Kötelező házi feladat 1

Tar Dániel
GUTOY7

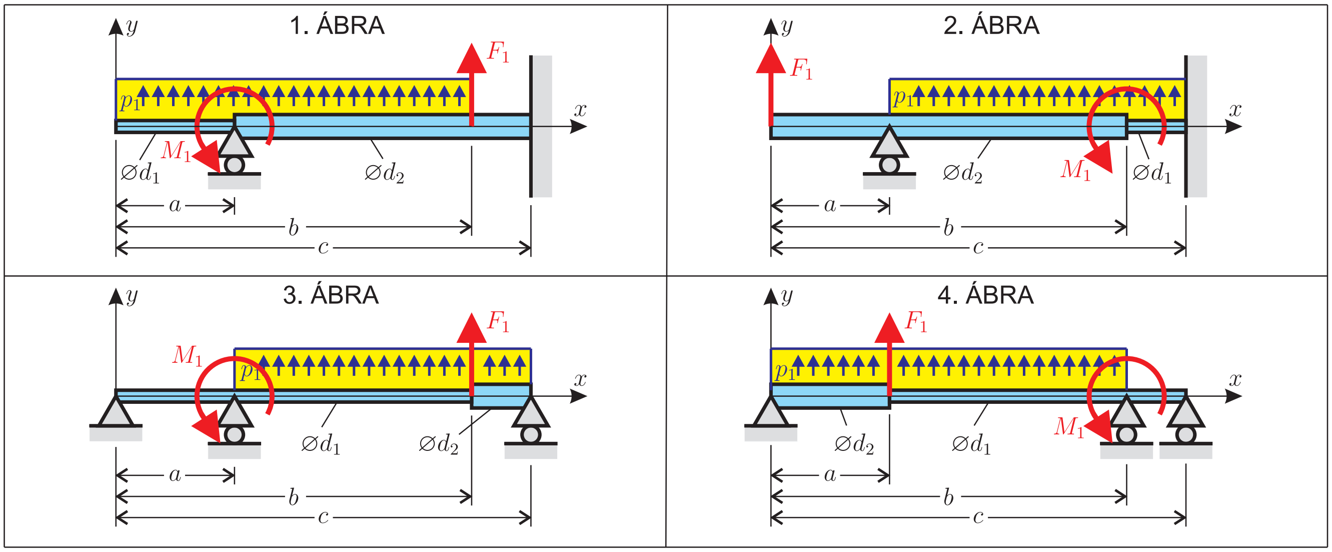
2018. május 25.

MŰEGYETEM 1782

BME Gépészmérnöki Kar	BMEGEMMAGM5	Név: Tar Dániel
Műszaki Mechanikai Tanszék	Végeselem módszer alapjai	NEPTUN-kód: GUTOY7
Félév: 2017/18/02	1. kötelező házi feladat	Aláírás:

	ÁBRA	**KÓD2**	**KÓD3**	**KÓD4**
Feladatkód:	2	1	2	2

Az ábrákon vázolt tartókat a p_1 állandó intenzitású megoszló erőrendszer, az F_1 koncentrált erő és az M_1 koncentrált erőpár terheli. A tartók két különböző átmérőjű ($d_1 = d$, illetve $d_2 = 2d$) kör keresztmetszetű tartókból vannak összeépítve. A tartók anyaga lineárisan rugalmas, homogén, izotrop. A d_1 átmérőjű rész rugalmassági modulusza E, míg a d_2 átmérővel rendelkező részé $E/6$.



1. Készítsen méretarányos ábrát a tartóról a terhelések feltüntetésével!

2. Határozza meg a tartó súlypontvonalának eltolódását leíró $v(x)$ lehajlásfüggvényt, valamint a hajlítónyomatéki igénybevételt leíró $M_h(x)$ függvényt a rugalmas szál differenciálegyenletének felhasználásával! Ábrázolja jelleghelyesen a kapott megoldásokat a jellemző értékek feltüntetésével! Számítsa ki az $x = c/2$ keresztmetszetben a tartó súlypontvonalának eltolódását (v_K) és a hajlító igénybevétel nagyságát (M_{hK})!

3. Határozza meg a $v(x)$ és az $M_h(x)$ függvényeket végeselemes módszerrel! 3 db síkbeli egyenes gerendaelemet használjon! Ábrázolja a kapott megoldásokat a jellemző értékek feltüntetésével! Számítsa ki az $x = c/2$ keresztmetszetben a v_K és M_{hK} értékeket, és határozza meg a relatív hibát a 2. feladatban kapott megoldáshoz képest!

	Feladatkód	**KÓD2**		**KÓD3**			**KÓD4**		
A D		E [GPa]	d [mm]	a [mm]	b [mm]	c [mm]	p_1 [N/m]	F_1 [kN]	M_1 [kNm]
A	1	170	23	220	540	730	2500	4	0,6
T	2	185	27	230	460	610	−2500	−3	−0,75
O	3	200	31	430	550	890	3000	2	0,9
K	4	215	35	330	440	680	−3000	−1	−1,1

EREDMÉNYEK			
Végeselemes módszer			
v_K [mm]	M_{hK} [Nm]	v_K relatív hibája [%]	M_{hK} relatív hibája [%]
0,8096	652,5147	-0,28	-0,54

Tartalomjegyzék

1. Feladat

A házifeladat kód alapján az adatokat átszámolva $[N][m][Pa]$ alapra:

1. táblázat. Adatok

E $[Pa]$	d_1 $[m]$	d_2 $[m]$	a $[m]$	b $[m]$	c $[m]$	p_1 $[N/m]$	F_1 $[N]$	M_1 $[Nm]$
$170 \cdot 10^9$	$23 \cdot 10^{-3}$	$46 \cdot 10^{-3}$	$230 \cdot 10^{-3}$	$460 \cdot 10^{-3}$	$610 \cdot 10^{-3}$	-2500	-3000	-750

Az alapadatokból származtatott adatok (kereszmetszetek felületei, másodrendű nyomatékai):

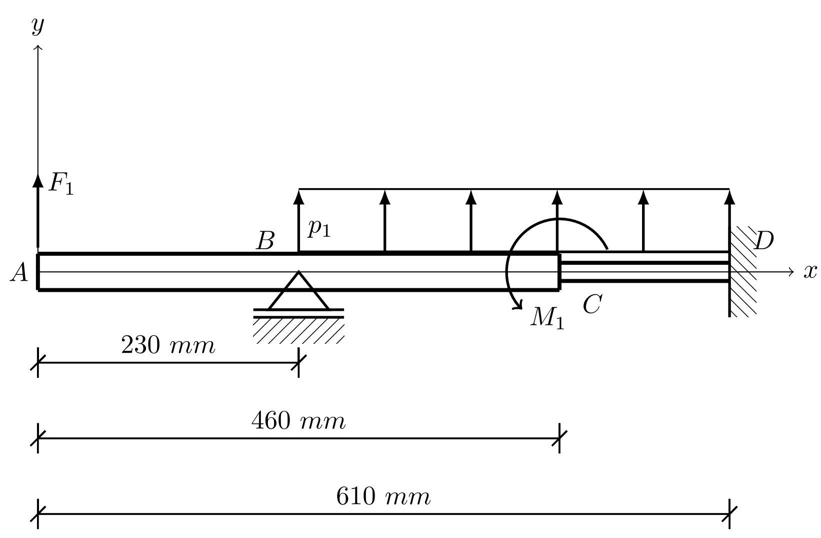
$$A_1 = \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} = 4,1548 \cdot 10^{-4}\ [m^2] \tag{1}$$

$$A_2 = \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} = 16,619 \cdot 10^{-4}\ [m^2] \tag{2}$$

$$I_{z1} = \frac{d_1^4 \cdot \pi}{64} = 1,3737 \cdot 10^{-8}\ [m^4] \tag{3}$$

$$I_{z2} = \frac{d_2^4 \cdot \pi}{64} = 21,9787 \cdot 10^{-8}\ [m^4] \tag{4}$$

A terheléseket arányosan és mindenhol a pozitív irányba vettem fel, hogy megegyezzen a feladatleírásban szereplő ábrával.



1. ábra. Méretarányos ábra és a terhelések

A rekcióerőket az pozitív x, y, és z irányoknak megfelelően vettem fel.

2. Feladat - Rugalmas szál differenciálegyenlete

A rugalmas szál diffrenciálegyenletéhez a hajlítónyomatéki függvények felírása szükséges. A tartót 3 részre osztottam és mind a három tartományra felírhatam a hajlítónyomatéki függvényeket:

2. táblázat. Hajlítonyomatéki függvények

$M_{h1} =$	$-F_1 \cdot x$	$0 \leq x \leq a$
$M_{h2} =$	$-F_1 \cdot x - F_B \cdot (x-a) - p_1 \cdot \frac{(x-a)^2}{2}$	$a \leq x \leq b$
$M_{h3} =$	$-F_1 \cdot x - F_B \cdot (x-a) - p_1 \cdot \frac{(x-a)^2}{2} + M_1$	$b \leq x \leq c$

A rugalmas szál differenciálegyenlete a három tarományra:

$$v_1''[x] = \frac{Mh_1[x]}{I_{z2} \cdot E_2} \tag{5}$$

$$v_2''[x] = \frac{Mh_2[x]}{I_{z2} \cdot E_2} \tag{6}$$

$$v_3''[x] = \frac{Mh_3[x]}{I_{z1} \cdot E_1} \tag{7}$$

A differenciálegyenletek megoldásához illesztési feltételeket, kényszerfelételeket, illetve statikai egyensúlyt leíró egyenleteket is fel kell írni.

Illesztési feltételek:

$$\begin{gathered} \phi_1(a) = \phi_2(a) \\ \phi_2(b) = \phi_3(b) \\ v_1(a) = v_2(a) \\ v_2(b) = v_3(b) \end{gathered}$$

Kényszerek:

$$\begin{gathered} v_1(a) = 0 \\ v_3(c) = 0 \\ \phi_3(c) = 0 \end{gathered}$$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Dx} = 0 \tag{8}$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_1 + F_{By} + p_1 \cdot (c-a) + F_{Dy} = 0 \tag{9}$$

$$\sum M_D = 0: \quad -F_1 \cdot c - F_{By} \cdot (c-a) - p_1 \cdot \frac{(c-a)^2}{2} + M_1 + M_D = 0 \tag{10}$$

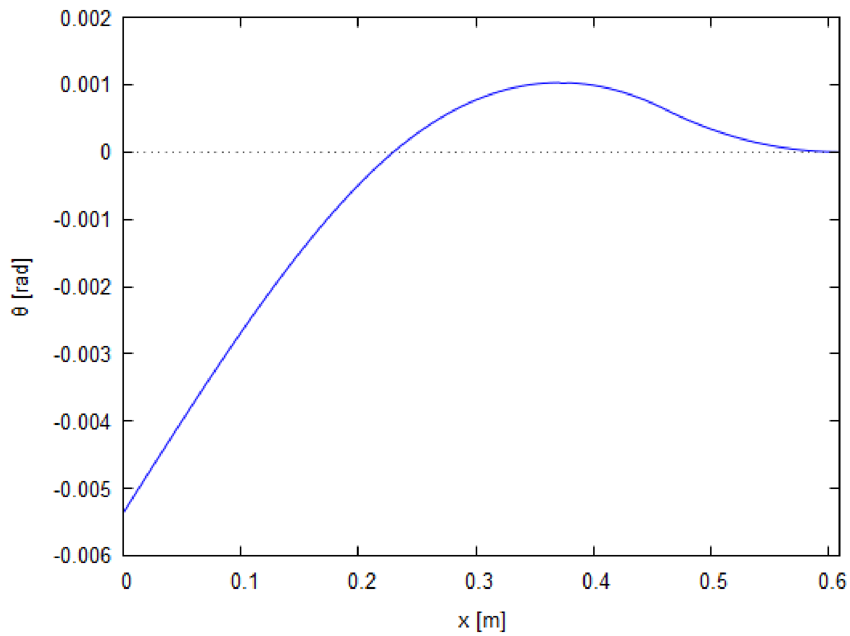
A rugalmas szál differenciálegyenleteiből a lehajlásfüggvényeket kétszeres integrálással kaphatjuk meg.

Az integrálások miatt 6[db] ismeretlen értékű integrálási konstans jelenik meg. Ezen hat ismeretlenen kívül, ismeretlenek még a reakcióerők ($F_{By}, F_{Dx}, F_{Dy}, M_D$). Így egy tíz ismeretlenes egyenletrendszer áll elő, amelyekhez 10 peremfeltételt határoztunk meg. Ennek megfelelően az egyenletrendszerből az összes ismeretlen meghatározható.

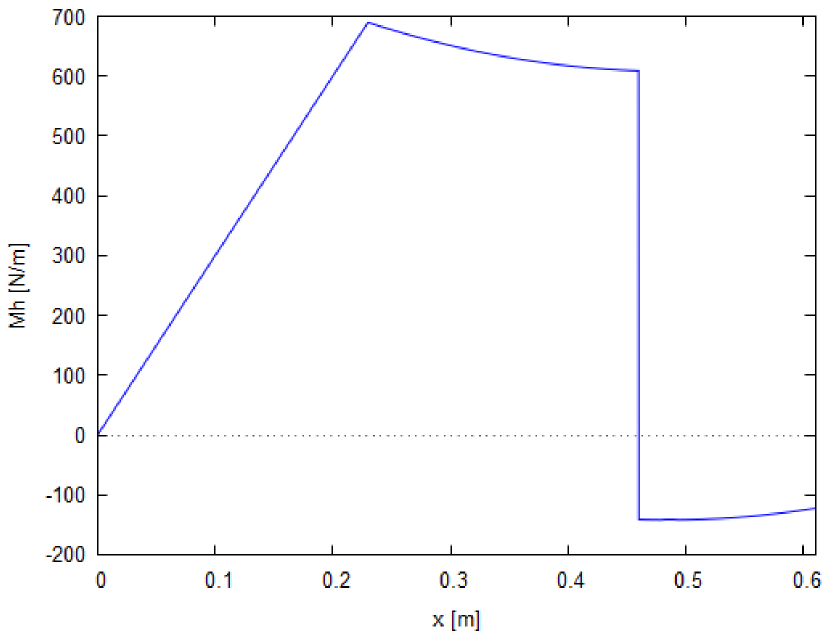
A számolt értékek közül a reakcióerők:

$$F_B = 3639,0266\ [N]$$
$$F_{Dx} = 0\ [N]$$
$$F_{Dy} = 310,9734\ [N]$$
$$M_D = 122,3301\ [Nm]$$

Az érékeket visszahelyettesítve a lehajlás-[2] és hajlítónyomatéki[3] függvényekbe, azokat ábrázolva:



2. ábra. Lehajásfüggvény



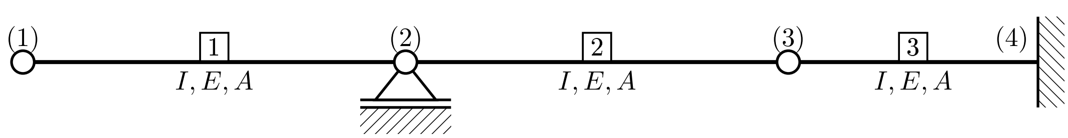
3. ábra. Hajlítónyomatéki függvény

Nevezetes pontokat a WxMaxima fájl tartalmazza.

3. Feladat - Végeselemes megoldás

3.1. A reakcióerők és az elmozdulásvektor meghatározása

A feladat szövege alapján a végeselemes modell:



4. ábra. Végeselemes modell

Elemi merevségi mátrix:

$$K_{e,4\times4} = \frac{I_z \cdot E}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \tag{11}$$

A 3[db] egyenes gerendaelem elemi merevségi mátrixait elhelyezzük a globális merevségi mátrixban a hozzájuk tarozó szabadsági fok összerendelések alapján.

Globális merevségi mátrix:

$$K_{G,8\times 8} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Ahol az általános elmozdulás és tehervektor:

$$\underline{U}^T = [V_1 \quad \Theta_1 \quad V_2 \quad \Theta_2 \quad V_3 \quad \Theta_3 \quad V_4 \quad \Theta_4] \tag{13}$$

$$\underline{F}^T = [f_1 \quad m_1 \quad f_2 \quad m_2 \quad f_3 \quad m_3 \quad f_4 \quad m_4] \tag{14}$$

A tehervektor a koncentrált erők és megoszló terhelések összegeként írható fel. A megoszló erőt a két rúdra külön felírva:

3. táblázat. Tehervektor részei

$$F_{konc} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [SI] \qquad F_{1_{rud_2}} = p_1 \cdot \frac{L_2}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ L_2 \\ 6 \\ -L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [SI] \qquad F_{1_{rud_3}} = p_1 \cdot \frac{L_3}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ L_3 \\ 6 \\ -L_3 \end{bmatrix} [SI]$$

Az elmozdulásvektor megkötött paraméterei alapján kondenzáljuk a globális merevségi mátrixot úgy, hogy a merevségi mátrix oszlopait és sorait töröljük ott ahol az elmozdulásvektor nulla.

A kondenzált merevségi mátrix:

$$K_{G,K,5\times 5} = \begin{bmatrix} K_{G_{11}} & K_{G_{12}} & K_{G_{14}} & K_{G_{15}} & K_{G_{16}} \\ K_{G_{21}} & K_{G_{22}} & K_{G_{24}} & K_{G_{25}} & K_{G_{26}} \\ K_{G_{41}} & K_{G_{42}} & K_{G_{44}} & K_{G_{45}} & K_{G_{46}} \\ K_{G_{51}} & K_{G_{52}} & K_{G_{54}} & K_{G_{55}} & K_{G_{56}} \\ K_{G_{61}} & K_{G_{62}} & K_{G_{64}} & K_{G_{65}} & K_{G_{66}} \end{bmatrix} \tag{15}$$

A kondenzált elmozdulásvektor:

$$\mathbf{U}_{kond} = \begin{bmatrix} V_1 \\ \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ V_3 \\ \Theta_3 \end{bmatrix} [SI] \tag{16}$$

Az így alkotott $\mathbf{K}_{kond} \cdot \mathbf{U}_{kond} = \mathbf{F}_{kond}$ egyenletrendszer megoldásával az elmozdulásvektor:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0.0053 \\ 0.0276 \\ 0 \\ 0.0148 \\ 6.416510^{-4} \\ -0.0088 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [SI] \tag{17}$$

A tehervektort pedig az elmozdulásvektor visszahelyettesítésével:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -3000 \\ 0 \\ 3351.5266 \\ -11.0208 \\ -475 \\ -743.6667 \\ 123.4734 \\ 127.0176 \end{bmatrix} [SI] \tag{18}$$

A tehervektor komponenseiből kiolvashatóak a reakcióerők:

$$\mathbf{F}_{reak} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3639.026588296437 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 310.9734117035641 \\ 122.3301035526437 \end{bmatrix} [SI] \tag{19}$$

A végeselemes megoldás útján kapott eredmények szinte teljesen megegyeznek a rugalmas szál differenciál egyenletével számolt eredményekkel.

3.2. Lehajlási és nyomatéki függvény meghatározása

Harmadfokú polinommal történik az elmozdulásmező interpolációja.

$$w(x) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \tag{20}$$

Amely egyenletben a konstansok meghatározásához peremfeltételeket írhatunk fel:

$$\begin{aligned} w(x=0) &= v_i \\ \frac{dw(x)}{dx}(x=0) &= \Theta_i \\ w(x=L) &= v_j \\ \frac{dw(x)}{dx}(x=L) &= \Theta_j \end{aligned}$$

A lokális mátrixot felírva az egyenletrendszer paramétereit behelyettesítve megkaphatjuk az alábbi vektort:

$$\begin{bmatrix} 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \\ L\,\xi^3 - 2L\,\xi^2 + L\xi \\ 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ L\,\xi^3 - L\,\xi^2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

3.2.1. A lokális vektorból globálisba történő átalakítás

A végeselemes módszernél a gerendaelemek lehajlását az alábbbi egyenlettel határozhatjuk meg:

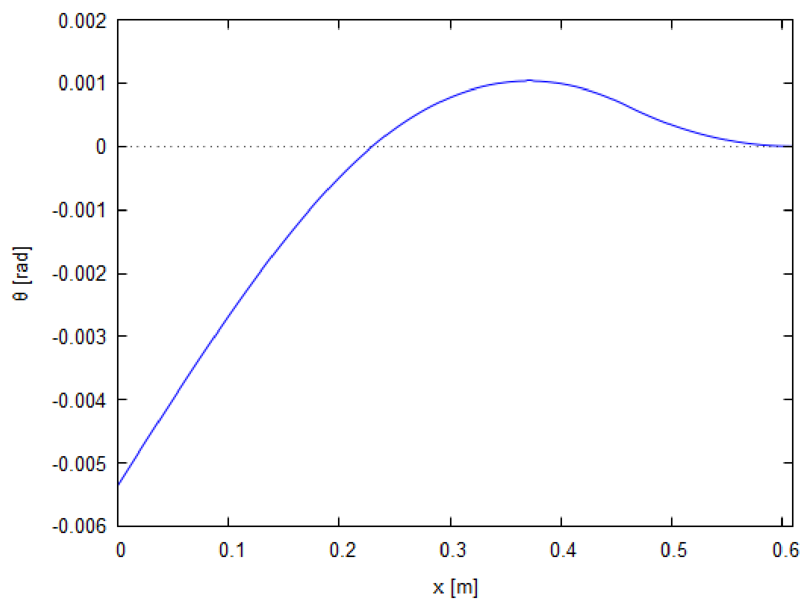
$$v_i[\xi] = N[\xi] \cdot U_i \tag{22}$$

ahol i = 1,2,3.

A ξ lokális koordinátából az x globális koordinátába való átállás:

$$\xi_i = \frac{x - x_i}{L_i} \tag{23}$$

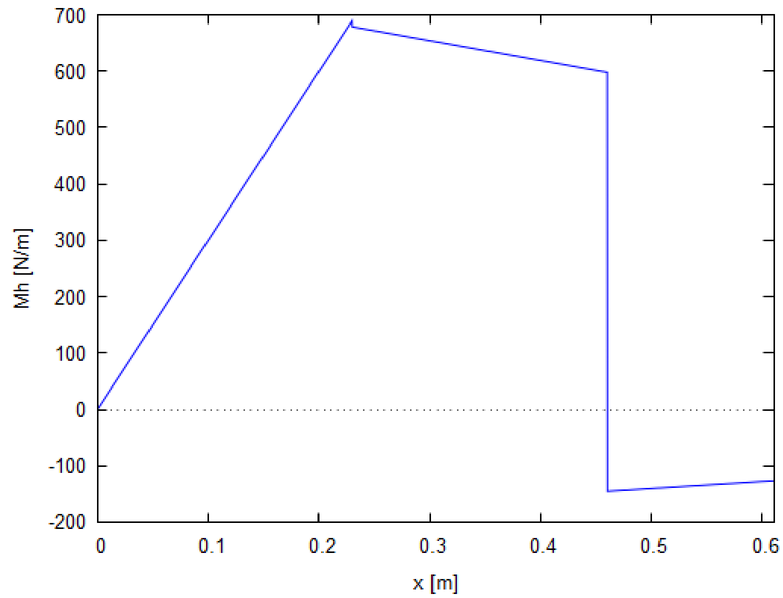
Ez alapján már meghatározhatók a lehajlásfüggvények az egyes gerendaelemekre a globális koordinátarendszerben. Ha ezeket a függvényeket 2x deriváljuk x szerint, akkor keresztmetszet nyomatékfüggvényeit kapjuk, ezeket a függvényeket WxMaxima program segítségével ábrázolva:



5. ábra. Lehajásfüggvény

A rugalmas szál differenciálegyenletével és a VEM-es módszerrel kapott lehajlásfüggvények közel megegyeznek, annak ellenére hogy a hajlító nyomatéki függvény csak lináris részelemeket tartalmaz.

A nevezetes pontokat a WxMaxima fájl tartalmazza.



6. ábra. Hajlítónyomatéki függvény

3.3. Relatív hiba számítása

A v_k és M_{h_k} értékek az $x = c/2$ helyen:

- Rugalmas szál differenciálegyenletével kapott értékek

$$M_{h_{diff}} = 649,1043\ [Nm] \tag{24}$$

$$v_{diff} = 0,8074\ [mm] \tag{25}$$

- VEM-es módszerrel kapott értékek

$$M_{h_{VEM}} = 652,614\ [Nm] \tag{26}$$

$$v_{VEM} = 0,8096\ [mm] \tag{27}$$

A rugalmas szál diff. egyenletére vonatkoztatott relatív hiba:

$$H_{M_{hK}} = \frac{M_{h_{diff}}(\frac{c}{2}) - M_{h_{VEM}}(\frac{c}{2})}{M_{h_{diff}}(\frac{c}{2})} = -0,0054 \ \ => -0,54\% \tag{28}$$

$$H_{v_K} = \frac{v_{diff}(\frac{c}{2}) - v_{VEM}(\frac{c}{2})}{v_{diff}(\frac{c}{2})} = -0,0028 \ \ => -0,28\% \tag{29}$$

A végeselemes módszerrel nagyobb eredményeket kaptam, mint az analitikus módon, bár ez a különbség elhanyagolhatóan kicsi, így plusz biztonsághoz is jutunk vele.