O conversor CC-CC é usado para obter uma tensão CC variável a partir de uma fonte de tensão CC constante. Ou seja, converte um sinal de corrente contínua de um determinado nível de tensão para outro nível de tensão.

O princípio básico dos conversores CC é o de uma chave ligada em série com uma fonte de tensão CC e uma carga, conforme a figura 3.2 (a), onde a chave  $S$  opera de tal modo que ela esteja ligada (fechada) por um tempo  $t_{on}$  e desligada (aberta) durante um tempo  $t_{off}$ , a forma de onda na saída será um trem de pulsos retangulares de duração  $t_{on}$  mostrado na figura 3.2 (b). A tensão na carga será então o valor da tensão média CC em um ciclo de trabalho  $T$ .

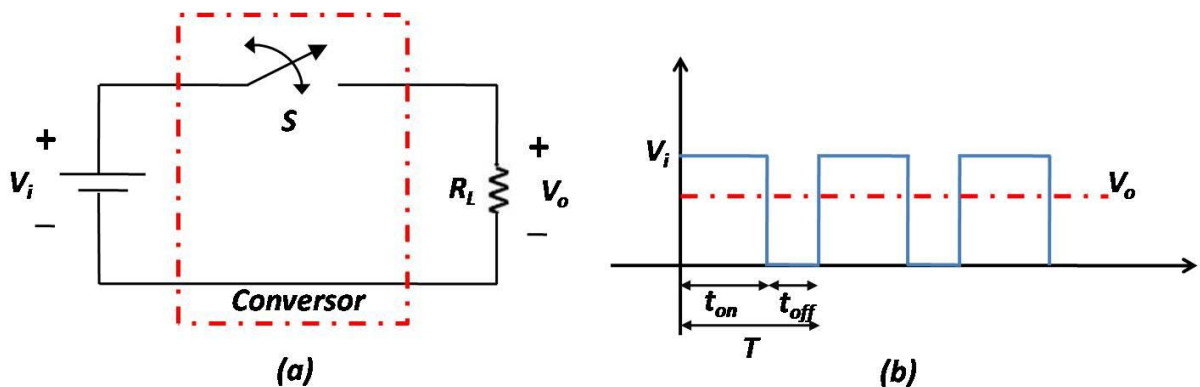


Figura 3.2 - (a) Conversor CC básico (b) Forma de onda de  $V_o$  para o conversor CC

### 3.1 Modulação por largura de pulso

A tensão média de saída ( $V_o$ ) pode ser variada através da modulação por largura de pulso ou *PWM* (do inglês *pulse-width modulation*). Para o controle de velocidade do motor CC sabe-se que uma variação na tensão de armadura do motor acarreta numa variação na velocidade do mesmo. Através da estratégia *PWM* é possível obter o mesmo efeito através da variação do valor da tensão média  $V_o$ , atuando-se na variação da largura de pulso  $t_{on}$  como pode ser observado na figura 3.2(b).

A frequência de chaveamento do conversor *PWM* é dada por  $f_{PWM}$  e em geral existe uma certa liberdade na escolha da mesma. Porém algumas considerações devem ser levadas em conta (Oliveira, Aguiar, Vargas, 2005)

- A frequência  $f_{PWM}$  deve ser alta suficiente de forma que nesta frequência a indutância  $L_a$  do motor resulte em uma grande impedância, assim:

$$2\pi f_{PWM} L_a \gg R_a \quad (3.1)$$

- A frequência  $f_{PWM}$  deve ser alta o suficiente de forma que não interfira na dinâmica do sistema, portanto para uma largura de banda  $f_B$  do sistema, deve-se ter:

$$f_{PWM} > 10f_B \quad (3.2)$$

O sinal PWM pode ser gerado a partir da comparação entre dois sinais de tensão, um de baixa frequência (referência) e outro de alta frequência, resultando em um sinal alternado com frequência fixa e largura de pulso variável. A forma de onda utilizada na comparação com o sinal de referência é uma onda dente-de-serra, e o sinal PWM é gerado conforme a figura 3.3:

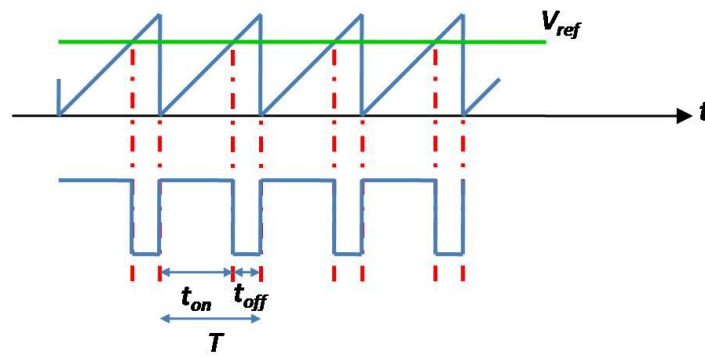


Figura 3.3 - Modulador PWM

A largura do pulso na saída do modulador varia de acordo com a amplitude do sinal de referência em comparação com a onda dente de serra, tendo assim o sinal modulado por largura de pulso – *PWM*.

### 3.2 Conversor Buck

O circuito conversor CC-CC da figura 3.2 não é muito utilizado na prática, pois serve apenas para alimentar cargas resistivas onde não seja necessária uma corrente linear (Ahmed, 2000). Um arranjo mais prático utilizado para o acionamento do motor CC é mostrado na figura 3.4, em que inclui um indutor  $L$ , um capacitor  $C$  e um diodo  $D$ , acrescentado para eliminar as pulsações de corrente. Esse circuito fornece uma corrente CC linear para cargas práticas, como um motor CC.

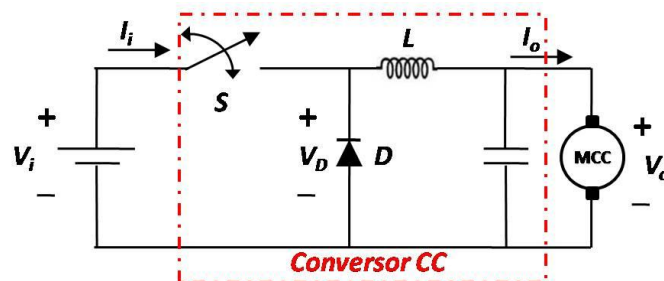


Figura 3.4 - Circuito do conversor CC tipo Buck

A figura 3.4 mostra um circuito básico de um conversor CC-CC tipo Buck. Quando a chave  $S$  estiver fechada o diodo  $D$  não conduzirá, uma vez que está inversamente polarizado, e dessa forma permanecerá todo o tempo em que  $S$  estiver ligada. A energia armazenada em  $L$  é entregue ao capacitor e a carga. Enquanto o valor instantâneo da corrente pelo indutor for maior do que a corrente da carga, a diferença carrega o capacitor. Quando a corrente for menor, o capacitor se descarrega, suprindo a diferença a fim de manter constante a corrente da carga. A chave é mantida ligada durante o tempo  $t_{on}$  e depois passa para o estado desligada durante o intervalo de tempo  $t_{off}$  (figura 3.5 (a)).

No tempo  $t_{off}$  a chave é aberta, a corrente no indutor começa a cair, isso provoca no indutor uma tensão induzida de polaridade oposta, a tensão induzida em  $L$  polariza diretamente o diodo  $D$ , assim o diodo passa a conduzir mantendo a corrente na carga (figura 3.5 (b)).

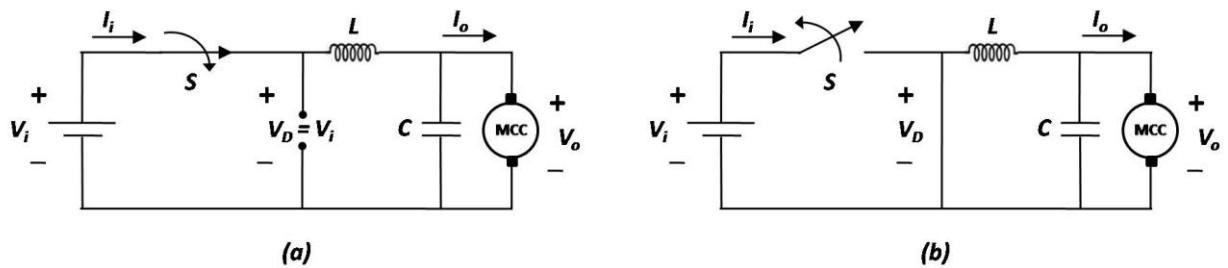


Figura 3.5 - (a) Circuito equivalente para a chave ligada (b) Circuito equivalente para a chave desligada

## 4 CONTROLE DIGITAL

### 3.1. INTRODUÇÃO

Com a evolução tecnológica e o aumento do desempenho e da qualidade dos microcomputadores a utilização de controladores digitais tem aumentado consideravelmente nas últimas décadas principalmente nas áreas industriais. Apesar de apresentarem uma velocidade de operação mais lenta que os controladores analógicos, os controladores digitais são mais precisos, também mais flexíveis. Uma vez que são implementados em *software*, é possível fazer alterações sem que seja necessária a substituição completa do controlador, possibilitando ainda estruturas de controle mais complexas.

Sinais contínuos são sinais bem definidos para todo e qualquer instante de tempo, os sinais digitais, ao contrário, são sinais discretos definidos em determinados instantes de tempo com intervalos de tempo “ $T_s$ ” chamado de intervalo ou período de amostragem. Para o projeto de controladores digitais é muito importante a escolha adequada do período de amostragem, pois um período de amostragem muito longo torna impossível a reconstrução do sinal e um período de amostragem muito pequeno pode sobrecarregar o computador (Äström, Wittenmark, 1997).

Para projeto e análise do sistema de controle de velocidade do motor CC utiliza-se o modelo matemático obtido na seção 2.3.3 que descreve adequadamente a dinâmica da velocidade no motor CC que é o sistema que se deseja controlar, podendo este modelo ser definido através de conhecimentos científicos (nas áreas da física, química, matemática, etc.), ou obter os dados através de experimentos para a identificação do sistema.

De uma forma geral os sistemas a serem controlados são sistemas contínuos no tempo, mas para o projeto do controle de velocidade digital é necessário, além dos elementos usuais da malha de controle (controlador e planta), o acréscimo de outros elementos como mostra a figura 4.1.

Como foi mencionado, e conforme a equação 2.10, o controle da velocidade no motor pode ser realizado através da variação da tensão dos terminais de armadura do motor CC, onde utiliza-se do fato de que como a queda da tensão na resistência de armadura é relativamente pequena, então em regime permanente, uma variação na tensão terminal do

motor em paralelo (*shunt*) será acompanhada por uma variação consequentemente proporcional na velocidade do motor.

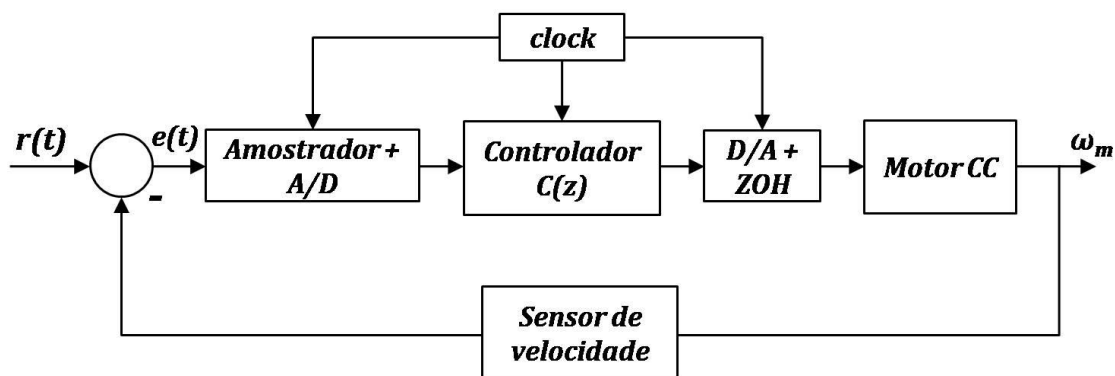


Figura 4.1 – Diagrama de blocos do sistema com controle digital de velocidade

A figura 4.1 mostra a malha de controle para o sistema com a inclusão do controlador digital, em que a velocidade no motor é medida por meio de um sensor de velocidade que é inserido na malha a fim de obter uma amostra da velocidade de rotação do motor e convertê-la em um sinal de tensão proporcional a velocidade medida, esta tensão é comparada com a tensão de referência  $r(t)$  gerando um sinal de erro  $e(t)$ , a tensão de erro é amostrada e convertida para um sinal digital que é processado pelo algoritmo de controle  $C(z)$ , este sinal de controle é então convertido em um sinal analógico através do conversor D/A (digital para analógico) e reconstituído pelo segurador de ordem zero (ZOH).

Dentre as ações de controle conhecidas o controlador PID é a forma de controle mais popular utilizada nas indústrias, este tipo de controlador apresenta as ações proporcional, integral e derivativa, os efeitos dessas ações no sistema serão discutidos na seção 5.9 no projeto do controlador PID.

#### 4.1 TRANSFORMADA Z

Assim como a transformada de *Laplace* é uma ferramenta de extrema importância na análise de sinais contínuos a transformada Z consiste em uma importante ferramenta na



análise de projetos de sistemas discretos. Para obtermos a transformada Z vamos aplicar a transformada de *Laplace* em um sinal discreto.

Dado um sinal discreto  $u^*(t)$  representado por um trem de impulsos,

$$u^*(t) = u_0\delta(t) + u_1\delta(t - T) + u_2\delta(t - 2T) + \dots + u_k\delta(t - kT) \quad (4.1)$$

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k\delta(t - kT) \quad (4.2)$$

A transformada de *Laplace* será

$$\mathcal{L}\{u^*(t)\} = \mathcal{L}\{\sum_{k=0}^{\infty} u_k\delta(t - kT)\} \quad (4.3)$$

$$U^*(s) = u_0 + u_1e^{-sT} + u_2e^{-2sT} + \dots + u_ke^{-ksT} + \dots \quad (4.4)$$

$$U^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(e^{-sT})^k \quad (4.5)$$

Seja a variável  $z$  definida por

$$z = e^{sT} \quad (4.6)$$

Substituindo a equação (4.6) em (4.5) obtemos a expressão no domínio  $z$ , a equação (4.7) é denominada **transformada Z** do sinal  $u^*(t)$

$$\mathcal{Z}(u^*(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k} \quad (4.7)$$

## 4.2 CONTROLADORES PID e PI

A função de transferência típica de um controlador PID no domínio do tempo contínuo é

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (4.8)$$

Onde:  $K_p = \text{ganho proporcional}$   
 $K_i = \text{ganho integral}$   
 $K_d = \text{ganho derivativo}$

O controlador PID é caracterizado por possuir três ações de controle sendo estas: proporcional, integral e derivativa, logo para projetar o controlador basta definir as constantes  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$ . A equação (4.8) é então discretizada para obter a função de transferência do controlador PID em tempo discreto. Os termos integral e derivativo são aproximados utilizando a técnica de discretização pelo método de *backward*:

$$K_i \frac{1}{s} = K_i \left( \frac{T_s}{1-z^{-1}} \right) \quad (4.9)$$

$$K_d s = K_d \left( \frac{1-z^{-1}}{T_s} \right) \quad (4.10)$$

Desta forma a função de transferência pulsada do controlador PID digital será:

$$C(z) = K_p + K_i \left( \frac{T_s}{1-z^{-1}} \right) + K_d \left( \frac{1-z^{-1}}{T_s} \right) \quad (4.11)$$

O controle PI não possui a parte derivativa, logo a função de transferência que descreve esse controlador será:

$$C(z) = K_p + K_i \left( \frac{T_s}{1-z^{-1}} \right) \quad (4.12)$$

#### 4.3 MÉTODO DO LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES

O conceito de pólos e zeros é fundamental para a análise e projeto de sistemas de controle. A localização deles em um sistema de a malha fechada está intimamente ligado ao seu desempenho. Os pólos de malha fechada são as raízes da equação que representa o sistema em malha fechada, conhecida como equação característica.

Uma técnica amplamente utilizada na prática de engenharia de controle para determinar as raízes da equação característica foi desenvolvida por W. R. Evans em 1948, conhecida como Lugar Geométrico das Raízes – LGR. Neste método as raízes da equação característica são representadas graficamente, no plano  $s$ , em função da variação de um parâmetro, geralmente o parâmetro considerado é o ganho de malha fechada variando de zero a infinito. O método do LGR em sistemas discretos é aplicado da mesma forma que nos sistemas contínuos onde as raízes da equação característica podem determinar o desempenho dinâmico do sistema. O método fornece informações gráficas importantes referentes à estabilidade e ao desempenho do sistema. Caso a localização das raízes não sejam satisfatórias é possível ajustar os parâmetros necessários a partir do lugar das raízes (Dorf, 2001). O LGR em sistemas discretos difere do sistema contínuo no que diz respeito à estabilidade, pois nos sistemas digitais o polinômio característico é descrito em  $z$  e é estável se suas raízes estiverem dentro do círculo unitário, enquanto que no plano  $s$  a estabilidade é determinada quando as raízes do polinômio característico estão localizadas no semi-plano esquerdo.

#### 4.3.1 Projeto dos controladores digitais PI e PID via LGR

A função de transferência do sistema discreto com o controlador digital é dada conforme a figura 4.2, onde  $C(z)$  representa o controlador digital e  $G(z)$  a função de transferência discretizada que descreve a dinâmica do motor CC, dada na forma contínua por  $G_p(s)$ .

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{KG(z)C(z)}{1+KG(z)C(z)} \quad (4.13)$$

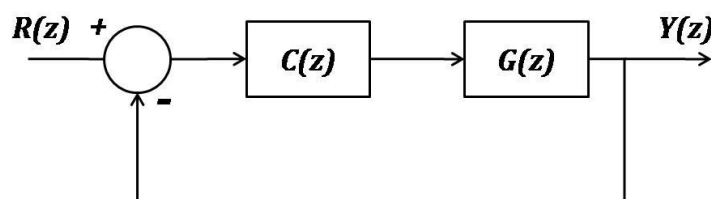


Figura 4.2 - Diagrama de blocos de um sistema amostrado com controlador digital

A equação característica é obtida igualando-se a zero o denominador da função de transferência do sistema:

$$1 + KG(z)C(z) = 0 \quad (4.14)$$

Assim

$$KG(z)C(z) = -1 \quad (4.15)$$

Uma vez que  $z$  é uma variável complexa a equação característica pode ser desmembrada nas condições de módulo e fase, e reescrita na forma polar (Ogata, 1998).

$$|KG(z)C(z)| \angle KG(z)C(z) = -1 + j0 \quad (4.16)$$

Por consequência temos:

*Condição de ângulo (ou de fase)*

$$\angle KG(z)C(z) = 180^\circ \pm k360^\circ \quad (4.17)$$

Com  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

*Condição de módulo*

$$|KG(z)C(z)| = 1 \quad (4.18)$$

Para um sistema de segunda ordem as raízes da equação característica são dadas por:

$$s_1, s_2 = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \quad (4.19)$$

Os pólos são então mapeados do plano  $s$  para o plano  $z$  através da relação

$$z = e^{sT_s} \quad (4.20)$$

Onde  $T_s$  é o período de amostragem.

Os pólos dominantes da equação característica são especificados a partir de um determinado coeficiente de amortecimento  $\xi$  e uma dada frequência natural  $\omega_n$ . De posse dos pólos de malha fechada desejados é possível projetar os controladores PI e PID utilizando as condições de módulo e fase para calcular os parâmetros (ganhos proporcional, integral e derivativo) dos controladores.

#### 4.4 CONTROLE DIGITAL NA ESTRUTURA RST

A estrutura RST é um método de projeto de controladores digitais baseado na técnica de alocação de pólos que permite uma estratégia de posicionamento dos pólos de malha fechada de maneira que é possível analisar a robustez e o desempenho dinâmico do sistema conforme as especificações de projeto.

A sigla RST vem dos termos *Regulation* (regulação), *Sensitivity* (sensibilidade) e *Tracking* (rastreamento) respectivamente, que são polinômios em  $z$  que representam os termos do controlador, onde  $T$  é o termo que processa o sinal de referência,  $S$  processa o sinal de controle e  $R$  é o polinômio que processa o sinal de erro. Pode-se observar na figura 4.3, que esta estrutura de controle permite que tanto o sinal do valor real da variável a ser controlada quanto o sinal de referencia sejam tratados de forma separada. Este método torna possível obter o comportamento desejado de rastreamento (mudança de referência) independentemente do comportamento de regulação desejado (rejeição a perturbações) (Landau, 2006).

A estrutura RST é mostrada no diagrama de blocos figura 4.3:

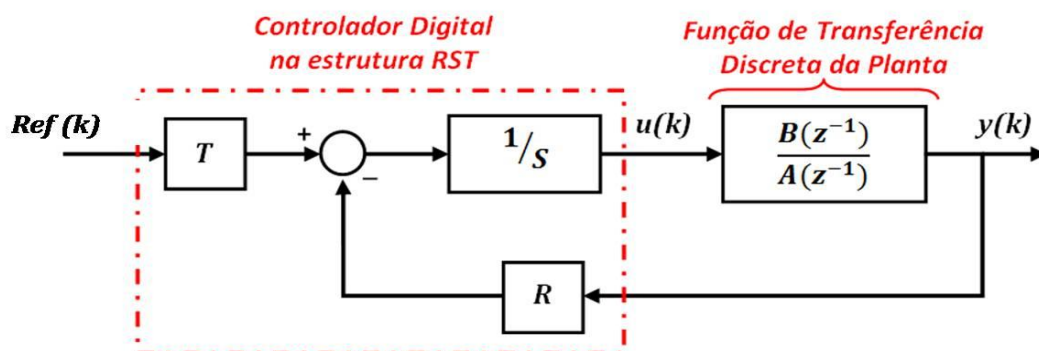


Figura 4.3 - Diagrama de blocos para o sistema com um controlador RST

A função de transferência do motor CC (planta) é representada na figura 3.2 por

$$G_p(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (4.21)$$

Onde B e A são os polinômios do numerador e denominador e apresentam-se na forma polinomial conforme as equações:

$$B(z^{-1}) = b_1 + b_2 z^{-1} + \dots + b_{n_B} z^{-n_B+1} \quad (4.22)$$

$$A(z^{-1}) = a_1 + a_2 z^{-1} + \dots + a_{n_A} z^{-n_A+1} \quad (4.23)$$

Em que  $n_B$  e  $n_A$  são respectivamente os graus dos polinômios B e A.

O controlador possui uma saída,  $u(k)$ , e duas entradas: a tensão de referência representada pelo sinal  $Ref(k)$  e a velocidade medida na saída dada por  $y(k)$ . A equação geral para o controlador pode ser representada por:

$$S(z^{-1})U(z) = T(z^{-1})Ref(z) - R(z^{-1})Y(z) \quad (4.24)$$

Ao dividir a equação 4.24 pelo termo  $S(z^{-1})$  e isolando  $U(z)$  obtém-se a equação 4.25 que representa a forma canônica do controlador RST (Aström, 1997) da figura 4.3:

$$U(z) = \frac{T(z^{-1})Ref(z)}{S(z^{-1})} - \frac{R(z^{-1})Y(z)}{S(z^{-1})} \quad (4.25)$$

A função de transferência em malha fechada entre o sinal de referência  $Ref(z)$  e o sinal de saída  $Y(z)$  considerando estrutura canônica do controlador é:

$$G_{c_{MF}}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})T(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})} \quad (4.26)$$

O denominador da função de transferência que define os pólos de malha fechada é denominado de  $P(z^{-1})$  e é dado por:

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1}) = 1 + p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \dots p_{2n_P}z^{-n_P} \quad (4.27)$$

Com  $n_P$  sendo o grau do polinômio  $P(z^{-1})$ .

Podemos ver que o termo  $T(z^{-1})$  não aparece no denominador da função de transferência  $G_{CMF}$ , isso nos mostra que o controlador introduz mais um grau de liberdade, podendo estabelecer uma distinção entre as especificações de desempenho de monitoramento e regulação. O controlador RST digital oferece dois graus de liberdade que permite a aplicação de diferentes especificações em termos de dinâmica desejada para os problemas de monitoramento e regulação (Landau, 2006).

O objetivo do projeto do controlador é definir os polinômios  $R$ ,  $S$  e  $T$  a fim de obter a função de transferência de malha fechada satisfazendo as especificações de desempenho previamente determinadas.

O polinômio  $T(z^{-1})$  pode ser selecionado como sendo:

$$T(z^{-1}) = R(1) \quad (4.28)$$

Tal escolha irá garantir que não haverá o acréscimo de zeros, do regulador projetado, ao sistema de controle em malha fechada próximo aos pólos dominantes especificados (Landau, 2006).

#### 4.4.1 Projeto de controle digital na estrutura RST

O projeto do controlador consiste na determinação dos polinômios  $R$ ,  $S$  e  $T$  para isso é necessário que se obtenha o modelo discreto da função de transferência do motor CC representado pela equação 2.26.

Conforme será mostrado na seção 5.8 o sistema apresenta erro de regime permanente, então se faz necessária a adição de um integrador, que corresponde a introdução do termo  $(1 - z^{-1})$  ao polinômio  $S(z^{-1})$  para a obtenção de erro de regime igual a zero.

Os polinômios  $R$  e  $S$  são definidos na forma:

$$R(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + \dots + r_{n_R} z^{-n_R} \quad (4.29)$$

$$S(z^{-1}) = 1 + s_1 z^{-1} + \dots + s_{n_S} z^{-n_S} \quad (4.30)$$

Onde  $n_R$  e  $n_S$  são respectivamente os graus dos polinômios R e S.

Com a introdução do integrador o polinômio S é definido na forma:

$$S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^m (1 + s_1 z^{-1} + \dots + s_{n_S} z^{-n_S}) \quad (4.31)$$

Onde  $m$  é o número de integradores que se deseja adicionar.

A fim de resolver o problema e definir os polinômios R, S e T a equação 4.26 é definida na forma matricial (Landau, 2006):

$$Mx = p \quad (4.32)$$

Onde p e x são vetores definidos por:

$$p^T = [1, p_1, \dots, p_i, p_{n_p}, 0, \dots, 0] \quad (4.33)$$

$$x^T = [1, s_1, \dots, s_{n_S}, r_0, \dots, r_{n_R}] \quad (4.34)$$

E M é uma matriz que tem a seguinte forma:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_2 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 & & b_2 & b_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_A} & & & \dots & 1 & b_{n_B} & & & \dots & \vdots \\ 0 & a_{n_A} & & \dots & a_1 & 0 & b_{n_B} & & \dots & b_1 \\ 0 & 0 & a_{n_A} & \dots & a_2 & 0 & 0 & b_{n_B} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n_A} & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n_B} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

O vetor x contém os coeficientes dos polinômios  $S(z^{-1})$  e  $R(z^{-1})$  e é definido após a inversão da matriz M através da fórmula:



$$x = M^{-1}p \quad (4.36)$$

Obtendo o vetor  $x$  a partir da matriz  $M$  é possível determinar os polinômios do controlador, e consistem num método geral que pode ser aplicado para qualquer sistema linear que se apresente na forma mostrada na figura 4.3.

Considerando os polinômios  $A$  e  $B$  dados pelas equações 4.23 e 4.22 e comparando com o numerador e denominador da equação 4.29 é possível determinar os termos necessários para definir a matriz  $M$ , estes termos são os coeficientes dos polinômios  $A$  e  $B$ . Dessa forma para o sistema em questão teremos:

$$G_p(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (4.37)$$

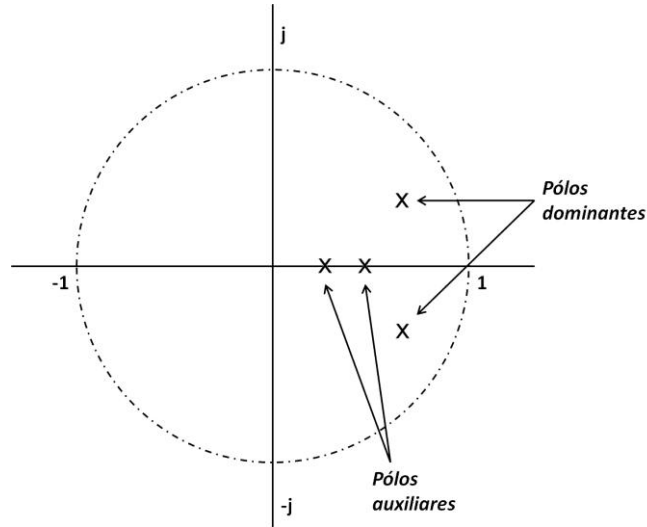
Considerando a equação 4.27 e a equação 4.32 para o sistema em questão, o polinômio característico  $P(z^{-1})$  é dado por (admitindo-se apenas uma parcela integral,  $m=1$ ):

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})(1 - z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1}) \quad (4.38)$$

Resolvendo a equação 4.39, e realizando os devidos produtos polinomiais, o polinômio  $P(z^{-1})$  será (Landau, 2006):

$$P(z^{-1}) = (1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2})(1 + \alpha_1 z^{-1})(1 + \alpha_2 z^{-2}) \quad (4.39)$$

Onde os coeficientes  $p_1$  e  $p_2$  são determinados de acordo com as especificações de desempenho desejadas, a partir de um dado coeficiente de amortecimento  $\xi$  e uma frequência natural  $\omega_n$ . E os coeficientes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são denominados “pólos auxiliares” e são introduzidos ao sistema permitindo melhorar a robustez do controlador. Os “pólos auxiliares”  $-\alpha_1$  e  $-\alpha_2$  estão localizados no eixo real dentro do círculo unitário e correspondendo a uma frequência maior que  $\omega_n/2\pi$  conforme a figura 4.4.



**Figura 4.4 - Localização dos pólos dominantes e pólos auxiliares**

Observa-se que os pólos  $-\alpha_1$  e  $-\alpha_2$  são menores que a parte real dos pólos dominantes por isso são pólos mais rápidos melhorando a robustez do controlador. Na prática o intervalo para seus valores é dado por (Landau, 2006):

$$-0,05 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq -0,5 \quad (4.40)$$

A equação matricial equivalente a este sistema que define os coeficientes do controlador será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 - 1 & 1 & 0 & & \vdots & b_2 & b_1 & 0 & & \\ \vdots & a_1 - 1 & 1 & & 0 & \vdots & b_2 & b_1 & & \\ a_{n_A} - a_{n_A-1} & \vdots & a_1 - 1 & \vdots & 1 & b_{n_B} & \vdots & b_2 & \vdots & \vdots \\ -a_{n_A} & a_{n_A} - a_{n_A-1} & \vdots & & a_1 - 1 & 0 & b_{n_B} & & b_1 & \\ 0 & -a_{n_A} & a_{n_A} - a_{n_A-1} & \vdots & & 0 & b_{n_B} & b_2 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & a_{n_A} - a_{n_A-1} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{n_A} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{n_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n_S} \\ r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{n_R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 + 1 \\ p_2 - a_2 + a_1 \\ \vdots \\ p_{n_P} - a_{n_A} + a_{n_A-1} \\ a_{n_A} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

#### 4.5 SELEÇÃO PERÍODO DE AMOSTRAGEM

Amostrar um sinal contínuo significa representar este mesmo sinal através de um conjunto discreto de pontos, estes pontos têm valores iguais ao sinal contínuo nos determinados instantes de amostragem. O período de amostragem é o intervalo de tempo decorrido entre dois pontos de amostra consecutivos, denominado  $T_s$ .

A escolha adequada de  $T_s$  é muito importante, pois quanto menor o período de amostragem mais próximo o sinal discreto estará do sinal real (contínuo), porém a carga computacional seria maior podendo ocasionar erros nos cálculos. Além disso um período de amostragem influencia diretamente nos pólos de malha fechada do sistema e sendo  $T_s$  muito pequeno poderia tornar o sistema instável.

A frequência de amostragem  $\omega_s$  é dada em rad/s pela equação:

$$\omega_s = 2\pi f_s \quad (4.42)$$

Onde  $f_s$  é a frequência de amostragem em Hz. O período de amostragem corresponde ao inverso da frequência de amostragem ( $T_s = 1/f_s$ ). O critério de Nyquist afirma que: para que o sinal possa ser reconstituído corretamente a frequência de amostragem  $\omega_s$  deve ser maior que duas vezes a largura de banda do sinal ( $\omega_B$ ):

$$\frac{\omega_s}{\omega_B} > 2 \quad (4.43)$$

Na prática, no entanto este limite é considerado demasiadamente lento para uma resposta de tempo aceitável. Utiliza-se então (Franklin, Workman, 1998):

$$20 < \frac{\omega_s}{\omega_B} < 40 \quad (4.44)$$

A função de transferência do sistema pode ser representada por meio de dois gráficos, um representando o valor do módulo (magnitude) e o outro representando o valor de fase (em graus). O diagrama de Bode mostra os dois gráficos ambos constituídos em função

da frequência numa escala logarítmica. A figura 4.5 mostra a curva de módulo para um sistema genérico, em que a largura de banda do sistema é identificada no momento em que ocorre a frequência de mudança de inclinação (quebra) denominada frequência de corte, que é determinada pelo gráfico de magnitude dado no diagrama de Bode, a figura 4.5 mostra ainda uma curva aproximada traçada pelas assíntotas que através desta é determinada a curva exata e então o valor da frequência de corte considerando uma correção de -3dB (Ogata, 1998 ).

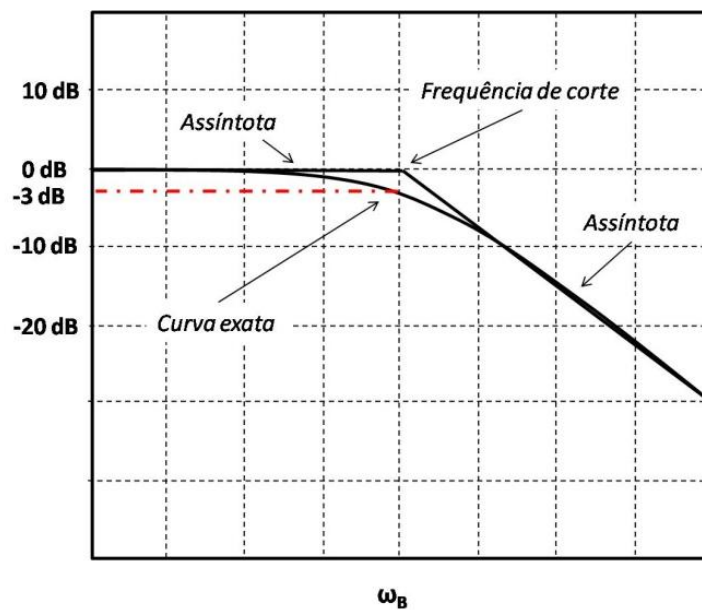


Figura 4.5 – Curva de módulo em dB com assíntotas.

## 5 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Nesta seção serão apresentados e discutidos os resultados dos experimentos realizados para definir os parâmetros do motor CC (seção 2.5), bem como os resultados dos projetos e simulações dos controladores digitais PI, PID e RST, projetados para o controle de velocidade do motor de corrente contínua apresentado no capítulo 2.

### 5.1 INDUTÂNCIA DE ARMADURA $L_a$ .

Conforme descrito na seção 2.5.1 o valor de  $L_a$  é obtido com auxílio de um indutímetro conectado diretamente nos terminais de armadura do motor cc para medição da indutância em diferentes posições do rotor (figura 5.1). Os valores medidos estão apresentados na tabela 5.1 e a média entre esses valores é obtida para determinar a indutância na armadura.



Figura 5.1 - Medição da indutância de armadura da máquina CC

Tabela 5.1 - Valores de  $L_a$  medido para várias posições do rotor

Posição do rotor	Valor da indutância (mH)
1	50,3
2	51,6
3	51,7
4	51,4

5	51,0
6	51,4
7	51,5
8	51,6
9	50,6
10	50,8
<b>Média</b>	<b>51,19</b>

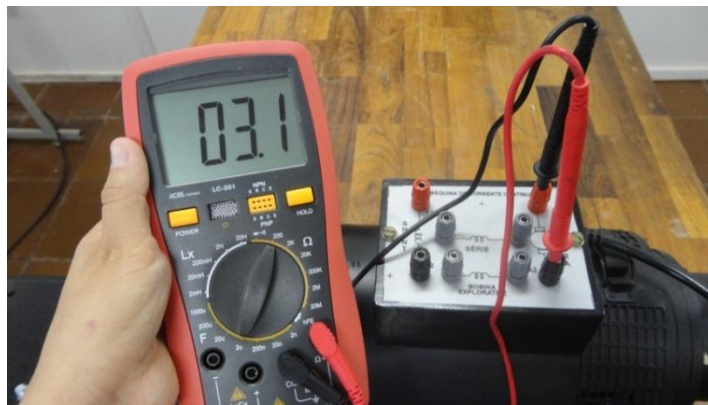
O valor da indutância medido foi:

$$L_a = 51,19mH$$

## 5.2 RESISTÊNCIA DE ARMADURA

Na seção 2.5.2 é descrito como definir a resistência de armadura.

Assim como a indutância a resistência é obtida por medição direta nos terminais de armadura da máquina, mostrada figura 5.2, observa-se que para diferentes posições do rotor o valor da resistência não apresenta alterações. Dessa forma o valor de  $R_a$  foi medido:



**Figura 5.2 - Medição da resistência na armadura da máquina CC**

O valor de resistência medido foi:

$$R_a = 3,1\Omega$$

### 5.3 AS CONSTANTES $k_t$ e $k_\omega$ .

As constantes  $k_t$  e  $k_\omega$  têm o mesmo valor, conforme apresentado na seção 2.5.3, portanto basta determinar uma delas. O valor de  $k_\omega$  é obtido através do ensaio a vazio no motor, onde foi montado o circuito da figura 2.9 e anotados os valores de  $V_t$ ,  $I_a$  e  $\omega_m$ , para determinação da constante de velocidade através da equação. Observa-se que a velocidade depende do valor de tensão aplicada aos terminais de armadura do motor, desta forma para cada valor de tensão aplicado será observado um valor de  $k_\omega$  correspondente.

A tabela mostra os valores de  $k_\omega$  calculados para diferentes faixas de tensão, até atingir a tensão e velocidade nominal do motor:

**Tabela 5.2 - Parametros medidos para determinação de  $k_\omega$**

$V_t$ (V)	$I_a$ (A)	$\omega_m$ (rpm)	$k_\omega$
50,3	1,32	1030	0,428
80,5	0,96	1192	0,621
120,2	0,86	1406	0,798
160,4	0,92	1655	0,909
182,8	0,97	1800	0,954

Para obtenção da função de transferência do motor cc foi utilizado o valor de  $k_\omega$  obtido com os valores nominais de tensão e velocidade, portanto  $k_\omega=0,95$ , e consequentemente  $k_t = 0,95$ .

### 5.4 MOMENTO DE INÉRCIA (J)

A determinação do momento de inércia do motor é dada a partir do procedimento experimental descrito em 2.5.4, onde um bloco de massa “ $m$ ” é pendurado, por um fio de comprimento “ $L$ ”, ao eixo do motor, como mostra a figura 5.3.



**Figura 5.3 - Motor CC com peso amarrado ao eixo para determinação de J**

O fio é enrolado no eixo do motor de tal forma que ao soltar o bloco o fio se desenrole, a massa parte com velocidade nula no instante inicial. O tempo gasto para que o fio desenrole é medido com o auxílio de um cronômetro.

O experimento foi realizado diversas vezes e os valores de tempo anotados. Ao final foi determinada a média dos tempos, a fim de que fosse obtido um valor mais preciso (tabela 5.3).

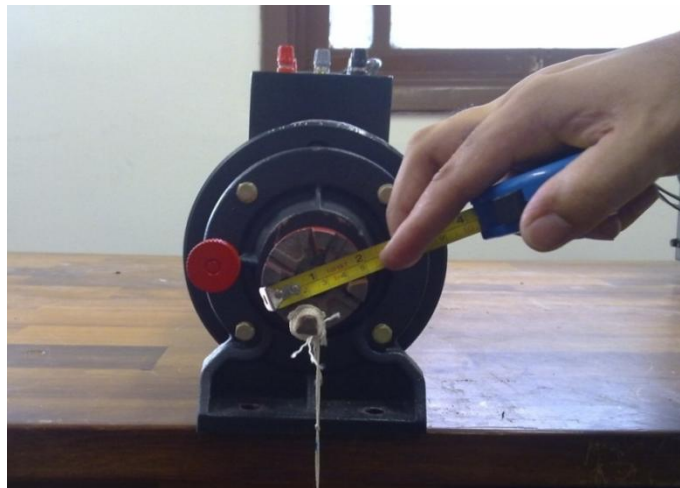
**Tabela 5.3 - Valores experimentais de tempo para determinação de J**

<i>Ensaio</i>	<i>Tempo (s)</i>
<i>1º</i>	<i>1,5</i>
<i>2º</i>	<i>1,6</i>
<i>3º</i>	<i>1,7</i>
<i>4º</i>	<i>1,3</i>
<i>5º</i>	<i>1,6</i>
<i>6º</i>	<i>1,4</i>
<i>7º</i>	<i>1,4</i>
<i>8º</i>	<i>1,8</i>



$9^\circ$	1,4
$10^\circ$	1,6
<b><i>Média</i></b>	<b><i>1,53</i></b>

O raio do rotor e o comprimento do fio foram medidos conforme mostram as figuras 5.4 e 5.5.



**Figura 5.4 - Medição do diâmetro do rotor do motor CC.**



**Figura 5.5 - Medição do comprimento do fio L**

Os valores de  $r$ ,  $L$  e  $m$  obtidos nas medições foram:

$$r = 0,025m$$

$$L = 0,57m$$

$$m = 1,963878Kg$$

De posse desses valores o momento de inércia para o motor foi determinado:

$$J = 1,963878 \times 0,025^2 \times \left( \frac{9,81 \times 1,53^2}{2 \times 0,57} - 1 \right)$$

$$J = 0,0246 \text{ Kg} \cdot m^2$$

## 5.5 COEFICIENTE DE ATRITO VISCOSO ( $B$ )

O circuito da figura 2.9 é montado a fim de determinar os parâmetros necessários para o cálculo do coeficiente de atrito viscoso. Os valores obtidos nos dispositivos de medição estão apresentados na tabela 5.4, bem como os valores de  $E_g$  e  $T_m$  calculados.

**Tabela 5.4 - Valores medidos no circuito da figura 2.12**

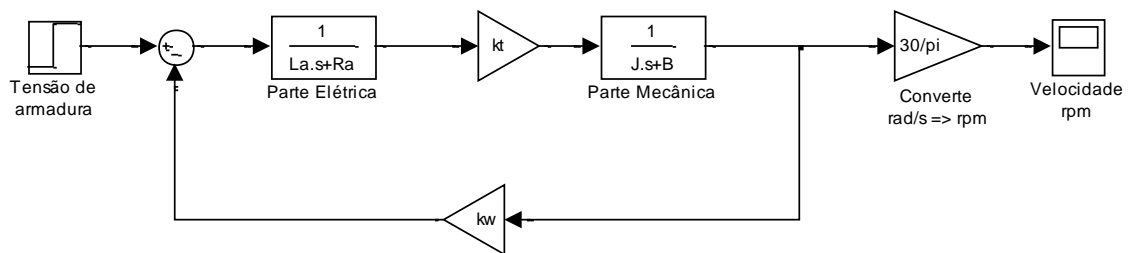
$V_t$ (V)	$I_a$ (A)	$\omega_m$ (rad/s)	$E_g$	$T_m$	$B$
50,3	1,320	107,861	46,155	0,565	0,005
80,5	0,960	124,826	77,486	0,596	0,005
120,2	0,860	147,236	117,500	0,686	0,005
160,4	0,920	173,311	157,511	0,836	0,005
182,9	0,970	188,496	179,854	0,926	0,005

Observa-se que o valor de  $B$  mantém-se constante para qualquer variação de tensão e velocidade, logo tem-se:

$$B = 0,005 \text{ Nms/rad}$$

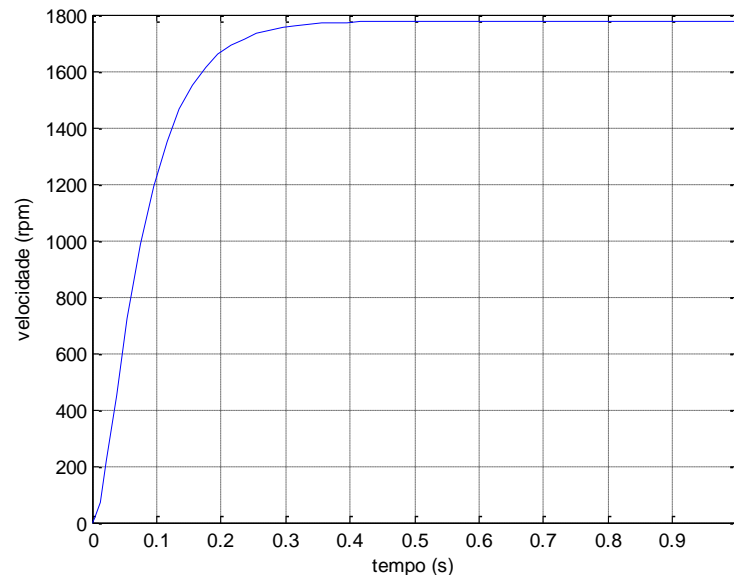
## 5.6 Simulação em Malha Aberta

A fim de validar o modelo do motor CC identificado, desenvolveu-se um diagrama de simulação no ambiente *simulink* do *MATLAB* que descreve a dinâmica do motor em malha aberta apresentado na figura 5.6:



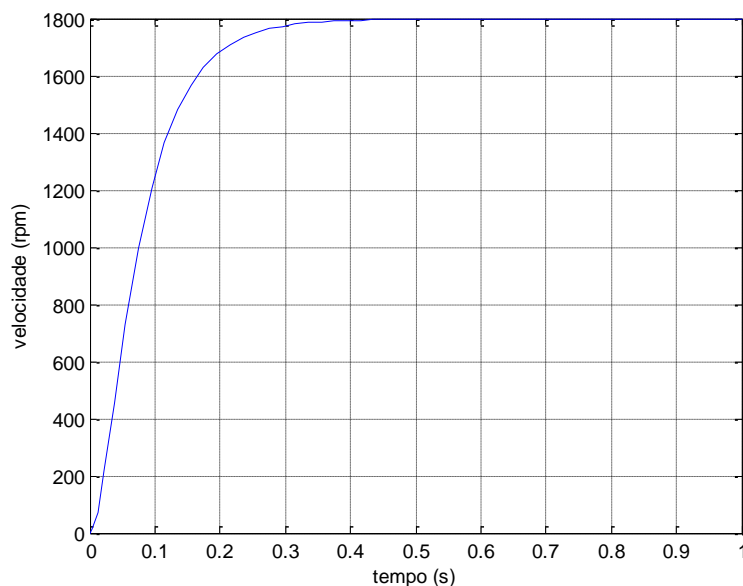
**Figura 5.6 - Diagrama de simulação do motor CC em malha aberta**

Os valores dos parâmetros elétricos e mecânicos foram devidamente substituídos, e o resultado é observado na figura 5.7, onde é aplicada na armadura do motor uma tensão de 180V (tensão nominal) e observada a velocidade na saída.



**Figura 5.7 - Velocidade na saída do motor em malha aberta para uma tensão de entrada de 180V**

Observa-se que para uma tensão de 180V a velocidade no eixo do motor chega bem próximo a velocidade nominal de 1800 rpm porém não alcança a mesma, o que era esperado pois conforme o ensaio realizado (apêndice A) para que o motor alcance a velocidade nominal é necessária uma tensão de 182V. A figura abaixo mostra que para uma tensão de 182V aplicados na armadura do motor a velocidade na saída é de 1800rpm.



**Figura 5.8 - Velocidade na saída do motor em malha aberta para uma tensão de entrada de 182V**

Com os resultados obtidos e comparados com o ensaio realizado no motor CC real (apêndice A) o modelo obtido para o motor é validado e em seguida os controladores são projetados.

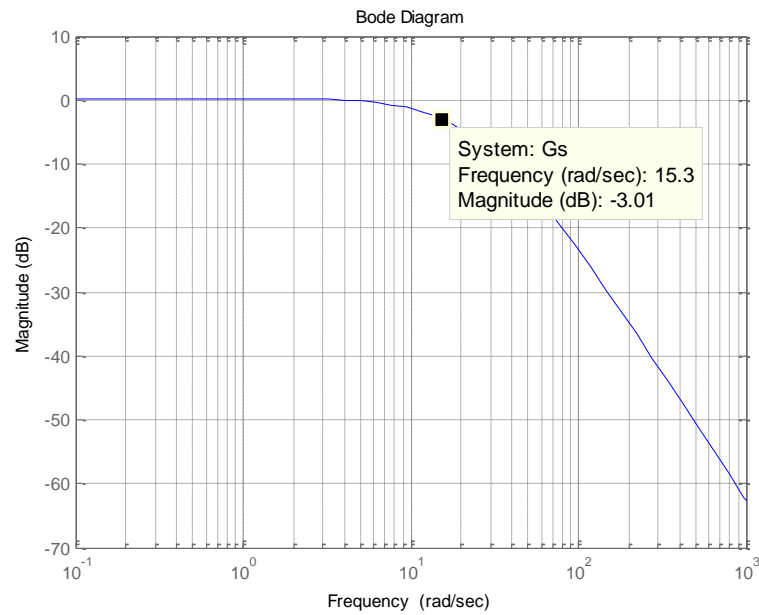
## 5.7 Seleção do Período de Amostragem

A seção 4.5 descreve o critério a ser utilizado na seleção adequada do intervalo de amostragem.

De posse dos parâmetros necessários para determinar a função de transferência que descreve adequadamente a dinâmica do motor CC, obtem-se a seguinte função de transferência:

$$G_p(s) = \frac{754,4}{s^2 + 61,54s + 729,2} \quad (5.1)$$

O gráfico de magnitude do sistema é observado no diagrama de Bode do sistema, que é obtido utilizando a ferramenta *MATLAB*(conforme a figura 5.9):



**Figura 5.9 - Diagrama de bode do sistema**

Pela figura obtem-se a frequência de corte em aproximadamente 15rad/s. Sendo assim, pela equação 4.45 tem-se:

$$300 < \omega_s < 600 \quad (5.2)$$

Para  $2\pi f_s = 300$ , a frequência de amostragem será  $f_s = 47,74\text{Hz}$ . O período de amostragem será então:

$$T_s = \frac{1}{f_s} = 0,02s \quad (5.3)$$

## 5.8 Projeto do controlador PI digital.

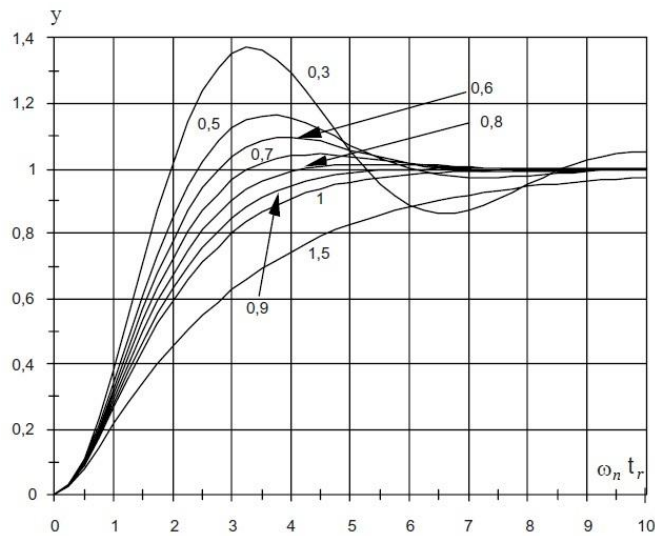
Inicialmente considera-se a função de transferência de segunda ordem que representa a dinâmica da velocidade no motor CC dada pela equação 2.26, que após substituir seus parâmetros pelos valores determinados é apresentada no domínio “s” pela equação 5.1.

Observa-se na função de transferência do motor dois pólos reais e estáveis ( $s_1=-45,53$  e  $s_2=-16,02$ ) que se encontram bastante afastados um do outro, o pólo mais afastado da origem é o pólo mais rápido do sistema e refere-se à parte elétrica do motor, já o pólo mais próximo da origem refere-se à parte mecânica do motor e é o que tende a tornar a resposta do sistema mais lenta.

A planta  $G_p(s)$  é então discretizada utilizando o ZOH (*Zero-Order Hold*), considerando o período de amostragem  $T_s=0,02s$  determinado anteriormente na seção 5.7. A função de transferência amostrada  $G_p(z)$  na forma de pólos e zeros será:

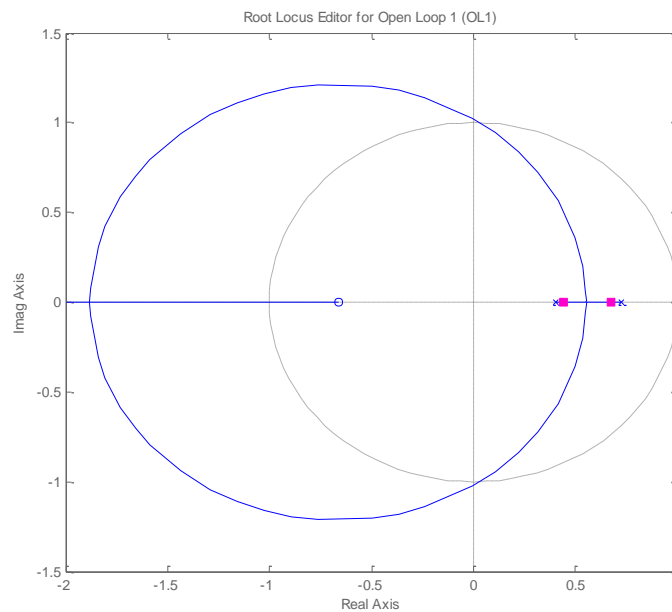
$$G_p(z) = \frac{0,10186 (z+0,6639)}{(z-0,7259) (z-0,4023)} \quad (5.4)$$

A fim de melhorar o desempenho do sistema, é proposto um controlador proporcional, que consiste em um controlador simples de projetar e de fácil implementação, com o ganho proporcional  $K_p=0,10$  calculado utilizando a condição de módulo, do método do Lugar Geométrico das Raízes, para as seguintes especificações: sobressinal máximo de 5% que reflete em um coeficiente de amortecimento  $\xi = 0,7$ . O tempo de subida escolhido é  $t_r = 0,2s$ , então para que o tempo de subida alcance de 10 a 90% do valor final obtém-se da figura 5.10  $\omega_n t_r = 2,75$ . A partir daí calcula-se  $\omega_n = 13,75 \text{ rad/s}$



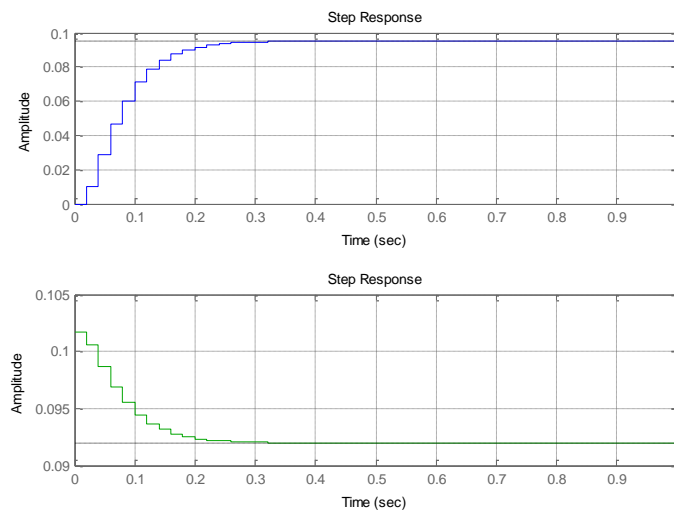
**Figura 5.10 - Resposta normalizada de um sistema de segunda ordem para uma entrada degrau.**  
**Fonte: Landau (2006)**

O LGR do sistema compensado é mostrado na figura 5.11 abaixo:



**Figura 5.11 - LGR do sistema com controle proporcional**

Observa-se que os pólos do sistema amostrado são reais e estáveis, pois estão localizados dentro do círculo unitário, o que torna o sistema também estável, o pólo mais próximo da origem tende a tornar o sistema menos amortecido o que reflete em uma resposta lenta que é determinada pela parte mecânica do sistema.



**Figura 5.12 - Resposta do sistema em malha fechada com controle proporcional (azul) e o sinal de controle (verde).**

Ao analisar a resposta do sistema em malha fechada com ganho proporcional apresentada na figura 5.12, nota-se que o controlador não consegue fazer a velocidade na saída do motor acompanhar o valor de referência. O que era previsto, uma vez que não existe um integrador (pólo em zero) na própria planta. Variando o ganho proporcional do sistema é possível conseguir uma resposta mais rápida, porém, apenas com o controle proporcional não é possível eliminar o erro de regime permanente, para isso se faz necessário à introdução de um integrador. Dessa forma um controlador PI é proposto visando erro de regime nulo.

O controlador PI é projetado através do método do lugar geométrico das raízes.

Para o projeto do controlador primeiramente é determinado o par de pólos dominantes por onde se deseja que o LGR passe, e que irão determinar a dinâmica desejada para o sistema. Estes pólos são determinados a partir das especificações de projeto. Os valores de  $\xi$  e  $\omega_n$  são determinados pelo gráfico da figura 5.10 (Landau, 2006) a qual mostra um diagrama que torna possível a determinação de  $\omega_n$  a partir do valor de  $\xi$  e do tempo de subida requerido para o sistema.

Assim, o par de pólos de malha fechada é determinado pela equação 4.19, e mapeados para o plano  $z$  através da relação dada na equação 4.20.

Então os pólos desejados estão localizados em:

$$z_1 = 0,8108 + j 0,1635$$

$$z_2 = 0,8108 - j0,1635$$



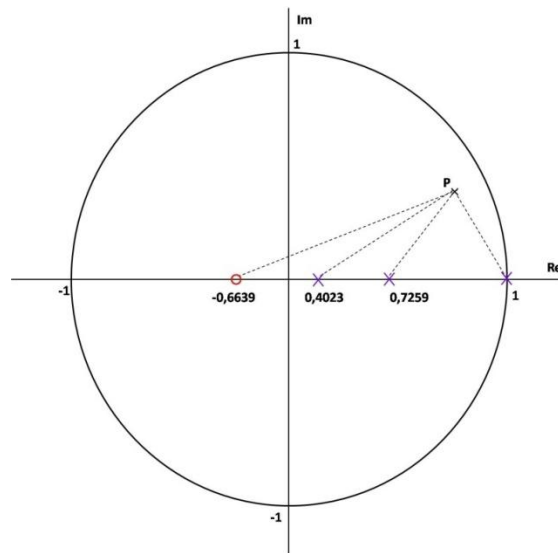
A função de transferência do controlador PI digital é dada pela equação 4.12 que pode ser representada na forma de pólos e zeros da seguinte maneira:

$$C(z) = \frac{K(z-a)}{(z-1)} \quad (5.5)$$

A função de transferência  $G(z) = C(z)G_p(z)$  será:

$$G(z) = \frac{K(z-a)}{(z-1)} \times \frac{0,10186 (z+0,6639)}{(z-0,7259) (z-0,4023)} \quad (5.6)$$

O projeto via LGR prevê a determinação do zero  $a$  e do ganho  $K$  do controlador. A figura 5.13 mostra a localização dos pólos e zeros conhecidos, no plano  $z$ , para o sistema em malha aberta, o ponto  $P$  localiza um dos pólos de malha fechada. Em seguida são calculadas as contribuições angulares de cada pólo e de cada zero em relação ao ponto  $P$ .



**Figura 5.13 - Mapa de pólos e zeros no plano  $z$**

Desta forma é possível determinar o ângulo do zero desconhecido, usando a condição de fase previamente determinada, conforme segue:

$$\angle G(z) = \angle(z - a) + \angle(z + 0,66) - \angle(z - 1) - \angle(z - 0,72) - \angle(z - 0,4) \quad (5.7)$$

Substituindo o pólo de malha fechada determinado  $z = 0,8108 + j 0,1635$  tem-se:

$$\begin{aligned}\angle(z - a) + 6,32^\circ - 139,15^\circ - 62,56^\circ - 21,81^\circ &= -180^\circ \\ \angle(z - a) &= 37,21^\circ\end{aligned}\quad (5.8)$$

Com a contribuição angular do zero  $a$  determinado é possível calcular o seu valor, uma vez que  $z$  é conhecido. Então o zero do controlador é:

$$a = 0,59 \quad (5.9)$$

O ganho do controlador é determinado usando a condição de módulo previamente determinada na seção 4.3.1.

$$\left| \frac{K(z-0,59)}{(z-1)} \times \frac{0,10186 (z+0,6639)}{(z-0,7259) (z-0,4023)} \right|_{z=0,8108 + j 0,1635} = 1 \quad (5.10)$$

O ganho  $K$  será 0,49.

Igualando as equações 4.12 e 5.5, comparando os termos, e relacionando o ganho  $K$  e o zero  $a$  com os ganhos do controlador  $K_p$  e  $K_i$  é possível, após algumas manipulações matemáticas obtermos os ganhos em função de  $K$  e  $a$ :

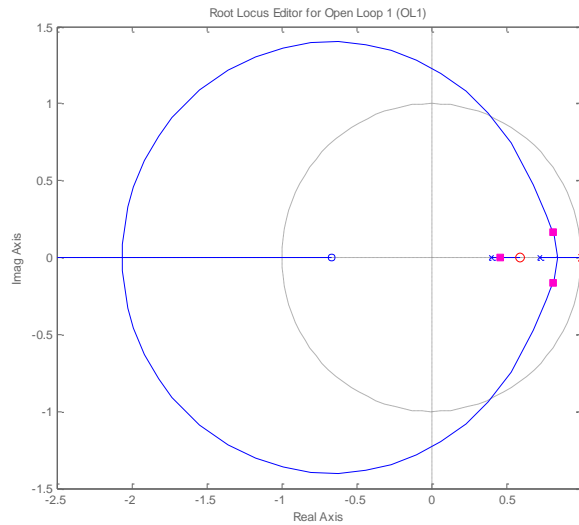
$$K_p = aK \quad (5.11)$$

$$K_i = \frac{K-K_p}{T_s} \quad (5.12)$$

Substituindo os valores de  $K$  e  $a$ , tem-se a função de transferência do controlador PI:

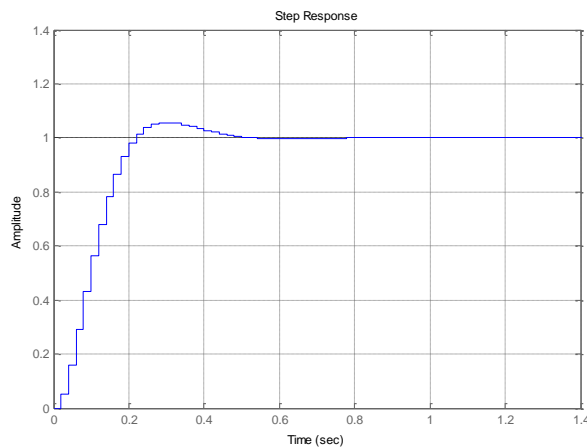
$$C(z) = 0,29 + 10 \left( \frac{0,07}{1-z^{-1}} \right) \quad (5.13)$$

O LGR do sistema com o controlador PI inserido é mostrado na figura 5.14 abaixo:



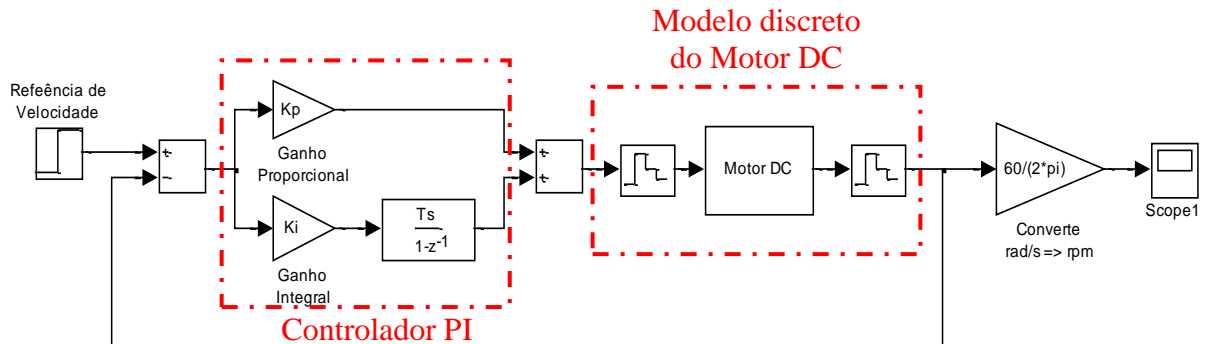
**Figura 5.14 - LGR do sistema com controle PI**

Observa-se que todas as raízes encontram-se dentro do círculo unitário obedecendo à condição de estabilidade, o pólo inserido (integrador) leva o sistema ao erro de regime nulo, porém tende a tornar o sistema mais oscilatório, o que poderá ser confirmado na simulação posteriormente. Os pólos dominantes de malha fechada estão localizados em  $0,81 \pm j0,16$  conforme projetado. O comportamento do sistema em resposta a uma entrada degrau unitário é observado na figura 5.15, onde se observa que o erro de estado estacionário do sistema foi corrigido e o tempo de assentamento é de 0,42s. A ultrapassagem percentual é de 6,27%, um pouco acima do projetado.



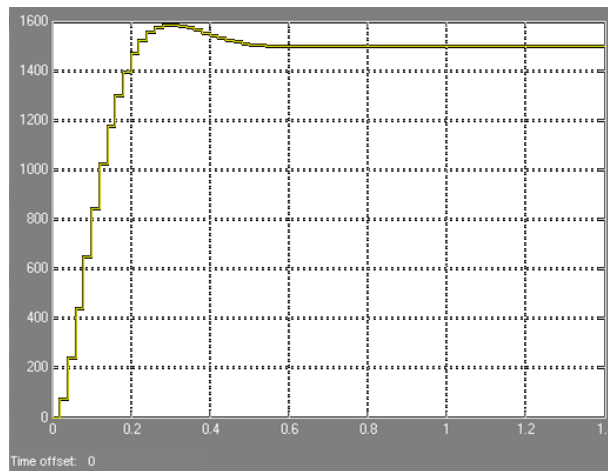
**Figura 5.15 - Resposta do sistema com controle PI**

O diagrama de blocos desenvolvido no ambiente *simulink* do *MATLAB* é mostrado na figura 5.16.



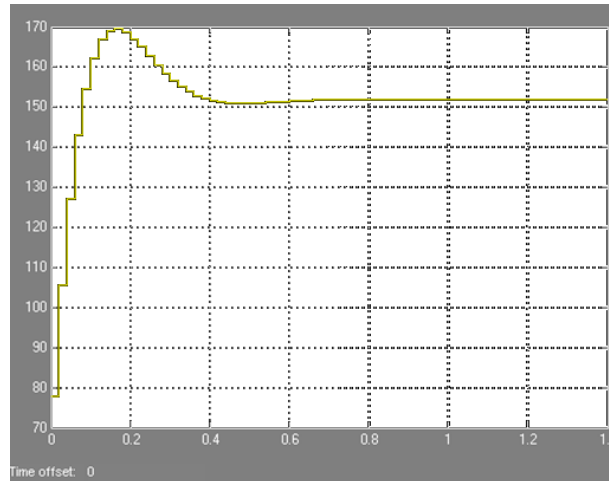
**Figura 5.16 - Diagrama de simulação com controle PI**

O diagrama acima mostra a simulação do sistema com o controlador PI, na saída do sistema (figura 5.17) pode-se observar a velocidade do motor CC, para uma referencia de velocidade de 157,08rad/s ou 1500 rpm:



**Figura 5.17 - Resposta do sistema com a inclusão do controlador PI**

A figura 5.17 mostra a velocidade no motor CC para um valor de tensão contínua aplicado nos terminais de armadura, a figura 5.18 mostra a ação de controle que tende a estabilizar o sistema em um tempo mínimo, o valor em estado estacionário corresponde à tensão aplicada na armadura do motor, para que o mesmo atinja a velocidade de referência. Pelo gráfico observa-se ainda que a tensão necessária para o motor atingir 1500rpm é de cerca de 152V.



**Figura 5.18 - Ação de controle do controlador PI**

## 5.9 Projeto do controlador PID digital

O controle PI eliminou o erro de regime permanente, porém tornou o sistema mais oscilatório com uma ultrapassagem percentual um pouco acima do projetado. A introdução de uma parte derivativa é acrescentada ao controlador visando diminuir o *overshoot*, sendo assim proposto um controlador PID.

A função de transferência do controlador PID digital é dada pela equação 4.11. Assim como o controlador PI, o controlador PID é projetado pelo método do LGR. As especificações de projeto também serão as mesmas utilizadas no controlador PI: sobressinal máximo de 5% com  $\xi = 0,7$ , tempo de subida  $t_r = 0,2s$  e  $\omega_n = 13,75 \text{ rad/s}$ , portanto os pólos de malha fechada também serão os mesmos.

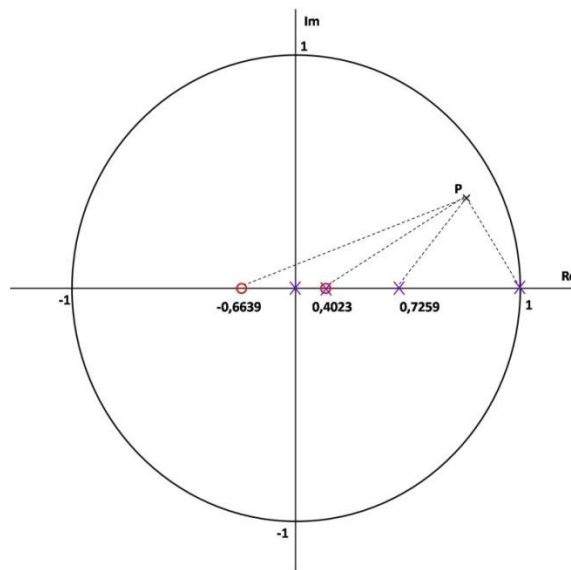
A função de transferência do controlador PID pode ser ajustada para a forma de pólos e zeros apresentada da seguinte forma:

$$C(z) = \frac{K(z-a)(z-b)}{z(z-1)} \quad (5.14)$$

Dessa forma a função de transferência  $G(z) = C(z)G_p(z)$  será:

$$G(z) = \frac{K(z-a)(z-b)}{z(z-1)} \times \frac{0,10186 (z+0,6639)}{(z-0,7259) (z-0,4023)} \quad (5.15)$$

Utilizando critérios de fase e módulo, são determinados os zeros  $a$  e  $b$  do controlador PID e o ganho  $K$ . Para simplificar os cálculos assume-se  $a=0,4023$ , este zero foi escolhido a fim de que se cancelasse com um dos pólos da planta, além de disso é o pólo mais próximo da origem o que tende a tornar o sistema menos estável. A figura 5.19 mostra o mapa de pólos e zeros do sistema em malha aberta.



**Figura 5.19 - Mapa de pólos e zeros (sistema em malha aberta)**

As contribuições de fase de cada pólo e cada zero são dadas pela condição de módulo:

$$\begin{aligned} \angle G(z) = & \angle(z - 0,66) + \angle(z - b) + \angle(z + 0,40) - \angle(z) \\ & - \angle(z - 1) - \angle(z - 0,72) - \angle(z - 0,40) \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$21,81^\circ + \angle(z - b) + 6,32^\circ - 11,4^\circ - 139,15^\circ - 62,56^\circ - 21,81^\circ = -180^\circ \quad (5.17)$$

O ângulo referente à fase de  $(z - b)$ , será:

$$\angle(z - b) = 26,8^\circ \quad (5.18)$$

O que torna possível calcular o valor de  $b$ , uma vez que  $z$  já foi determinado.  
Então o outro zero do controlador será:

$$b = -0,4871 \quad (5.19)$$

O ganho do controlador é determinado aplicando-se a condição de módulo previamente estabelecida na seção 4.3.1.

$$\left| \frac{K(z-0,4023)(z+0,4871)}{z(z-1)} \times \frac{0,10186(z+0,6639)}{(z-0,7259)(z-0,4023)} \right|_{z=0,8108+j0,1635} = 1 \quad (5.20)$$

O ganho  $K$  será igual a 0,69, pode-se então encontrar os ganhos do controlador conforme as equações (Campos, 2003):

$$K_d = Kz_1z_2T_s \quad (5.21)$$

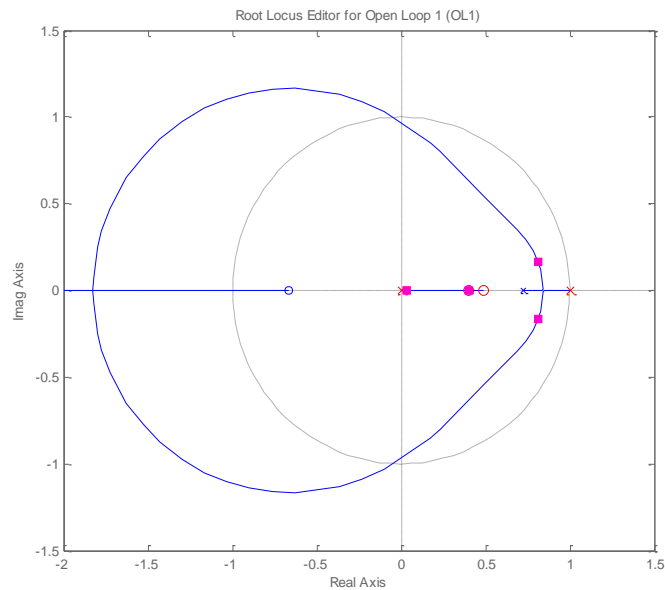
$$K_p = K(z_1 + z_2) - \frac{2K_d}{T_s} \quad (5.22)$$

$$K_i = \frac{K - K_p - \frac{K_d}{T_s}}{T_s} \quad (5.23)$$

Pelas equações 5.21, 5.22 e 5.23 obtemos a função de transferência do controlador que será:

$$C(z) = 0,34 + 10,65 \left( \frac{0,02}{1-z^{-1}} \right) + 0,002 \left( \frac{1-z^{-1}}{0,02} \right) \quad (5.24)$$

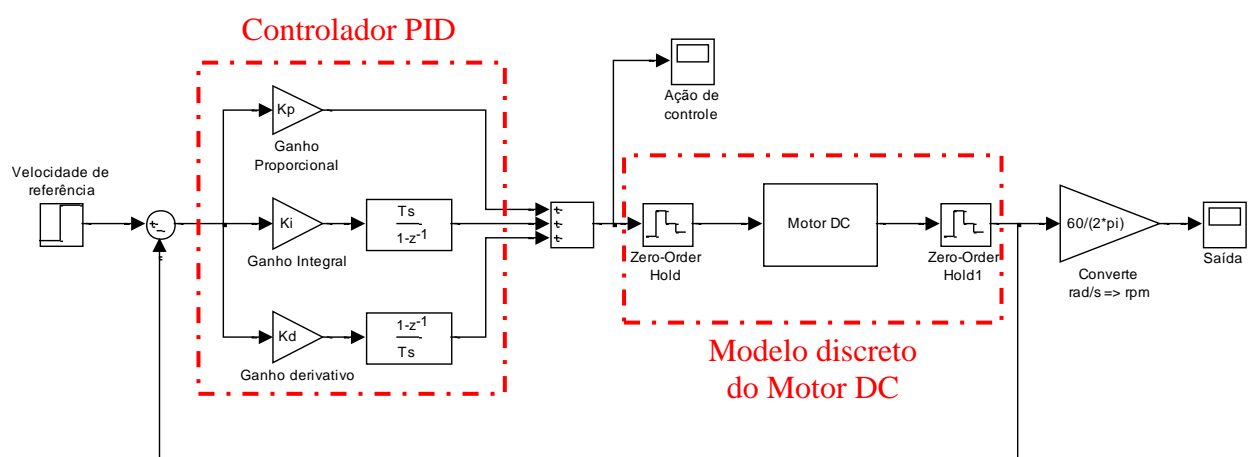
O LGR do sistema compensado com o controlador PID digital projetado está apresentada na figura 5.20. Observa-se que todas as raízes estão dentro do círculo unitário, obedecendo a condição de estabilidade, os pólos dominantes de malha fechada estão localizados em  $z=0,81 \pm j0,16$  conforme projetado. A resposta do sistema é observada na figura 5.22.



**Figura 5.20 - LGR do sistema com controle PID**

Novamente assim como no controle PI, o LGR do sistema com controlador PID mostra que o sistema será estável, observa-se ainda que o zero  $a$  adicionado cancela um dos pólos da planta. O zero inserido devido à ação derivativa deverá introduzir certo grau de antecipação ao sistema e um aumento na rapidez da resposta transitória.

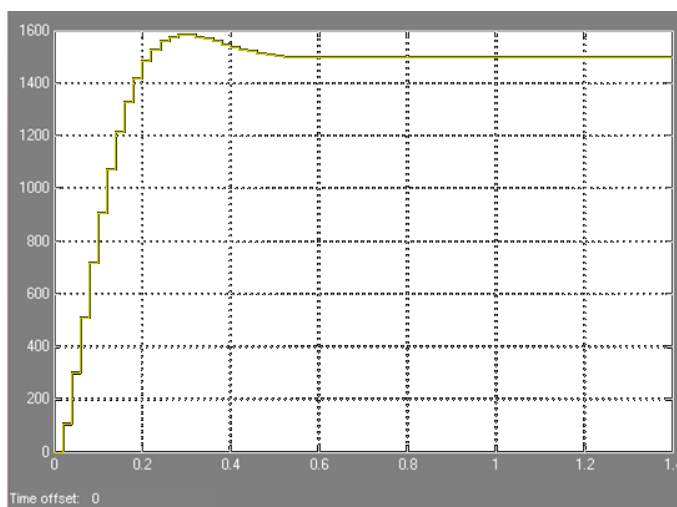
A figura 5.21 mostra o diagrama de blocos desenvolvido no ambiente *simulink* do *MATLAB* para a simulação do controlador PID digital.



**Figura 5.21 - Diagrama de blocos do sistema com o controlador PID digital**

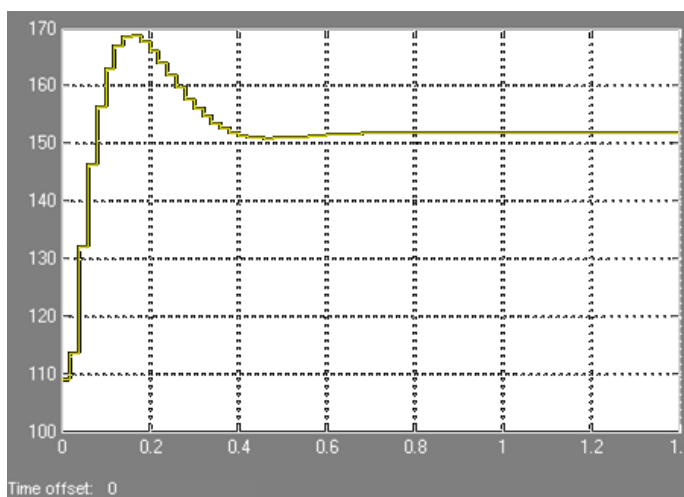


A resposta do sistema com o controlador PID é mostrada a seguir:



**Figura 5.22 - Resposta do sistema com o controlador PID digital**

Observando a velocidade no motor CC com a ação de controle PID, nota-se que a introdução da parte derivativa, assim como previsto, melhorou a resposta transitória, diminuiu o pico de oscilação da velocidade e mantendo o tempo de resposta conforme projetado. O sobressinal máximo é de 5.4%, o tempo de assentamento é de 0,41s, e tempo de subida 0,14s. A ação do controlador é mostrada na figura 5.23.



**Figura 5.23 - Ação do controle PID no sistema**

É possível perceber a ação de controle fazendo o sistema seguir a referência, o desempenho do sistema com o controle PID foi melhorado com relação ao controlador PI, atendendo as especificações de projeto.

#### 5.10 Projeto de controle PID na estrutura RST

O primeiro passo para o projeto do controlador na estrutura RST (uma vez que a função de transferência discretizada já foi definida na seção 5.8 pela equação 5.4) é a determinação do par de pólos dominantes em função de  $\zeta$  e  $\omega_n$  que irão definir a dinâmica desejada para o sistema e a determinação do polinômio característico  $P(z^{-1})$ . As especificações de projeto escolhidas serão as mesmas utilizadas nos controladores PI e PID digital, portanto  $\zeta=0,7$  e  $\omega_n$  calculado para  $t_r = 0,2s$  igual a  $13,75\text{rad/s}$ .

Dessa forma o par de pólos dominantes serão os mesmos definidos para os controladores PI e PID digital:

$$z_1, z_2 = 0,8108 \pm j0,1635$$

Os pólos auxiliares são escolhidos obedecendo à condição dada pela equação 4.41 e definidos de maneira atender as especificações de projeto, são dados por:

$$\alpha_1 = 0,15 \text{ e } \alpha_2 = 0,2 \quad (5.25)$$

Assim o polinômio  $P(z^{-1})$  será:

$$P(z^{-1}) = 1 - 1,97z^{-1} + 1,28z^{-2} - 0,28z^{-3} + 0,02z^{-4} \quad (5.26)$$

De onde obtemos os termos do vetor  $p$ , que são os coeficientes do polinômio  $P(z^{-1})$ .

A matriz  $m$  terá a seguinte forma, onde os termos  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  são os coeficientes dos polinômios A e B:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 - 1 & 1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 - a_1 & a_1 - 1 & b_2 & b_1 & 0 \\ -a_2 & a_2 - a_1 & 0 & b_2 & b_1 \\ 0 & -a_2 & 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

A equação 4.37 é resolvida e o vetor  $x$  que contém os coeficientes de  $R$  e  $S$  é obtido de forma que:

$$x^T = [1, s_1, r_0, r_1, r_2] = [1 \quad -0,0361 \quad 1,1831 \quad -1,3915 \quad 0,4593] \quad (5.28)$$

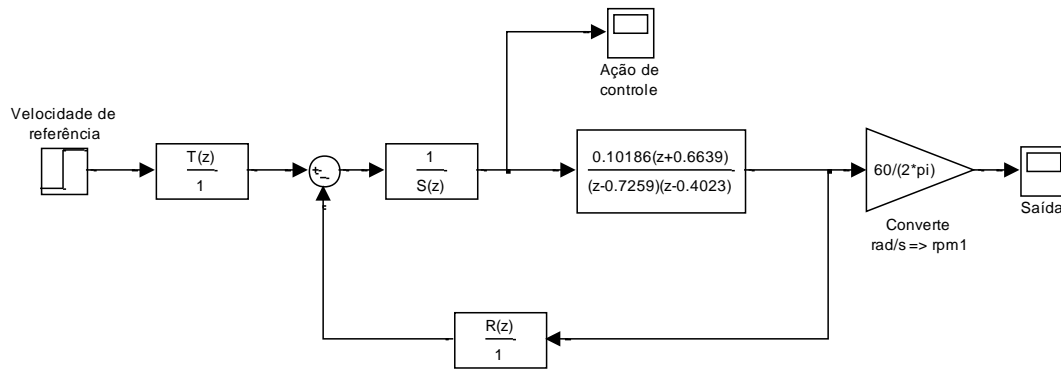
Então teremos:

$$R(z^{-1}) = 1,1831 - 1,3915z^{-1} + 0,45z^{-2} \quad (5.29)$$

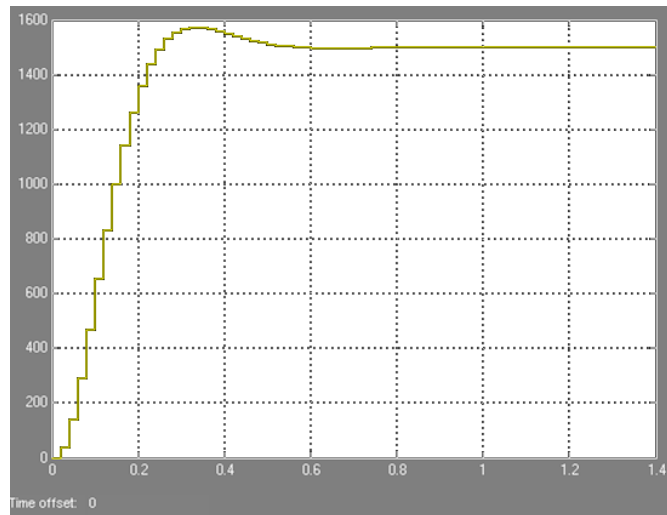
$$S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 - 0,0361z^{-1}) = 1 - 0,9639z^{-1} - 0,0361z^{-2} \quad (5.30)$$

$$T(z^{-1}) = r_0 + r_1 + r_2 = 0,2509 \quad (5.31)$$

Com todos os termos  $R$ - $S$ - $T$  do controlador projetados é realizada a simulação para validar o controlador, o diagrama de blocos está mostrado na figura 5.24 e a simulação da resposta ao degrau com o controlador RST na figura 5.25.

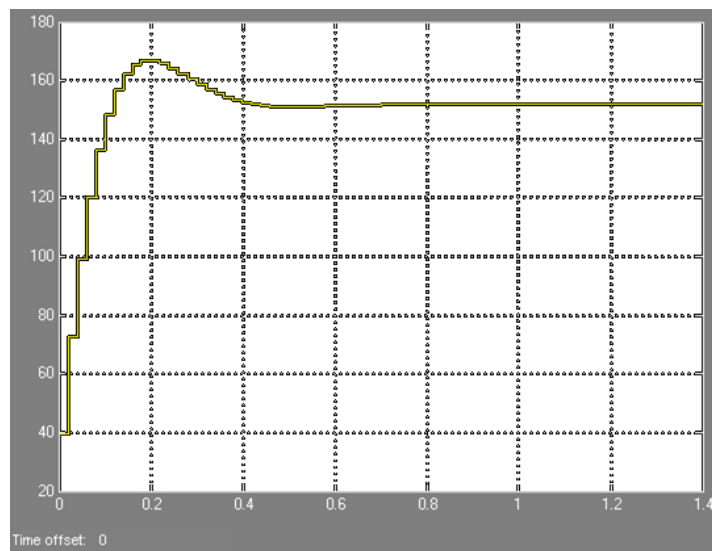


**Figura 5.24 - Diagrama de blocos para o sistema com o controlador RST**



**Figura 5.25 - Resposta para o sistema com o controlador RST**

A figura 5.25 mostra a resposta do sistema, onde se observa que o controlador RST apresenta um desempenho satisfatório com tempo de resposta rápido, e sobressinal de 4,99%, o que era esperado pois se trata de um controlador mais robusto que o PI e PID, por isso apresentou melhor desempenho.



**Figura 5.26 - Ação do controlador RST no sistema**

## 6 SIMULAÇÃO DA PLANTA REAL UTILIZANDO O *SimPowerSystems*.

O *SimPowerSystems* é uma importante ferramenta de simulação de sistemas dinâmicos elétricos e de controle, que se encontra inserido no ambiente *simulink* do *software MatLab*, consiste ainda em uma ferramenta de *design* moderno que permite aos cientistas e engenheiros construir modelos que simulam sistemas de potência de forma rápida e fácil.

Esta potente ferramenta possibilita a simulação de motores de corrente contínua muito próxima da máquina real que se deseja trabalhar, pois os dados reais da máquina são inseridos no modelo contido no *SimPowerSystems* e simulado como se fosse a própria máquina. Dessa forma o *SimPowerSystems* é utilizado para realizar os ensaios do motor CC com os controladores propostos.

### 6.1 Simulação em Malha Aberta

O modelo do motor CC em malha aberta desenvolvido no *SimPowerSystems* pode ser observado na figura 6.1, onde basta configurar o motor de acordo com o motor que está se trabalhando, para isso basta dar um duplo clique em cima do motor que aparecerá uma janela (figura 6.2) e na aba *Parameters* são inseridos os dados do motor, após isto basta alimentar o motor com uma fonte de tensão CC, e realizar a simulação. O resultado da simulação é apresentado na saída *m*, onde são medidos e apresentados os gráficos da velocidade, corrente de armadura, corrente de campo e torque elétrico.

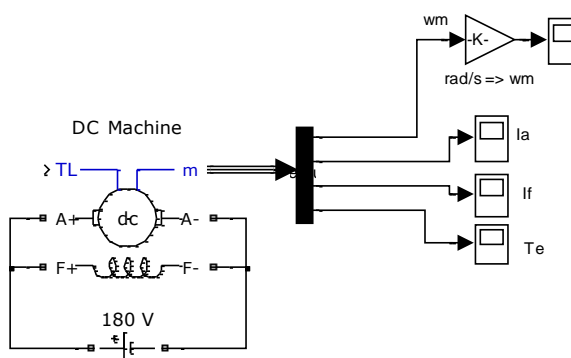
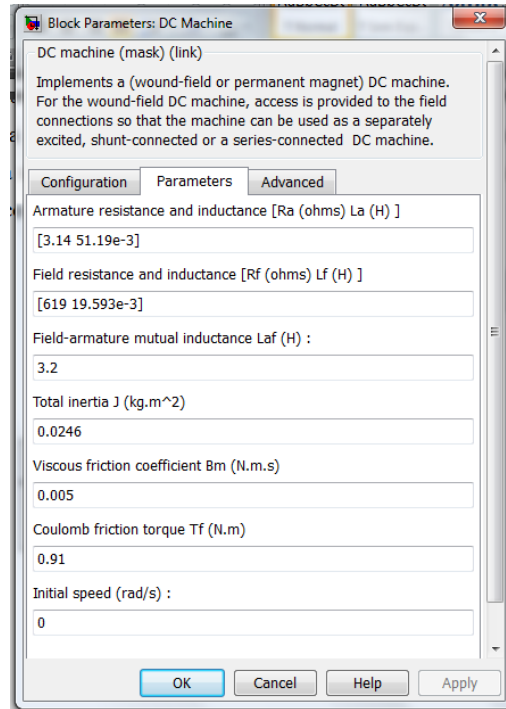


Figura 6.1 - Motor CC em malha aberta



**Figura 6.2 - Janela para definição dos parâmetros do motor CC no *SimPowerSystems***

A figura 6.2 mostra a janela onde são inseridos os parâmetros para configurar o motor CC, os parâmetros  $R_a$ ,  $L_a$ ,  $J$  e  $B_m$  respectivamente: resistência de armadura, indutância de armadura, momento de inércia e coeficiente de atrito viscoso, já foram definidos anteriormente no capítulo 5. Os valores da resistência e indutância de campo foram medidos com o auxílio de um multímetro nas funções ohmímetro e indutímetro diretamente nos terminais de campo do motor, os valores são:

$$R_f = 619\Omega$$

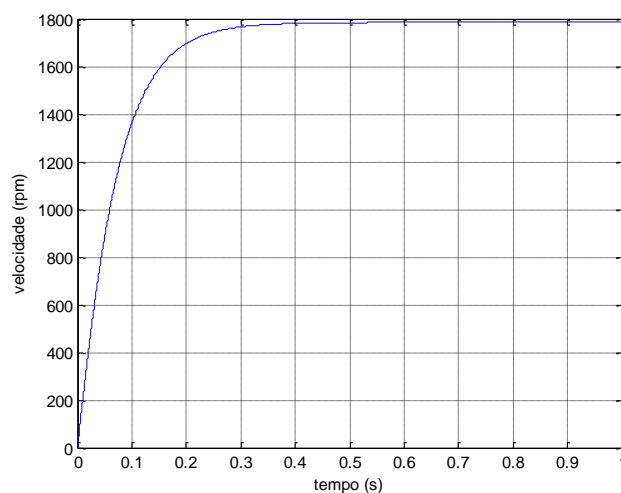
$$L_f = 19,593mH$$

A indutância mútua  $L_{af}$  é calculada através da equação 6.1, onde os valores de  $i_f$  e  $k_\omega$  são encontrados na tabela contida no Apêndice A :

$$k_\omega = L_{af} i_f \quad (6.1)$$

E por fim o torque devido ao atrito viscoso é calculado conforme a equação 2.40.

A simulação do motor em malha aberta é realizada conforme o ensaio a vazio no motor descrito na seção 2.5.3, onde os enrolamentos de campo e de armadura são ligados em paralelo, como mostra a figura 6.1. O resultado da simulação é observado para os valores nominais de tensão e velocidade do motor, assim para uma tensão de 180V na armadura tem-se a velocidade:



**Figura 6.3 - Velocidade do motor em malha aberta**

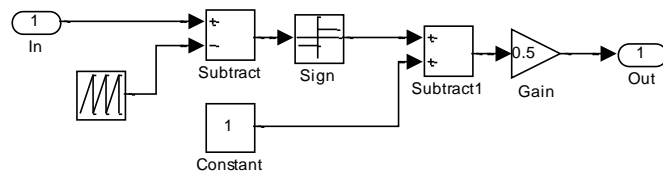
Pela figura 6.3 observa-se que conforme o ensaio realizado no motor, o modelo desenvolvido com o *SimPowerSystems* representa de forma adequada o motor real. Dessa forma os controladores projetados são inseridos no sistema para controle da velocidade no motor e testados de forma a serem validados.

## 6.2 Controle PI no *SimPowerSwstems*

O capítulo 3 mostra que para implementação do controle em motores CC é preciso à introdução de um elemento atuador, é proposto o conversor CC-CC para este fim. Portanto é definido antes de inserir o controlador o modelo de um conversor CC-CC para a malha de controle.

O *PWM* gera o sinal para acionar o conversor CC-CC e é inserido na malha de controle depois do controlador, onde o sinal de controle é modulado e o sinal pulsado aciona o

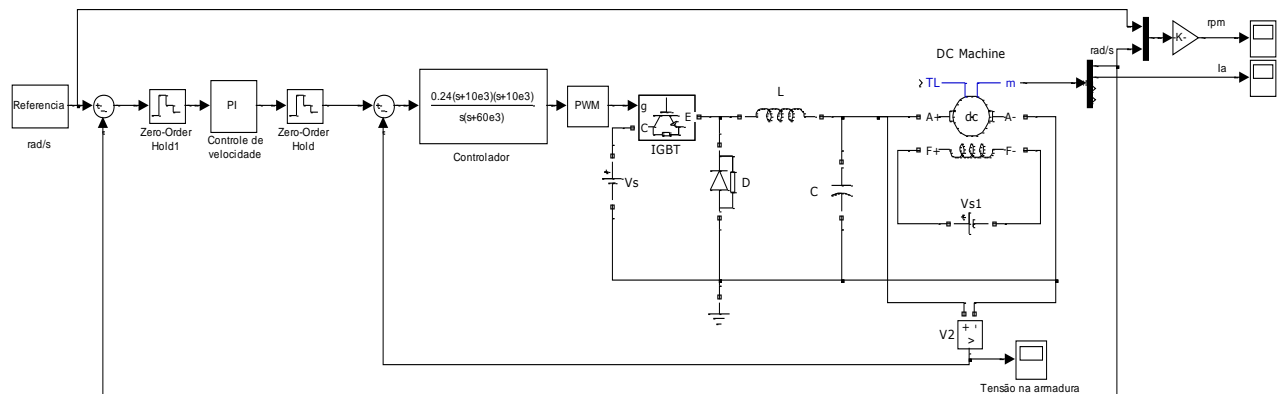
IGBT utilizado como chave no conversor CC-CC, que gera a tensão necessária para o motor girar conforme a velocidade de referência. O bloco *PWM* representa o circuito apresentado na figura 6.4, onde o sinal de controle é comparado com uma onda dente de serra de frequência  $f_{PWM}=500\text{kHz}$  o que equivale a um período  $T$  de  $2\mu\text{s}$ , respeitando as condições impostas no capítulo 3, o bloco de sinal gera um sinal pulsado de amplitude entre 1 e -1 de acordo com a saída do comparador, a soma do bloco de sinal com a constante 1 e o ganho 0,5 irá garantir que o sinal na saída seja sempre positivo entre 0 e 1.



**Figura 6.4 - Circuito do Modulador PWM**

O sistema completo com controlador PI digital e o conversor CC-CC é apresentado na figura 6.5 a seguir, os valores de indutância e capacitância são respectivamente  $L=335\text{mH}$  e  $C = 10\mu\text{F}$ . Um controlador é inserido antes do conversor CC-CC a fim de garantir que a armadura do motor receba o nível de tensão necessário para que o motor gire de acordo com a velocidade de referencia o controlador utilizado é (Forsyth, Mollov,1998):

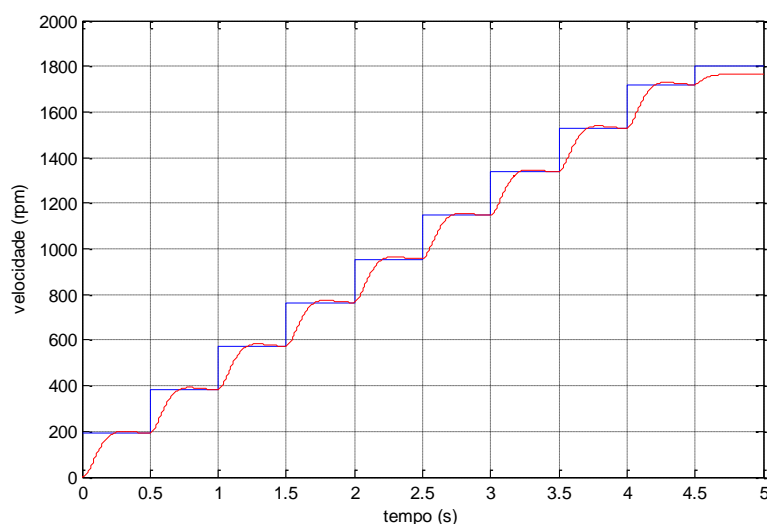
$$C_{cc-cc} = \frac{0,24(s+10 \times 10^{-3})^2}{s(s+60 \times 10^{-3})} \quad (6.2)$$



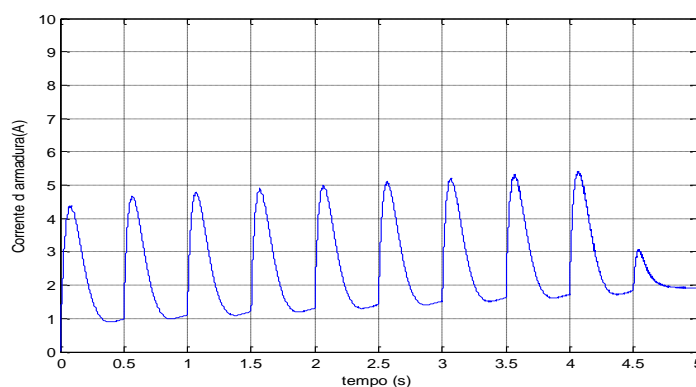
**Figura 6.5 - Circuito para controle de velocidade com controlador PI**



A referência de velocidade utilizada abrange uma faixa de valores 200 a 1800rpm, o controlador PI deve levar o sistema a erro de regime nulo, a resposta da simulação é apresentada nas figuras 6.6 e 6.7, onde se observa a velocidade na saída e a variação da corrente na armadura.



**Figura 6.6 - Velocidade no motor CC. Velocidade de referencia (azul) e Velocidade no motor(vermelho)**

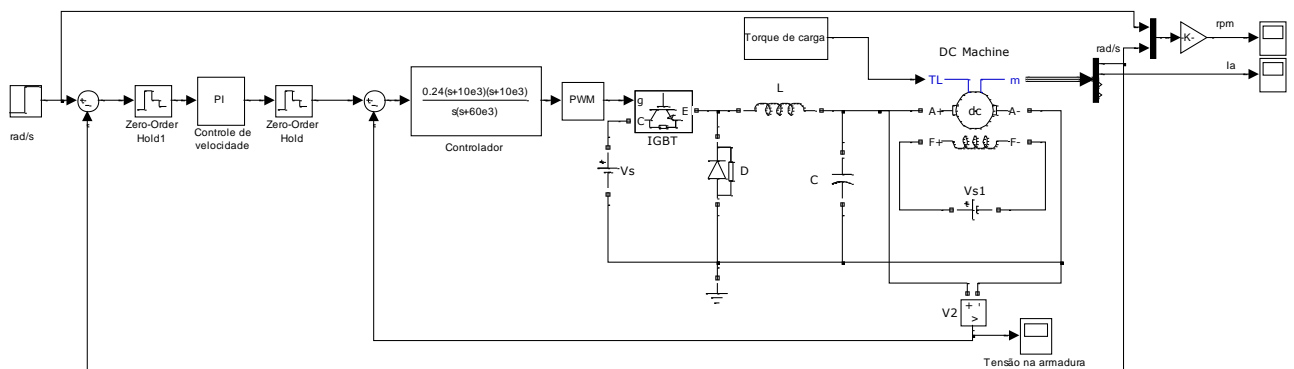


**Figura 6.7 - Gráfico da corrente de armadura**

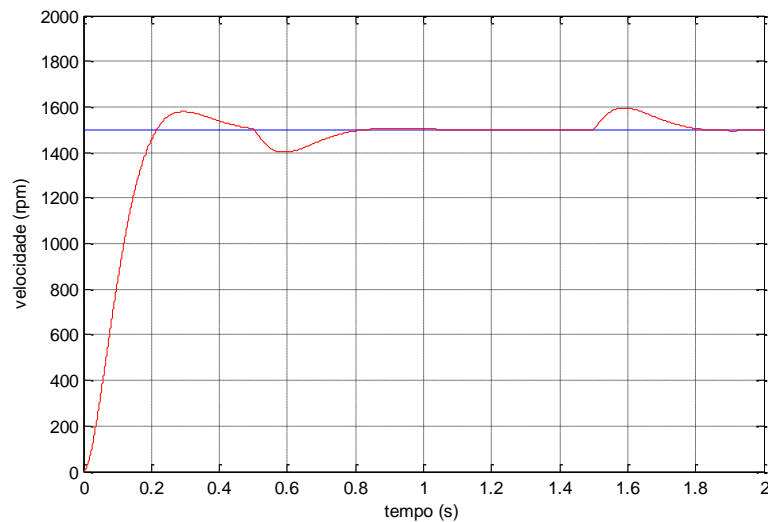
A figura 6.6 mostra a velocidade de referência convertida em rpm e velocidade na saída também em rpm, observa-se que a velocidade na saída tende a seguir a referencia alcançando sempre o valor desejado em um curto intervalo de tempo, o que valida o modelo do controlador PI projetado. A variação da corrente pode ser observada na figura 6.7, onde

nota-se alguns picos de corrente, isso acontece em cada instante que ocorre mudança de velocidade, mas tende a se manter constante em regime permanente.

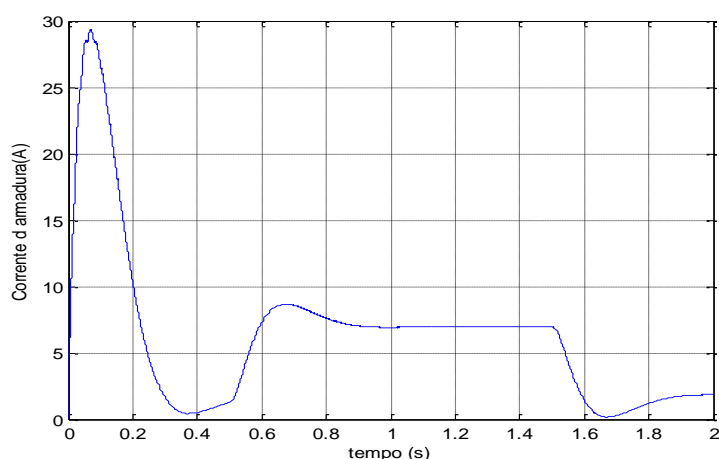
A fim de avaliar o desempenho do controlador para uma perturbação, é inserido um torque de carga na entrada  $T_L$  como mostra a figura 6.8, o torque é representado por um pulso de em um dado instante de tempo, o comportamento da velocidade e da corrente é mostrado na figura 6.9. O motor é mantido a uma velocidade constante de 1500rpm e então aplicado o torque externo.



**Figura 6.8 - circuito para controle de velocidade do motor CC com torque de carga**



**Figura 6.9 - Velocidade do motor com distúrbio de torque**

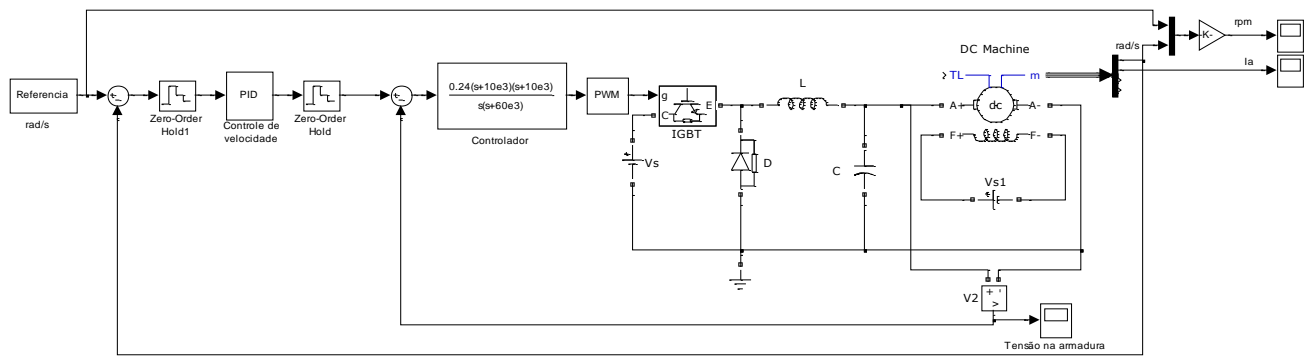


**Figura 6.10 - Corrente de armadura na presença de distúrbio de torque**

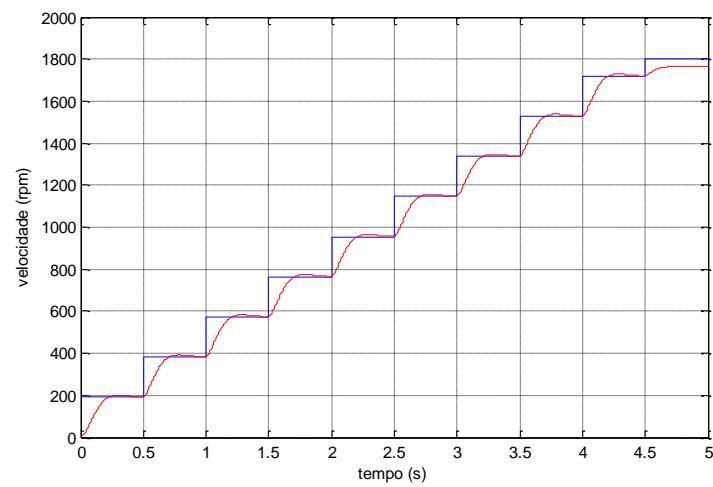
No gráfico da figura 6.9 observa-se a velocidade de referência e a velocidade na saída com o distúrbio de torque acontecendo de 0,5s até 1,5s, neste intervalo de tempo é perceptível que a velocidade cai para cerca de 1400rpm, mas retorna a velocidade de referência rapidamente, e a corrente aumenta a fim de compensar a queda na velocidade, logo em seguida o distúrbio é retirado e a velocidade volta ao seu valor normal, o pico bastante alto de corrente no início da simulação se dá pelo fato de que a máquina parte com velocidade inicial de 1500rpm, o que não ocorre na prática, mas em regime permanente a corrente se comporta conforme a simulação.

### 6.3 Controle PID no *SimPowerSystems*.

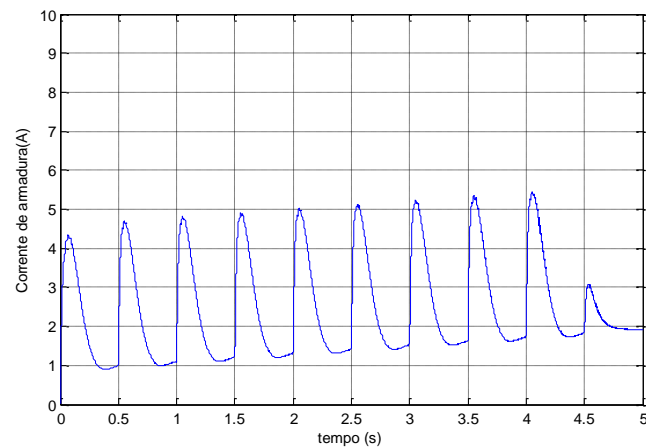
Assim como realizado para o controlador PI o mesmo circuito com o conversor CC-CC, o controlador do conversor e o PWM foi montado para a simulação com controle PID. O circuito, a resposta do sistema e o comportamento da corrente de armadura são observados nas figuras 6.11, 6.12 e 6.13 a seguir:



**Figura 6.11 - Circuito para controle de velocidade no motor CC com o controlador PID**



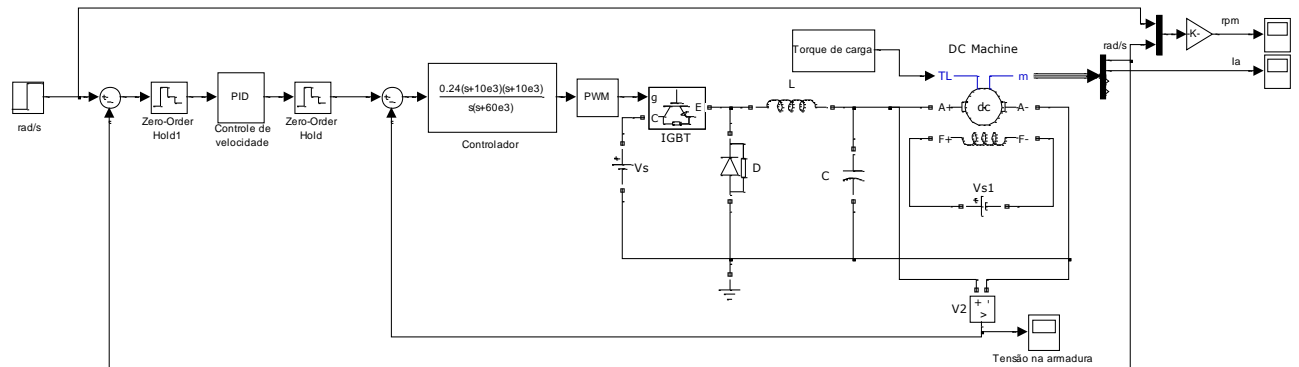
**Figura 6.12 - Velocidade no motor com controlador PID. Velocidade de referencia (azul) Velocidade do motor (vermelho)**



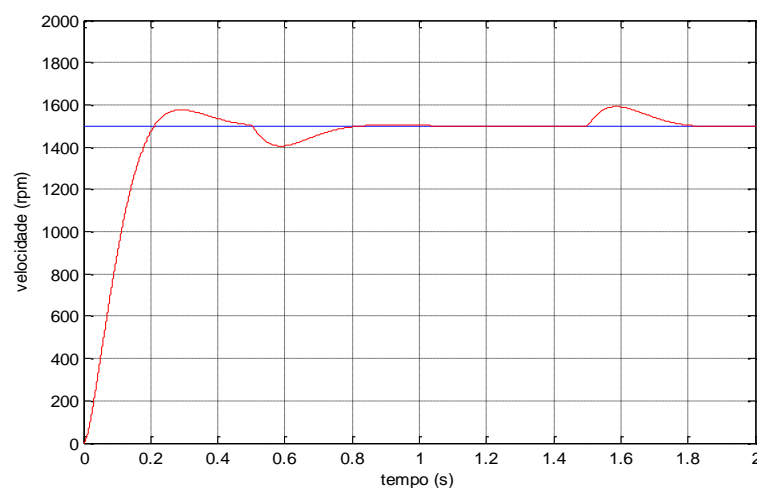
**Figura 6.13 - Corrente de armadura com controle PID**

A referência de velocidade é mesma utilizada para o controle PI, uma faixa de velocidade de 200 a 1800rpm, a figura 6.12 mostra a velocidade de referência junto com a velocidade na saída, observa-se que o controlador consegue fazer a saída sempre seguir a referência. A corrente se comporta de forma semelhante ao controlador PI mostrada na figura 6.13, ocorrendo picos de corrente em cada instante de aumento de velocidade, mas tendendo a manter a corrente próximo a 2A.

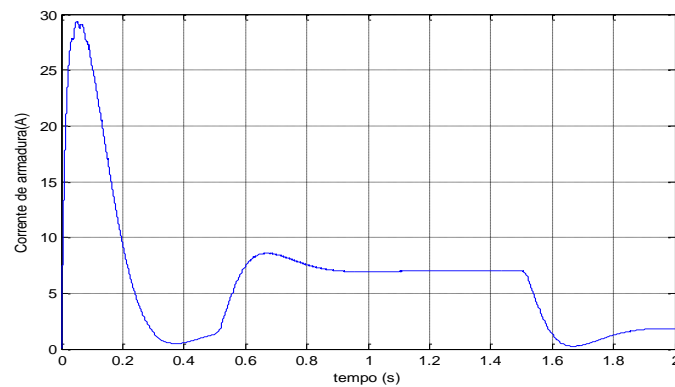
Em seguida foi adicionado um torque de carga com o motor a uma velocidade constante de 1500rpm, para observar como o sistema reage na presença de distúrbios (figura 6.14).



**Figura 6.14 - Circuito para o controle de velocidade no motor CC com distúrbio de torque**



**Figura 6.15 - Velocidade do motor na presença de distúrbio de torque. Referência (azul) Velocidade no motor(vermelho)**

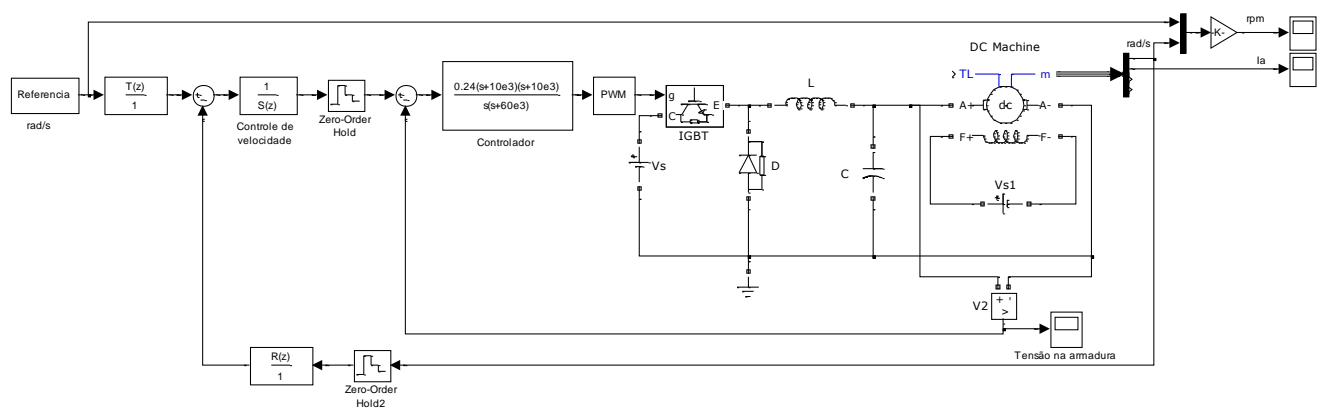


**Figura 6.16 - Corrente de armadura na presença de distúrbio de torque**

Na presença de distúrbios, o sistema tem uma queda na velocidade conforme mostra a figura 6.14, um aumento na corrente mostrado na figura 6.15 é observado para manter a velocidade na presença de torque externo, mas tende a se estabilizar rapidamente na velocidade de referência.

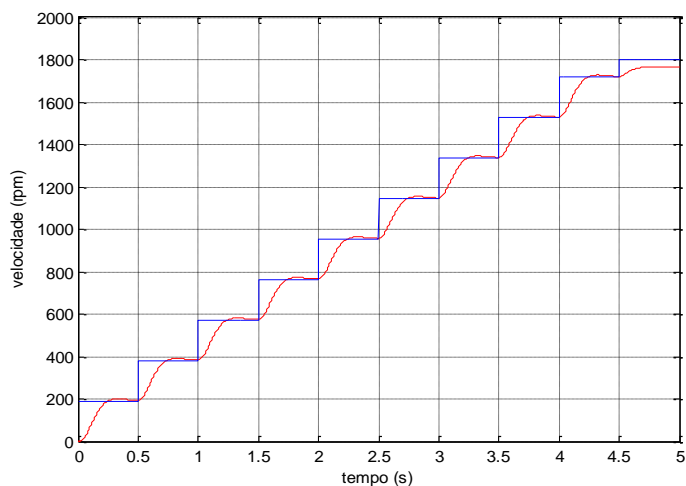
#### 6.4 Controle RST no *SimPowerSystems*

O controlador digital RST, projetado no capítulo 5, também foi simulado utilizando o *SimPowerSystems*, a figura 6.17 mostra o circuito:



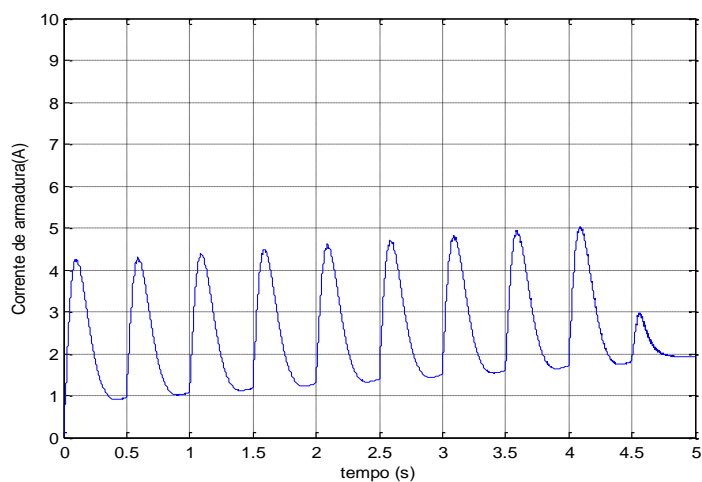
**Figura 6.17 - Circuito para controle de velocidade do motor CC com controlador RST**

Para o sistema da figura 6.17 a referencia na entrada é uma referencia digital de velocidade abrangendo, assim como para os controladores PI e PID, uma faixa de 200 a 1800rpm. A velocidade na saída em relação à entrada é mostrada na figura 6.18, onde pode-se perceber que assim como os controladores PI e PID o RST apresenta um bom desempenho, mantendo a velocidade sempre conforme o valor de referência.



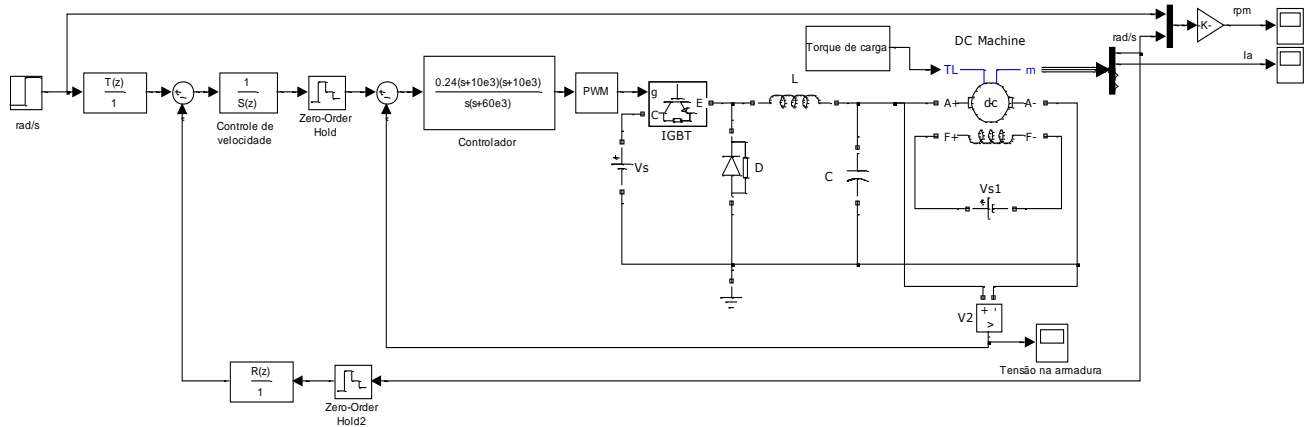
**Figura 6.18 - Velocidade na saída do motor com controle RST. Referência (azul) Velocidade no motor (vermelho)**

A corrente é apresentada na figura 6.19, e assim como nos outros casos (com controladores PI e PID) os picos de corrente ocorrem em cada mudança na velocidade.

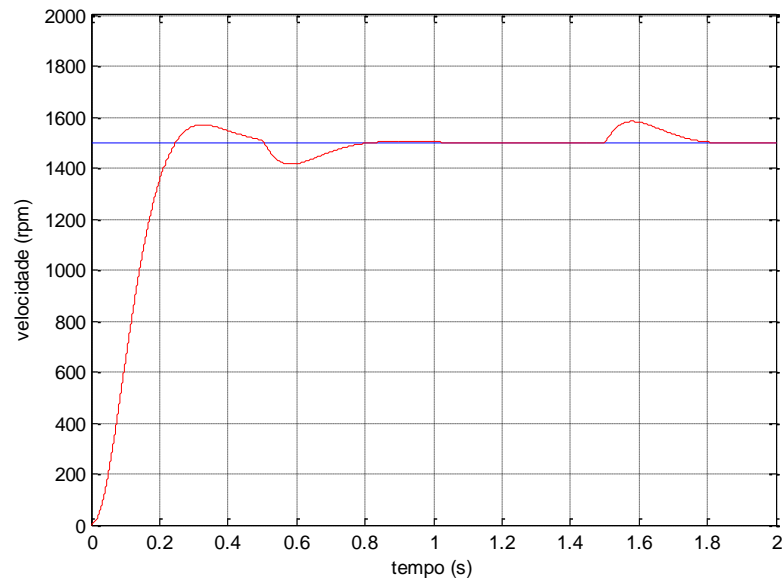


**Figura 6.19 - Corrente de armadura com controle RST**

A figura 6.20 mostra o circuito com o controle RST e o torque de carga aplicado no motor. O motor é mantido a uma velocidade constante de 1500rpm e o torque é aplicado ao motor observando-se a velocidade na saída (figura 6.21).



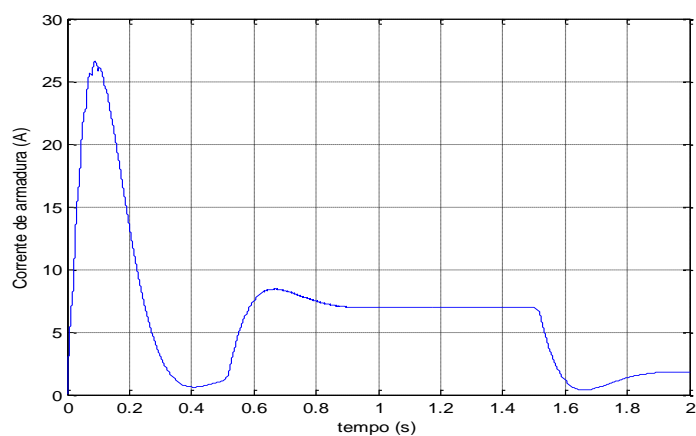
**Figura 6.20 - Circuito para o controle de velocidade no motor CC com distúrbio de torque**



**Figura 6.21 - Velocidade do motor na presença de distúrbio de torque com controle RST. Referência (azul) Velocidade no motor (vermelho).**



Observa-se na figura 6.21, que com o controle RST a ultrapassagem percentual é menor em relação aos outros controladores, e que na presença de torque externo a velocidade cai, mas a ação de controle faz o sistema se estabilizar rapidamente. A figura 6.22 a seguir mostra a corrente na armadura.



**Figura 6.22 - Corrente de armadura na presença de distúrbio de torque. Com controle RST**

O distúrbio de torque ocorre entre 0,5s e 1,5s, em que é possível observar na figura 6.22 que a corrente aumenta para manter a velocidade no motor mesmo na presença de torque externo.

## 7 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou o estudo sobre máquinas de corrente contínua, e foram projetados controladores digitais para desempenhar o papel de reguladores de velocidade para o motor CC através da tensão aplicada na armadura. O modelo do motor em particular foi desenvolvido através das equações elétricas e mecânicas que regem o comportamento da velocidade para máquinas CC, e os parâmetros foram obtidos por meio de medições e ensaios realizados na própria máquina.

A técnica utilizada para o projeto dos controladores foi o Método do Lugar Geométrico das Raízes que se mostrou muito eficaz na análise de desempenho e projeto dos controladores digitais PI e PID, foi ainda desenvolvido um controlador PID na estrutura RST. Nas simulações realizadas pode-se observar o desempenho de cada controlador. A eficiência dos projetos e a sintonia dos controladores foi avaliada por meio da análise da resposta a variações na velocidade de referencia, e ainda a introdução de torque de carga no motor.

A fim de simular mais próximo do que seria uma implementação real, utilizou-se a ferramenta *SimPowerSystems* do *Simulink*, com esta ferramenta foi possível constatar a eficiência dos controladores, bem como observar o comportamento da corrente de armadura do motor CC e o desempenho dos controladores na presença de distúrbios de torque.

Pode-se observar que o modelo identificado para o motor CC através de medições e ensaios realizados para determinação de seus parâmetros, representa de forma adequada a dinâmica da máquina real, uma vez que as simulações realizadas no *Simulink* e no *SimPowerSystems* quando comparadas com o ensaio a vazio realizado no motor apresentam comportamento muito parecido.

Observou-se ainda que os controladores PI e PID apresentaram bom desempenho, porém não seguiram as especificações de projeto apresentando uma ultrapassagem percentual maior que se havia projetado. O controlador RST apresentou desempenho ótimo, pois manteve a velocidade do motor conforme a referencia obedecendo às condições de projeto, apresentou *overshoot* abaixo do que se projetou e dentro da faixa de tempo especificada.

Os resultados dos controladores PI e RST foram muito parecidos, uma vez que o controlador RST emula um PID. Observa-se ainda que diante da variação na velocidade de

referência o controlador RST é mais eficiente atendendo as especificações de projeto em um tempo menor que os outros controladores propostos.

Sugestões para trabalhos futuros:

- Implementação prática dos controladores propostos.
- Desenvolvimento de novos reguladores de velocidade através de outros métodos de controle como por exemplo lógica *fuzzy*, controle por espaço de estados, dentre outros.
- Utilização de outros tipos de conversores CC-CC, como por exemplo, uma ponte H que permite vários tipos de operações na máquina: acelera-avante, freia-ré, acelera-ré e freia-avante.

## 8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Ahmed, A. – “Eletronica de Potência”, Prentice Hall, São Paulo – 2000.
- [2] Araujo, G.A.L. – “Desenvolvimento e Implementação de Reguladores Digitais de Tensão e de Velocidade em um Gerador Síncrono”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará, 2001.
- [3] Aström, J.K., Wittenmark, B., “Computer Controled Sístems – theory end design”, 3ª Edição, Prentice Hall information and systems sciences series. USA, 1997.
- [4] Barzack, C. L., – “Controle Digital de Sistemas Dinâmicos – Projeto e Análise”, Editora Edgard Blücher LTDA, 1994.
- [5] Bernardeli, V. R. – a “Implementação de Controladores Fuzzy Para Acionamentos Elétricos”, Trabalho de Conclusão de Curso, Faculdade de Ciências Aplicadas de Minas - UNIMINAS, 2005.
- [6] Campos, B. M. – “Controles Digital e Fuzzy de um Sistema Micro-Gerador de Energia Elétrica”, Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal do Pará, 2003.
- [7] Carvalho, G. – “ Máquinas Elétricas – Teoria e Ensaio”, 2ª Edição, Editora Érica, São Paulo – 2009.
- [8] Del Toro, V. – “Fundamentos de Máquinas Elétricas”, Editora LTC, 1994.
- [9] Dorf, R. C., Bishop, R. H. – “Sistemas de Controle Modernos”, 8ª Edição, Editora LTC, 2001.
- [10] Fadali, M.S., “Digital Control Engineering – Analysis and Design” Academic Press is an imprint of. Elsevier, 2009.

- [11] Fitzgerald, A.E., JR. K.C., Kusko, A. – “Máquinas Elétricas”, 3ª Edição, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1975.
- [12] Forsyth, A. J., Mollov, S. V. – “Modelling and control of CC-CC converters”, Tutorial Power Engineering Journal October, 1998.
- [13] Franklin, G. F., Powell, D. J. Workman, M. – “Digital Control of Dinamic Systems”, 3ª Edição, Addison-Wesley Longman, 1998.
- [14] Kosow, I. L. – “Máquinas Elétricas e Transformadores – Volume I”, 4ª Edição, editora Globo, 1982.
- [15] Landau, I.D., Zito, G. – “Digital Control Systems – Design, Identification and Implementation”, 2006.
- [16] Mohan, M., Underland, T. M., Robbins, W. P., – “Power Eletronics – Converters, Applications and Design”, 3ª Edição, John Wiley & Sons, INC, 2003
- [17] Ogata, K. – “Discrete-time Controla Systems”, 2ª Edição, USA, Prentice-Hall International, 1995.
- [18] Ogata, K. – “Engenharia de Controle Moderno”, 3ª Edição, Editora LTC, 1998.
- [19] Oliveira, V.O., Aguiar, M. L., Vargas, J. B. – “Sistemas de Controle - Aulas de Laboratório”, Publicação EESC – USP, São Carlos – SP, 2005
- [20] Pantané, E. J., “Implementação de Controle de Velocidade em Malha Fechada Para Motores de Corrente Contínua de Utilizando Sistemas de Aquisição de Dados”, Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia Mauá do Centro Universitário do Instituto Mauá de Tecnologia, 2008.

- [21] SimPowerSystems User's Guide – For Use with Simulink<sup>®</sup>, Version 4 –  
[www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)

## APÊNDICE A

<b>Ensaio</b>	<b>n(rpm)</b>	<b><math>\omega_m</math> (rad/s)</b>	<b><math>V_t</math> (V)</b>	<b><math>k_\omega</math></b>	<b><math>E_g</math></b>	<b><math>T_m</math></b>	<b><math>B</math></b>
<b>1</b>	545	57,072	20,2	0,222	12,664	0,533	0,009
<b>2</b>	793,1	83,053	30,2	0,291	24,203	0,557	0,007
<b>3</b>	940	98,437	40,1	0,357	35,170	0,561	0,006
<b>4</b>	1030	107,861	50,3	0,428	46,155	0,565	0,005
<b>5</b>	1094	114,563	60,1	0,493	56,426	0,576	0,005
<b>6</b>	1147	120,114	70,1	0,556	66,803	0,584	0,005
<b>7</b>	1192	124,826	80,5	0,621	77,486	0,596	0,005
<b>8</b>	1240	129,852	90,1	0,672	87,243	0,611	0,005
<b>9</b>	1290	135,088	100,1	0,721	97,337	0,634	0,005
<b>10</b>	1351	141,476	110,2	0,760	107,500	0,653	0,005
<b>11</b>	1406	147,236	120,2	0,798	117,500	0,686	0,005
<b>12</b>	1455	152,367	130,4	0,838	127,668	0,729	0,005
<b>13</b>	1525	159,698	140,2	0,861	137,437	0,757	0,005
<b>14</b>	1589	166,400	150,2	0,886	147,374	0,797	0,005
<b>15</b>	1655	173,311	160,4	0,909	157,511	0,836	0,005
<b>16</b>	1721	180,223	170,1	0,927	167,117	0,881	0,005
<b>17</b>	1781	186,506	180,3	0,951	177,286	0,913	0,005
<b>18</b>	1800	188,496	182,9	0,954	179,854	0,926	0,005
<b>Valor médio</b>							0,005