Kötelező házi feladat 1

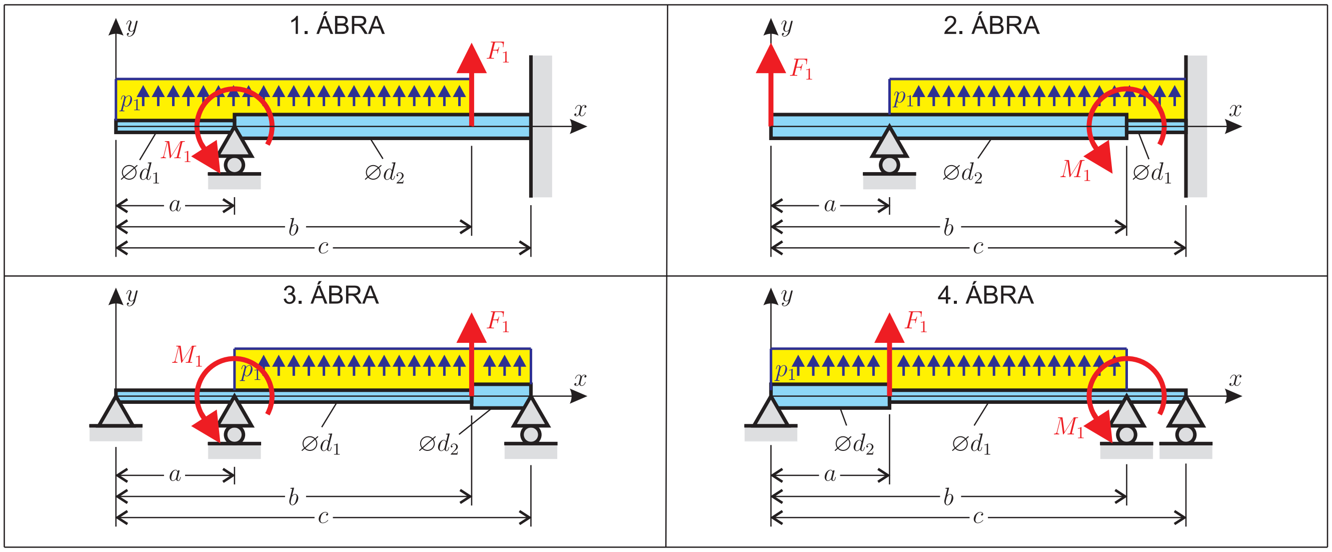
Tar Dániel
GUTOY7

2018. május 24.

BME Gépészmérnöki Kar	BMEGEMMAGM5	Név: Tar Dániel
Műszaki Mechanikai Tanszék	Végeselem módszer alapjai	NEPTUN-kód: GUTOY7
Félév: 2017/18/02	1. kötelező házi feladat	Aláírás:

	ÁBRA	**KÓD2**	**KÓD3**	**KÓD4**
Feladatkód:	2	1	2	2

Az ábrákon vázolt tartókat a p_1 állandó intenzitású megoszló erőrendszer, az F_1 koncentrált erő és az M_1 koncentrált erőpár terheli. A tartók két különböző átmérőjű ($d_1 = d$, illetve $d_2 = 2d$) kör keresztmetszetű tartókból vannak összeépítve. A tartók anyaga lineárisan rugalmas, homogén, izotrop. A d_1 átmérőjű rész rugalmassági modulusza E, míg a d_2 átmérővel rendelkező részé $E/6$.



1. Készítsen méretarányos ábrát a tartóról a terhelések feltüntetésével!

2. Határozza meg a tartó súlypontvonalának eltolódását leíró $v(x)$ lehajlásfüggvényt, valamint a hajlítónyomatéki igénybevételt leíró $M_h(x)$ függvényt a rugalmas szál differenciálegyenletének felhasználásával! Ábrázolja jelleghelyesen a kapott megoldásokat a jellemző értékek feltüntetésével! Számítsa ki az $x = c/2$ keresztmetszetben a tartó súlypontvonalának eltolódását (v_K) és a hajlító igénybevétel nagyságát (M_{hK})!

3. Határozza meg a $v(x)$ és az $M_h(x)$ függvényeket végeselemes módszerrel! 3 db síkbeli egyenes gerendaelemet használjon! Ábrázolja a kapott megoldásokat a jellemző értékek feltüntetésével! Számítsa ki az $x = c/2$ keresztmetszetben a v_K és M_{hK} értékeket, és határozza meg a relatív hibát a 2. feladatban kapott megoldáshoz képest!

	Feladatkód	**KÓD2**		**KÓD3**			**KÓD4**		
A D		E [GPa]	d [mm]	a [mm]	b [mm]	c [mm]	p_1 [N/m]	F_1 [kN]	M_1 [kNm]
A	1	170	23	220	540	730	2500	4	0,6
T	2	185	27	230	460	610	−2500	−3	−0,75
O	3	200	31	430	550	890	3000	2	0,9
K	4	215	35	330	440	680	−3000	−1	−1,1

EREDMÉNYEK			
Végeselemes módszer			
v_K [mm]	M_{hK} [Nm]	v_K relatív hibája [%]	M_{hK} relatív hibája [%]
0,8096	652,5147	-0,54	-0,28

Tartalomjegyzék

1. Feladat

A házifeladat kód alapján az adatokat átszámolva $[N][m][Pa]$ alapra:

1. táblázat. Adatok

E_1 $[Pa]$	E_2 $[Pa]$	d_1 $[m]$	d_2 $[m]$	a $[m]$	b $[m]$	c $[m]$	p_1 $[N/m]$	F_1 $[N]$	M_1 $[Nm]$
$170 \cdot 10^9$	$28,33 \cdot 10^9$	$23 \cdot 10^{-3}$	$46 \cdot 10^{-3}$	$230 \cdot 10^{-3}$	$460 \cdot 10^{-3}$	$610 \cdot 10^{-3}$	-2500	-3000	-750

Az alapadatokból származtatott adatok (kereszmetszetek felületei, másodrendű nyomatékai):

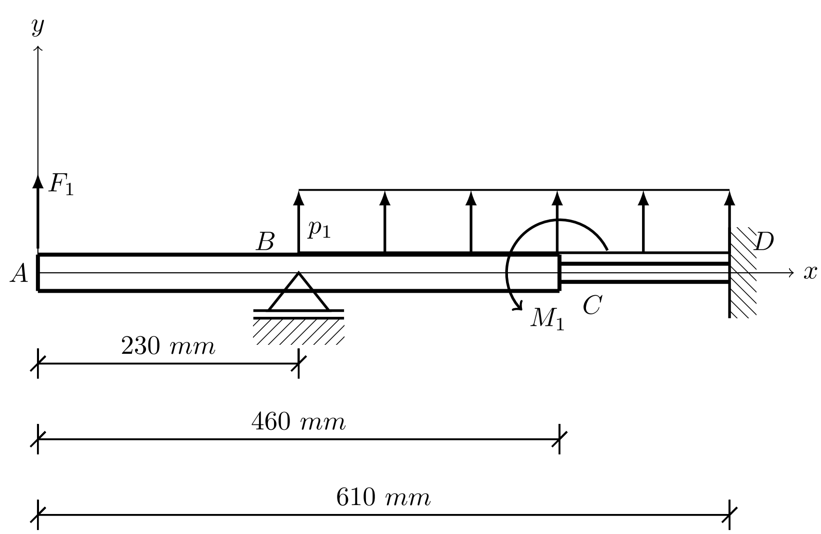
$$A_1 = \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} = 4,1548 \cdot 10^{-4}\ [m^2] \tag{1}$$

$$A_2 = \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} = 16,619 \cdot 10^{-4}\ [m^2] \tag{2}$$

$$I_{z1} = \frac{d_1^4 \cdot \pi}{64} = 1,3737 \cdot 10^{-8}\ [m^4] \tag{3}$$

$$I_{z2} = \frac{d_2^4 \cdot \pi}{64} = 21,9787 \cdot 10^{-8}\ [m^4] \tag{4}$$

A terheléseket arányosan és mindenhol a pozitív irányba vettem fel, hogy megegyezzen a feladatleírásban szereplő ábrával.



1. ábra. Méretarányos ábra és a terhelések

A rekcióerőket az pozitív x, y, és z irányoknak megfelelően vettem fel.

2. Feladat - Rugalmas szál differenciálegyenlete

A rugalmas szál diffrenciálegyenletéhez a hajlítónyomatéki függvények felírása szükséges. A tartót 3 részre osztottam és mind a három tartományra felírhatam a hajlítónyomatéki függvényeket:

2. táblázat. Hajlítonyomatéki függvények

$M_{h1} = -F_1 \cdot x$	$0 \leq x \leq a$
$M_{h2} = -F_1 \cdot x - F_B \cdot (x-a) - p_1 \cdot \frac{(x-a)^2}{2}$	$a \leq x \leq b$
$M_{h3} = -F_1 \cdot x - F_B \cdot (x-a) - p_1 \cdot \frac{(x-a)^2}{2} + M_1$	$b \leq x \leq c$

A rugalmas szál differenciálegyenlete a három tarományra:

$$v_1''[x] = \frac{Mh_1[x]}{I_{z2} \cdot E_2} \tag{5}$$

$$v_2''[x] = \frac{Mh_2[x]}{I_{z2} \cdot E_2} \tag{6}$$

$$v_3''[x] = \frac{Mh_3[x]}{I_{z1} \cdot E_1} \tag{7}$$

A differenciálegyenletek megoldásához illesztési feltételeket, kényszerfelételeket, illetve statikai egyensúlyt leíró egyenleteket is fel kell írni.

Illesztési feltételek:

$$\begin{gathered} \phi_1(a) = \phi_2(a) \\ \phi_2(b) = \phi_3(b) \\ v_1(a) = v_2(a) \\ v_2(b) = v_3(b) \end{gathered}$$

Kényszerek:

$$\begin{gathered} v_1(a) = 0 \\ v_3(c) = 0 \\ \phi_3(c) = 0 \end{gathered}$$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Dx} = 0 \tag{8}$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_1 + F_{By} + p_1 \cdot (c-a) + F_{Dy} = 0 \tag{9}$$

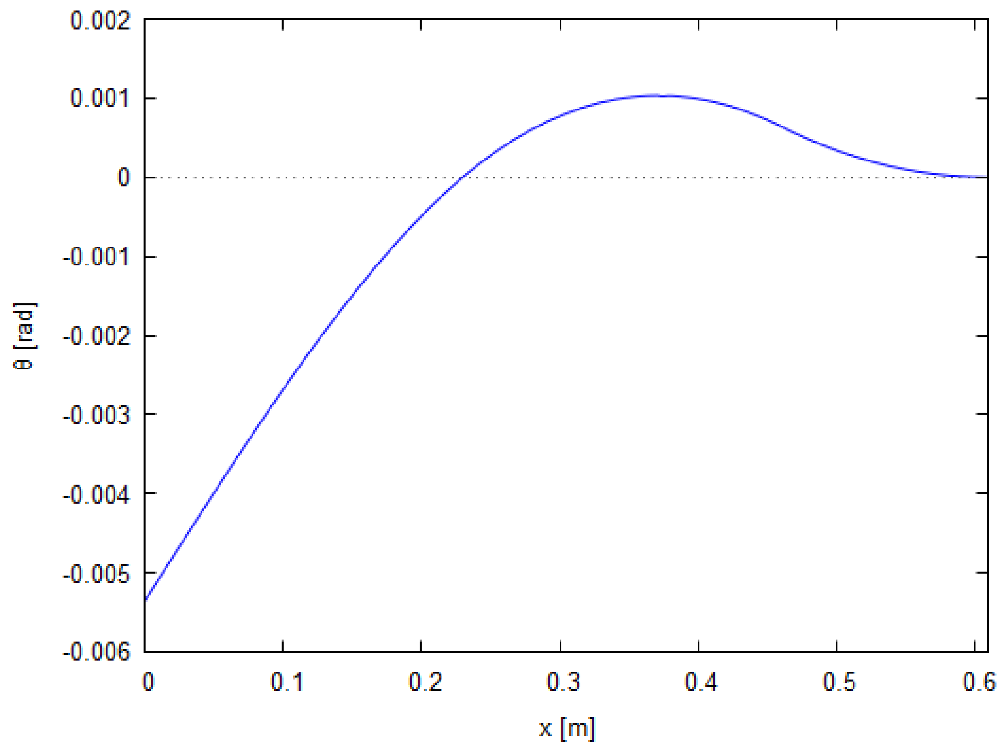
$$\sum M_D = 0: \quad -F_1 \cdot c - F_{By} \cdot (c-a) - p_1 \cdot \frac{(c-a)^2}{2} + M_1 + M_D = 0 \tag{10}$$

A rugalmas szál differenciálegyenleteiből a lehajlásfüggvényeket kétszeres integrálással kaphatjuk meg. Az integrálások miatt 6[db] ismeretlen értékű integrálási konstans jelenik meg. Ezen hat ismeretlenen kívül, ismeretlenek még a reakcióerők ($F_{By}, F_{Dx}, F_{Dy}, M_D$). Így egy tíz ismeretlenes egyenletrendszer áll elő, amelyekhez 10 peremfeltételt határoztunk meg. Ennek megfelelően az egyenletrendszerből az összes ismeretlen meghatározható.

A számolt értékek közül a reakcióerők:

$$v_1(a) = 0$$
$$v_3(c) = 0$$
$$\phi_3(c) = 0$$

Az érékeket visszahelyettesítve a lehajlás-[2] és hajlítónyomatéki[3] függvényekbe, azokat ábrázolva:



2. ábra. Lehajásfüggvény

3. Feladat - Végeselemes megoldás

3.1. A reakcióerők és az elmozdulásvektor meghatározása

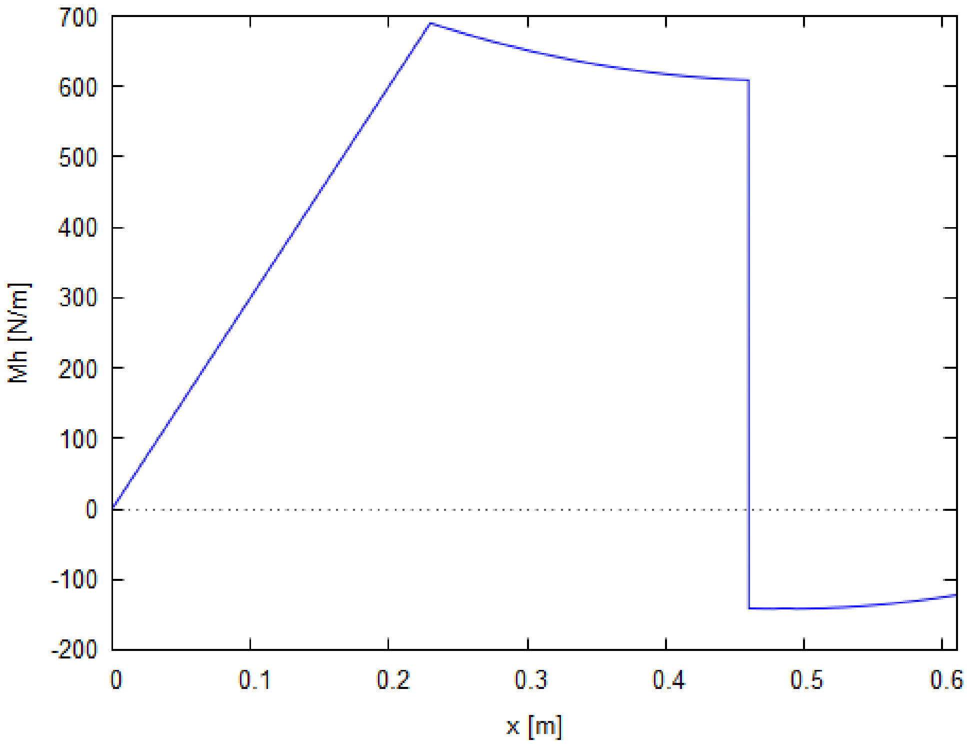
A feladat szövege alapján a végeselemes modell: vegeselemes modell (ábra) - 3 elem - 4 csomopont

Elemi merevségi mátrix

A 3[db] egyenes gerendaelem elemi merevségi mátrixait elhelyezzük a globális merevségi mátrixban a hozzájuk tarozó szabadsági fok összerendelések alapján.

ábra - glob merev mátrix

Ahol az általános elmozdulás és tehervektor: vektorok...



3. ábra. Hajlítónyomatéki függvény

A tehervektor a koncentrált erők és megoszló terhelések összegeként írható fel. A megoszló erőt a két rúdra külön felírva: koncentrált, megoszlo2, megoszlo3

Az elmozdulásvektor megkötött paraméterei alapján kondenzáljuk a globális merevségi mátrixot úgy, hogy a merevségi mátrix oszlopait és sorait töröljük ott ahol az elmozdulásvektor nulla.

A kondenzált merevségi mátrix: vektor...

A kondenzált elmozdulásvektor: vektor...

Az így alkotott $\mathbf{K}_{kond} \cdot \mathbf{U}_{kond} = \mathbf{F}_{kond}$ egyenletrendszer megoldásával az elmozdulásvektor: elmozdulásvektor...

A tehervektort pedig az elmozdulásvektor visszahelyettesítésével: tehervektor..

A tehervektor komponenseiből kiolvashatóak a reakcióerők: rekcióerok...

A végeselemes megoldás útján kapott eredmények szinte teljesen megegyeznek a rugalmas szál differenciál egyenletével számolt eredményekkel.

3.2. Lehajlási és nyomatéki függvény meghatározása

Harmadfokú polinommal történik az elmozdulásmező interpolációja. polinom..

Amely egyenletben a konstansok meghatározásához peremfeltételeket írhatunk fel: peremfeltételek...

A lokális mátrixot felírva az egyenletrendszer paramétereit behelyettesítve megkaphatjuk az alábbi vektort: vektor...

3.2.1. A lokális vektorból globálisba történő átalakítás

A végeselemes módszernél a gerendaelemek lehajlását az alábbbi egyenlettel határozhatjuk meg: egyenlet... ahol i = 1,2,3.

A kszi lokális koordinátából az x globális koordinátába való átállás: keplet...

Ez alapján már meghatározhatók a lehajlásfüggvények az egyes gerendaelemekre a globális koordinátarendszerben. Ha ezeket a függvényeket 2x deriváljuk x szerint, akkor keresztmetszet nyomatékfüggvényeit kapjuk: függvények...

A rugalmas szál differenciálegyenletével és a VEM-es módszerrel kapott lehajlásfüggvények közel megegyeznek, annak ellenére hogy a hajlító nyomatéki függvény csak lináris részelemeket tartalmaz.

Lehajlás- és nyomatéki függvény: lehajlási, nyomatéki + ábra

3.3. Relatív hiba számítása

A vk és Mhk értékek az x=c/2 helyen:

- Rugalmas szál differenciálegyenletével kapott értékek

$$salala = asla \tag{11}$$

- VEM-es módszerrel kapott értékek

$$salala = asla \tag{12}$$

A rugalmas szál diff. egyenletére vonatkoztatott relatív hiba: képletek...

Konklúzió melyik minel nagyobb hány százalékkal..