Végeselem módszer alapjai
BMEGEMMAGMV

Kötelező házi feladat 2

Tar Dániel
GUTOY7

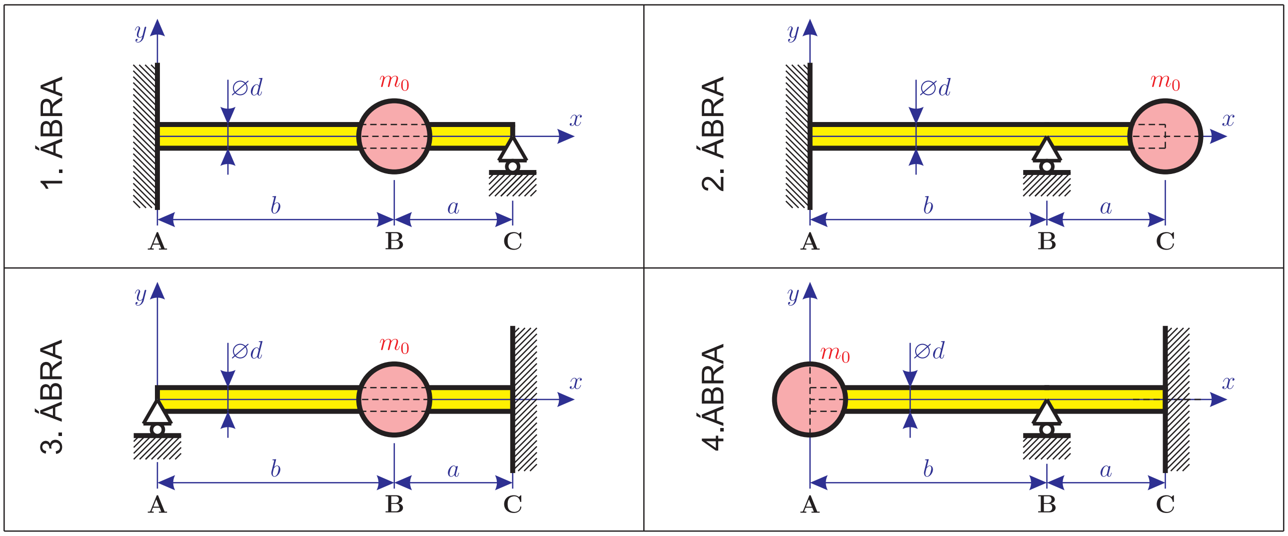
2018. május 4.

MŰEGYETEM 1782

BME Gépészmérnöki Kar	BMEGEMMAGM5	Név: Tar Dániel
Műszaki Mechanikai Tanszék	Végeselem módszer alapjai	NEPTUN-kód: GUTOY7
Félév: 2017/18/02	2. kötelező házi feladat	Aláírás:

	ÁBRA	**KÓD2**	**KÓD3**	**KÓD4**
Feladatkód:	2	1	2	2

A feladatban egy gerenda és egy hozzá rögzített tömeg rezgéseit vizsgáljuk. A gerenda kényszereit és a tömeg elhelyezkedését a megfelelő ábra szemlélteti. A gerenda állandó $\varnothing d$ átmérőjű, kör keresztmetszetű. A tartó anyagának rugalmassági modulusza E, sűrűsége ρ. A tömeg tehetetlenségi nyomatékát elhanyagoljuk.



FELADATOK

1. Készítsen méretarányos ábrát a tartóról a kényszerek feltüntetésével!
2. Az m_0 koncentrált tömeg *elhanyagolásával* határozza meg a gerenda első három hajlító sajátfrekvenciáját ($f_1^{(a)}$, $f_2^{(a)}$, $f_3^{(a)}$) végeselemes módszer alkalmazásával! Az **AB** és **BC** szakaszon is 1 elemet használjon!
3. Az m_0 koncentrált tömeg *elhanyagolásával* határozza meg a gerenda első három hajlító sajátfrekvenciáját ($f_1^{(b)}$, $f_2^{(b)}$, $f_3^{(b)}$) VEM alkalmazásával! Az **AB** szakaszon két egyenlő hosszúságú elemet, míg a **BC** szakaszon 1 elemet használjon!
4. Az m_0 koncentrált tömeg *figyelembevételével* határozza meg a gerenda első három hajlító sajátfrekvenciáját ($f_1^{(c)}$, $f_2^{(c)}$, $f_3^{(c)}$) VEM alkalmazásával! Az **AB** szakaszon két egyenlő hosszúságú elemet, míg a **BC** szakaszon 1 elemet használjon!

Az eredmények ellenőrzéséhez javasolt a tárgy honlapjáról letölthető SIKEREZ program használata.

	Feladatkód	**KÓD2**		**KÓD3**		**KÓD4**	
A D		a [m]	m_0 [kg]	b [m]	d [mm]	E [GPa]	ρ $[\mathrm{kg/m^3}]$
A	1	1.2	15	5	25	170	6000
T	2	1.7	20	6	35	190	6500
O	3	2.1	25	7	45	210	7000
K	4	2.6	30	8	55	230	7500

EREDMÉNYEK

$f_1^{(a)}$ [Hz]	$f_2^{(a)}$ [Hz]	$f_3^{(a)}$ [Hz]	$f_1^{(b)}$ [Hz]	$f_2^{(b)}$ [Hz]	$f_3^{(b)}$ [Hz]	$f_1^{(c)}$ [Hz]	$f_2^{(c)}$ [Hz]	$f_3^{(c)}$ [Hz]

eredmeny1 eredmeny2 eredmeny3 eredmeny4

Tartalomjegyzék

1. Feladat

A házifeladat kód alapján az adatok SI mértékegységrendszerben:

1. táblázat. Adatok

a	m_0	b	d	E	ρ
$[m]$	$[kg]$	$[m]$	$[m]$	$[Pa]$	$[kg/m^3]$
1,2	15	6	35	$190 \cdot 10^3$	6500

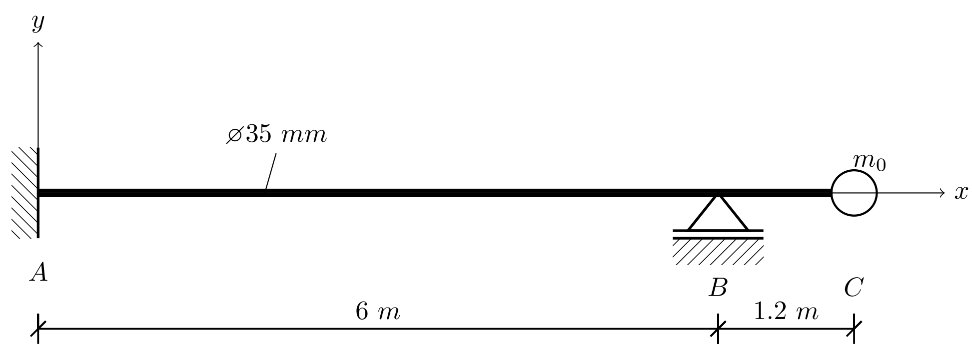
Továbbá a rúd keresztmetszetének a felülete:

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = 9,6211 \cdot 10^{-4} \ [m^2] \tag{1}$$

És a másodrendű nyomatéka:

$$I_z = \frac{d^4 \cdot \pi}{64} = 7,3662 \cdot 10^{-8} \ [m^4] \tag{2}$$

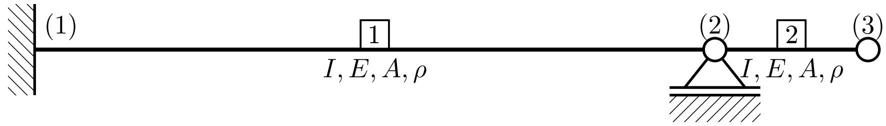
Méretarányos ábra és a kényszerek:



1. ábra.

2. Feladat

2.1. Végeselem modell az m_0 tömeg elhanyagolásával és az AB szakaszon 1 elem használatával



2. ábra.

2.2. A rúdelemek paraméteres elemi mátrixai, és 2x2-es almátrixokkal való helyettesítése

Az elemi merevségi mátrix:

$$K_{e,4\times4} = \frac{I_z \cdot E}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Az elemi tömegmátrix:

$$M_{e,4\times4} = \frac{\rho \cdot A \cdot L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \tag{4}$$

2.3. A globális merevségi- és tömegmátrixok összállítása

Globális merevségi mátrix:

$$K_{G,6\times6} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Globális tömegmátrix mátrix:

$$M_{G,6\times6} = \begin{bmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & 0 \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & M_{12}^{(2)} \\ 0 & M_{21}^{(2)} & M_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{6}$$

2.4. A mátrixok kondenzálása a lekötött szabadsági fokok alapján

Lekötött szabadsági fokok:

$$V_1 = 0 \qquad \Phi_1 = 0 \qquad V_2 = 0$$

Az elmozdulásvektor:

$$U = \begin{bmatrix} V_1 \\ \Phi_1 \\ V_2 \\ \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \tag{7}$$

A kondenzált merevségi mátrix:

$$K_{G,K,3\times3} = \begin{bmatrix} K_{G_{44}} & K_{G_{45}} & K_{G_{46}} \\ K_{G_{54}} & K_{G_{55}} & K_{G_{56}} \\ K_{G_{64}} & K_{G_{65}} & K_{G_{66}} \end{bmatrix} \tag{8}$$

A kondenzált merevségi mátrix:

$$M_{G,K,3\times3} = \begin{bmatrix} M_{G_{44}} & M_{G_{45}} & M_{G_{46}} \\ M_{G_{54}} & M_{G_{55}} & M_{G_{56}} \\ M_{G_{64}} & M_{G_{65}} & M_{G_{66}} \end{bmatrix} \tag{9}$$

A kondenzált elmozdulásvektor:

$$U_K = \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \tag{10}$$

2.5. A sajátkörfrekvenciák számítása az órán tanult képlet segítségével

$$det(K_{G,K} - \omega^2 \cdot M_{G,K}) = 0 \tag{11}$$

A sajátértékenként az ω^2-eket kapjuk, majd ebből a sajátfrekvenciák:

$$f_{1,2,3} = \frac{\omega_{1,2,3}}{2 \cdot \pi} \tag{12}$$

Amivel a sajátfrekvenciák:

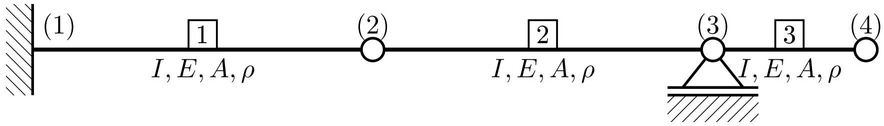
$$f_1^a = 3,7712\ [Hz] \qquad f_2^a = 20,8972\ [Hz] \qquad f_3^a = 182,5774\ [Hz]$$

Az eredményeim 3 tizedesjegyig teljesen megegyeznek a Sikerez nevű programmal számolt adatokkal, csak az utolsó (4.) tizedesjegyben van ±1 eltérés.

A további feladatokat az előző analógiájaként végezhetjük el, az elv ugyan az. Csak a különbségeket és az eredményeket fogom részletezni.

3. Feladat

3.1. Végeselem modell az m_0 tömeg elhanyagolásával és az AB szakaszon 2 elem használatával



3. ábra.

3.2. A rúdelemek paraméteres elemi mátrixai, és 2x2-es almátrixokkal való helyettesítése

Az elemi merevségi mátrix:

$$K_{e,4\times 4} = \frac{I_z \cdot E}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Az elemi tömegmátrix:

$$M_{e,4\times 4} = \frac{\rho \cdot A \cdot L}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \tag{14}$$

3.3. A globális merevségi- és tömegmátrixok összállítása

Globális merevségi mátrix:

$$K_{G,6\times 6} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{15}$$

Globális tömegmátrix mátrix:

$$M_{G,6\times 6} = \begin{bmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & 0 \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & M_{12}^{(2)} \\ 0 & M_{21}^{(2)} & M_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{16}$$

3.4. A mátrixok kondenzálása a lekötött szabadsági fokok alapján

Lekötött szabadsági fokok:

$$V_1 = 0 \qquad \Phi_1 = 0 \qquad V_2 = 0$$

Az elmozdulásvektor:

$$U = \begin{bmatrix} V_1 \\ \Phi_1 \\ V_2 \\ \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \tag{17}$$

A kondenzált merevségi mátrix:

$$K_{G,K,3\times3} = \begin{bmatrix} K_{G_{44}} & K_{G_{45}} & K_{G_{46}} \\ K_{G_{54}} & K_{G_{55}} & K_{G_{56}} \\ K_{G_{64}} & K_{G_{65}} & K_{G_{66}} \end{bmatrix} \tag{18}$$

A kondenzált merevségi mátrix:

$$M_{G,K,3\times3} = \begin{bmatrix} M_{G_{44}} & M_{G_{45}} & M_{G_{46}} \\ M_{G_{54}} & M_{G_{55}} & M_{G_{56}} \\ M_{G_{64}} & M_{G_{65}} & M_{G_{66}} \end{bmatrix} \tag{19}$$

A kondenzált elmozdulásvektor:

$$U_K = \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \tag{20}$$

3.5. A sajátkörfrekvenciák számítása az órán tanult képlet segítségével

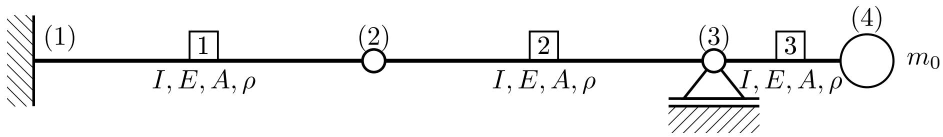
$$det(K_{G,K} - \omega^2 \cdot M_{G,K}) = 0 \tag{21}$$

A sajátértékenként az ω^2-eket kapjuk, majd ebből a sajátfrekvenciák:

$$f_{1,2,3} = \frac{\omega_{1,2,3}}{2 \cdot \pi} \tag{22}$$

Amivel a sajátfrekvenciák:

$$f_1^a = 1,6197\,[Hz] \qquad f_2^a = 7,6607\,[Hz] \qquad f_3^a = 30,4388\,[Hz]$$



4. ábra.

4. Feladat

4.1. Végeselem modell az AB szakaszon 2 elem használatával:

4.2. A rúdelemek paraméteres elemi mátrixai, és 2x2-es almátrixokkal való helyettesítése

Az elemi merevségi mátrix:

$$K_{e,4\times4} = \frac{I_z \cdot E}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Az elemi tömegmátrix:

$$M_{e,4\times4} = \frac{\rho \cdot A \cdot L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \tag{24}$$

4.3. A globális merevségi- és tömegmátrixok összállítása

Globális merevségi mátrix:

$$K_{G,6\times6} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Globális tömegmátrix mátrix:

$$M_{G,6\times6} = \begin{bmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & 0 \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & M_{12}^{(2)} \\ 0 & M_{21}^{(2)} & M_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{26}$$

4.4. A mátrixok kondenzálása a lekötött szabadsági fokok alapján

Lekötött szabadsági fokok:

$$V_1 = 0 \qquad \Phi_1 = 0 \qquad V_2 = 0$$

Az elmozdulásvektor:

$$U = \begin{bmatrix} V_1 \\ \Phi_1 \\ V_2 \\ \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \tag{27}$$

A kondenzált merevségi mátrix:

$$K_{G,K,3\times3} = \begin{bmatrix} K_{G_{44}} & K_{G_{45}} & K_{G_{46}} \\ K_{G_{54}} & K_{G_{55}} & K_{G_{56}} \\ K_{G_{64}} & K_{G_{65}} & K_{G_{66}} \end{bmatrix} \tag{28}$$

A kondenzált merevségi mátrix:

$$M_{G,K,3\times3} = \begin{bmatrix} M_{G_{44}} & M_{G_{45}} & M_{G_{46}} \\ M_{G_{54}} & M_{G_{55}} & M_{G_{56}} \\ M_{G_{64}} & M_{G_{65}} & M_{G_{66}} \end{bmatrix} \tag{29}$$

A kondenzált elmozdulásvektor:

$$U_K = \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \tag{30}$$

4.5. A sajátkörfrekvenciák számítása az órán tanult képlet segítségével

$$det(K_{G,K} - \omega^2 \cdot M_{G,K}) = 0 \tag{31}$$

A sajátértékenként az ω^2-eket kapjuk, majd ebből a sajátfrekvenciák:

$$f_{1,2,3} = \frac{\omega_{1,2,3}}{2 \cdot \pi} \tag{32}$$

Amivel a sajátfrekvenciák:

$$f_1^a = 1,6197\,[Hz] \qquad f_2^a = 7,6607\,[Hz] \qquad f_3^a = 30,4388\,[Hz]$$