



## Kötelező házi feladat 2

Tar Dániel  
GUTOY7

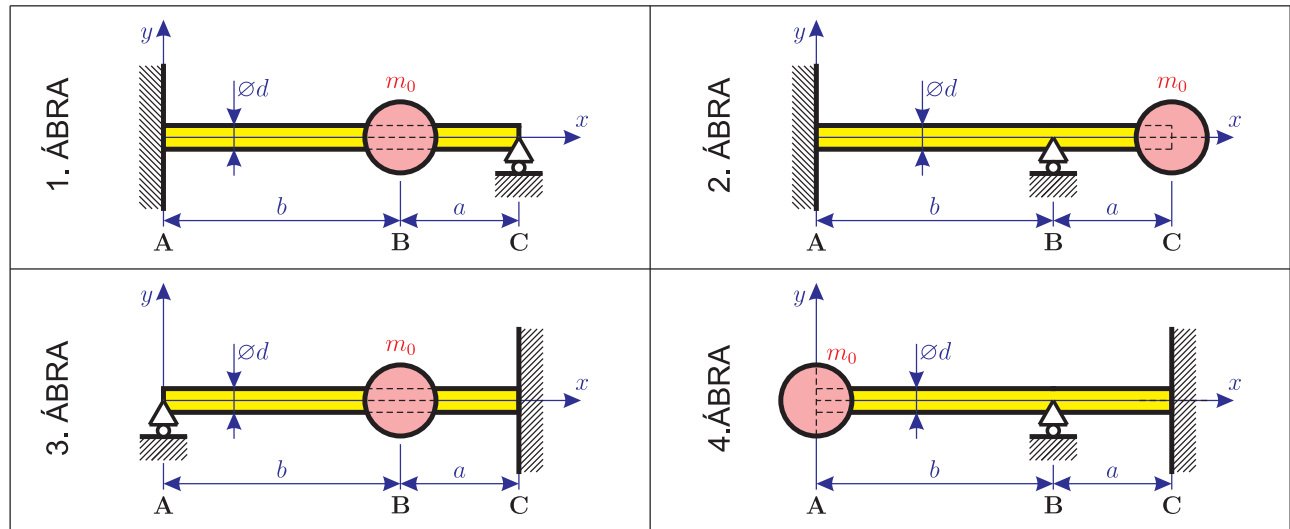
2018. május 2.



BME Gépészmérnöki Kar	BMEGEMMAGM5	Név:	Tar Dániel
Műszaki Mechanikai Tanszék	Végeselem módszer alapjai	NEPTUN-kód:	GUTOY7
Félév: 2017/18/02	2. kötelező házi feladat	Aláírás:	

	ÁBRA	KÓD2	KÓD3	KÓD4
Feladatkód:	2	1	2	2

A feladatban egy gerenda és egy hozzá rögzített tömeg rezgéseit vizsgáljuk. A gerenda kényszereit és a tömeg elhelyezkedését a megfelelő ábra szemlélteti. A gerenda állandó  $\varnothing d$  átmérőjű, kör keresztmetszetű. A tartó anyagának rugalmassági modulusza  $E$ , sűrűsége  $\rho$ . A tömeg tehetetlenségi nyomatékát elhanyagoljuk.



### FELADATOK

- Készítsen méretarányos ábrát a tartóról a kényszerek feltüntetésével!
- Az  $m_0$  koncentrált tömeg *elhanyagolásával* határozza meg a gerenda első három hajlító sajátfrekvenciáját ( $f_1^{(a)}$ ,  $f_2^{(a)}$ ,  $f_3^{(a)}$ ) végeselemes módszer alkalmazásával! Az **AB** és **BC** szakaszon is 1 elemet használjon!
- Az  $m_0$  koncentrált tömeg *elhanyagolásával* határozza meg a gerenda első három hajlító sajátfrekvenciáját ( $f_1^{(b)}$ ,  $f_2^{(b)}$ ,  $f_3^{(b)}$ ) VEM alkalmazásával! Az **AB** szakaszon két egyenlő hosszúságú elemet, míg a **BC** szakaszon 1 elemet használjon!
- Az  $m_0$  koncentrált tömeg *figyelembevételével* határozza meg a gerenda első három hajlító sajátfrekvenciáját ( $f_1^{(c)}$ ,  $f_2^{(c)}$ ,  $f_3^{(c)}$ ) VEM alkalmazásával! Az **AB** szakaszon két egyenlő hosszúságú elemet, míg a **BC** szakaszon 1 elemet használjon!

Az eredmények ellenőrzéséhez javasolt a tárgy honlapjáról letölthető SIKEREZ program használata.

A D A T O K	Feladatkód	KÓD2		KÓD3		KÓD4	
		$a$ [m]	$m_0$ [kg]	$b$ [m]	$d$ [mm]	$E$ [GPa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
	1	1.2	15	5	25	170	6000
	2	1.7	20	6	35	190	6500
	3	2.1	25	7	45	210	7000
	4	2.6	30	8	55	230	7500

### EREDMÉNYEK

$f_1^{(a)}$ [Hz]	$f_2^{(a)}$ [Hz]	$f_3^{(a)}$ [Hz]	$f_1^{(b)}$ [Hz]	$f_2^{(b)}$ [Hz]	$f_3^{(b)}$ [Hz]	$f_1^{(c)}$ [Hz]	$f_2^{(c)}$ [Hz]	$f_3^{(c)}$ [Hz]

eredmeny1

eredmeny2

eredmeny3

eredmeny4

# Tartalomjegyzék

<b>1. Feladat</b>	<b>1</b>
<b>2. Feladat</b>	<b>2</b>
2.1. Végeelem modell az $m_0$ tömeg elhanyagolásával és az <b>AB</b> szakaszon 1 elem használatával . . . . .	2
2.2. A rúdelemek paraméteres elemi mátrixai, és 2x2-es almátrixokkal való helyettesítése . . . . .	2
2.3. A globális merevségi- és tömegmátrixok összeállítása . . . . .	2
2.4. A mátrixok kondenzálása a lekötött szabadsági fokok alapján . .	3
2.5. A sajátkörfrekvenciák számítása az órán tanult képlet segítségével	3
<b>3. Feladat</b>	<b>4</b>
3.0.1. Végeelem modell az $m_0$ tömeg elhanyagolásával és az <b>AB</b> szakaszon 2 elem használatával . . . . .	4
3.1. A rúdelemek paraméteres elemi mátrixai, és 2x2-es almátrixokkal való helyettesítése . . . . .	4
3.2. A globális merevségi- és tömegmátrixok összeállítása . . . . .	4
3.3. A mátrixok kondenzálása a lekötött szabadsági fokok alapján . .	5
3.4. A sajátkörfrekvenciák számítása az órán tanult képlet segítségével	5
<b>4. Feladat</b>	<b>6</b>
4.1. Végeelem modell az <b>AB</b> szakaszon 2 elem használatával: . . . .	6
4.2. A rúdelemek paraméteres elemi mátrixai, és 2x2-es almátrixokkal való helyettesítése . . . . .	6
4.3. A globális merevségi- és tömegmátrixok összeállítása . . . . .	6
4.4. A mátrixok kondenzálása a lekötött szabadsági fokok alapján . .	6
4.5. A sajátkörfrekvenciák számítása az órán tanult képlet segítségével	7

## 1. Feladat

A házifeladat kód alapján az adatok SI mértékegységrendszerben:

1. táblázat. Adatok					
$a$	$m_0$	$b$	$d$	$E$	$\rho$
$[m]$	$[kg]$	$[m]$	$[m]$	$[Pa]$	$[kg/m^3]$
1,2	15	6	35	$190 \cdot 10^3$	6500

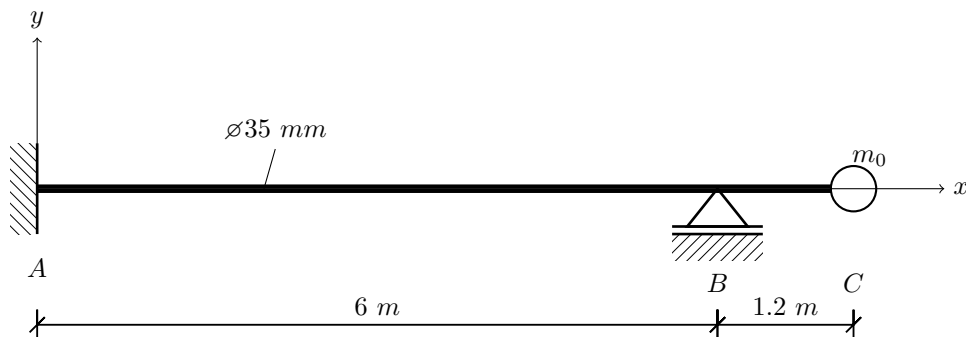
Továbbá a rúd keresztmetszetének a felülete:

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = 9,6211 \cdot 10^{-4} [m^2] \quad (1)$$

És a másodrendű nyomatéka:

$$I_z = \frac{d^4 \cdot \pi}{64} = 7,3662 \cdot 10^{-8} [m^4] \quad (2)$$

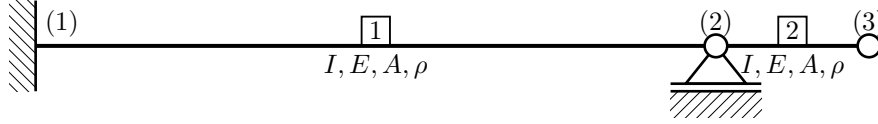
Méretarányos ábra és a kényszerek:



1. ábra.

## 2. Feladat

### 2.1. Végeselem modell az $m_0$ tömeg elhanyagolásával és az AB szakaszon 1 elem használatával



2. ábra.

### 2.2. A rúdelemek paraméteres elemi mátrixai, és 2x2-es al-mátrixokkal való helyettesítése

Az elemi merevségi mátrix:

$$K_{e,4 \times 4} = \frac{I_z \cdot E}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Az elemi tömegmátrix:

$$M_{e,4 \times 4} = \frac{\rho \cdot A \cdot L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

### 2.3. A globális merevségi- és tömegmátrixok összeállítása

Globális merevségi mátrix:

$$K_{G,6 \times 6} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Globális tömegmátrix mátrix:

$$M_{G,6 \times 6} = \begin{bmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & 0 \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & M_{12}^{(2)} \\ 0 & M_{21}^{(2)} & M_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

## 2.4. A mátrixok kondenzálása a lekötött szabadsági fokok alapján

Lekötött szabadsági fokok:

$$V_1 = 0 \quad \Phi_1 = 0 \quad V_2 = 0$$

Az elmozdulásvektor:

$$U = \begin{bmatrix} V_1 \\ \Phi_1 \\ V_2 \\ \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

A kondenzált merevségi mátrix:

$$K_{G,K,3 \times 3} = \begin{bmatrix} K_{G_{44}} & K_{G_{45}} & K_{G_{46}} \\ K_{G_{54}} & K_{G_{55}} & K_{G_{56}} \\ K_{G_{64}} & K_{G_{65}} & K_{G_{66}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

A kondenzált merevségi mátrix:

$$M_{G,K,3 \times 3} = \begin{bmatrix} M_{G_{44}} & M_{G_{45}} & M_{G_{46}} \\ M_{G_{54}} & M_{G_{55}} & M_{G_{56}} \\ M_{G_{64}} & M_{G_{65}} & M_{G_{66}} \end{bmatrix} \quad (9)$$

A kondenzált elmozdulásvektor:

$$U_K = \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

## 2.5. A sajátkörfrekvenciák számítása az órán tanult képlet segítségével

$$\det(K_{G,K} - \omega^2 \cdot M_{G,K}) = 0 \quad (11)$$

A sajátértékeként az  $\omega^2$ -eket kapjuk, majd ebből a sajátfrekvenciák:

$$f_{1,2,3} = \frac{\omega_{1,2,3}}{2 \cdot \pi} \quad (12)$$

Amivel a sajátfrekvenciák:

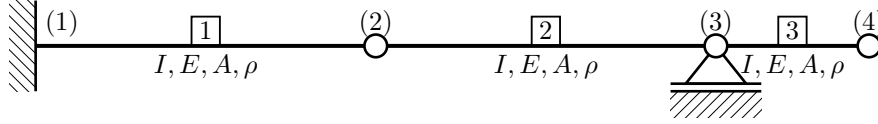
$$f_1^a = 1,6197 [Hz] \quad f_2^a = 7,6607 [Hz] \quad f_3^a = 30,4388 [Hz]$$

!!TODO: sikerz ellenőrzés és eredmények kijavítása, eredmények ellenőrzése.

A további feladatokat az előző analógiájaként végezhetjük el, az elv ugyan az. Csak a különbségeket és az eredményeket fogom részletezni.

### 3. Feladat

#### 3.1. Végeselem modell az $m_0$ tömeg elhanyagolásával és az AB szakaszon 2 elem használatával



3. ábra.

#### 3.2. A rúdelemek paraméteres elemi mátrixai, és 2x2-es al-mátrixokkal való helyettesítése

Az elemi merevségi mátrix:

$$K_{e,4 \times 4} = \frac{I_z \cdot E}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Az elemi tömegmátrix:

$$M_{e,4 \times 4} = \frac{\rho \cdot A \cdot L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (14)$$

#### 3.3. A globális merevségi- és tömegmátrixok összeállítása

Globális merevségi mátrix:

$$K_{G,6 \times 6} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Globális tömegmátrix mátrix:

$$M_{G,6 \times 6} = \begin{bmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & 0 \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & M_{12}^{(2)} \\ 0 & M_{21}^{(2)} & M_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

### 3.4. A mátrixok kondenzálása a lekötött szabadsági fokok alapján

Lekötött szabadsági fokok:

$$V_1 = 0 \quad \Phi_1 = 0 \quad V_2 = 0$$

Az elmozdulásvektor:

$$U = \begin{bmatrix} V_1 \\ \Phi_1 \\ V_2 \\ \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

A kondenzált merevségi mátrix:

$$K_{G,K,3 \times 3} = \begin{bmatrix} K_{G44} & K_{G45} & K_{G46} \\ K_{G54} & K_{G55} & K_{G56} \\ K_{G64} & K_{G65} & K_{G66} \end{bmatrix} \quad (18)$$

A kondenzált merevségi mátrix:

$$M_{G,K,3 \times 3} = \begin{bmatrix} M_{G44} & M_{G45} & M_{G46} \\ M_{G54} & M_{G55} & M_{G56} \\ M_{G64} & M_{G65} & M_{G66} \end{bmatrix} \quad (19)$$

A kondenzált elmozdulásvektor:

$$U_K = \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

### 3.5. A sajátkörfrekvenciák számítása az órán tanult képlet segítségével

$$\det(K_{G,K} - \omega^2 \cdot M_{G,K}) = 0 \quad (21)$$

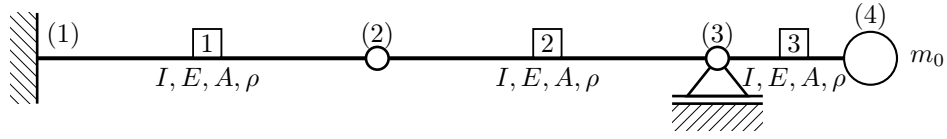
A sajátértékeként az  $\omega^2$ -eket kapjuk, majd ebből a sajátfrekvenciák:

$$f_{1,2,3} = \frac{\omega_{1,2,3}}{2 \cdot \pi} \quad (22)$$

Amivel a sajátfrekvenciák:

$$f_1^a = 1,6197 [Hz] \quad f_2^a = 7,6607 [Hz] \quad f_3^a = 30,4388 [Hz]$$





4. ábra.

## 4. Feladat

4.1. Végeelem modell az AB szakaszon 2 elem használatával:

4.2. A rúdelemek paraméteres elemi mátrixai, és 2x2-es al-mátrixokkal való helyettesítése

Az elemi merevségi mátrix:

$$K_{e,4 \times 4} = \frac{I_z \cdot E}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Az elemi tömegmátrix:

$$M_{e,4 \times 4} = \frac{\rho \cdot A \cdot L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (24)$$

4.3. A globális merevségi- és tömegmátrixok összeállítása

Globális merevségi mátrix:

$$K_{G,6 \times 6} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Globális tömegmátrix mátrix:

$$M_{G,6 \times 6} = \begin{bmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & 0 \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & M_{12}^{(2)} \\ 0 & M_{21}^{(2)} & M_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (26)$$

4.4. A mátrixok kondenzálása a lekötött szabadsági fokok alapján

Lekötött szabadsági fokok:

$$V_1 = 0 \quad \Phi_1 = 0 \quad V_2 = 0$$

Az elmozdulásvektor:

$$U = \begin{bmatrix} V_1 \\ \Phi_1 \\ V_2 \\ \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \quad (27)$$

A kondenzált merevségi mátrix:

$$K_{G,K,3 \times 3} = \begin{bmatrix} K_{G44} & K_{G45} & K_{G46} \\ K_{G54} & K_{G55} & K_{G56} \\ K_{G64} & K_{G65} & K_{G66} \end{bmatrix} \quad (28)$$

A kondenzált merevségi mátrix:

$$M_{G,K,3 \times 3} = \begin{bmatrix} M_{G44} & M_{G45} & M_{G46} \\ M_{G54} & M_{G55} & M_{G56} \\ M_{G64} & M_{G65} & M_{G66} \end{bmatrix} \quad (29)$$

A kondenzált elmozdulásvektor:

$$U_K = \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ V_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

#### 4.5. A sajátkörfrekvenciák számítása az órán tanult képlet segítségével

$$\det(K_{G,K} - \omega^2 \cdot M_{G,K}) = 0 \quad (31)$$

A sajátértékeként az  $\omega^2$ -eket kapjuk, majd ebből a sajátfrekvenciák:

$$f_{1,2,3} = \frac{\omega_{1,2,3}}{2 \cdot \pi} \quad (32)$$

Amivel a sajátfrekvenciák:

$$f_1^a = 1,6197 [Hz] \quad f_2^a = 7,6607 [Hz] \quad f_3^a = 30,4388 [Hz]$$