Kötelező házi feladat 2

Tar Dániel
GUTOY7

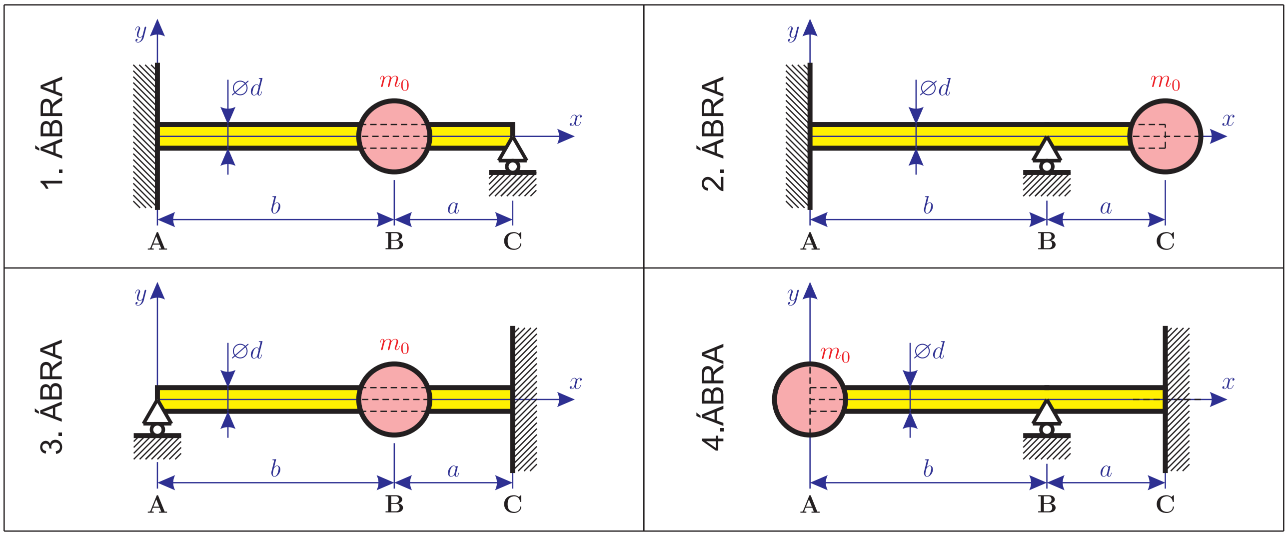
2018. május 17.

MŰEGYETEM 1782

BME Gépészmérnöki Kar	BMEGEMMAGM5	Név:	Tar Dániel
Műszaki Mechanikai Tanszék	Végeselem módszer alapjai	NEPTUN-kód:	GUTOY7
Félév: 2017/18/02	2. kötelező házi feladat	Aláírás:	

	ÁBRA	**KÓD2**	**KÓD3**	**KÓD4**
Feladatkód:	2	1	2	2

A feladatban egy gerenda és egy hozzá rögzített tömeg rezgéseit vizsgáljuk. A gerenda kényszereit és a tömeg elhelyezkedését a megfelelő ábra szemlélteti. A gerenda állandó $\varnothing d$ átmérőjű, kör keresztmetszetű. A tartó anyagának rugalmassági modulusza E, sűrűsége ρ. A tömeg tehetetlenségi nyomatékát elhanyagoljuk.



FELADATOK

1. Készítsen méretarányos ábrát a tartóról a kényszerek feltüntetésével!
2. Az m_0 koncentrált tömeg *elhanyagolásával* határozza meg a gerenda első három hajlító sajátfrekvenciáját ($f_1^{(a)}$, $f_2^{(a)}$, $f_3^{(a)}$) végeselemes módszer alkalmazásával! Az **AB** és **BC** szakaszon is 1 elemet használjon!
3. Az m_0 koncentrált tömeg *elhanyagolásával* határozza meg a gerenda első három hajlító sajátfrekvenciáját ($f_1^{(b)}$, $f_2^{(b)}$, $f_3^{(b)}$) VEM alkalmazásával! Az **AB** szakaszon két egyenlő hosszúságú elemet, míg a **BC** szakaszon 1 elemet használjon!
4. Az m_0 koncentrált tömeg *figyelembevételével* határozza meg a gerenda első három hajlító sajátfrekvenciáját ($f_1^{(c)}$, $f_2^{(c)}$, $f_3^{(c)}$) VEM alkalmazásával! Az **AB** szakaszon két egyenlő hosszúságú elemet, míg a **BC** szakaszon 1 elemet használjon!

Az eredmények ellenőrzéséhez javasolt a tárgy honlapjáról letölthető SIKEREZ program használata.

	Feladatkód	**KÓD2**		**KÓD3**		**KÓD4**	
A D		a [m]	m_0 [kg]	b [m]	d [mm]	E [GPa]	ρ $\left[\mathrm{kg/m^3}\right]$
A	1	1.2	15	5	25	170	6000
T	2	1.7	20	6	35	190	6500
O	3	2.1	25	7	45	210	7000
K	4	2.6	30	8	55	230	7500

EREDMÉNYEK

$f_1^{(a)}$ [Hz]	$f_2^{(a)}$ [Hz]	$f_3^{(a)}$ [Hz]	$f_1^{(b)}$ [Hz]	$f_2^{(b)}$ [Hz]	$f_3^{(b)}$ [Hz]	$f_1^{(c)}$ [Hz]	$f_2^{(c)}$ [Hz]	$f_3^{(c)}$ [Hz]

Tartalomjegyzék

1. Feladat

A házifeladat kód alapján az adatok SI mértékegységrendszerben:

1. táblázat. Adatok

a	m_0	b	d	E	ρ
$[m]$	$[kg]$	$[m]$	$[m]$	$[Pa]$	$[kg/m^3]$
1,2	15	6	$35 \cdot 10{-}3$	$190 \cdot 10^9$	6500

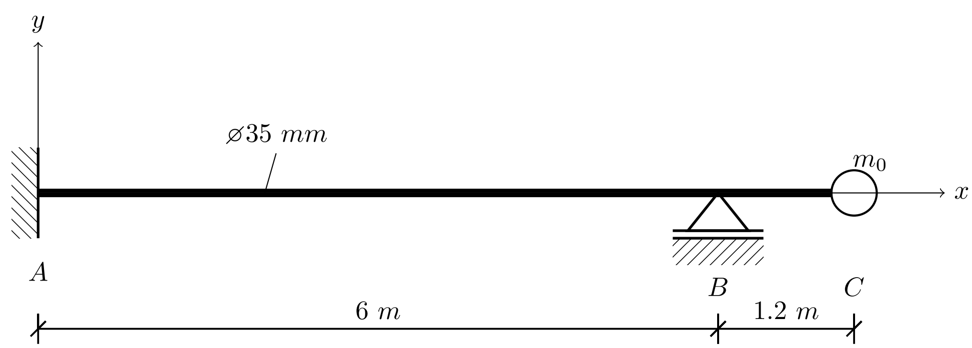
Továbbá a rúd keresztmetszetének a felülete:

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = 9,6211 \cdot 10^{-4} \ [m^2] \quad (1)$$

És a másodrendű nyomatéka:

$$I_z = \frac{d^4 \cdot \pi}{64} = 7,3662 \cdot 10^{-8} \ [m^4] \quad (2)$$

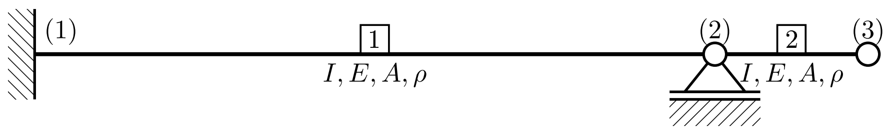
Méretarányos ábra és a kényszerek:



1. ábra.

2. Feladat

2.1. Végeselem modell az m_0 tömeg elhanyagolásával és az AB szakaszon 1 elem használatával



2. ábra.

2.2. A rúdelemek paraméteres elemi mátrixai, és 2x2-es almátrixokkal való helyettesítése

Az elemi merevségi mátrix:

$$K_{e,4\times4} = \frac{I_z \cdot E}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Az elemi tömegmátrix:

$$M_{e,4\times4} = \frac{\rho \cdot A \cdot L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \tag{4}$$

2.3. A globális merevségi- és tömegmátrixok összállítása

Globális merevségi mátrix:

$$K_{G,6\times6} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Globális tömegmátrix mátrix:

$$M_{G,6\times6} = \begin{bmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & 0 \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & M_{12}^{(2)} \\ 0 & M_{21}^{(2)} & M_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{6}$$

2.4. A mátrixok kondenzálása a lekötött szabadsági fokok alapján

Lekötött szabadsági fokok:

$$V_1 = 0 \qquad \Phi_1 = 0 \qquad V_2 = 0$$

Az elmozdulásvektor:

$$U = \begin{bmatrix} V_1 \\ \Phi_1 \\ V_2 \\ \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \tag{7}$$

A kondenzált merevségi mátrix:

$$K_{G,K,3\times3} = \begin{bmatrix} K_{G_{44}} & K_{G_{45}} & K_{G_{46}} \\ K_{G_{54}} & K_{G_{55}} & K_{G_{56}} \\ K_{G_{64}} & K_{G_{65}} & K_{G_{66}} \end{bmatrix} \tag{8}$$

A kondenzált tömegmátrix:

$$M_{G,K,3\times3} = \begin{bmatrix} M_{G_{44}} & M_{G_{45}} & M_{G_{46}} \\ M_{G_{54}} & M_{G_{55}} & M_{G_{56}} \\ M_{G_{64}} & M_{G_{65}} & M_{G_{66}} \end{bmatrix} \tag{9}$$

A kondenzált elmozdulásvektor:

$$U_K = \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \tag{10}$$

2.5. A sajátkörfrekvenciák számítása az órán tanult képlet segítségével

$$det(K_{G,K} - \omega^2 \cdot M_{G,K}) = 0 \tag{11}$$

A sajátértékenként az ω^2-eket kapjuk, majd ebből a sajátfrekvenciák:

$$f_{1,2,3} = \frac{\omega_{1,2,3}}{2 \cdot \pi} \tag{12}$$

Amivel a sajátfrekvenciák:

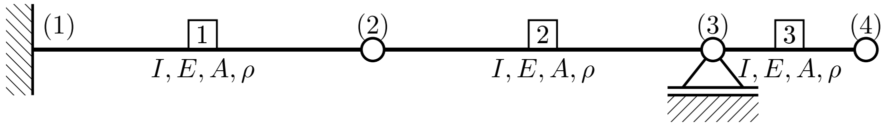
$$f_1^a = 3,7712\ [Hz] \qquad f_2^a = 20,8972\ [Hz] \qquad f_3^a = 182,5774\ [Hz]$$

Az eredményeim 3 tizedesjegyig teljesen megegyeznek a Sikerez nevű programmal számolt adatokkal, csak az utolsó (4.) tizedesjegyben van ±1 eltérés.

A további feladatokat az előző analógiájaként végezhetjük el, az elv ugyan az. Csak a különbségeket és az eredményeket fogom részletezni.

3. Feladat

3.1. Végeselem modell az m_0 tömeg elhanyagolásával és az AB szakaszon 2 elem használatával



3. ábra.

3.2. A rúdelemek paraméteres elemi mátrixai, és 2x2-es almátrixokkal való helyettesítése

Lásd a 2.2-es pontnál.

3.3. A globális merevségi- és tömegmátrixok összállítása

Globális merevségi mátrix:

$$K_{G,8\times8} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Globális tömegmátrix:

$$M_{G,8\times8} = \begin{bmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & M_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & M_{21}^{(2)} & M_{22}^{(2)} + M_{11}^{(3)} & M_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & M_{21}^{(3)} & M_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \tag{14}$$

3.4. A mátrixok kondenzálása a lekötött szabadsági fokok alapján

Lekötött szabadsági fokok:

$$V_1 = 0 \qquad \Phi_1 = 0 \qquad V_3 = 0$$

Az elmozdulásvektor:

$$U = \begin{bmatrix} V_1 \\ \Phi_1 \\ V_2 \\ \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \\ V_4 \\ \Phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V_2 \\ \Phi_2 \\ 0 \\ \Phi_3 \\ V_4 \\ \Phi_4 \end{bmatrix} \tag{15}$$

A kondenzált merevségi mátrix:

$$K_{G,K,5\times5} = \begin{bmatrix} K_{G_{33}} & K_{G_{34}} & K_{G_{36}} & K_{G_{37}} & K_{G_{38}} \\ K_{G_{43}} & K_{G_{44}} & K_{G_{46}} & K_{G_{47}} & K_{G_{48}} \\ K_{G_{63}} & K_{G_{64}} & K_{G_{66}} & K_{G_{67}} & K_{G_{68}} \\ K_{G_{73}} & K_{G_{74}} & K_{G_{76}} & K_{G_{77}} & K_{G_{78}} \\ K_{G_{83}} & K_{G_{84}} & K_{G_{86}} & K_{G_{87}} & K_{G_{88}} \end{bmatrix} \tag{16}$$

A kondenzált tömegmátrix:

$$M_{G,M,5\times5} = \begin{bmatrix} M_{G_{33}} & M_{G_{34}} & M_{G_{36}} & M_{G_{37}} & M_{G_{38}} \\ M_{G_{43}} & M_{G_{44}} & M_{G_{46}} & M_{G_{47}} & M_{G_{48}} \\ M_{G_{63}} & M_{G_{64}} & M_{G_{66}} & M_{G_{67}} & M_{G_{68}} \\ M_{G_{73}} & M_{G_{74}} & M_{G_{76}} & M_{G_{77}} & M_{G_{78}} \\ M_{G_{83}} & M_{G_{84}} & M_{G_{86}} & M_{G_{87}} & M_{G_{88}} \end{bmatrix} \tag{17}$$

A kondenzált elmozdulásvektor:

$$U_K = \begin{bmatrix} V_2 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ V_4 \\ \Phi_4 \end{bmatrix} \tag{18}$$

3.5. A sajátkörfrekvenciák számítása az órán tanult képlet segítségével

$$det(K_{G,K} - \omega^2 \cdot M_{G,K}) = 0 \tag{19}$$

A sajátértékenként az ω^2-eket kapjuk, majd ebből a sajátfrekvenciák:

$$f_{1,2,3} = \frac{\omega_{1,2,3}}{2 \cdot \pi} \tag{20}$$

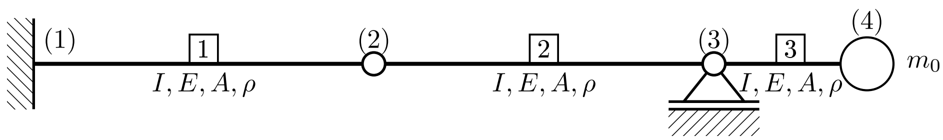
Amivel a sajátfrekvenciák:

$$f_1^b = 3,1038\ [Hz] \qquad f_2^b = 8,8729\ [Hz] \qquad f_3^b = 17,4725\ [Hz]$$

Az eredményeim 3 tizedesjegyig teljesen megegyeznek a Sikerez nevű programmal számolt adatokkal, csak az utolsó (4.) tizedesjegyben van ±1 eltérés.

4. Feladat

4.1. Végeselem modell az AB szakaszon 2 elem használatával:



4. ábra.

4.2. A rúdelemek paraméteres elemi mátrixai, és 2x2-es almátrixokkal való helyettesítése

Lásd a 2.2-es pontnál.

4.3. A globális merevségi- és tömegmátrixok összállítása

Globális merevségi mátrix:

$$K_{G,8\times8} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \tag{21}$$

Globális tömegmátrix mátrix:

$$M_{G,8\times8} = \begin{bmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & M_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & M_{21}^{(2)} & M_{22}^{(2)} + M_{11}^{(3)} & M_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & M_{21}^{(3)} & M_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \tag{22}$$

A globális merevségi mátrixhoz hozzá kell adnunk a tömeget is, úgy, hogy elhanyagoljuk a nyomatékát. A tömeg a (4)-es pontban található, ezért a globális tömegmátrix [7,7] eleméhez adjuk hozzá:

$$M_G[7,7] = M_G[7,7] + m_0 \tag{23}$$

4.4. A mátrixok kondenzálása a lekötött szabadsági fokok alapján

Lekötött szabadsági fokok, és a kondenzálás folyamata ugyon az mint a 3.4-es feladatnál.

4.5. A sajátkörfrekvenciák számítása az órán tanult képlet segítségével

$$det(K_{G,K} - \omega^2 \cdot M_{G,K}) = 0 \tag{24}$$

A sajátértékenként az ω^2-eket kapjuk, majd ebből a sajátfrekvenciák:

$$f_{1,2,3} = \frac{\omega_{1,2,3}}{2 \cdot \pi} \tag{25}$$

Amivel a sajátfrekvenciák:

$$f_1^c = 2,2813\ [Hz] \qquad f_2^c = 5,0735\ [Hz] \qquad f_c^b = 15,1727\ [Hz]$$

Az eredményeim 3 tizedesjegyig teljesen megegyeznek a Sikerez nevű programmal számolt adatokkal, csak az utolsó (4.) tizedesjegyben van ± 1 eltérés.