



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
KÖZLEKEDÉSMÉRNÖKI ÉS JÁRMŰMÉRNÖKI KAR

JÁRMŰDINAMIKA ÉS HAJTÁSTECHNIKA

I. rész: JÁRMŰDINAMIKA

SZERZŐ:

Prof. Dr. ZOBORY ISTVÁN

Apáczai Csere János díjas egyetemi tanár

2012

A II. Nemzeti Fejlesztési Terv Társadalmi Megújulás Operatív Program

TÁMOP-4.1.2/A/2-10/1-2010-0018

azonosító számú programja keretében készült jegyzet.

A projekt címe:

„Egységesített Jármű- és mobilgépek képzés- és tananyagfejlesztés”

A megvalósítás érdekében létrehozott konzorcium résztvevő:

a Kecskeméti Főiskola

a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

az AIPA Alföldi Iparfejlesztési Nonprofit Közhasznú Kft.

A járműdinamika tananyaga az „Általános járműgéptan”, a „Mechanika” és a „Matematika” c. tárgyakban tanult ismereteket alkalmazza járművek sajátos mozgásviszonyainak és az azokat kialakító erőhatásoknak a tanulmányozására. A mozgás- és erőhatás-folyamatokkal párhuzamosan fontos a hajtásrendszerrel megvalósított energia-bevezetési ill. a fékrendszerrel megvalósított energia-elvonási folyamatok alakulásának kvantitatív jellemzése is. A tananyag másik nem kevésbé fontos célja a jármű ún. *parazita mozgásainak* tanulmányozása, mely parazita mozgások a járműnek, mint több szabadságfokú lengőrendszernek a vonó- és fékezőerő változásokból, valamint a jármű mozgása során a környezetéből érkező gerjesztőhatások miatt fellépő gerjesztett lengéseinek analízisét jelenti.

Kulcsszavak: mozgásforma, vonóerő, fékezőerő, főmozgás-folyamat, parazita mozgás, hajtásvezérlés, fékvezérlés, mozgásegyenlet, viselkedő rendszer, rendszeroperátor, alapellenállás, járulékos ellenállás, emelkedési ellenállás, görbületi ellenállás, redukált tömeg, forgótömeg-tényező, átmeneti ív, hossz-szelvény, gyorsítóerő, numerikus megoldás, gördülőkapcsolat, erőkapcsolati tényező, szlip, adhézió, trakcióeloszlás, kontaktfelület, kúszás, tuskós fék, dob-fék, tárcsás fék, termoelasztikus, hőáram, járműfűtő, gerjesztett lengés, kinetikus energia, potenciális energia, disszipált energia, időinvariáns, állapotvektor, kezdeti érték probléma, rendszermátrix, sajátérték, sajátkörfrekvencia, sajátvektor, karakterisztikus polinom, stabilitás, súlyfüggvény, átmeneti függvény, komplex frekvenciafüggvény, konvolúció, periodikus, aperiodikus, Fourier-sor, spektrum, stacionárius, sztochasztikus,

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. Járművek mozgásformái	1
1.2. A járműdinamika vizsgálati területei	2
1.3. A járműdinamika módszerei	3
1.4. Rendszerszemlélet	4
1.5. A főmozgás dinamikája	7
2. A járműre ható eredő erő	10
2.1. Az eredő erő összetevői	10
2.2. Az alapellenállás-erő	11
2.3. A vonóerő	12
2.4. A fékezőerő	15
2.5. Haladás vízszintes-egyenes mozgáspályán	16
2.6. Járolékos menetellenállás erők	16
2.7. Egy térbeli járműmozgás pályájának megadása	19
2.7.1. <i>A hossz-szelvény (azaz az emelkedési viszonyok) numerikus megadása:</i>	19
2.8. A mozgásegyenlet megoldása	22
2.8.1. <i>Szakaszonként zárt alakú megoldás</i>	22
3. Kerekes járművek vonóerő-kifejtése és fékezése	28
3.1. A kerék és a támasztófelület kapcsolata	28
3.1.1. <i>Álló jármű esete – a kerék nem mozog</i>	28
3.1.2. <i>A gördülőkapcsolat dinamikája</i>	29
3.1.3. <i>A gördülési ellenálláserő energetikai háttere</i>	37
3.2. A fékezés dinamikája	38
3.2.1. <i>A tuskós fék vizsgálata</i>	39
3.2.2. <i>A dobfék vizsgálata</i>	42
3.2.3. <i>A tárcsás fék vizsgálata</i>	43
3.2.4. <i>Termoelasztikus jelenségek fékekben</i>	45
4. Járműfűzések dinamikája	48
4.1. A járműfűzér értelmezése	48
4.2. Az elemi járműfűzér vizsgálata	50
4.2.1. <i>Az elemi járműfűzér felépítése</i>	50
4.2.2. <i>A mozgásegyenletek felírása:</i>	52
4.2.3. <i>Állapotvektor bevezetése a mozgásegyenlet-rendszer megoldásához</i>	55
5. Járművek parazita mozgásai, gerjesztett lengések	57
5.1. A parazita mozgások	57
5.2. Járműdinamikai mozgásegyenletek generálása	58
5.2.1. <i>mozgásegyenletek szintetikus származtatása</i>	58
5.2.2. <i>A mozgásegyenletek analitikus származtatása</i>	60
5.3. Lineáris időinvariáns járműdinamikai rendszer	64
5.4. Sajátérték feladat, a homogén rendszerre vonatkozó K.É.P.	67
5.5. Rendszerjellemző függvények	72
5.6. Gerjesztett lengések	76
5.6.1. <i>Vizsgálat az időtartományban</i>	76
5.6.2. <i>Vizsgálat a frekvenciatartományban</i>	78
6. Ábrajegyzék	87
Irodalomjegyzék	90

ELŐSZÓ

Az „Járműdinamika és hajtástechnika” c. tárgy heti három óra előadással és heti egy óra tantermi gyakorlati foglalkozással szerepelt a BME Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Karának a *közlekedésmérnöki* BSc szak képzésére 2006/2007-ben bevezetett tantervében. A 2010/2011-ben bevezetett a *járműmérnöki* BSc szak tantervébe a tárgy változatlan időkerettel épült be és a *közlekedésmérnöki* BSc szak ezzel egyidejű tantervi korrekciója során a járműdinamika anyagrész változatlan formában maradt. Így a járműdinamikai tananyag feldolgozása heti egy óra előadással és egy óra gyakorlati foglalkozással történik Karuk képzésében. A járműdinamika tananyaga az „Általános járműgéptan”, a „Mechanika” és a „Matematika” c. tárgyakban tanult ismereteket alkalmazza járművek sajátos mozgásviszonyainak és az azokat kialakító erőhatásoknak a tanulmányozására. A közlekedést megvalósító járműveknek a közlekedési pálya mentén megvalósuló rendeltetésszerű mozgását *főmozgásnak* nevezzük. A tárgy tananyagának egyik fontos része a főmozgás folyamatának a *vezérelt dinamikai rendszerként azonosítható jármű* válaszfolyamataként történő tanulmányozása. A járművet vezető ember a vonóerő és a fékezőerő megfelelő ütemezésű adagolásával biztosítja a tervezett időrendnek megfelelő járműmozgást, a közlekedési pálya emelkedési- és görbületi viszonyaival összhangban. A mozgás- és erőhatás-folyamatokkal párhuzamosan fontos a hajtásrendszerrel megvalósított energia-bevezetési ill. a fékrendszerrel megvalósított energia-elvonási folyamatok alakulásának kvantitatív jellemzése is. A tananyag másik nem kevésbé fontos célja a jármű un. *parazita mozgásainak* tanulmányozása, mely parazita mozgások a járműnek, mint több szabadságfokú lengőrendszernek a vonó- és fékezőerő változásokból, valamint a jármű mozgása során a környezetéből érkező gerjesztőhatások (szél, pályaegyenletlenség, légköri turbulencia, víz hullámozás stb.) miatt fellépő gerjesztett lengéseinek analizisét jelenti. A járműdinamikában a fő feladat a járművet felépítő tömegek mozgásegyenleteinek felállítása és megoldása. A mozgásegyenleteket – mint differenciálegyenlet-rendszert – különösen nemlineáris kapcsolati erők esetén numerikusan célszerű megoldani, és itt előtérbe kerülnek a számítógépes alkalmazások. A dinamikai vizsgálatok első lépéseként kialakítandó lineáris dinamikai modelleket a tananyagban részletesen tárgyaljuk, a mozgásviszonyok megítélésére alkalmas saját-körfrekvenciák és stabilitástartalékok meghatározásához. A gerjesztőhatásokra adott mozgásválasz elemzését tárgyaljuk mind az időtartományban mind pedig a frekvencia tartományban. Alapvetően fontos eredmények kerülnek ismertetésre a járműre ható periodikus, aperiodikus és sztochasztikus gerjesztőhatásokra adott mozgásválaszok jellemzésére. A jelen jegyzet azon előadásaim anyagának írásos feldolgozását tartalmazza, amelyeket a BME Közlekedésmérnöki Karán a másodéves hallgatóknak tartottam a 2007/2008 tanév tavaszi félévtől kezdődően. Köszönet illeti kollégáimat, *Iványi Zoltán* és *Császár László* tanársegéd urakat, hogy a jegyzet ábráinak gondos számítógépi szerkesztését elvégezték.

Budapest, 2012. február

A szerző

1. Bevezetés

1.1. Járművek mozgásformái

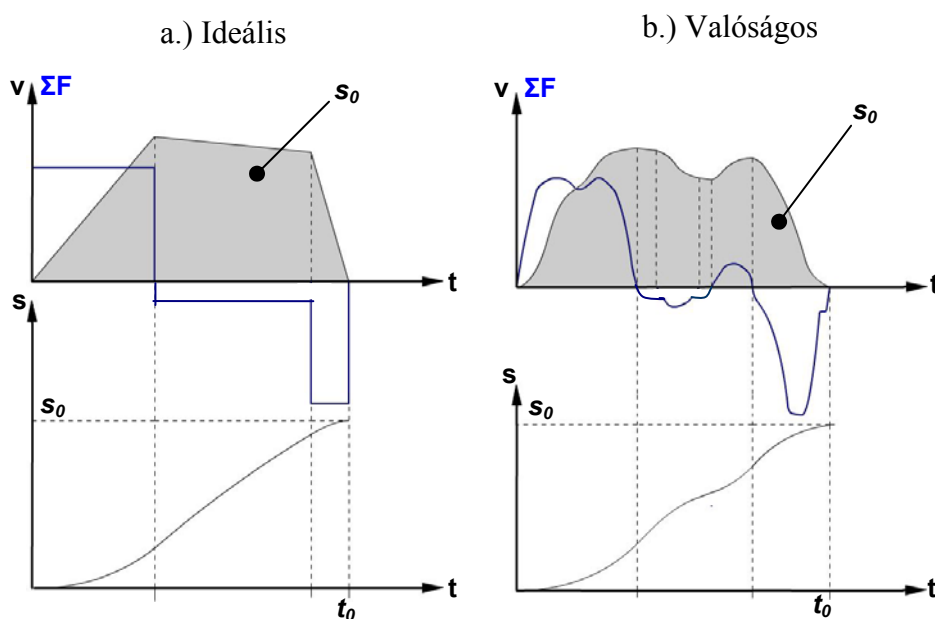
A járművek rendeltetés szerinti működése során a közlekedési pálya mentén tervezett időrendű mozgás megy végbe. A jármű mozgás jellege: haladó mozgás. Ezen mozgás kialakításához vonóerő- és fékezőerő-generáló gépezet szükséges. Tudjuk, hogy megadott sebesség-lefolyású menetciklust kell megvalósítani. Ezt alapvetően a sebesség időbeli alakulását megadó $v = v(t)$ menetábra mutatja. A befutott utat a változó felső határú integrálkifejezésként

adott $s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$ függvény szolgáltatja, amint azt az “Általános járműgéptan” és a “Járműrendszerek” ill. “Járművek és mobil gépek” c. tárgyakban már megismerte a hallgatóság.

A járművek rendeltetésszerű üzemében az alábbi mozgásformákat különböztetjük meg:

1. Főmozgás: haladó mozgás a közlekedési pálya mentén.
2. Parazita mozgás: gerjesztett lengőmozgás, melynek forrásai lehetnek:
 - vezetési behatások (hajtás- és fékvezérlés)
 - környezeti hatások okozta gerjesztések (útegnyenetlenség, sínegyenetlenség, szél, légköri turbulencia, víz hullámozás, stb.)

A **főmozgás** (ciklusának) jellemzésére diagramok, azaz a *menetábrák* szolgálnak. Ezek egy ideális illetve valós menetciklus esetében jellegüket tekintve az alábbi módon alakulhatnak:



1.1. ábra. Ideális és valóságos menetciklusok mozgás- és erőhatás időfüggvényei

A **parazita mozgásformák** a jármű 6 szabadságfokának megfelelően a tér három egymásra merőleges irányába történő transzlatorikus ill. az egyes irányokat leíró koordináta rendszer tengelyei körüli rotatorikus mozgásokként is szuperponálódnak a jármű főmozgására. A parazita mozgások legtöbbször valamilyen gerjesztő hatásra adott válaszként alakulnak ki. Ezen gerjesztő hatások egyik része a járműbe épített hajtó gépezet illetve fékberendezés működtetésével kapcsolatos járművezetői beavatkozások következményei. A gerjesztő hatások másik része a jármű üzemi környezetéből eredő különböző kényszerítő erőhatásokból és mozgások-

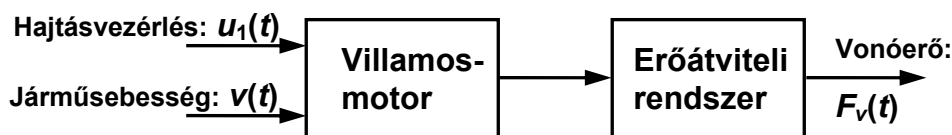
ból származik. Például az útfelület vagy a símfelületek, illetve a kifutópálya felületének geometriai egyenetlenségei, vagy a szél, illetve a légköri turbulencia okozta erőhatások, továbbá hajók esetén még a víz hullámozása okozta, legtöbb esetben előre nem megadható, sztochasztikus behatások jönnek szóba.

A járművek vonó- és fékezőerő kifejtésének irányítása vezérlő behatások eredményeként válsul meg. Ezért mint ismeretes, a járműdinamikában a járművet vezető személy a következő két vezérlést adagolja megfelelő ütemben a vonó- és fékezőerő-szükséglet biztosításához:

- 1.) Hajtásvezérlés: u_1 (vektoros lehet)
- 2.) Fékvezérlés: u_2 (vektoros lehet)

A vezető által alkalmazott mindkét vezérlő hatás az idő függvényében jelentkezik, ezért az $u_1 = u_1(t)$ és $u_2 = u_2(t)$ időfüggő **vezérlőfüggvények**-ről beszélünk.

A vonóerő kialakítását, annak műszaki lehetőségeit a „Hajtástechnika” c. 2. anyagrész fogja módszeresen tárgyalni. Legyen pl. a vonóerőt generáló vezérelt erőgép egy villamosmotor, amely erőátviteli rendszert (pl. fogaskerekes hajtás) tartalmaz. Jelen bevezető részben csupán az 1.2 ábra szerinti egyszerű hatásvázlattal szemléltetjük a vonóerő kialakításának folyamatát. Látható, hogy az időben jelentkező $F_v(t)$ vonóerőt az időfüggő $u_1(t)$ hajtásvezérlő-függvény és a jármű sebességének $v(t)$ időfüggvénye határozza meg.



1.2. ábra. Villamos motorral hajtott erőátvitel vonóerő-generálása

A járműdinamikai viszonyok visszahatnak a hajtásrendszer folyamataira. Erre jellemző példa a kerekes járműveknél szemléltethető, ahol a jármű függőleges kerékerő-változásai (ezáltal a kifejthető vonóerő nagyságának változásai) visszagerjesztik a rugalmas, lengésképes hajtásrendszert. Ezek alapján tehát elmondhatjuk, hogy a jármű függőleges lengései visszahatnak a hajtásdinamikai folyamatokra.

A járműdinamika tanulmányozásának elsődleges *célja* azon feltételek vizsgálatában, összehangolásában, fogalmazható meg, amelyek biztosítják, hogy a jármű a megfelelő vezérlések hatására a tervezett főmozgásfolyamat megvalósításával eljuttatható legyen az adott emelkedési és irányviszonyok mellett és adott idő alatt a kiindulási A pontból a célként kitűzött B pontba. Nem kevésbé fontos, hogy a különböző gerjesztő hatások következtében kialakuló további mozgás és erőhatás-folyamatok mennyiségi jellemzőit dinamikai módszerekkel, elsősorban szimulációs technikával származtatni lehessen. Ez mind a járművek szerkezeti részeinek funkcionális és szilárdsági méretezése, mind az üzemi viszonyok megítélése szempontjából alapvető jelentőségű.

1.2. A járműdinamika vizsgálati területei

A járműdinamika fentiekben nagy vonalakban felfestett alkalmazási területeit az alábbiakban részletesebben meghatározzuk. Először is idézzük fel, hogy a görög eredetű *dinamika* szó alapjelentésében *erőtant* jelent. Mindazonáltal, általánosabb értelemben dinamikának nevezzük az időben változó folyamatok változási jellegzetességeit, akár pl. a „gazdasági fejlődés dinamikájáról” beszélhetünk, itt a folyamat időbeli változásának jellege, növekedése vagy csökkenése, periódus tartalma, pl. ciklusok jelenléte stb. jön szóba.

A járműmérnöki munkában a következő konkrétabb kérdésköröket öleli fel a járműdinamika vizsgálati területe:

1. A járműmozgást befolyásoló erők (ellenálláserő, vonó- és fékezőerő) meghatározása a mozgásállapottól, a vezérléstől való közvetett időfüggésük, ill. az időtől való esetleges direkt függésük megadásával.
2. Különböző, jó közelítést adó dinamikai modellek kialakítása a járművekben kialakuló jelenségek, folyamatok tanulmányozásához.
3. A dinamikai szimulációs eljárások elvi alapjainak megismerése, az erőhatás és mozgás-folyamatok számítógépes realizálására.
4. A járművekre ható gerjesztő hatások vizsgálata, matematikai jellemzése a parazita mozgások csökkentése érdekében.

1.3. A járműdinamika módszerei

A járműdinamikai vizsgálatok lefolytatásában a következő három fő mozzanat határolható el:

1. *Mozgásegyenletek felállítása az erőhatások ismeretében*

Alapesetben, a tömeg haladó mozgásának vizsgálatakor, a kinetika alaptételének koordinátánkénti alkalmazásával a koordinátairányú erők eredőjét egyenlővé kell tenni a tömeg és a koordinátairányú gyorsulás szorzatával. A koordinátairányú eredő erő összetevői azonban rendszerint mozgásállapot-függőek, továbbá sokszor vezérlés-függőek és direkt időfüggést is mutathatnak. Ebből a gondolatmenetből közvetlenül adódik, hogy a mozgásegyenlet valamely koordinátairányú mozgásjellemzőre felírt közönséges differenciálegyenlet formájában jelenik meg. Hasonló a helyzet, ha valamely koordinátatengely körüli forgó mozgásra irányul vizsgálatunk. Ezen utóbbi esetben a vizsgált testre a tekintett forgástengely körül forgató eredő nyomatékot kell egyenlővé tenni a forgó tömeg tekintett forgástengelyre vett tehetetlenségi nyomatékának és a test szöggyorsulásának szorzatával. Az eredő nyomaték összetevői is mozgásállapot-függést, vezérlésfüggést vagy direkt időfüggést mutathatnak. Így a forgó mozgás valamely jellemzőjére ezen esetben is közönséges differenciálegyenlet adódik. Látni fogjuk a későbbiekben, hogy a haladó és forgómozgás a járműdinamikai feladatok nagy részében csatolásba kerül, ezért a mozgás-összetevők csak együtt vizsgálhatók, ami szimultán (egyidejű) közönséges differenciálegyenlet-rendszer kezelését teszi szükségessé. Fellépnek olyan járműdinamikai feladatok is, amelyeknél a mozgást meghatározó erőhatásoknak nem csak a nagysága, de az iránya is függ az aktuális mozgásállapottól (pl. csúszósúrlódásnál a súrlódási kölcsönhatási erő mindig a csúszási sebesség irányába esik)

2. *A mozgásegyenletek megoldása*

A mozgásegyenletként meghatározott differenciálegyenletekre, ill. differenciálegyenlet-rendszerekre vonatkozó kezdeti érték problémák *zárt alakban* történő megoldása az egyszerű a lineáris problémák esetében, főképp azok homogén részének megoldásakor jön szóba. Még a lineáris problémák esetén is az inhomogén (gerjesztett) rendszerek valamely kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldásának meghatározása sokszor komoly nehézségbe ütközik. Ezt a nehézséget azonban a korszerű számítástechnika igénybevételeivel már könnyen át lehet hidalni, sőt a mozgásegyenletek teljes megoldását is *numerikusan* lehet elvégezni. Napjainkban *a mérnök feladata alapvetően a mozgásegyenletek helyes megfogalmazásában jelölhető ki*. A vonatkozó kezdeti érték feladatok – amelyek a keresett mozgásjellemzők meghatározását tűzik ki célul - számítógépes technikával alkalmas célszoftverekkel könnyen megoldhatók.

3. A megoldásfüggvények elemzése

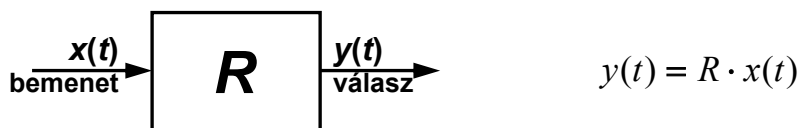
A mozgásegyenletek és a hozzájuk tartozó kezdeti feltételek figyelembe vételével kapott, egyértelműen meghatározott megoldásokat, melyek a járműdinamikában az esetek túlnyomó részében időfüggvényekként adódnak, bizonyos jellemzőik szerint ki kell értékelni. A szóba kerülő jellemzők szokásosan a következők: a tekintett vizsgálati időintervallumban a vizsgált időfüggvény maximális és minimális értékei, illetve a tekintett intervallumra vonatkozó integrálátlag értéke. Fontos további jellemzést ad a függvény „frekvenciatartalma”, mely információ Fourier transzformáció elvégzésével adódik. A mozgásjellemző időfüggvényekből sok esetben a mozgásállapot-függő kapcsolati és belső erők lefutását vizsgáljuk, illetve mechanikai feszültségfüggvényeket képezünk. Az erőhatás és feszültségfüggvények kiértékelése matematikai statisztikai vizsgálat keretében történik, legtöbbször a kifáradási élettartam előrejelzéséhez terhelési és feszültségkollektívák meghatározása szükséges.

1.4. Rendszerszemlélet

A jármű mint műszaki objektum, *viselkedő* rendszer. A viselkedés azt jelenti, hogy a járműre (annak egyes alrendszeire) specifikus behatást működtetve a dinamikai rendszer jól meghatározott specifikus (felépítésével meghatározott) választ ad. Itt a főmozgás-folyamatra gondolva a hajtás- és fékrendszerrel felszerelt járművet, mint összetett dinamikai rendszert vizsgálhatjuk. Például a hajtásrendszerrel vonóerőt kifejtve a járműre, az jól meghatározott módon (mozgásegyenletének engedelmeskedve) mozgásba jön, gyorsul. Ha adott sebességgel haladó járműre a fékberendezéssel megfelelő nagyságú fékezőerőt működtetünk, akkor a jármű a kívánt módon lassulni fog. Mivel a jármű dinamikai folyamatai több alrendszer együttműködésével alakulnak ki, a teljes járművet, mint egyetlen összetett egységet vizsgálva adódó eredő rendszerválasz az alrendszerekben kialakuló folyamatok kapcsolódásával jön létre. A tárgyalásunk olyan eszközöket kíván, amelyek általánosak és a járművet egészében vagy részeiben képesek viselkedő rendszerként (átviteli rendszerként) leképezni, modellezni.

Alapmodellek

A legegyszerűbb viselkedő dinamikai rendszer az *egy* gerjesztő bemenettel és *egy* kimenettel (rendszerválasszal) bíró rendszer jellemzése az 1.3 ábra szerint blokkdiagrammal történik. A rendszer átviteli tulajdonságait az ***R*** rendszeroperátor jeleníti meg:



1.3. ábra. Egy bemenetű és egy kimenetű dinamikai modell

A rendszer kimenetén megjelenő $y(t)$ válaszfüggvény a rendszerre működő $x(t)$ bemenő függvénynek az ***R rendszeroperátor*** szerinti képe. Ez a jelentést formalizálja az

$$y(t) = R x(t)$$

összefüggés: Az ***R*** rendszeroperátor „hat” az $x(t)$ bemenő (gerjesztő) függvényre és kialakul a rendszer $y(t)$ válaszfüggvénye. Ily módon az ***R*** rendszeroperátorban összpontosul a dinamikai rendszer belső összefüggései által meghatározott azon transzformáló hatás amely megvalósítja a bemenet és a válasz kapcsolatát.

Elsőnek a jármű **főmozgás-folyamatával** foglalkozunk. Mint már érintettük az előző tárgyalásunkban, a jármű főmozgását két alrendszer, a hajtásrendszer és a fékrendszer működése



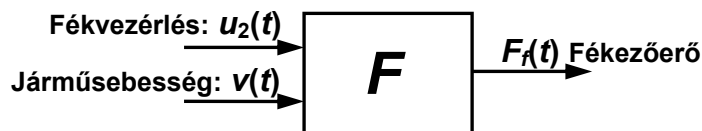
alakítja ki megfelelő vezérlőfüggvényt lefutások alkalmazása mellett.

A hajtásrendszert két bemenetű és egy válaszfüggvényt kiadó alrendszerként azonosíthatjuk. A két bemenő jellemző a hajtás $u_1(t)$ vezérlőfüggvénye és a jármű $v(t)$ sebességfüggvénye. Ez a két időfüggvény hatására hajtásrendszer belső összefüggései szerint azután kialakul a járműre ható $F_v(t)$ vonóerő időfüggvény. A hajtásrendszer hatásátviteli viszonyait az 1.4 ábrán felrajzolt blokkdiagram jeleníti meg.



1.4. ábra. A hajtásrendszer blokkdiagramos megjelenítése

A fékrendszert is két bemenetű és egy válaszfüggvényt kiadó alrendszerként azonosíthatjuk. A két bemenő jellemző a fékezés $u_2(t)$ vezérlőfüggvénye és a jármű $v(t)$ sebességfüggvénye. Ez a két időfüggvény hatására fékberendezés belső összefüggései szerint azután kialakul a járműre ható $F_f(t)$ fékezőerő időfüggvény. A fékrendszer hatásátviteli viszonyait az 1.5 ábrán felrajzolt blokkdiagram mutatja.



1.5. ábra. A fékrendszer blokkdiagramos megjelenítése

Az alapellenállás-erő kialakulásában a jármű sebessége játszik alapvető szerepet. Ily módon ebben az esetben a hatásátvitel leírására egy egy bemenetű, egy kimenetű blokkdiagram alkalmas. A viszonyokat az 1.6 ábra szerinti blokkdiagram mutatja.



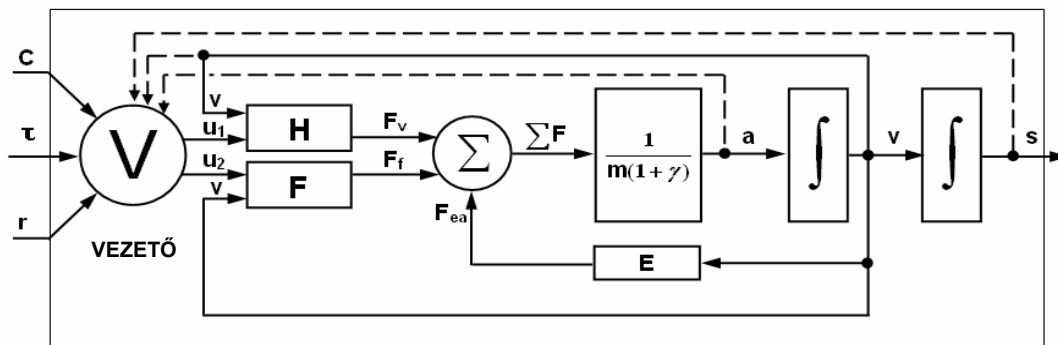
1.6. ábra. A jármű alapellenállásának sebességfüggését megjelenítő blokkdiagram

A hajtásrendszer, a fékrendszer és az alapellenállás-erő-generáló alrendszer "összeépítéséből" előáll a hallgatóság számára a "Járműrendszerek" ill. a "Járművek és mobil gépek I." c. tárgyakban bevezetett rendszermodell, amely a sík, egyenes pályán üzemelő járművet jellemzi. Az 1.7 ábrán felrajzoltuk ezt a modellt.

Emlékeztetünk arra, hogy a V blokk a járművet vezető embert jeleníti meg. A vezetőt befolyásoló három fő (folytonos vonalas nyilak) és három bizonytalan (szaggatott vonalas nyilak) bemeneten érkező információ feldolgozásával alakítja ki a jármű mozgásviszonyait alapvetően meghatározó két vezérlőfüggvényt: az $u_1(t)$ hajtásvezérlést és az $u_2(t)$ fékvezérlést. A hatásvázlatban szereplő többi jelformáló blokk szerepe Newton II. törvénye, és a kinematikai jellemzők integrálkapcsolata alapján nem szorul további magyarázatra.

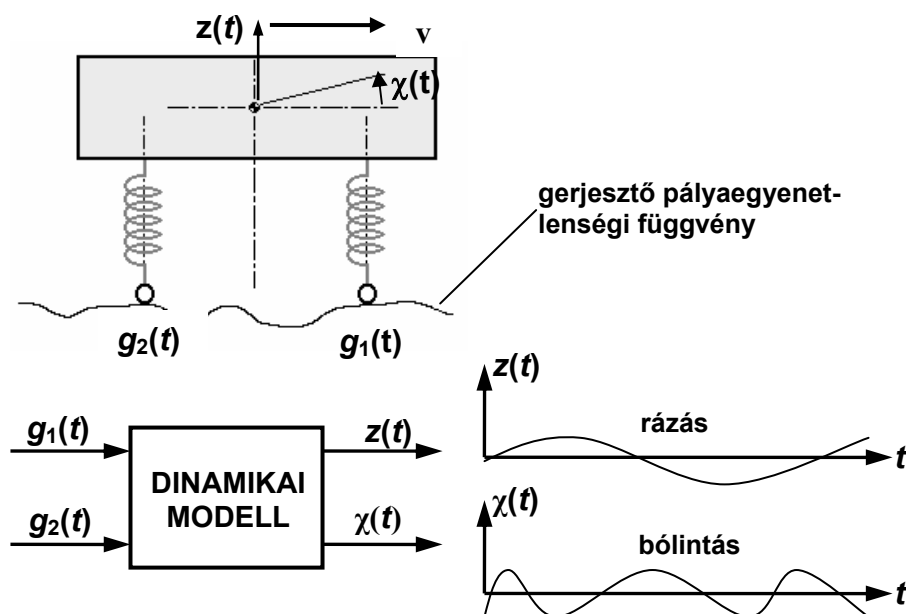
Az ábrával kapcsolatban emlékeztetünk még arra, hogy a szereplő három fő bemenet a külső vezérlés (pl. jelzők) \mathbf{c} -vel jelölt, a vezető időfelhasználásával kapcsolatos (pl. menetidő betartási törekvés) \mathbf{r} -rel jelölt és a véletlen forgalmi helyzet megkövetelte \mathbf{r} -rel jelölt akció időfüggő bemeneti jellemzőkkel került megjelenítésre. A modell kimeneti jellemzője a jármű által befutott út $s(t)$ időfüggvénye. A három szaggatott vonalas bizonytalan visszacsatolás arra utal,

hogy a járművezető a jármű gyorsulásáról, sebességéről és helyzetéről információval bír, de ez az információ csak bizonyos, 1-nél kisebb valószínűséggel tárgyasul a tényleges vezérlés kialakítási tevékenységében.



1.7. ábra. A sík, egyenes pályán haladó jármű főmozgásának rendszermodellje

Áttérünk a **parazita mozgások** dinamikai folyamatainak kérdéskörére. Az 1.8 ábrán felrajzoltuk egy geometriai egyenletlenségekkel terhelt pályán haladó jármű egyszerű dinamikai síkmodelljét, amely már alkalmas a jármű útgerjesztés okozta gerjesztett lengéseinek tanulmányozására. A modellben a jármű tömegközéppontjának $z(t)$ függőleges kitérése és a súlyponton átmenő, a rajz síkjára merőleges tengely körüli $\chi(t)$ szögkitérése adja a vizsgált szabad koordinátákat. A közlekedési pálya geometriai egyenletlenségeiből adódóan a járművet alátámasztó első rugó alatt $g_1(t)$, a hátsó alatt $g_2(t)$ időfüggő gerjesztés (rugóvégi mozgáskényszer) érvényesül.



1.8. ábra. A közlekedési pálya által gerjesztett járműmozgás tanulmányozására alkalmas síkbeli dinamikai modell

A tekintett modellnél tehát két gerjesztő bemeneti függvény és két mozgás-válaszfüggvény azonosítható. A járműdinamikai vizsgálatok kiinduló művelete az alkalmazott dinamikai modell bemenő jellemzőinek és válaszjellemzőinek azonosítása. A következő jellegzetes modellváltozatot használunk a járműdinamikában a be- és kimenőjellemzők számától függően.

1.) 1 bemenet és 1 kimenet (Single Input, Single Output) → SISO. Blokkvázlatban:



2.) 1 bemenet és több kimenet (Single Input, Multiple Output) → SIMO. Blokkvázlatban:



3.) Több bemenet és egy kimenet (Multiple Input, Single Output) → MISO. Blokkvázlatban:



4.) Több bemenet és több kimenet (Multiple Input, Multiple Output) → MIMO. Blokkvázlatban:



1.5. A főmozgás dinamikája

A főmozgást mint a közlekedési pálya menti rendeltetésszerű mozgást értelmeztük. A közlekedési pálya mentén mozgó járművet a főmozgás vizsgálatához a tömegközéppontjába koncentrált tömegnek tekinthetjük, azaz a tömegközéppontra, mint anyagi pontra alkalmazzuk Newton II. törvényét. A vizsgálat célja a *pályairányú haladó mozgás* jellemzőinek meghatározása. Ezen a ponton az előző tanulmányokkal összhangban (Általános járműgéptan, Járművek és mobil gépek, Járműrendszerek, Mechanika) ismét hangsúlyozni kell, a pályairányú haladó mozgást vizsgálva nem szabad elfeledkezni a járműben lévő, a pályairányú haladó mozgás sebességével arányos szögsebességgel forgó tömegekről, az utóbbiak gyorsításhoz szükséges nyomatékgigényről, és a forgó tömegek kinetikus energiatartalmáról. Kerekes járművek esetén természetesen merül fel a kerekek forgásával kapcsolatos erő és energiaigény biztosítása. Amennyiben elfogadjuk, hogy a kerekek és a támasztófelület (útfelület, sínfelület) kapcsolatában csúszásmentes tiszta gördülés valósul meg, akkor a kerekek és az azokhoz kapcsolódó hajtás- és fékrendszerbeli forgó tömegek mechanikai hatásait visszavezethetjük az egyébként is vizsgált haladó mozgás mechanikai jellemzőire. Márpedig a főmozgással kapcsolatos kérdések túlnyomó többségénél (menetidő, vonóerő, fékezőerő szükséglet, vonóerő-munka és fékezőerő-munka alakulás, stb.) a tiszta gördülés feltételezése elfogadható, és a továbbiakban ezen feltételezés elfogadásával folytatjuk vizsgálatainkat.

A fenti megállapításokhoz kapcsolódóan a jármű tömegével kapcsolatosan a következő megfontolások megtétele szükséges:

- 1.) A dinamikai vizsgálatokhoz ismerni kell a jármű mérlegelhető tömegét, jele m mértékegysége: $[m] = \text{kg}$.
- 2.) A tiszta gördülés elfogadása miatt vizsgálni kell a jármű sebességével arányos szögsebességgel forgó tömegek Θ_j tehetetlenségi nyomatékait, és a különböző szögsebességű alkatrészeket egyenként tekintetbe véve, a járműkerékkel való kapcsolatuk i_j módosításait figyelembe véve azokat a járműkerék kerületére kell redukálni a kinetikus energia megegyezősége elve alapján. A j -edik fogó tömeg kinetikus energiája az ω_j

szögsebességű forgás esetén $E_j = \frac{1}{2} \Theta_j \omega_j^2$ alakban meghatározott. A jármű kerék ω_k szögsebességét figyelembe véve a járműkerék tehetetlenségi nyomatékához egy olyan Θ_{jred} tehetetlenségi nyomatékot kell hozzáadni, amelynek kinetikus energiája a kerék ω_k szögsebességével számolva éppen E_j -vel egyenlő. Ennek alapján az $E_j = \frac{1}{2} \Theta_j \omega_j^2 = \frac{1}{2} \Theta_{jred} \omega_k^2$ összefüggésből a j -edik forgó tömeg járműkerékre redukált

tehetetlenségi nyomaték a $\Theta_{jred} = \left(\frac{\omega_j}{\omega_k} \right)^2 \Theta_j$ alakban adódik. Ezt az eljárást követve a

szereplő összes tehetetlenségi nyomaték (a jármű kereket is beleértve) kerékre redukált értéke meghatározható és összegezhető. Jelölje ezt az összeget $\sum_j \Theta_{jred}$, akkor meg-

határozható a járműkerék kerületére redukált azon m_r tömeg, amelynek a jármű haladó mozgását jellemző v sebesség melletti kinetikus energiája megegyezik az R gördülőkör sugarú járműkerékre redukált össz tehetetlenségi nyomatékú forgó tömegben a jár-

műkerék $\omega_k = \frac{v}{R}$ szögsebessége esetén jelenlévő kinetikus energiájával. Az elmondot-

takból a $\frac{1}{2} m_r v^2 = \frac{1}{2} \sum_j \Theta_{jred} \left(\frac{v}{R} \right)^2$ kinetikus energia-egyenlőség adódik innen pedig a

redukált tömeg kifejezésével a $m_r = \frac{\sum_j \Theta_{jred}}{R^2}$ képletet kapjuk.

A fenti levezetésünkből következik, hogy ha a jármű mérlegelhető m tömegét megnöveljük a forgó tömegek kerék kerületre redukált m_r tömegével, akkor az így adódó $m + m_r$ tömegnek a v haladási sebességgel számolt kinetikus energiája egyenlő lesz a jármű ezen sebességénél a teljes haladó és forgó rendszerben tárolt kinetikus energia értékével. Tehát a továbbiakban az $m + m_r$ tömeggel úgy számolhatunk, mintha a vizsgált járművünk és minden alkatrésze csak haladó mozgást végezne, mégis a gyorsítással (fékezéssel) kapcsolatos erőszükségletet helyesen fogjuk megállapítani.

A jármű haladó mozgását leíró mozgásegyenletben tehát az $m + m_r$ tömeget kell figyelembe venni. Sok esetben célszerű az $m + m_r$ összeget kissé átalakítani az

$$m + m_{red} = m \left(1 + \frac{m_{red}}{m} \right) = m(1 + \gamma)$$

képletsornak megfelelően. A belépett $\gamma = m_{red} / m$ hányados az úgynevezett **forgótömeg-jellemző**, míg az $(1 + \gamma)$ összeg neve: **forgótömeg-tényező**.

A fentiekben a jármű tömegével kapcsolatban tett megfontolásaink után rátérhetünk a jármű főmozgását leíró mozgásegyenlet konkretizálására. *Newton II. axiómája* szerint az eredő erő egyenlő a tömeg és a gyorsulás szorzatával. A jármű főmozgása esetén vektoros felírással a következőképp jelentkezik a newtoni axióma a járműre ható mozgásirányú erővektorokkal képzett $\sum_{(i)} \mathbf{F}_i$ eredő erő vektor szerepeltetésével:

$$\sum_{(i)} \mathbf{F}_i = m(1 + \gamma) \mathbf{a} ,$$



ahol: m a jármű mérlegelhető tömege, γ a forgótömeg-jellemző, \mathbf{a} a jármű pályirányú gyorsulás vektora. A mozgásegyenletbe belépett vektormennyiségek mindegyikét *közös mozgásirányú \mathbf{e} egységvektorra mint bázisra* nézve írjuk fel:

$$\sum_{(i)} \mathbf{F}_i = \left(\sum_{(i)} F_i \right) \cdot \mathbf{e} \quad ; \quad \mathbf{a} = a \cdot \mathbf{e} \quad .$$

Newton II. axiómája a bázisfelírással a

$$\left(\sum_{(i)} F_i \right) \cdot \mathbf{e} = m \cdot (1 + \gamma) \cdot a \cdot \mathbf{e}$$

vektoros alakban adódik, majd a vektorok bázis-előállításának egyértelműségére vonatkozó tétel alkalmazásával az egységvektorok skalár szorzóinak megegyezéséből következően az *előjeles skalár nagyságokkal felírt*

$$\sum_{(i)} F_i = m(1 + \gamma)a$$

mozgásegyenletet kapjuk. Fontos kiemelni, hogy a mozgásiránnyal azonos értelmű erővektorok előjeles nagysága pozitív értékkel, míg a haladási iránnyal ellentétes értelmű erővektorok előjeles nagysága negatív értékkel lép be a fenti összegbe. A gyorsulás előjeles nagysága kiadódik: az erők előjeles nagyságai algebrai összegének előjele fogja megszabni!

2. A járműre ható eredő erő

2.1. Az eredő erő összetevői

A mozgásegyenlet bal oldalán megjelent előjeles erőösszeg *legegyszerűbb esetét* a sík, egyenes mozgáspályán kapjuk. A szerepeltetendő erők előjeles skalár nagyságokkal lépnek be. A skalár nagyságok előjele a már megtárgyalt módon a szándékolt mozgás irányába az egységvektor figyelembevételével adódnak. Az erőösszeg mármost az alábbiak szerint alakul:

$$\sum F_i = F_v + F_f + F_{ea}$$

\swarrow
 vonóerő
 $F_v \geq 0$

\swarrow
 fékezőerő
 $F_f \leq 0$

\swarrow
 alapellenállás erő
 $F_{ea} < 0$

A mozgásegyenlet bal oldalán megjelent előjeles erőösszeg *összetettebb esetét* az emelkedővel (lejtővel) és görbülettel bíró mozgáspályán kapjuk, ahol járulékos ellenálláserő is fellép. A járulékos erőket skalárnagyságaikkal jellemezve az F_{eje} *emelkedési ellenálláserőt* és az F_{ejg} *görbületi ellenálláserőt* kell tekintetbe venni. Az emelkedési ellenálláserő előjelviszonyai a következőképp jellemezhetők:

$$F_{eje} = \begin{cases} < 0 & \text{ha a pálya emelkedő} \\ = 0 & \text{ha a pálya vízszintes} \\ > 0 & \text{ha a pálya lejt} \end{cases}$$

A görbületi ellenálláserő viszont mindig nem pozitív: $F_{ejg} \leq 0$. Az eredő erő előjeles nagysága most az alábbi formában adódik:

$$\sum F_i = F_v + F_f + F_{ea} + F_{eje} + F_{ejg}$$

Az erőösszegek eddigi formális felírásán túllépve elemeznünk kell a szereplő erőnagyságok vezérlés és mozgásállapot függését. A vonóerő, a fékező erő és az alapellenállás-erő függvények mindegyike indirekt időfüggést is mutat, azaz az időtől való függés a vezérlési értékek időfüggésén és a sebesség időfüggésén keresztül érvényesül. A korábbi tanulmányokból az alábbi függvénykapcsolatok ismertek, melyek mindegyike nemlineáris.

- 1.) Vonóerő: $F_v = F_v(u_1, v) \Rightarrow F_v(t) = F_v(u_1(t), v(t))$,
- 2.) Fékezőerő: $F_f = F_f(u_2, v) \Rightarrow F_f(t) = F_f(u_2(t), v(t))$,
- 3.) Alapellenállás-erő: $F_{ea} = F_{ea}(v)|_{v>0} \Rightarrow F_{ea}(t) = F_{ea}(v(t))$.

A járulékos ellenálláserők pedig a jármű által befutott út függvényeként adhatók meg. Az emelkedési ellenálláserő és a görbületi ellenálláserő közvetett időfüggést mutat a befutott út időfüggésén keresztül.

$$4.) \text{ Emelkedési ellenálláserő: } F_{eje} = F_{eje}(s) \Rightarrow F_{eje}(t) = F_{eje}(s(t)),$$

$$5.) \text{ Görbületi ellenálláserő: } F_{ejg} = F_{ejg}(s) \Rightarrow F_{ejg}(t) = F_{ejg}(s(t))$$

A későbbi tárgyalásunkban látni fogjuk, hogy mind az emelkedési ellenálláserő, mind pedig a görbületi ellenálláserő visszavezethető lesz a befutott út függvényében szakaszonként lineáris függvények alkalmazására.

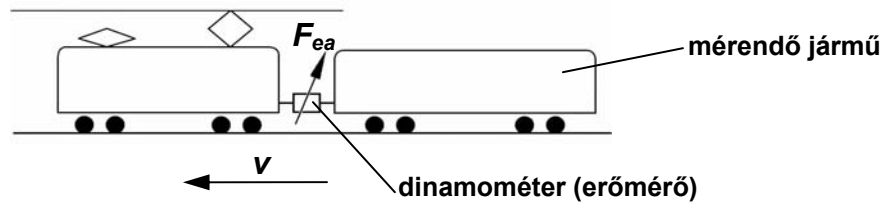
A következő pontban diagramok és táblázatos adatmezők megadásával jellemezzük a mozgásegyenletbe belépett skaláris erőnagyságok gyakorlati kezelését.



2.2. Az alapellenállás-erő

A mozgásegyenletben szereplő erők részletesebb vizsgálatát az alapellenállás-erő tárgyalásával kezdjük, ti. ez az erő *minden járműmozgás során* fellép. A járműdinamikai vizsgálatok nem szorítkozhatnak csupán a zérustól különböző sebességek mellett érvényesülő menetellenállás-erő ismeretére, ezen vizsgálatokban ugyanis a jármű megindításának és megállításának esetében érvényesülő zérus sebességhez is szükséges az alapellenállás-erő egyértelmű megadása. Kétváltozós függvénné kell fejlesztenünk a korábban tanult – csak sebességfüggő – alapellenállás-erő függvényt, és esetszétválasztásos függvénymegadással a zérustól különböző sebességértékekhez rendelt másodfokú polinommal leírt alapellenállás-erő mellett meg kell adni a zérus sebesség esetén érvényes alapellenállás-erőt, amely a járműre ható nem rezisztív (azaz nem ellenállás-jellegű) erők eredőjének a függvénye. Egyelőre a részletek kibontása nélkül beléptetjük a kétváltozós: $F_{ea} = F_{ea}(v, \sum F)$ függvényt, ahol v a sebesség és $\sum F$ a járműre ható egyéb, *nem rezisztív* pályairányú erők eredője.

1.) A $v \neq 0$ esetre a már említett másodfokú polinom együtthatóit alapellenállás mérésekre támaszkodva határozhatjuk meg. A mérési elrendezést egy négytengelyes vasúti kicsi alapellenállás mérésre vonatkozólag mutatjuk be a 2.1 ábrán.



2.1. ábra. Négytengelyes vasúti kocsi alapellenállás-erejének mérése a mozdony és a kocsi közé beépített dinamométerrel

A mérés során mérjük az állandósult $v_i : i = 1, 2, \dots, n$ sebességekhez tartozó F_{eai} vonóerő-értékeket. A v sebesség függvényében mért alapellenállás-értékekre egy görbét illesztünk a legkisebb négyzete módszerével, amely módszert az “Általános járműgéptan” c. tárgyból már ismeri a hallgatóság.

- 1.) A $v_i > 0$ sebességekhez tartozó alapellenállás-erő általános alakja a három együttható értékével egyértelműen meghatározott $F_{ea} = av^2 + bv + c$ másodfokú polinom.
- 2.) A legkedvezőbb a, b, c paraméterek meghatározása az legkisebb négyzetek módszerével történik, azaz keressük a

$$\Phi(a, b, c) = \sum_{i=1}^n [F_{eai} - (av_i^2 + bv_i + c)]^2 = \min!$$

háromváltozós célfüggvény lokális minimumát. Mint ismeretes ennek szükséges feltétele a parciális deriváltjainak együttes eltűnése, amiből a három lineáris egyenlet alkotta

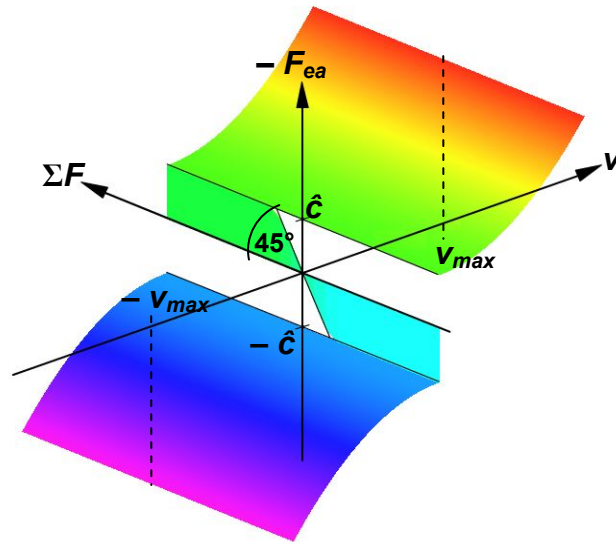
$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0$$

egyenletrendszer adódik az $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ optimális együtthatók meghatározására.

- 3.) A $v = 0$ sebesség esetét külön kell vizsgálni, ugyanis nyugalmi helyzetben az alapellenállás erő egyensúlyozza a kívülről esetleg működő $\sum F$ külső erőt. Ennek figyelembevételével a $v = 0$ sebesség esetére az $F_{ea} = (-\text{sign } \sum F) \cdot \min\{c, |\sum F|\}$ összefüggés adódik.

A fenti eredmények egyesítésével végül is az előjelhelyes kétváltozós alapellenállás-erő a következőképp írható fel: $-F_{ea}(v, \Sigma F) = \begin{cases} (\text{sign } v) \cdot (\hat{a}v^2 + \hat{b}|v| + \hat{c}) , & \text{ha } |v| \neq 0 \\ (\text{sign } \Sigma F) \cdot \min\{\hat{c}, |\Sigma F|\} , & \text{ha } |v| = 0 \end{cases}$.

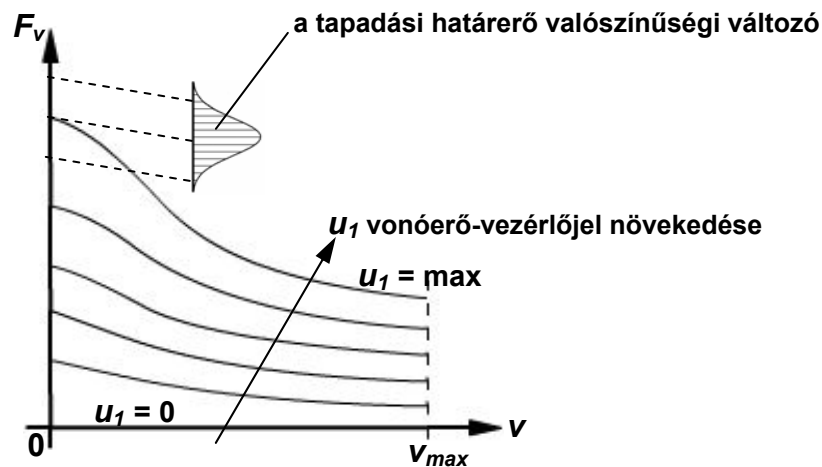
A most megadott kifejezés közvetlenül alkalmazható számítógépi program készítéséhez. A megadott alapellenállás-függvény jellegfelülete a 2.2. ábrán látható.



2.2. ábra. A jármű kétváltozós alapellenállás-erő függvényének jellegfelülete

2.3. A vonóerő

A kétváltozós $F_v = F_v(u_1, v)$ vonóerőfüggvényt már korábban bevezettük. A két független változó definíció szerint az $u_1 \geq 0$ a hajtásvezérlés és a v a sebesség. Előző tanulmányokból ismert, hogy a vonóerőt a jármű hajtásrendszere szolgáltatja. Azokban az esetekben amikor a hajtásrendszer által leadott vonóerő állandósult vagy igen lassan változik, a **kvázistatikus vonóerő-diagram**-rendszer alkalmazható. A 2.3 ábrán felrajzoltuk a sebesség függvényében egy folytonos vonóerőgörbékkel bíró jármű vonóerőgörbe sorozatát az u_1 hajtásvezérlési értékekkel paraméterezve.



2.3. ábra. Kvázistatikus vonóerőgörbe sorozat a sebesség függvényében különböző u_1 hajtásvezérlési paraméterek mellett

A megengedett sebességek intervalluma a $[0, V_{max}]$ intervallum. A vonóerőkifejtést felülről a

kerék és a támasztófelület kapcsolatára jellemző tapadási tényező korlátozhatja. Korábbi tanulmányokból ismert, hogy a tapadási tényező valószínűségi változóként kezelendő. Ezt a tényt az ábrán feltüntetett valószínűségi sűrűségfüggvény (harang görbe) jeleníti meg.

A kétváltozós függvény általános megadása $u_1 = u_{l_i}$ fokozatonként, *képlettel* vagy *numerikusan* (azaz véges sok pontjának koordinátaival és interpoláció alkalmazásával) történhet.

A vonóerőgörbe *numerikus* megadása véges sok, célszerűen választott jelleggörbe pont koordináta párjának táblázatos megadásával történik.

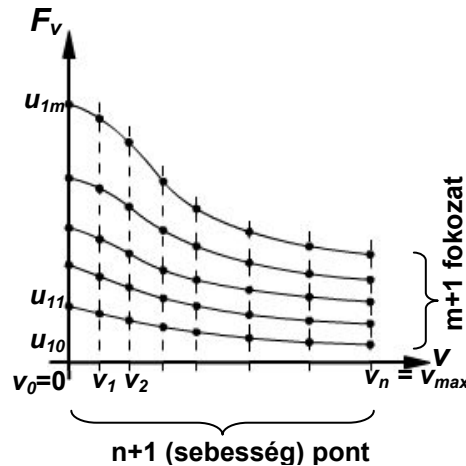
Vezérlés	Adott vezérléshez tartozó vonóerő $n+1$ sebesség-pontban			
$u_{10} \rightarrow$	$F_v \equiv 0$			
$u_{11} \rightarrow$	(v_0, F_{v10})	(v_1, F_{v11})	\dots	(v_n, F_{v1n})
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
$u_{1m} \rightarrow$	(v_0, F_{vm0})	(v_1, F_{vm1})	\dots	(v_n, F_{vmn})

$n+1$ (sebesség) pont

$m+1$ fokozat

2.1. Táblázat. A vonóerő sebesség koordináta párok megadása különböző vezérlési paraméterekhez

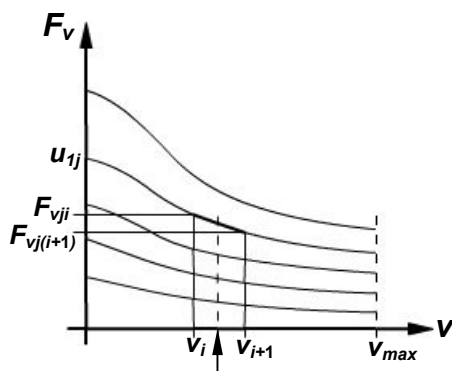
Mivel a nulladik vezérlési pozícióhoz (u_{10}) $F_v \equiv 0$ tartozik, ezért $(n+1) \cdot m$ darab koordináta párt kell megadni!



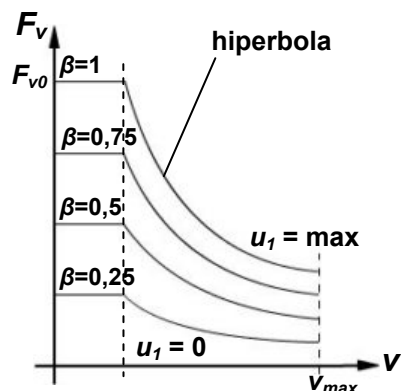
2.4. ábra. A vonóerőgörbék pontjainak megadása koordináta párokkal

Interpoláció: Elegendő pontsűrűség esetén a lineáris interpoláció megfelelő, pl.

$v \in [v_i, v_{i+1}]$ és u_{1j} esetén a vonóerő az $F_v(u_{1j}, v) \approx F_{vji} + \frac{F_{vj(i+1)} - F_{vj}}{v_{i+1} - v_i} (v - v_i)$ összefüggéssel számítható (2.5. ábra).



2.5. ábra. Az interpolációs eljárás



2.6. ábra. Vonóerő explicit megadása

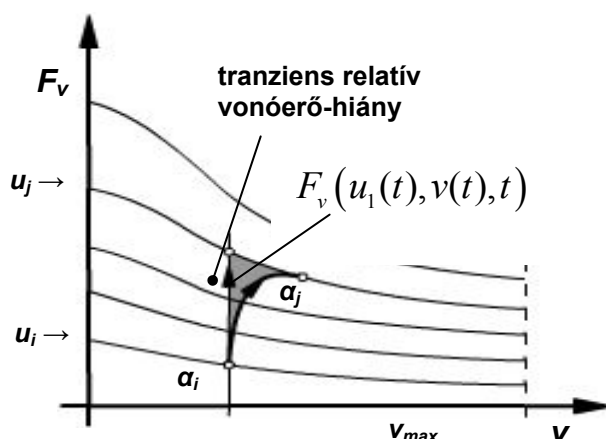
Speciális esetekben a vonóerőgörbe *explicit képlettel* is megadható. Példaként a

$$F_v(u_1, v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u_1}{u_1^{\max}} \cdot \min \left\{ F_{v0}, \frac{P_{\text{névl}}}{v} \right\}$$

β

képletet mutatjuk be, ahol $\beta \in [0;1]$ a relatív vonó-erőkivezérési arány (lásd a 2.6 ábrát). Az ábrán vázolt hiperbola-szakaszokon a vonóerő úgy változik a sebesség függvényében, hogy közben $\beta = \text{áll.}$ esetben a kifejtett teljesítmény is állandó marad.

Áttérünk a **tranziens vonóerő kifejlődés** kérdésének vizsgálatára. A probléma abból adódik, hogy a hajtásvezérlés közel ugrásszerű u_1 változása időben némiképp elhúzódnó vonóerő-változást von maga után (a vonóerő kifejlődése tehát csak késéssel követi a vezérlést), ezért **tranziens relatív vonóerőhiány** lép fel! Azaz $i \rightarrow j$ vezérlésváltozás esetén $\alpha_i \rightarrow \alpha_j$ vonóerő-felfutás valósul meg. A vonóerő alakulásába most direkt időfüggés is belép a kvázistatikussal jellemző indirekt időfüggés mellé. A tranziens vonóerőt a 2.7 ábra szerinti $F_v(u_1(t), v(t), t)$ háromváltozós függvény adja meg, ahol $u_1(t)$ és $v(t)$ indirekt időfüggést (kvázistatikussal), t pedig direkt időfüggést (tranziens) azonosít.



2.7. ábra Tranziens vonóerő-kifejlődés

2.4. A fékezőerő

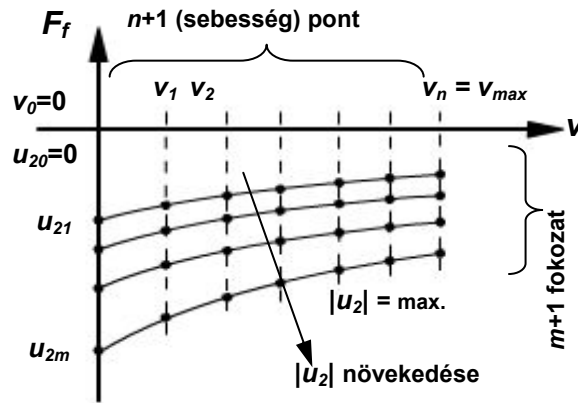
A fékezőerőt a jármű fékrendszere szolgáltatja (lásd a: „Járművek és mobil gépek I.”, ill. „Járműrendszerek” c. tárgyakban tanultakat). A fékezőnyomaték generálását később részletezzük. A járműre ható fékezőerő $F_f = F_f(v, u_2)$ kétváltozós függvénnyel adható meg, ahol a független változók a jármű v sebessége és a definíció szerint nem-pozitív $u_2 \leq 0$ fékvezérlés. A kvázistatikus fékezőerő közelítő megadására jól kezelhető közelítő formula adódik azon feltételezés elfogadásával, hogy a súrlódásos fék működésekor a csúszósúrlódási tényező a csúszási sebességtől exponenciálisan függ. Ez azt jelenti, hogy nagyobb csúszási sebességnél a csúszósúrlódási tényező kisebb értéket vesz fel. A fékezőerő sebességfüggése természetszerűen követi a súrlódási tényező sebességfüggését. Az elmondottak alapján a fékezőerő megadás a következő képlettel történhet:

$$F_f(v, u_2) = \underbrace{\frac{u_2}{u_{2\max}}}_{\varepsilon} \left\{ F_{f1} + |F_{f0} - F_{f1}| \cdot e^{-\lambda v} \right\} \leq 0,$$

ahol F_{f0} a legnagyobb $|u_{2\max}|$ fékerő-kivezérléshez tartozó fékezőerő függvény zérus sebességnél adódó jobb oldali határértéke, F_{f1} pedig ugyanezen fékezőerő függvény $v \rightarrow \infty$ esetén adódó határértéke. Az exponenciális függvény változásának intenzitását a $\lambda \geq 0$ paraméter beállításával lehet meghatározni (pl. ha $\lambda = 0$, akkor a sebességfüggés megszűnik). A képletben szorzótényezőként megjelent $\varepsilon = u_2/|u_{2\max}|$ hányados neve: relatív fékerő-kivezérlési arány, és értékét a $[-1, 0]$ intervallumban veheti fel.

A fékezőerő megadása numerikusan:

A fékező erő numerikus megadása a vonóerő numerikus megadásával megegyező módon végezhető el a következő lépések szerint:



2.8. ábra. A fékezőerő jelleggörbe pontjainak numerikus megadása koordinátaárokkal

- 1.) Képezzük a $\{v_i\}_0^n$ sebesség-felosztást, és kijelöljük az ellenőrzött jelleggörbe pontokat. (amelyeket mérés vagy más módon konkrétan meg kívánunk határozni)
- 2.) Elkészítjük az $(n+1) \cdot m$ koordináta párt tartalmazó táblázatot.
- 3.) Elvégezzük a lineáris interpolációt (ld. a vonóerő megadásánál!).

2.5. Haladás vízszintes-egyenest mozgáspályán

Az előző három fejezet alapján vízszintes-egyenest mozgáspályán mozgó jármű esetére megvan az összes pályairányú erőösszetevő, így a jármű mozgásfolyamata a már tanulmányozott mozgásegyenlet alapján meghatározott:

$$m(1 + \gamma) \cdot a = F_v + F_f + F_{ea}.$$

Az erők mozgásállapot és vezérlésfüggését részletező felírásban ez az egyenlet az

$$m(1 + \gamma) \cdot \dot{v}(t) = F_v(u_1(t), v(t)) + F_f(u_2(t), v(t)) + F_{ea}(v(t), \sum F),$$

alakot ölti, ahol ahol $\sum F = F_v + F_f = F_v(u_1(t), v(t)) + F_f(u_2(t), v(t))$.

Mág tömörebb alakba írva:

$$m(1 + \gamma) \cdot \dot{v}(t) = f(v(t), u_1(t), u_2(t)),$$

ahol f alkalmas háromváltozós nemlineáris függvény. Az $m(1+\gamma)$ értékkel elosztva az utóbbi differenciálegyenlet mindkét oldalát akkor $|v| \neq 0$ esetére a jellegzetes

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}(t) &= f^*(v(t), u_1(t), u_2(t)) \quad \text{diff. egy.} \\ v(t_0) &= v_0 \quad \text{kezdeti érték} \end{aligned} \right\}$$

elsőrendű kezdeti érték probléma adódik a t_0 időpontban v_0 sebességről induló ismeretlen $v(t)$ sebességfüggvény meghatározására.

2.6. Járműkos menetellenállás erők

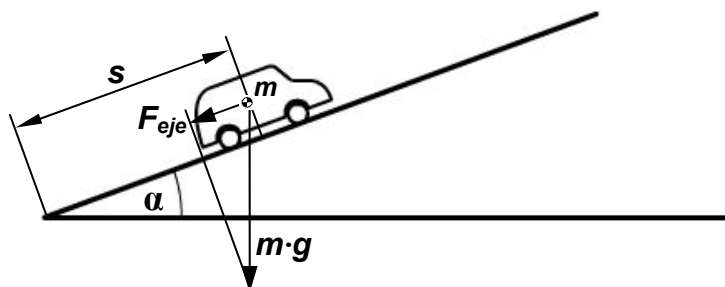
A járműkos menetellenállás erők a közlekedési pálya emelkedési viszonyaival ill. görbületi viszonyaival vannak meghatározva. Mozgásállapot-függésük a befutott pályaivhosszal mint független változóval adható meg.

1.) Emelkedési ellenállás

Az járműre működő $F_{eje}(s)$ emelkedési ellenállás a közlekedési pálya s ívhosszal jellemzett helyén az ottani lokális emelkedési jellemzővel, a pálya érintővektorának a vízszintestől mért előjeles (felfelé pozitív) $\alpha(s)$ hajlásszögének tangensével van meghatározva. Az m tömegű járműre ható emelkedési ellenálláserő előjeles nagyságát a következő képlettel kapjuk:

$$F_{eje}(s) = -mg \sin \alpha(s) \underset{\text{ha } \alpha \text{ kicsi}}{\approx} -mg \operatorname{tg} \alpha(s).$$

ahol g a nehézségi gyorsulás.

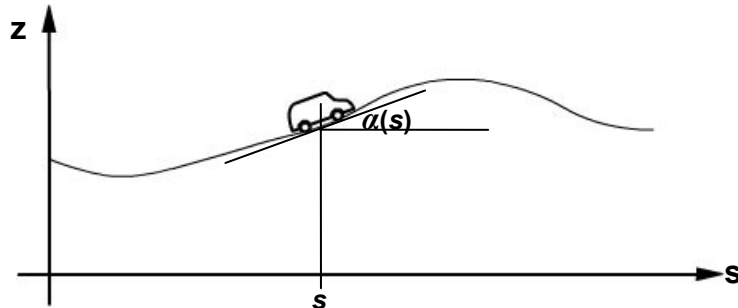


2.9. ábra. A lejtőn felfelé mozgó járműre ható pályairányú erő

Kivételes esetektől eltekintve a főmozgás vizsgálatokor elfogadható a kis szögekre vonatkozó közelítés. Tekintettel arra, hogy a tangens függvény előjeles, a képlet helyesen tükrözi vissza

azt a tényt, hogy pozitív $\alpha(s)$ szögnél (emelkedő pályán) az emelkedési ellenállás a jármű mozgását gátolni igyekszik, míg negatív $\alpha(s)$ szög esetében (lejtőn lefelé) a fellépő pozitív erőhatás járulékos vonóerőként működik.

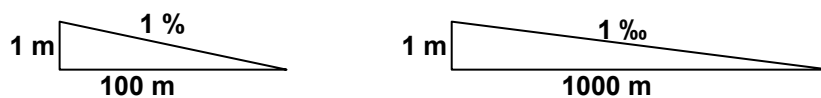
Legyen adva a változó emelkedésű mozgáspálya ívhossz függvényében megadott $z = z(s)$ függvénye, melynek diagramja az un. hossz-szelvény:



2.10 ábra. A közlekedési pálya emelkedési viszonyainak jellemzése a lokális iránytangens számértékével a befutott út függvényében

Ha a lokális emelkedési szög tangensét $e(s)$ -sel jelöljük: $e(s) = \tan \alpha(s) = \frac{dz(s)}{ds}$, akkor az emelkedési ellenálláserő szokásos jelölése adódik: $F_{ej}(s) = -mg \cdot e(s)$. Az $e(s)$ függvényből kiindulva a mérnöki gyakorlatban szokásos a lokális emelkedés százalékban vagy ezrelékben megadott értékének használata az alábbiak szerint:

$$\tan \alpha(s) = e(s) = \frac{e\%}{100} = \frac{e\text{‰}}{1000}.$$



2.11. ábra. A közlekedési pálya emelkedés megadása százalékos értékkel és ezrelékes értékkel
2.) *Görbületi ellenálláserő:*

Az adott méretekkal kialakított járműre működő $F_{ejg}(s)$ görbületi ellenállás a közlekedési pálya s ívhosszal jellemzett helyén az ottani lokális görbülettel van meghatározva. Az $F_{ejg}(s)$ görbületi ellenállás erő mindenkor nem pozitív nagyságú, zérus értéket csak az egyenes mozgáspályán vesz fel. Az $F_{ejg}(s)$ ellenállás erő a pályagörbület monoton növekvő függvénye, képletszerű megadása az $F_{ejg}(s) = -mg \cdot f(|G(s)|)$ kifejezéssel történik, ahol $G(s)$ a pálya s ívhossznál fennálló görbülete, $f(|G(s)|)$ pedig a fajlagos görbületi ellenállás. A szereplő f függvény a jármű *konstrukciós kialakításával* van meghatározva. A konkrét görbületi ellenállásfüggvényre vonatkozó példa tárgyalása előtt fordítsuk figyelmünket a görbület meghatározására síkbeli görbék esetén.

Az adott s ívhossznál érvényes görbület az ottani simuló kör R sugarának reciprokával van értelmezve. A görbület körpálya esetén: $G = \frac{1}{R}$, $[G] = \frac{1}{m}$. Általános, $y = y(x)$ függvénnyel megadott síkbeli görbe esetében a G görbület az x független változó függvényében változó érték lehet a

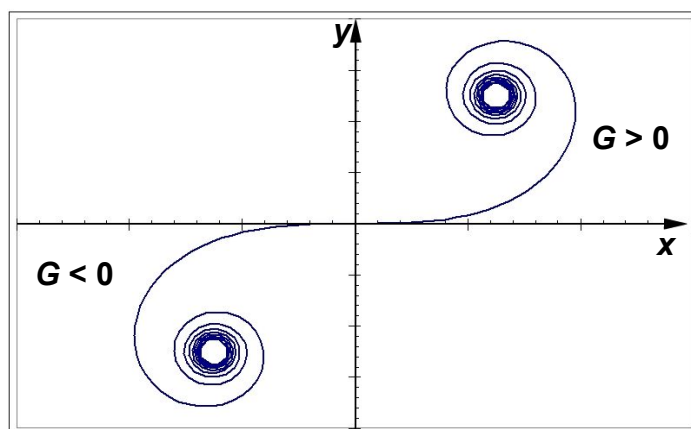
$$G(x) = \frac{y''(x)}{[1 + y'^2(x)]^{3/2}} = \frac{1}{R(x)}$$

összefüggés szerint. A görbület előjeles mennyiség. Az előjelszabály megjegyzését egyszerűvé teszi az $y(x) = x^2$ origó-csúcspontú másodfokú (normál) parabola esetében adódó előjel megjegyzése. A parabola első deriváltja az $y'(x) = 2x$ függvény. Ennek négyzete az $(y'(x))^2 = 4x^2$ függvény, amely nem negatív. Ezért minden x -re határozottan pozitív az $1 + (y'(x))^2$ függvény, és ennek $3/2$ -kitevőre emelt értéke is. Kaptuk, hogy a görbület kifejezésében a nevező most minden x -re pozitív. A görbület előjelét tehát az $y(x)$ második deriváltjának előjele fogja meghatározni. A második derivált azonban: $y''(x) = 2 > 0$. Tehát a felülről konvex parabola görbülete az origóban és annak bármely környezetében pozitív. Értelmszerűen a felülről nézve konkáv parabola görbülete minden x -re negatív. A közlekedési pálya mentén haladva tehát az s ívhossz függvényében a görbület pozitív ha balra kanyarodik az ív és a görbület negatív, ha jobbra kanyarodik az ív. Ezt a szabályt kell figyelembe vennünk a mozgáspálya görbületi viszonyait leíró diagramok rajzolásakor.

A járműdinamikában a jármű mozgáspályáját a következő három jellegzetes görbeféleség egymáshoz történő sima (folytonosan differenciálható) kapcsolásával állítjuk elő:

- i) egyenes pályaszakaszok ,
- ii) köríves pályaszakaszok, valamint
- iii) átmeneti íves (változó görbületű) szakaszok.

A közlekedési pályákon átmeneti ívként a **klotoid** görbe alkalmazása célszerű, mert ennek kezelése egyszerű, ugyanis a klotoid görbület függvénye az ívhossztól lineárisan függ: $G(s) = c \cdot s$, ahol c a görbületváltozás intenzitására jellemző konstans. A 2.12 ábrán felrajzoltuk a „teljes klotoid” diagramját. Jól átható a két konvergenciapont, melyek az $s \rightarrow -\infty$ és az $s \rightarrow \infty$ határese-tekhez tartoznak.



2.12. ábra. A teljes klotoid görbe

A közlekedési pálya átmeneti íveiként természetesen a teljes klotoidnak csak az origó-közelі részei jöhetnek szóba. Amennyiben a közlekedési pályát a mondott három görbeféleség egymáshoz kapcsolásával konstruáljuk, akkor az eredő görbületfüggvény az ívhossz függvényében szakaszonként lineáris lesz. Az egyenes szakaszokhoz ugyanis zérus görbület, a köríves szakaszokhoz konstans (előjeles) nemzérus görbület tartozik, az átmeneti íves szakaszokhoz pedig a két csatlakozó szomszédos állandó görbületi értéket lineárisan változó görbületfüggvény szakasz köti össze. A görbületi függvény tehát szakaszonként lineáris, folytonos függvény lesz, az átmeneti ívek kezdő- és végpontjában a görbületfüggvénynek töréspontja

van. A közlekedési pálya görbületét az ívhossz függvényében leíró, szakaszonként lineáris függvény numerikus kezelésével egy későbbi pontban foglalkozunk.

Magyarázatunk alapján azt le lehet szögezni, hogy tetszőleges s ívhosszhoz rendelkezésre áll az ottani görbület, és ha a vizsgált pont nem egyenesen fekszik, akkor az $R(s) = 1/G(s)$ képlet alapján a helyi (lokális) görbületi sugár is megadott. Visszatérve a járulékos emelkedési ellenállásról kérdéséhez, pl. vasúti pálya esetére a következő, *Röckl*-től származó (mérésekre alapozott) képlettel adhatjuk meg az s ívhossz függvényében az $F_{ejg}(s)$ görbületi ellenállásért:

$$F_{ejg}(s) = - \begin{cases} 0 & \text{ha } G(s) \leq \frac{1}{55} \\ \frac{520}{\frac{1}{|G(s)|} - 55} \cdot mg & \text{ha } G(s) > \frac{1}{55} \end{cases} \quad [1/m]$$

Az emelkedési és irányviszonyok következtében fellépő emelkedési ellenállásról és görbületi ellenállásról mint az ívhossz függvénye beépül a jármű mozgásegyenletébe a következő formában:

$$m(1 + \gamma) \cdot \ddot{s}(t) = F_v(\dot{s}(t), u_1(t)) + F_f(\dot{s}(t), u_2(t)) + F_{ea}(\dot{s}(t), \sum F) + F_{eje}(s(t)) + F_{ejg}(s(t))$$

A kapott egyenletben szereplő $\sum F$ mint ugyancsak mozgásállapottól és a vezérlésektől függő erő kifejezés, beépíthető az alábbi összevont, explicit alakú felírás alkalmazásával és a kezdeti értékek feltüntetésével:

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{s}(t) &= \Phi(\dot{s}(t), s(t), u_1(t), u_2(t)) \quad , \quad |\dot{s}| \neq 0 \\ s(t_0) &= s_0 \quad \text{és} \quad \dot{s}(t_0) = v_0 \end{aligned}}$$

Ezzel egy másodrendű, nemlineáris *kezdeti érték probléma* (K.É.P.) adódik, amely egy másodrendű, nemlineáris differenciálegyenletből és a megadott (előírt) kezdeti értékekből áll össze. Kiemeljük, hogy a most megjelent négyváltozós nemlineáris Φ függvényben már benne foglaltatik a pályaemelkedők és a pályagörbület okozta járulékos ellenállásokról dinamikai hatása is! A most tett elvi megállapítás mellett azonban azt is fontos látnunk, hogy a gyakorlati numerikus számításokhoz persze nem lehet nélkülözni a jármű bármely $s(t)$ helyzetéhez tartozó $e(s(t))$ emelkedési iránytangens és $G(s(t))$ értékeket! Ezen kérdéssel foglalkozik a következő pont.

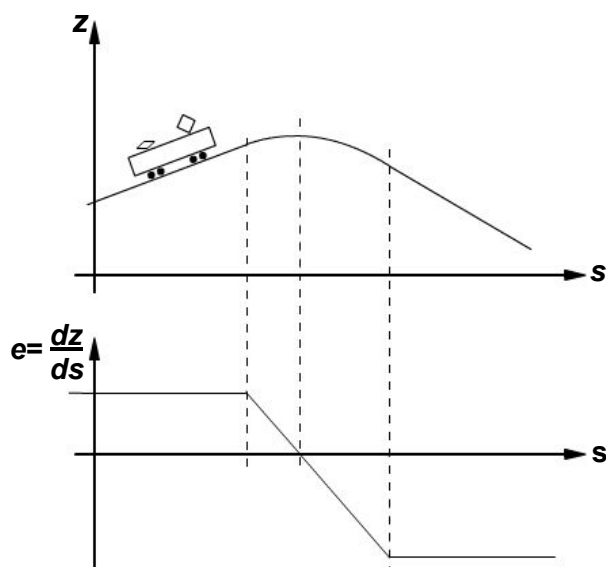
2.7. Egy térbeli járműmozgás pályájának megadása

2.7.1. A hossz-szelvény (azaz az emelkedési viszonyok) numerikus megadása:

Az $e(s)$ függvény a pálya hossza mentén konstans e -vel bíró szakaszokból (előjelek) és az ezek közötti függőleges síkban fekvő nagysugarú körökkel való „lekerekítésekből” áll. A numerikus kezelés egyszerűsítésére a most mondott lekerekítő köríveket célszerű olyan a másodfokú parabolákkal közelíteni, amelyek a csúcspontbeli simulókörei épp a megadott lekerekítő körök. Egyetlen lejt-törés lekerekítésének egyszerű példáját láthatjuk a 2.13. ábrán:

Ha a függőleges síkbeli lekerekítést másodfokú parabolával közelítjük, akkor ezeken a szakaszokon az $e(s) = \frac{dz}{ds}$ deriváltfüggvény az s ívhossz függvényében lineáris, a konstans emel-

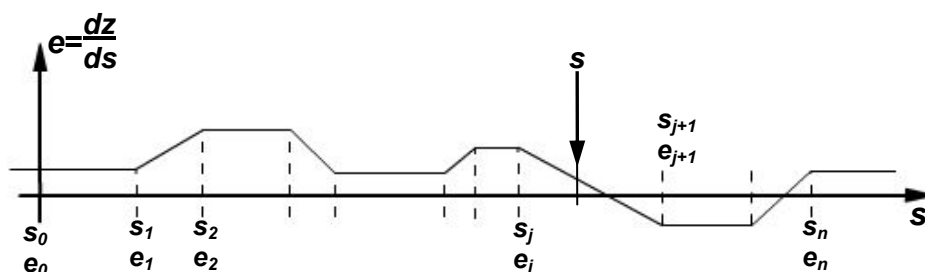
kedőjú vagy lejtésű szakaszokon pedig $\frac{dz}{ds} = e_i = \text{const}$. lesz.



2.13. ábra. A közlekedési pálya emelkedés iránytangensének közelítése töröttvonalal, ha a lekerekítő körívet másodfokú parabolával közelítjük

Ezzel a fenti megfontolással általános mozgáspálya esetén is $e(s)$ szakaszonként lineárisan közelíthető; azaz azon s helyeken amelyekhez lineáris $e(s)$ szakasz tartozik, ott lineáris interpolációval végezhető el a helyi (lokális) emelkedési iránytangens meghatározása.

A 2.14 ábrán felrajzoltuk egy mozgáspálya ténylegesen jellemző szakaszonként lineáris emelkedési iránytangens függvényét. Az emelkedési viszonyokat tehát a szereplő “törött vonalat” a töréspontok koordinátaiból képzett $\{s_i\}_{i=0}^n$ ívhossz sorozat és $\{e_i\}_{i=0}^n$ emelkedési iránytangens sorozat reprezentálja.



2.14. ábra. Az emelkedési iránytangens numerikus megadása a teljes befutott út felett a töröttvonal törésponti koordinátapárjaival

A közlekedési pálya tetszőleges $s_0 \leq s \leq s_n$ helyen keressük az emelkedési iránytangens értékét. Ehhez a következő lépéseket kell elvégezni:

- 1.) Meg kell keresni az adott s értéket közrefogó két ívhossz osztópontot ($s_j \leq s < s_{j+1}$),
- 2.) Az s_j, s_{j+1} és a hozzájuk tartozó e_j, e_{j+1} iránytangens értékek ismeretében $s_j \leq s < s_{j+1}$ esetén a keresett $e(s)$ emelkedés lineáris interpolációval számítható:

$$e(s) \approx e_j + \frac{e_{j+1} - e_j}{s_{j+1} - s_j} (s - s_j) .$$

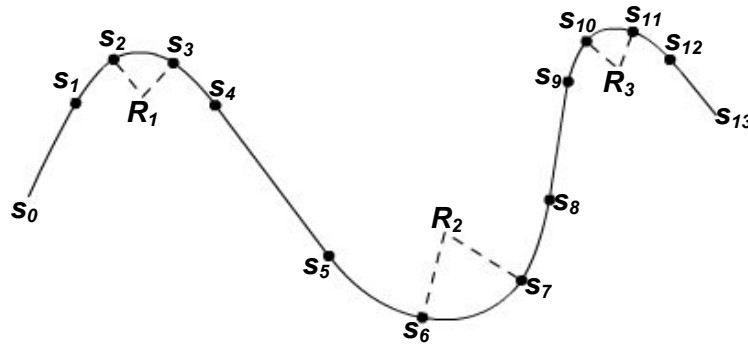
A görbületi viszonyok numerikus megadása:

Ha a közlekedési pálya simán csatlakozó egyenes szakaszokból, lineárisan változó görbüetű klotoid átmeneti ívekből és állandó sugarú körív-szakaszokból épül fel, akkor a $G(s)$ görbüetfüggvény szakaszonként lineáris függvény lesz, az egyenes szakaszok pontjaiban a görbüet zérus, a klotoid átmeneti ívek felett a görbüetfüggvény lineárisan változik, míg a konstans sugarú köríves szakaszokon a görbüet (előjeles) állandó értéket vesz fel. Felülnézetből mindez a 2.15 ábrán látható. Az ábrában szereplő egyenes szakaszokon $G(s) = 0$, ezek az $[s_0, s_1]$, $[s_4, s_5]$, $[s_8, s_9]$ és $[s_{12}, s_{13}]$ ívhossz-intervallumok. Az $[s_2, s_3]$, $[s_6, s_7]$ és $[s_{10}, s_{11}]$ ívhossz-intervallumok felett köríves a pálya van állandó görbüetűvel, a görbüet pedig $G_i(s) = 1/R_i$, $i = 1, 2, 3$. Az átmeneti íves ívhossz intervallumok rendre: $[s_1, s_2]$, $[s_3, s_4]$, $[s_5, s_6]$, $[s_7, s_8]$, $[s_9, s_{10}]$, $[s_{11}, s_{12}]$. A klotoid átmeneti íveknek megfelelő s -ben lineáris görbüetfüggvények a szükséges eltolások figyelembevételével pozitív c_{ij} értékekkel rendre:

$$G_{12}(s) = -c_{12}(s-s_1), \quad G_{34}(s) = c_{34}(s-s_4),$$

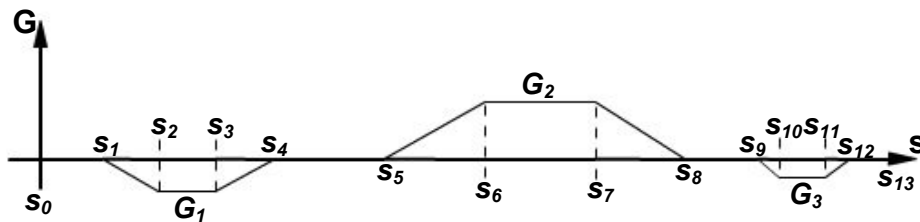
$$G_{56}(s) = c_{56}(s-s_5), \quad G_{78}(s) = -c_{78}(s-s_8),$$

$$G_{910}(s) = -c_{910}(s-s_9), \quad G_{1112}(s) = c_{1112}(s-s_{12}).$$



2.15. ábra. A közlekedési pálya görbületi viszonyaira jellemző helyszínrajz az egyenes szakaszok, az átmeneti ívek és a köríves szakaszok határpontjainak feltüntetésével

A helyszínrajzi ábra szerinti pálya görbüetfüggvényét az s ívhossz szerint "kiterítve" a 2.16 ábra szerinti törött vonal diagram adódik.



2.16. ábra. A görbüet numerikus megadása a teljes befutott út felett a töröttvonal törésponti koordinátapárjaival

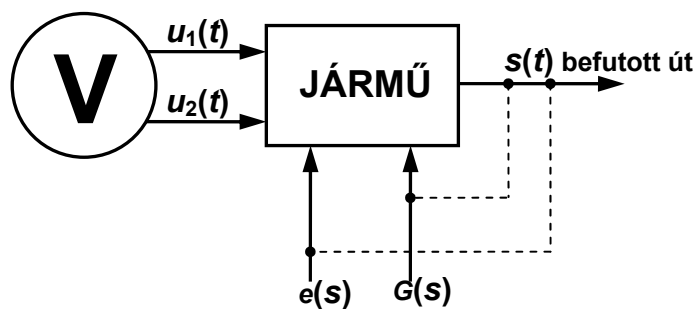
A szakaszonként lineáris függvényt most is a törésponti koordináták alkotta véges elemszámú sorozatokkal jellemezhetjük. Így tehát az $\{s_i\}_{i=0}^n$ és $\{G_i\}_{i=0}^n$ ívhossz- és görbüet-sorozatokra támaszkodva lineáris interpolációval számíthatjuk bármely $[s_0, s_n]$ intervallumbeli s ívhosszhoz tartozó helyi (lokális) görbüet értéket. Az interpolációs eljárás módszere most is a következő:

- 1.) Meg kell keresni az adott s értéket közrefogó két ívhossz osztópontot ($s_j \leq s < s_{j+1}$),

- 2.) Az s_j, s_{j+1} és a hozzájuk tartozó G_j, G_{j+1} görbület értékek ismeretében $s_j \leq s < s_{j+1}$ esetén a keresett $G(s)$ előjeles görbület lineáris interpolációval számítható:
 az $s_j, s_{j+1}; G_j, G_{j+1}$ ismeretében $s_j \leq s < s_{j+1}$ esetén interpolációval számolható:

$$G(s) \approx G_j + \frac{G_{j+1} - G_j}{s_{j+1} - s_j} (s - s_j)$$

A fentiekben tárgyaltak alapján a jármű mozgásegyenletében szerepeltetett Φ iránymező függvényünkbe beépülő emelkedési iránytangens és görbület függvény meghatározott, és így a $\ddot{s}(t) = \Phi(\dot{s}(t), s(t), u_1(t), u_2(t))$ differenciálegyenlet adott $u_1(t)$ és $u_2(t)$ vezérlési függvények mellett megoldható a jármű által befutott utat megadó ismeretlen $s(t)$ -re. A 2.17. ábrán szemléltetjük azt a tényt, hogy a járműre ható erők közé a jármű helyzetét megadó $s(t)$ befutott út függvény visszacsatolódásával beépülnek emelkedési és görbületi ellenálláserők is.



2.17. ábra. A befutott úttól függő járulékos ellenálláserőket meghatározó emelkedési és görbületi jellemzők visszacsatolása

2.8. A mozgásegyenlet megoldása

A jármű mozgásegyenletének kétféle megoldását tárgyaljuk:

- 1.) Szakaszonként zárt alakban – kézi megoldás
- 2.) Numerikusan – számítógépes megoldás

2.8.1. Szakaszonként zárt alakú megoldás

A módszer alapja az, hogy véges sebességintervallum felosztást felvéve a sebesség időfüggvényét szakaszonként ismert típusú közelítő függvényekből az egyes sebességintervallumok feletti megoldások folytonos egymáshoz fűzésével konstruáljuk meg.

a) Konstans gyorsítóerő-lépcsők alkalmazása

A módszerről előzetes áttekintésben a következő mondható el. A jármű $[0, v_{max}]$ megengedett sebességtartományát ekvidisztáns osztópontokkal egyforma hosszú elemidegen szakaszokra osztjuk, majd az így kapott sebességintervallumok felezőpontjaiban meghatározzuk az ott érvényes vonóerő és a menetellenállás értékek különbségeként a sebesség-intervallum közepeknél fennálló és a vizsgált intervallumban konstansnak tekintett gyorsító-vonóerő értékeket. Ezen gyorsító-vonóerő értékekből a tömeg és a forgótömeg tényező ismeretében meg tudjuk határozni a tekintett sebességintervallum középpontokbeli gyorsulásokat. Az így adódott a_1, a_2, \dots, a_n gyorsulásértékek ismeretében a zérus sebességtől kiindulva sorozatosan meghatározhatók az azonos hosszúságú Δv sebesség-intervallumok befutásához szükséges $\Delta t_1 = \Delta v / a_1, \Delta t_2 = \Delta v / a_2, \dots, \Delta t_n = \Delta v / a_n$ időtartamok. Az így ismertté vált Δt_i időértékek és Δv sebességnövekmény figyelembe vételével origóból induló töröttvonalként kiadódik a jármű sebesség időfüggvényének közelítő lefutását ábrázoló menetábra darab. Vizsgáljunk például egy egy-



szerű esetet: vízszintes egyenes pálya, ahol csak az alapellenállás-görbe érdekes, természetesen az adott vonóerő-görbe mellett.

A megoldás menete részletesebb tárgyalásban számított lépésekre bontva:

- 1.) A $\Delta v = v_i - v_{i-1}$ sebességek között (lehet egyenközű osztás is) tekintjük F_{vi} közepes vonóerőt és F_{eai} közepes alapellenállás-erőt.
- 2.) Tekintjük az i -dik Δv -hez tartozó F_{gvi} közepes gyorsítóerőt:

$$F_{gvi} = F_{vi} - F_{eai} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- 3.) Meghatározzuk az i -dik Δv -hez tartozó gyorsulást:

$$a_i = \frac{F_{gvi}}{m(1 + \gamma)} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- 4.) Meghatározzuk az i -dik Δv befutásának idejét:

$$\Delta v = a_i \cdot \Delta t_i \Rightarrow \Delta t_i = \frac{\Delta v_i}{a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

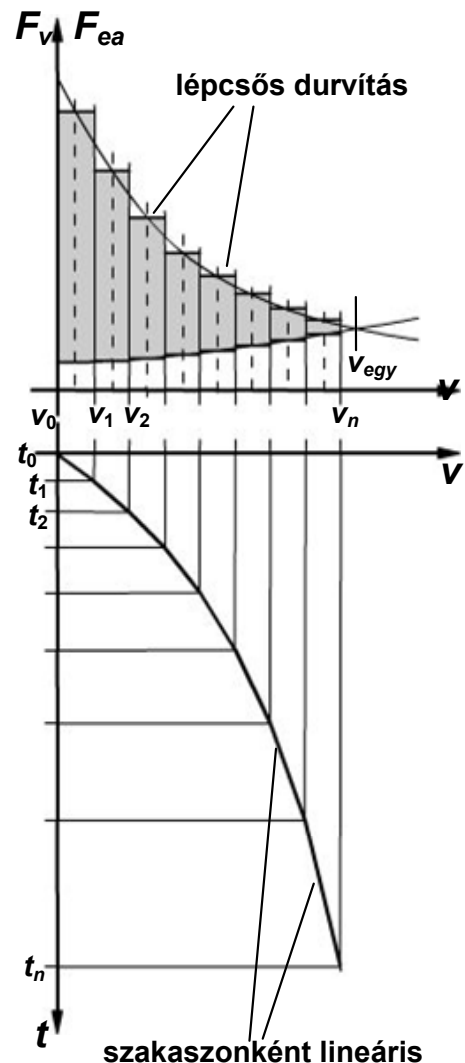
- 5.) Ezzel pedig előáll a $v = v(t)$ menetábra: szakaszonként lineáris közelítéssel.
- 6.) Az $s = s(t)$ függvény meghatározása a sebességfüggvény integrálásával adódik az

$$s(t) = \int_0^t v(t) dt$$

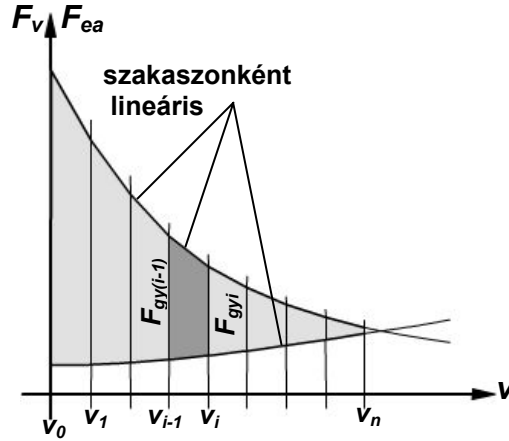
integrál kiszámításával. Most a meghatározott szakaszonként lineáris $v(t)$ függvényt kell a Δt_i intervallumok felett integrálni és a kapott függvény szakaszokat folytonosan differenciálható kapcsolódással egymáshoz fűzni. Az eredményt szakaszonként másodfokú parabola-közelítésben (mivel $v(t)$ szakaszonként lineáris volt) kapjuk, és az intervallumhatárokon a kapcsolódó parabola-szakaszok érintői szükségképp megegyeznek!

b) Lineáris gyorsítóerő-szakaszok

Ennél a módszernél az előzőhöz hasonlóan, a jármű vonóerő-görbéjének és a menetellenállás-görbéjének Δv szakaszonként vett különbségfüggvényét – a gyorsító-vonóerő-függvényt – lineárisan közelítjük. A Δv intervallumok felett így adódó lineáris gyorsító-vonóerő függvény szakaszokat vesszük figyelembe a jármű mozgásegyenletének a vonatkozó Δv intervallum feletti megoldásakor. A vizsgált intervallum felett érvényes mozgásegyenletre vonatkozó kezdeti érték feladatát sorozatosan megoldva előáll a időtől exponenciálisan függő függvény-szakaszokból felépülő közelítő menetábra. A kapott menetábra újabb idő szerinti integrálásával előállítható a befutott út közelítő időfüggvénye is. A most ismertetett eljárás lépései formalizált megfogalmazásban a következőképp foglalhatók össze:



2.18. ábra. A $v(t)$ menetábra közelítő számítása konstans gyorsuláslépcsőkkel



2.19. ábra. A gyorsítóerő szakaszonként lineáris közelítése

- 1.) A gyorsítóerő meghatározása (adott Δv szakaszra):

$$F_{gv}(v) \cong F_{gv(i-1)} + \frac{F_{gvi} - F_{gv(i-1)}}{v_i - v_{i-1}}(v - v_{i-1})$$

Ez a gyorsítóerőre egy $F_{gv}(v) = A + Bv$ alakú lineáris közelítés, a diagramban törött vonallal jelentkezik.

- 2.) A mozgásegyenlet felállítása: $m(1 + \gamma) \frac{dv}{dt} = F_{gv}(v)$

- 3.) A mozgásegyenlet megoldása egy adott Δv szakaszra: $\frac{dv}{F_{gv}(v)} = \frac{1}{m(1 + \gamma)} dt$.

Bevezetve az $F_{gv}(v) = A + Bv$ új változót a

$$\frac{dv}{A + Bv} = \frac{1}{m(1 + \gamma)} dt$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletet nyerjük. Ha speciálisan valamely Δv esetén $B = 0$, akkor a megoldás könnyen adódik:

$$v(t, C) = \int \frac{A}{m(1 + \gamma)} dt + C = \frac{A \cdot t}{m(1 + \gamma)} + C.$$

Ekkor tehát a megoldás a tekintett Δv intervallum felett az idő lineáris függvénye. A C integrálási konstanst a tekintett Δv intervallum kezdeti pontjában fennálló sebesség ismeretében könnyen meg lehet határozni.

Ha a vizsgált Δv felett $B \neq 0$, akkor az alapesetben levezetett egyenletben a gyorsítóerő függvényre bevezetett $A + Bv$ lineáris kifejezésre az új u változót bevezetve és azt v -szerint deriválva a $\frac{du}{dv} = B$, majd a $dv = \frac{du}{B}$ összefüggés adódik. A kapott eredmények

figyelembe vételével a sebességfüggvény meghatározására az $\frac{1}{B} \frac{du}{u} = \frac{1}{m(1 + \gamma)} dt$ szeparált változójú differenciálegyenlet adódik, melynek mindkét oldalát a saját változója

szerint integrálva előbb az

$$\frac{1}{B} \ln u = \frac{1}{m(1+\gamma)} \cdot t + C$$

kifejezés, majd rendezéssel az

$$\ln u = \frac{B}{m(1+\gamma)} \cdot t + BC$$

képlet adódik. A kapott egyenlet mindkét oldalát e alapra emelve, kapjuk u tetszőleges C érték melletti egyparaméteres kifejezését:

$$u(t, C) = e^{\frac{B}{m(1+\gamma)} \cdot t + BC} = e^{\frac{B}{m(1+\gamma)} \cdot t} e^{BC}.$$

Az alkalmazott helyettesítés $u = A + Bv$ helyettesítést figyelembe véve és a bal oldalra beírva a keresett $v(t, C)$ egyparaméteres megoldássereget v -re rendezve kapjuk:

$$v(t, C) = \frac{1}{B} (e^{\frac{B}{m(1+\gamma)} \cdot t} e^{BC} - A).$$

A szereplő C konstans meghatározása most is a sebességintervallumonként érvényes kezdeti feltételek kielégítésével végezhető el.

Például a 2.19. ábra első $[v_0, v_1]$ sebességintervallum feletti megoldásszakaszhoz a $t_0 = 0$ pontban $v_0(0) = 0$ (indítás) kezdeti feltételek figyelembevételével a C konstans a következő megfontolások alapján adódik

$$v(0) = \frac{1}{B} (e^{\frac{B}{m(1+\gamma)} \cdot 0} e^{BC} - A) = 0, \quad v(0) = \frac{1}{B} (1 \cdot e^{BC} - A) = 0, \quad e^{BC} = A,$$

$$C = \frac{1}{B} \ln A.$$

Az első Δv intervallum feletti megoldásszakasz az ezen intervallumban érvényes $A = F_{gy0} > 0$ és $B < 0$ paraméterek mellett:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{B} (e^{\frac{B}{m(1+\gamma)} \cdot t} e^{\frac{1}{B} \ln A} - A) = \frac{1}{B} (e^{\frac{B}{m(1+\gamma)} \cdot t} e^{\ln A} - A) = \\ &= \frac{1}{B} (e^{\frac{B}{m(1+\gamma)} \cdot t} A - A) = \frac{A}{B} (e^{\frac{B}{m(1+\gamma)} \cdot t} - 1). \end{aligned}$$

A bemutatott eljárást sorozatosan elvégezve az egyes Δv sebességintervallumok felett, a kapott részmegoldásokat folytonosan csatlakoztatva (előző Δv -beli végsebesség = a következő Δv -beli kezdeti sebesség), adódik a teljes $v(t)$ menetábra szakaszonként exponenciális függvényszakaszokból felépülő közelítése.

2.8.2 Numerikus megoldás

A hajtás- és fékvezérléssel irányított, adott emelkedési és irányviszonyokkal bíró mozgáspályán megvalósuló járműmozgás meghatározásának kérdését vizsgálva korábban az

$$\ddot{s}(t) = \Phi(\dot{s}(t), s(t), u_1(t), u_2(t))$$

$$s(t_0) = s_0 \quad \text{és} \quad \dot{s}(t_0) = v_0$$

kezdeti érték problémára (K.É.P.) jutottunk. Ez az ismeretlen $s(t)$ függvény meghatározására szolgáló, két vezérlőfüggvénnyel vezérelt, nemlineáris másodrendű differenciálegyenlet átírható két elsőrendű differenciálegyenletből álló differenciálegyenlet-rendszerre a mozgásállapot-vektor bevezetésével az alábbiak szerint. Először is definiáljuk a mozgó jármű mozgásállapot-vektorát, az

$$\underline{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \dot{s}(t) \\ s(t) \end{bmatrix}$$

időfüggő kétdimenziós vektorfüggvényt, melynek első koordinátafüggvénye a jármű $\dot{s}(t)$ sebessége, második koordinátafüggvénye pedig a jármű által befutott $s(t)$ út időfüggvénye.

Az állapotvektor idő szerinti deriváltja az előzmények figyelembevételével mármost a következő lesz:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{s}(t) \\ \dot{s}(t) \end{bmatrix} \stackrel{*}{=} \begin{bmatrix} \Phi(\dot{s}(t), s(t), u_1(t), u_2(t)) \\ \dot{s}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(\underline{x}(t), u_1(t), u_2(t)) \\ F_2(\underline{x}(t)) \end{bmatrix},$$

ahol a jobb oldali vektorfüggvény első koordinátafüggvénye a jármű mozgásegyenletéből adódik, figyelembe véve, hogy az $\dot{s}(t)$ és $s(t)$ függvények megadása egyenértékű az $\underline{x}(t)$ állapotvektor megadásával. Ily módon tehát vektoros írásmóddal a következő elsőrendű, nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdeti érték problémát kapjuk az ismeretlen $\underline{x}(t)$ mozgásállapot-vektor időbeli alakulására vonatkozóan:

$$\boxed{\dot{\underline{x}}(t) = \underline{F}(\underline{x}(t), u_1(t), u_2(t)) \quad ; \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} v_0 \\ s_0 \end{bmatrix}}.$$

A fenti differenciálegyenlet-rendszer megoldása numerikusan történik az iránymező „letapogatásával”, az alábbi algoritmus szerint:

- 1.) A t_0 kezdeti időponthoz elő van írva az \underline{x}_0 kezdeti vektor (kezdeti sebesség és út értékpár).
- 2.) A $t_0 + h$ időponthoz hozzárendeljük az $\underline{x}(t_0 + h) \approx \underline{x}_0 + \underline{F}(\underline{x}_0, u_1(t_0), u_2(t_0)) \cdot h$ vektort, ahol h a számítás időbeli lépésköze.
- 3.) A $t_0 + 2h$ időponthoz ugyanígy hozzárendeljük az

$$\underline{x}(t_0 + 2h) \approx \underline{x}(t_0 + h) + \underline{F}(\underline{x}(t_0 + h), u_1(t_0 + h), u_2(t_0 + h)) \cdot h$$

vektort.

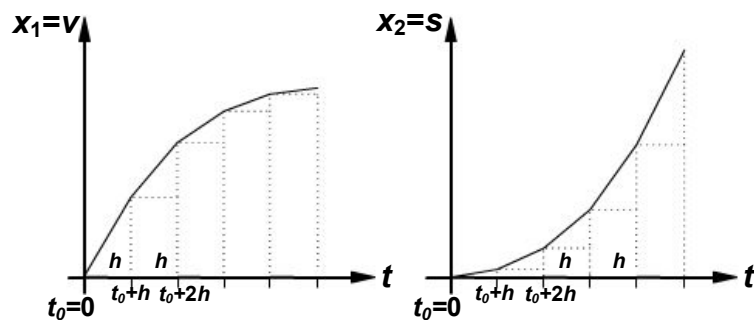
- 4.) A $t_0 + 3h$ időponthoz ugyanígy hozzárendeljük az

$$\underline{x}(t_0 + 3h) \approx \underline{x}(t_0 + 2h) + \underline{F}(\underline{x}(t_0 + 2h), u_1(t_0 + 2h), u_2(t_0 + 2h)) \cdot h$$

vektort, stb.

A fentiekben vázolt eljárás az Euler-féle megoldási módszer, amely a 2.20. ábrán vázoltak szerint szolgáltatja a mozgó jármű h osztásközü időpontosorozaton kialakuló sebesség és befutott út függvényeinek töröttvonalas közelítését.





2.20. ábra. Az Euler-módszerrel az idő függvényében nyert közelítő szakaszonként lineáris sebesség és befutott út függvények

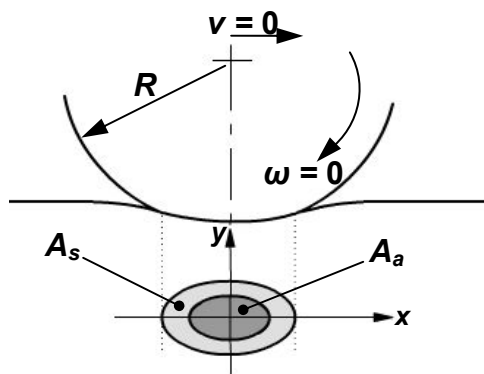
Az Euler módszer alkalmazásakor tehát szakaszonként lineárisan, törött vonallal közelítjük a megoldásfüggvényeket. A közelítés annál jobb (vagyis a megoldás annál pontosabb és numerikusan stabilabb), minél kisebb a $h > 0$ lépésköz. A lépésköz ajánlott nagyságára nézve az alábbiak lehetnek irányadók:

- a.) főmozgás leírásakor: $h = 0,1 \dots 0,01$ s
- b.) parazita mozgásoknál: $h = 0,001 \dots 0,00001$ s

3. Kerekes járművek vonóerő-kifejtése és fékezése

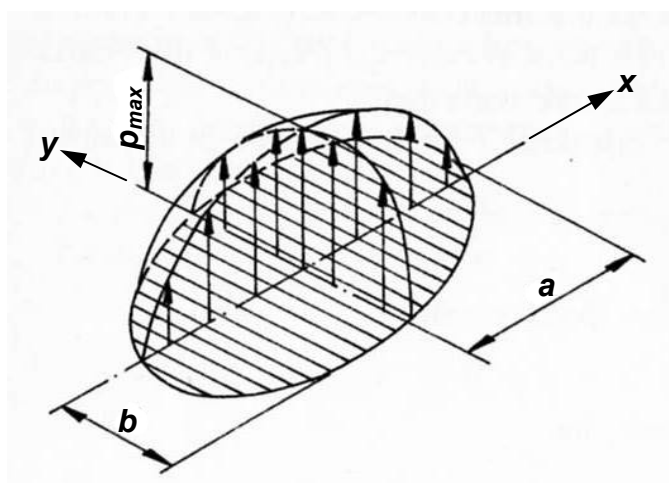
3.1. A kerék és a támasztófelület kapcsolata

3.1.1. Álló jármű esete – a kerék nem mozog



3.1. ábra. A nyugalomban lévő ($\omega=0$ és $v=0$) rugalmas kerék és a rugalmas támasztófelület érintkezési felületének partíciója A_a adhéziós és A_s szliptartományra

A kerék és a támasztófelület érintkezése az A felületre terjed ki, ezen felület belső pontjaiban az érintkezési nyomás pozitív. Az A érintkezési felület (kontakt felület) két résztartományra particionálható, az A_a adhéziós tartomány és az A_s szliptartomány különböztethető meg. Az adhéziós tartomány pontjaiban az érintkező felületi pontok csúszásmentesen érintkeznek, de a környezeti anyagrészek rugalmas alakváltozása következtében a felület érintősíkjába eső megoszló nyugalmi súrlódási erő átvitelre kerül. A szliptartomány pontjaiban az érintkező felületi pontok csúszás jelenlétében érintkeznek, ennek megfelelően megoszló csúszósúrlódási erő átvitele valósul meg a két test szliptartománybeli pontjaiban. Az A kontaktfelület két résztartománya között minden esetben fennáll, hogy $A = A_a \cup A_s$ és $A_a \cap A_s = \emptyset$. Az érintkezésmechanikában (kontaktmechanika) a kontaktfelületen fellépő nyomáseloszlást **normális trakcióeloszlásnak** nevezzük. A legegyszerűbb esetben a két érintkező test esetén kialakuló normális trakcióeloszlás a Hertz-féle elmélet alapján származtatható. Hertz-féle érintkezés esetén az A kontaktfelület ellipszis-tartomány, és a kialakuló normális trakció eloszlás a kontaktfelület felett félellipszoid alakú.



3.2. ábra. A normális trakció eloszlása a Hertz-féle érintkezési ellipszis felett

A 3.2 ábrán felrajzoltuk az a nagytengely-félhosszal és b kistengely-félhosszal jellemzett kontakt-ellipszist és a hozzá tartozó normális trakcióeloszlás ellipszoid alakú jellegfelületét a p_{\max} maxi-

mális érték bejelölésével. A Hertz-féle fél-ellipszoid normális trakcióeloszlás az A kontaktfelület pontjaiban nemnegatív: $p(x, y) \geq 0$; $(x, y) \in A$ $[p]=\text{N/m}^2$. A p_{\max} maximális és az átlagos \bar{p} nyomás kapcsolata: $p_{\max} = 1,5 \bar{p}$, ahol

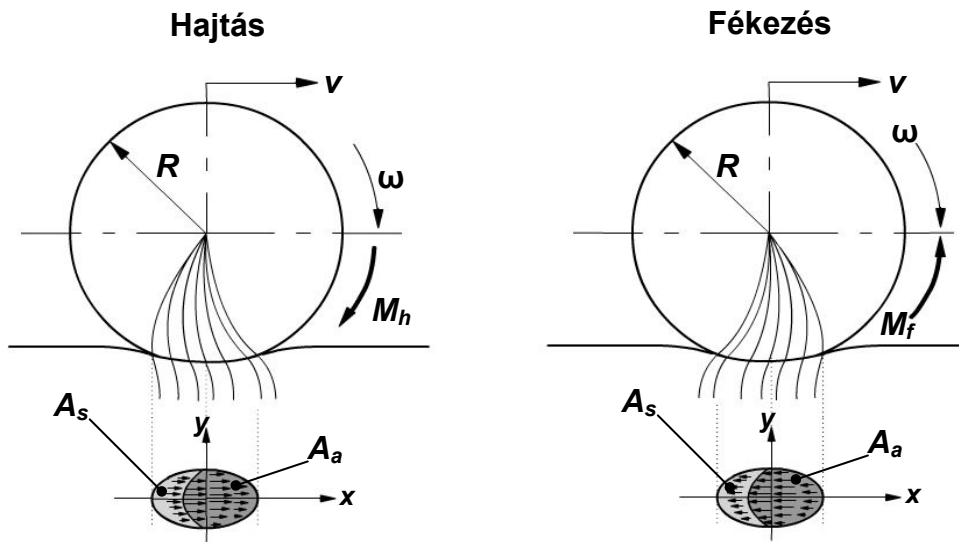
$$\bar{p} = \frac{1}{A} \int_A p(x, y) dA.$$

A 3.1 ábra szerinti nyugvó kerék esetében az A_a adhéziós tartomány az A kontaktfelület belsejében, középen helyezkedik el. Az A_s szliptartomány pedig körbeveszi az adhéziós tartományt. A tartományok ilyen alakulását az magyarázza, hogy nyugalmi helyzetben a kontaktfelület kerületi pontjaihoz közeledve a normális trakció gyorsan csökken és a felületeket összeszorító erőhatás az A_s felületen már nem elegendő a deformálódó anyagrészek közötti, a kontaktfelület lokális érintősíkjaiba eső megoszló tangenciális erőhatás (a tangenciális trakció) elcsúszásmentes átvitelére.

3.1.2. A gördülőkapcsolat dinamikája

A jelen fejezetben a kerék-támasztófelület kapcsolat tangenciális erőátzármaztatását vizsgáljuk, amikor a kerék a rá ható erő(k) és nyomaték(ok) hatására állandósult gördülőmozgásban van. Először is hangsúlyozni kell, hogy a gördülés közben érintkező kerék és a támasztófelület rugalmas. A függőleges kerékerő működése közben mind a kerék mind pedig a támasztófelület deformálódik. A kerékerő miatt a kerék eredetileg kör alakú kerületének a kontaktfelületbe eső része az érintkezés során megrövidül. Ezzel szemben az eredetileg (terheletlen állapotban) sík támasztófelület a kerékterhelés hatására enyhén görbült (bemélyedt) alakot vesz fel és ezért az eredeti egyenes határoló vonalhosszához képest nagyobb ívhosszú enyhén görbült vonal jellemzi az érintkező felület terhelt alakját.

A most végigvitt gondolatmenet miatt azonnal adódik, hogy a kerék és a támasztófelület érintkezési felületbe eső részének eltérő értelmű deformációja miatt (keréknél ívhossz csökkenés, támasztófelületnél ívhossz növekedés) a kontaktfelületen a gördülési irányban csúszásnak kell jelen lennie. Állandósult gördülőmozgás során ($\omega = \text{áll.}$, $v = \text{áll.}$) a jelzett csúszásos érintkezést jellemző A_s szliptartomány a kontaktfelület gördülési iránnyal (az x irány) ellentétes szélén helyezkedik el, míg az elcsúszásmentes érintkezési pontokat tartalmazó A_a adhéziós tartomány a kontaktfelület gördülési iránnyal egyező végén lévő ún. *vezetőéléhez* zárkózik fel.



3.3. ábra. A rugalmas támasztófelületen gördülő rugalmas kerék kontaktfelületének és a kerékre működő tangenciális trakciójának alakulása hajtás és fékezés esetén

A 3.3 ábrán egymás mellett rajzoltuk fel az állandósult gördülőmozgást végző hajtott és fékezett járműkerék ábráját. A hajtott kerék esetében feltüntettük az M_h hajtónyomatékot, a fékezett kerék esetében pedig az M_f fékezőnyomatékot. Mindkét ábrarészen szerepeltettük a kerekek nyomtérkép-átvitel hiányában eredetileg radiális vonalainak a nyomtérképátvitel miatt deformálódott alakját, továbbá a támasztófelületnek a kontaktfelületen átvitt tangenciális trakcióeloszlás miatti deformálódását. Ugyancsak mindkét esethez tartozóan felrajzoltuk a kontaktfelület adhéziós és szliptartományra történő partíciójának alakulását, berajzolva a **kerékre ható** tangenciális trakcióeloszlások értelemhelyesen felrakott vektoreloszlásait. A tangenciális trakciót az A_a adhéziós tartományban a $\tau_a(x,y)$ kétváltozós függvény, az A_s szliptartományban pedig a $\tau_s(x,y)$ kétváltozós függvény jellemzi. Valamely (x,y) koordinátájú pontot tartalmazó dA elemi felületen az ott érvényes $\tau_a(x,y)$ tangenciális adhéziós trakcióból $dF_a = \tau_a(x,y)dA$ hosszirányú elemi kerületi erő, a $\tau_s(x,y)$ tangenciális szliptrakcióból pedig $dF_s = \tau_s(x,y)dA$ hosszirányú elemi kerületi erő ébred. Nyilvánvaló, hogy az eredő kerületi erő a teljes kontaktfelületre kiterjesztett integrálással fog kiadódni.

A tangenciális trakcióeloszlások segítségével mind hajtás, mind pedig fékezés esetén felírhatjuk a kerékre a kerületen működő erő összetevőket. Konstans F_n kerékterhelés mellett hajtás esetében a tangenciális trakcióval átvitt kerületi erő a kerékre ható F_v vonóerő. Az adhéziós tangenciális trakcióval átvitt vonóerőrészt F_{va} -val, a szliptrakcióval átvitt vonóerőrészt F_{vs} -sel jelöljük. A teljes átvitt vonóerő ily módon: $F_v = F_{va} + F_{vs}$. Fontos hangsúlyozni, hogy a kontaktfelületi trakciók alakulása és az azok hatásaként adódó vonóerő összetevők alakulása alapvetően függ a kerékre ható M_h hajtónyomaték (=gördítő-nyomaték) nagyságától, ezért célszerű feltüntetni a vonóerőre felírt egyenlőségben az M_h argumentumot, és a szereplő vonóerő összetevőknek a trakcióeloszlásokból való származtatását is megadni:

$$F_v(M_h) = F_{va}(M_h) + F_{vs}(M_h) = \int_{A_a} \tau_a(x,y) dA + \int_{A_s} \tau_s(x,y) dA.$$

Hasonlóképp, konstans F_n kerékterhelés mellett fékezés esetében a tangenciális trakcióval átvitt kerületi erő a kerékre ható F_f fékezőerő. Az adhéziós tangenciális trakcióval átvitt fékezőerőrészt F_{fa} -val, a szliptrakcióval átvitt fékezőerőrészt F_{fs} -sel jelöljük. A teljes átvitt fékezőerő ily módon: $F_f = F_{fa} + F_{fs}$. Ismét fontos hangsúlyozni, hogy a kontaktfelületi trakciók alakulása és az azok hatásaként adódó fékezőerő összetevők alakulása alapvetően függ a kerékre ható M_f hajtónyomaték (=gördülést akadályozó nyomaték) nagyságától, ezért a fékezőerőre felírt egyenlőségben itt is megadjuk az M_f argumentumot, és a szereplő fékezőerő összetevőknek a trakcióeloszlásokból való származtatását:

$$F_f(M_f) = F_{fa}(M_f) + F_{fs}(M_f) = \int_{A_a} \tau_a(x,y) dA + \int_{A_s} \tau_s(x,y) dA.$$

A gördülőkapcsolaton átvitt tangenciális erőhatások rövid érintkezés-mechanikai jellemzése után a gyakorlati járműdinamikai vizsgálatokhoz alkalmas formulázást adunk. A korábbi tanulmányok során, a „Járművek és mobil gépek I.” c. tárgyban ill. a „Járműrendszerek” c. tárgyban megismerte a hallgatóság a fentiekben leírt, a gördülőérintkezésben résztvevő rugalmas testek (a kerék és a támasztófelület) alakváltozásának fajlagosításával és időegységre vetítésével értelmezett hosszirányú kúszás fogalmát. Ha a jármű kerekére a támasztófelületről erő kerül átadásra, akkor ott ez az erőhatás a kerék kismértékű tangenciális alakváltozását okozza. A kerékre átvitt erő ellenereje, amely a támasztófelületre az érintkezési felületen működik, a támasztófelület kismértékű pályahossz-irányú alakváltozását okozza. A kerék előregördülésekor mind a kerék kerületről, mind a támasztósíkba eső gördülési nyomvonalról újabb és újabb deformálatlan anyagrészek lépnek be az előremozgó kontaktfelületbe, épül fel

rajtuk a tangenciális trakcióeloszlás, és lép fel a trakcióval meghatározott tangenciális alakváltozás.

A most mondott folyamat végeredményeként azt lehet elmondani, hogy a vonóerőkifejtés közben előregördülő kerék kerületén legördült ívhossz éppen a taglalt rugalmas alakváltozások kumulálódása miatt nagyobb lesz mint a kerék középpontjának mozgáspálya irányú előremozdulása. Ha ezt a távolság-különbséget elosztjuk a mozgás időtartamával, akkor egy látszólagos csúszási sebesség adódik, ami nem egyéb, mint a kerék $R\omega$ kerületi sebességének és a kerékközéppont v haladási sebességének $R\omega - v > 0$ különbsége. Figyeljük meg, hogy a ilyen pozitív csúszási sebesség merev testek kapcsolata során csak akkor léphetne fel, ha a kontaktfelület egészen csúszás lenne jelen, vagyis az A_s szliptartomány kitöltené a teljes kontaktfelületet, és így $A_s = A$ teljesülne. Mint láttuk, hajtott rugalmas kerék és rugalmas támasztófelület esetén az $R\omega - v > 0$ sebességkülönbség az összegződő rugalmas alakváltozások miatt áll elő. Amennyiben a rugalmas testek gördülőkapcsolatában olyan nagy erőt kellene átvinni a kerékre, amely meghaladja tapadósúrlódással átvihető $F_{s0} = \mu_0 F_n$ határerőt, akkor bekövetkezik a kerékperdülés, mikoris az A_s szliptartomány már kiterjed a rugalmasság jelenléte mellett is a teljes A kontaktfelületre.

Fékezett kerék esetén a kontaktfelületen érintkező anyagrészek alakváltozási iránya megfordított a hajtás esetéhez képest. A fékezés során fellépő alakváltozási folyamat végeredményeként elmondható, hogy a fékezés közben előregördülő kerék kerületén legördült ívhossz éppen a taglalt ellentétes előjelű rugalmas alakváltozások kumulálódása miatt kisebb lesz mint a kerék középpontjának mozgáspálya irányú előremozdulása. Ha ezt a távolság különbséget elosztjuk a mozgás időtartamával, akkor egy látszólagos csúszási sebesség adódik, ami nem egyéb, mint a kerék $R\omega$ kerületi sebességének és a kerékközéppont v haladási sebességének különbsége, ami a fékezés esetében negatív: $R\omega - v < 0$. Itt is elmondható, hogy ilyen negatív csúszási sebesség merev testek kapcsolata során csak akkor léphetne fel, ha a kontaktfelület egészen csúszás uralkodna, vagyis az A_s szliptartomány kitöltené a teljes kontaktfelületet, és így $A_s = A$ teljesülne. A fékezés esetében rugalmas kerék és rugalmas támasztófelület esetén az $R\omega - v < 0$ sebességkülönbség itt is az összegződő rugalmas alakváltozásokból adódik. Amennyiben a fékezett kerék gördülőkapcsolatában olyan nagy erőt kellene átvinni a kerékre, amely meghaladja tapadósúrlódással átvihető $F_{s0} = \mu_0 F_n$ határerőt, akkor bekövetkezik a kerékcúszás, majd blokkolás esete, mikoris az A_s szliptartomány már kiterjed a rugalmasság jelenléte mellett is a teljes A kontaktfelületre, és a csúszási sebesség abszolút értéke éppen a kerék haladási sebességével azonos.

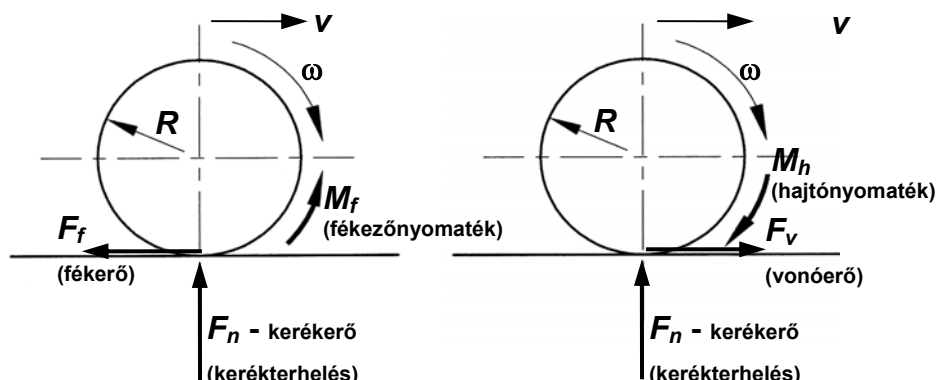
A fentiekben mind hajtásra mind fékezésre értelmezett $R\omega - v$ sebességkülönbség helyett annak a v sebességgel normált értékét, a v_x *hosszirányú kúszást* használjuk a járműdinamikai vizsgálatok során. A hosszirányú kúszás értelmezése csak $v \neq 0$ esetre lehetséges, képletszerű felírásban:

$$v_x = \left. \frac{\overset{def}{R\omega - v}}{v} \right|_{v \neq 0}.$$

Figyeljük meg, hogy a kerék mozgására a haladási irányban pozitívnak feltételezett ω és v esetében a fenti képlettel értelmezett hosszirányú kúszás hajtási üzemállapotban pozitív előjelű értéket, fékezési üzemállapotban pedig negatív előjelű értéket szolgáltat.

Annak az egyszerű ténynek a meggondolásával, hogy nagyobb kerületi erők esetén nagyobb lokális kontaktfelületi alakváltozásokkal kell számolnunk, adódik, hogy a keréktalpra ható F_v vonóerő és F_f fékezőerő a kontaktfelületi alakváltozásokkal monoton függvénykapcsolatban lévén a v_x hosszirányú kúszás függvénye kell, hogy legyen. A kerékre ható vonóerőt a hossz-

irányú kúszás pozitív értékeihez pozitív értéként rendeljük hozzá, míg a kerékre ható fékezőerőt a hosszirányú kúszás negatív értékeihez negatív erőnagyságként rendeljük hozzá. Tehát $F_v = F_v(v_x) \geq 0$ és $F_f = F_f(v_x) \leq 0$.



3.4. ábra. A gördülőkapsolatban a keréktalpra átvitt tangenciális erő alakulása fékezés és hajtás esetén

A tényleges járműdinamikai vizsgálatok során a fenti indoklással a tárgyalásba bevezetett $F_v(v_x)$ és $F_f(v_x)$ hosszirányú kúszástól függő erőfüggvényeket a függőleges kerékerővel elosztott (normált) változatban szoktuk használni. Ez a normálás vezet a tangenciális és a normális erő hányadosával értelmezett, és μ -vel jelölt hosszirányú *erőkapcsolati tényező* fogalmához. Vonóerő kifejtési (hajtási) üzemiállapotokban a fentiek szerint $v_x > 0$ hosszirányú kúszások mellett:

$$\mu(v_x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_v(v_x)}{F_n} > 0,$$

mivel a F_n kerékerő mindig pozitív. Hasonlóképp, a fékezőerő kifejtési (fékezési) üzemiállapotokban a fentiek szerint $v_x < 0$ hosszirányú kúszások mellett:

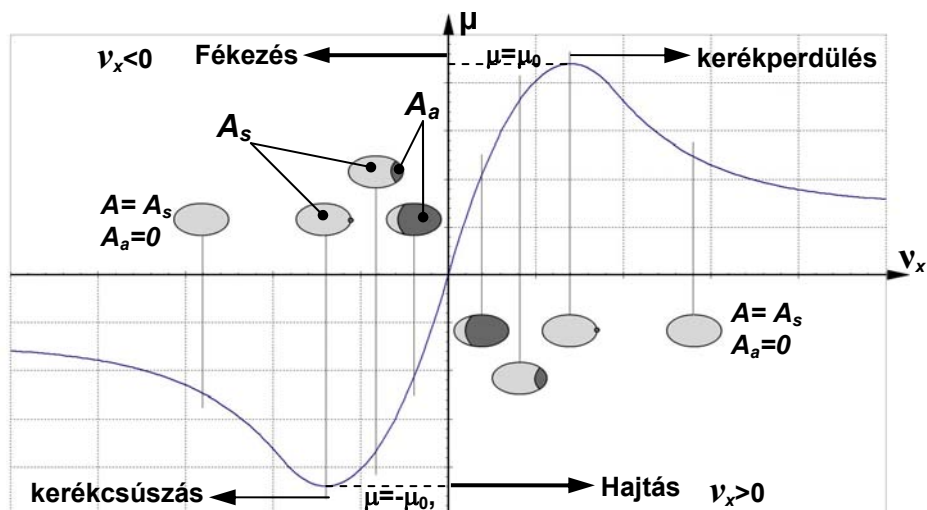
$$\mu(v_x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_f(v_x)}{F_n} < 0.$$

A 3.5 ábrán felrajzoltuk a fentiek szerinti előjelszabálynak megfelelő erőkapcsolati tényező függvényét. Mind a pozitív, mind a negatív jellegzetes kúszási állapotokhoz tartozóan szemléltetjük kontaktfelületi viszonyokat, bejelölve az adhéziós és a szlip tartomány kiterjedését. Ezen a ponton újra hangsúlyozzuk, hogy az A_a adhéziós tartomány mindenkor a haladási irány szerint elől elhelyezkedő belépőélre zárkózik fel. Az A_s szliptartomány kis abszolút értékű kúszásoknál a kontaktfelület kilépő élének környezetében található, majd az átvitt kerületi erő abszolút értékének növekedésével jelentősen kiterjed, és végül a makroszkopikus csúszás beálltakor kiterjed az egész A kontaktfelületre. Az erőkapcsolati tényező függvény a maximális értékét a makroszkopikus csúszás határesetéhez érkezte el, ekkor értékét tapadási határnak nevezzük és μ_0 -al jelöljük. Alapesetben a $\mu(v_x)$ függvényt *páratlan* függvénynek tekinthetjük, azaz $\mu(-v_x) = -\mu(v_x)$ érvényes. Az ábra centrális szimmetriája már mutatja a jelzett tulajdonság érvényesülését. Fontos kiemelnünk, hogy a tényleges járműüzemben érvényesülő erőkapcsolati tényező értékek *jelentős bizonytalansággal terheltek*, és ezért valószínűségi változónak bizonyulnak. Ezt a problémát tárgyalásunkban később vesszük elő.

Tárgyalásunk ezen pontján hangsúlyosan húzzuk alá, hogy ha $v_x = 0$, akkor $\mu = 0$ és így $F_v = 0$ és $F_f = 0$ is fennáll. Mindig idézzük emlékezetünkbe a következő mondatot:

zéró kúszás = zéró hosszirányú (tangenciális) erő!





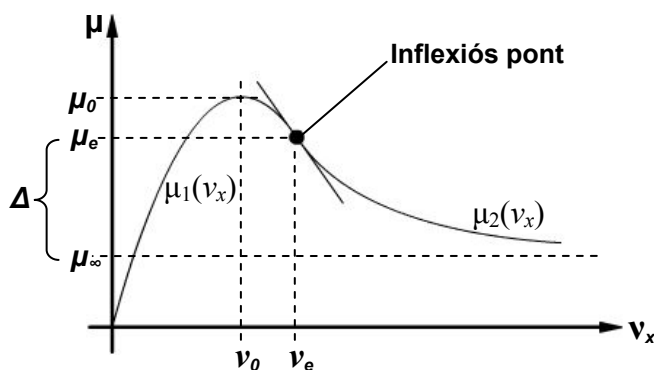
3.5. ábra. A gördülőkapcsolat tangenciális erőátzármaztatását jellemző erőkapcsolati tényező a hosszirányú kúszás függvényében

A járműdinamikai vizsgálatokhoz – különösen a korszerű számítógépes szimulációk megvalósításához – szükséges a $\mu(v_x)$ erőkapcsolati tényező függvény legalább is közelítő megadása képletszerű utasítással. A BME Vasúti Járművek és Járműrendszeranalízis Tanszékén korábban kifejlesztésre került egy a $\mu(v_x)$ megadására nagyon jól használható közelítő függvény. A jelzett közelítő leírásban számos mérési eredmény jellegzetességének figyelembevételével a $\mu(v_x)$ függvényt két jellegzetes függvényszakaszból konstruáljuk meg:

- 1.) az origó-közeli függvényszakaszt másodfokú parabola darabokból állítjuk elő,
- 2.) a diagram végeit exponenciális függvényszakasszal írjuk le valamely véges határértékhez tartatva azokat a kúszás abszolút értékének növelésekor.

A fentiekben bevezetett két függvénytípus görbéit simán (=folytonosan differenciálhatóan) kapcsoljuk egymáshoz a μ_0 ill. $-\mu_0$ tapadási határhoz tartozó v_0 és $-v_0$ kúszásnál némiképp nagyobb abszolút értékű v_e és $-v_e$ kúszás ordinátáknál. Ezzel előáll a 3.5 ábra szerinti “ostoralakú” erőkapcsolati tényező függvény.

A $\mu(v_x)$ függvény fentiekben körvonalazott módon történő előállításához 4 jellemző paraméter megadása (ismerete) szükséges, ezek a μ_0 tapadási határ, a tapadási határhoz tartozó v_0 abszcissza, a két függvényszakasz sima kapcsolódási pontjának v_e abszcisszája, és az erőkapcsolati tényező μ_∞ határértéke, midőn a kúszás minden határon túl nő. A most felsorolt paramétereket egy négydimenziós \mathbf{p} paramétervektorba foglaljuk: $\mathbf{p} = [\mu_0 \ v_0 \ v_e \ \mu_\infty]^T \in \mathbb{R}^4$.



3.6. ábra. Az erőkapcsolati tényező kúszásfüggését megadó négy paraméter értelmezéséhez

Ezzel az erőkapcsolati tényező egy négyparaméteres függvénnyé vált, írható tehát, hogy $\mu(v_x, \mathbf{p})$, ahol $\mathbf{p} \in R^4$. A 3.6 ábrán szemléltetjük a megadott paramétervektor komponenseinek jelentését, és az „ostorgörbét” alkotó $\mu_1(v_x)$ és $\mu_2(v_x)$ függvényszakaszokat.

A teljes v_x tengely felett ismerni kell $\mu(v_x)$ alakját képlet formájában, számítógépre közvetlenül programozható megadással. A kívánt követelményt jól teljesíti az alábbi megadás:

$$\mu(v_x, \mathbf{p}) = (\text{sign } v_x) \begin{cases} 4\mu_0 \frac{|v_x|}{2v_0} \left(1 - \frac{|v_x|}{2v_0}\right) & \text{ha } |v_x| \leq v_e \quad \leftarrow \text{parabola ág} - \mu_1(v_x) \\ \mu_\infty + (\mu(v_e) - \mu_\infty) e^{-\frac{|v_x| - v_e}{T}} & \text{ha } |v_x| > v_e \quad \leftarrow \text{exp. ág} - \mu_2(v_x) \end{cases}$$

Először a $\mu_1(v_x)$ parabola szakasz felépítését tárgyaljuk, lépésenként konstruálva meg a szükséges paraméterfüggés beállítását.

- 1.) A konstrukciót speciális, a $v_x = 0$ és $v_x = 1$ helyen zérus értékű másodfokú parabolát meghatározó g_0 alapfüggvény felvételével kezdjük:

$$g_0 = v_x(1 - v_x),$$

- 2.) A konstrukció második lépésében a g_0 -ból olyan másodfokú parabolát készítünk, melynek gyökhelyei az előbb meghatározottak, de $v_x = 0,5$ -nél maximuma μ_0 :

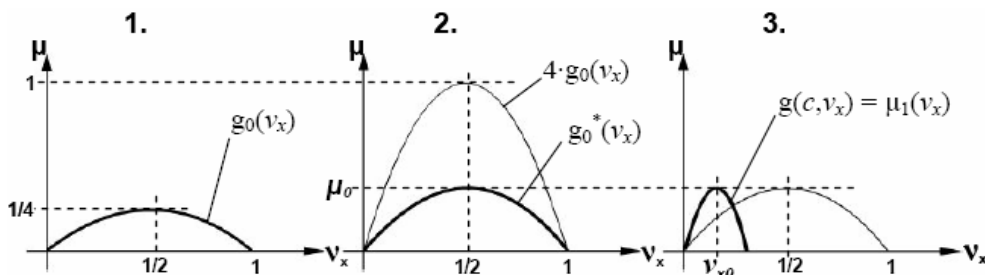
$$g_0^* = \mu_0 \cdot 4g_0 = \mu_0 \cdot 4v_x(1 - v_x),$$

- 3.) Végül kontrakciós transzformációt hajtunk végre, amivel biztosítjuk egy alkalmas c konstans segítségével, hogy a $\mu_1(v_x)$ függvény (ami tulajdonképpen a teljes, ostorszerű $\mu(v_x)$ függvény első, parabola-szakasszal leírt része) csúcserő v_0 -hoz essen. Könnyű

belátni, hogy ilyen c -értéket szolgáltat a $c = \frac{1}{2v_0}$ képlet.

Ezen lépések után előállt a kívánt $\mu_1(v_x) = g(c, v_x) = \mu_0 \cdot 4cv_x(1 - cv_x) = \mu_0 \cdot 4 \frac{1}{2v_0} v_x \left(1 - \frac{1}{2v_0} v_x\right)$.

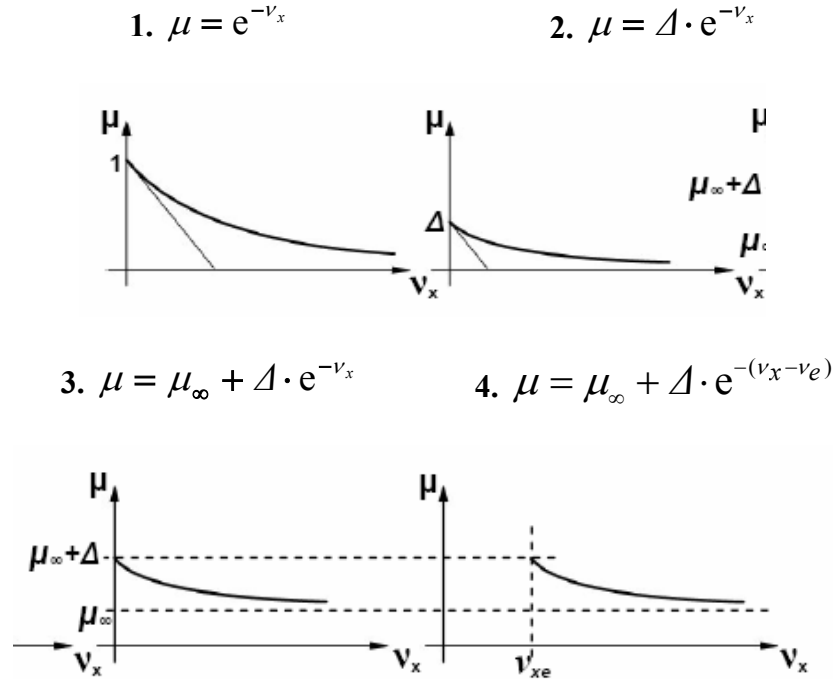
A 3.7 ábrán bemutatjuk a fentiekben tárgyalt 1.)...3.) lépések során előálló függvényeket.



3.7. ábra. Az erőkapcsolati tényező parabolikus részének paraméter-beállításához

Áttérünk a $\mu_2(v_x)$ exponenciális függvényszakasz felépítésének tárgyalására, lépésenként mutatva be a szükséges paraméter-beállításokat. Az egyes lépéseket a 3.8 ábra négy diagramja és a szerepeltetett függvénykifejezések mutatják. Az ábra 2. részében a negatív kitevős exponenciális függvény nemnegatív független változók esetén érvényes diagramja szerepel. Az ábra 2. mezőjében az 1. mezőben szereplő függvénynek egy $0 < \Delta < 1$ szorzóval történt beszorzás után adódó diagramját látjuk. Az 3. mezőben annak a függvénynek a képletét és diagramját

látjuk, amely a 2. mezőbeli függvényből egy $0 < \mu_\infty < 1$ konstans érték hozzáadásával keletkezett. Az ábra 4. mezőjében 3. mezőbeli függvényből $v_e > 0$ értékkel jobbra történt eltolással kapott függvény képlete és diagramja szerepel.



3.8. ábra. Az erőkapcsolati tényező exponenciális részének paraméter-beállításához

A fenti előkészületek után tekintsük most a parabolikus $\mu_1(v_x)$ és az exponenciális $\mu_2(v_x)$ függvényszakasz sima (folytonosan differenciálható) kapcsolódását. A sima kapcsolódás v_e abszcisszájú pontjában két feltételnek kell teljesülnie:

- a.) a két függvényszakasz helyettesítési értéke egyezzen meg a $v_x = v_e$ helyen, azaz álljon fenn a $\mu_1(v_e) = \mu_2(v_e)$ egyenlőség,
- b.) a két függvényszakasz $v_x = v_e$ helyi első differenciálhányadosa egyezzen meg, azaz álljon fenn a $\left. \frac{d\mu_1(v_x)}{dv_x} \right|_{v_x=v_e} = \left. \frac{d\mu_2(v_x)}{dv_x} \right|_{v_x=v_e}$ egyenlőség.

Jól érzékelhető, hogy két egyenlet áll rendelkezésünkre a korábban bevezetett T és Δ segédváltozóknak a paramétervektorbeli koordinátákkal történő kifejezésére.

A folytonos kapcsolódás a.) feltételét vizsgálva a $\mu_1(v_e) = \mu_0 \cdot 4 \frac{1}{2v_0} v_e \left(1 - \frac{1}{2v_0} v_e \right)$ és a $\mu_2(v_e) = \mu_\infty + \Delta$ helyettesítési értékek egyenlőségéből a

$$\Delta = \mu_0 \cdot 4 \frac{1}{2v_0} v_e \left(1 - \frac{1}{2v_0} v_e \right) - \mu_\infty$$

eredmény adódik. A sima kapcsolódás b.) feltételéből a $\mu_1'(v_e) = \mu_0 \cdot 2 \frac{1}{v_0} - \mu_0 \cdot 2 \frac{1}{v_0^2} v_e$ derivált

és a $\mu_2(v_e) = \Delta / T$ derivált helyettesítési értékek egyenlőségét felírva előbb a

$$\mu_0 2 \frac{1}{v_0} - \mu_0 2 \frac{1}{v_0^2} v_e = \frac{\Delta}{T}$$

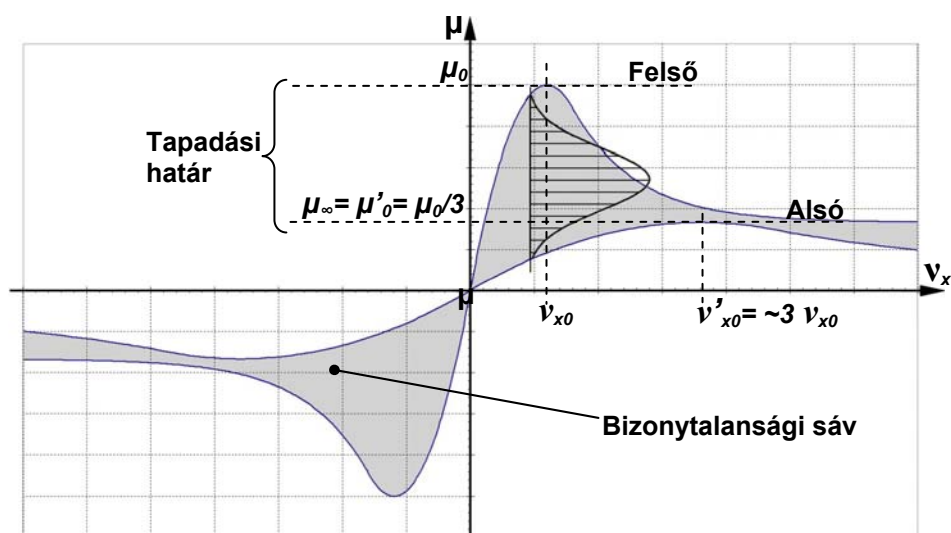
egyenlőség, ebből pedig a

$$T = \frac{\Delta}{\mu_0 2 \frac{1}{v_0} - \mu_0 2 \frac{1}{v_0^2} v_e}$$

eredmény adódik. A nyert összefüggések alapján most már egyértelműen megadott a $\mu(v_x, p)$ négyparaméteres erőkapcsolati tényező függvény.

Az előző tárgyalásunkban már utaltunk rá, hogy az erőkapcsolati tényező függvény értéke valamely aktuális kúszási érték esetén bizonytalansággal terhelt, és így az valószínűségi változónak tekintendő. Ezt a kérdést most kicsit részletesebben is vizsgáljuk. A közlekedési pálya befutása során a támasztófelületen végiggördülő járműkerék igen változatos tribológiai körülményekkel találkozik. Az elérő mikrogeometriai viszonyok, a különböző, változó minőségű és geometriai kiterjedésű szennyező anyagok jelenléte, a környező hőmérséklet és páratartalom jelentős változása mind befolyásolja az erőkapcsolati tényező alakulását.

A most felsorolt jellemzők a közlekedési pálya mentén nem előre megadható szabályosság szerint valósulnak meg, és maga a járműmozgás folyamata is esetlegességekkel jellemezhető. Ebből adódik, hogy valamely konkrét kerék/támasztófelület érintkezési esemény körülményei bizonytalanok, ezért az erőkapcsolati tényező értéke valószínűségi változó lesz. Ez azt jelenti, hogy valamely kúszás értéket felvéve az ezen kúszás értékhez tartozó erőkapcsolati tényező értéket csak a lehetséges maximális és minimális értékek által meghatározott intervallum felett értelmezett valószínűségi sűrűségfüggvénnyel tudjuk jellemezni. A viszonyokat a 3.9 ábra mutatja.

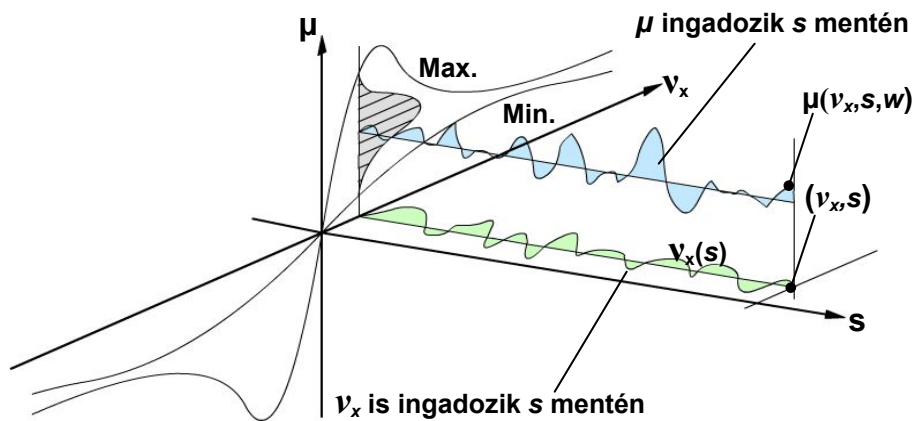


3.9. ábra. Az erőkapcsolati tényező adott kúszásnál valószínűségi változónak bizonyul és bizonytalansági sáv rajzolódik ki

A bizonytalanság jelenlétét a maximális és minimális erőkapcsolati tényező értékek alkotta függvényvonalak közti szürke tónusú sáv szemlélteti. A minimális és maximális értékek között

realizálódó erőkapcsolati tényezőkre nézve a berajzolt haranggörbe alakú valószínűségi sűrűségfüggvény adhat tájékoztatást. Az ábrán csupán egy ilyen haranggörbét rajzoltunk be, azonban minden kúszási értékhez tartozik egy-egy haranggörbe. A legnagyobb és a legkisebb tapadási határra vonatkozó durva – ökölszabály jellegű - összefüggés fogalmazható meg a $\mu_{0min} = (1/3) \mu_{0max}$ formulával.

Pontosabb jellemzést lehet adni az erőkapcsolati tényező gördülés pálya menti véletlen ingadozásáról a kutatási szinten már kidolgozott vektorparaméteres sztochasztikus folyamat modellel. Ez a modell az erőkapcsolati tényezőt a keréknek a pályán elfoglalt ívhosszban mért s helyzetétől és a v_x hosszirányú kúszástól függően adja meg egy véletlentől függő $\mu(w)$ értékkel. A véletlentől való függést a w elemi esemény bekövetkezése indikálja. Ily módon a $\mu(s, v_x, w)$ kétparaméteres sztochasztikus mezőt kell vizsgálat tárgyává tenni. A jelen tárgyalásban nincs lehetőség a teljes kérdés kifejtésére, azonban a 3.10 ábrán felrajzoltuk az erőkapcsolati tényező változási probléma gyakorlati szemléltetésére alkalmas diagramot.



3.10. ábra. Az erőkapcsolati tényező és a hosszirányú kúszás bizonytalanságának szemléltetése a befutott s ívhossz függvényében

Az ábra alapsíkjában szemléltetjük a hosszirányú kúszás pályahossz-menti ingadozását megjelenítő $v_x(s)$ realizációs függvényt. Ezen függvény felett pedig az s pályahossz mentén jelentős ingadozást mutató, erőkapcsolati tényező realizációs függvényt rajzoltuk fel. Ezen utóbbi realizációs függvény jobb oldali végpontjához tartozó kétparaméteres valószínűségi változót a $\mu(s, v_x, w)$ sztochasztikus mező adott paraméterpárhoz tartozó kimeneteli értékét (realizációját). Másképp fogalmazva: adott w kimenetelt indikáló elemi eseményhez tartozóan az adott s úthoz és v_x kúszáshoz az alapsíkra merőlegesen felmért ordináta az erőkapcsolati tényező w kimenetelhez tartozó megvalósult (realizálódott) értékét adja.

Összefoglalva: minden (v_x, s) koordinátapárhoz hozzá van rendelve az erőkapcsolati tényező sávszerűségét jellemző $\mu(v_x, s, w)$ valószínűségi változó, ez az erőkapcsolati tényező véletlen ingadozásait megjelenítő véletlen (sztochasztikus) mező.

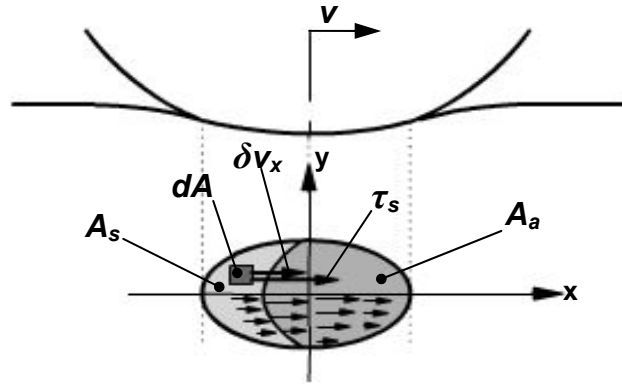
3.1.3. A gördülési ellenálláserő energetikai háttere

A gördülőkontaktusban a gördülési ellenálláserő létrejöttének energetikai vonatkozását tárgyaljuk. A 3.11. ábrán felrajzoltuk a kerék/támasztósík A kontakt ellipsziséjét, amely A_a adhéziós és A_s szliptartományra bontható. Bejelöltük a tangenciális trakció vektorok eloszlását is.

Az ábrán látható a már megismert A érintkezési kontaktfelület, mely A_a adhéziós és A_s szliptartományra bontható. Mivel $A_s \neq \emptyset$, a rendszerből csúszósurlódási teljesítmény távozik. A csúszósurlódási teljesítmény meghatározásához tekintsük az A_s tartomány (x, y) koordinátapárú pontját tartalmazó dA elemi felületelemét. A jelzett felületelemen jelenlévő $\tau_s(x, y)$

szliptrakció és $\delta v_x(x, y)$ csúszási sebesség alapján adódik az elemi energiaáram, ami a súrlódás miatt a környezetbe távozik a felületről:

$$dP = \tau_s(x, y) \delta v_x(x, y) dA .$$



3.11. ábra. A gördülési ellenálláserő kialakulásában szerepet nyelő szliptartományi súrlódási energiaáram értelmezéséhez

A kerékből távozó teljes súrlódási energiaáram az A_s szliptartományra vonatkozó integrálással adódik:

$$P = \int_{A_s} dP = \int_{A_s} \tau_s(x, y) \cdot \delta v_x(x, y) dA .$$

Az ilyen energiavesztés jelenlétében a kerék konstans sebességű gördülését csak úgy lehet fenntartani, ha az elvezetett energiaáramot a vonóerő-kifejtéssel bevitt teljesítmény pótolja. A kontaktfelületi szliptartományon megvalósult energiaáram veszteséget úgy is tekinthetjük, hogy az az F_{eag} gördülési ellenálláserő v gördülési sebesség melletti $P_{eag} = F_{eag} v$ teljesítményéből adódik. A két teljesítményt egyenlővé téve előbb az

$$F_{eag} v = \int_{A_s} \tau_s(x, y) \cdot \delta v_x(x, y) dA$$

összefüggést, majd az gördülési ellenálláserőre vonatkozó

$$F_{eag} = \frac{1}{v} \int_{A_s} \tau_s(x, y) \cdot \delta v_x(x, y) dA$$

kifejezést kapjuk. Kirajzolódik tehát, hogy a szliptartományi teljesítmény veszteség a gördülőellenállás-erő lényeges meghatározója. A levezetett integrál kifejezés tényleges numerikus meghatározása kontaktmechanikai szoftver segítségével (pl. a CONTACT szoftverrel) valósítható meg, mivel a tartományi integrálás kiszámításához szükség van a szliptrakció és a mikrocúszás sebességi mezejének A_s -beli eloszlásának ismeretére.

3.2. A fékezés dinamikája

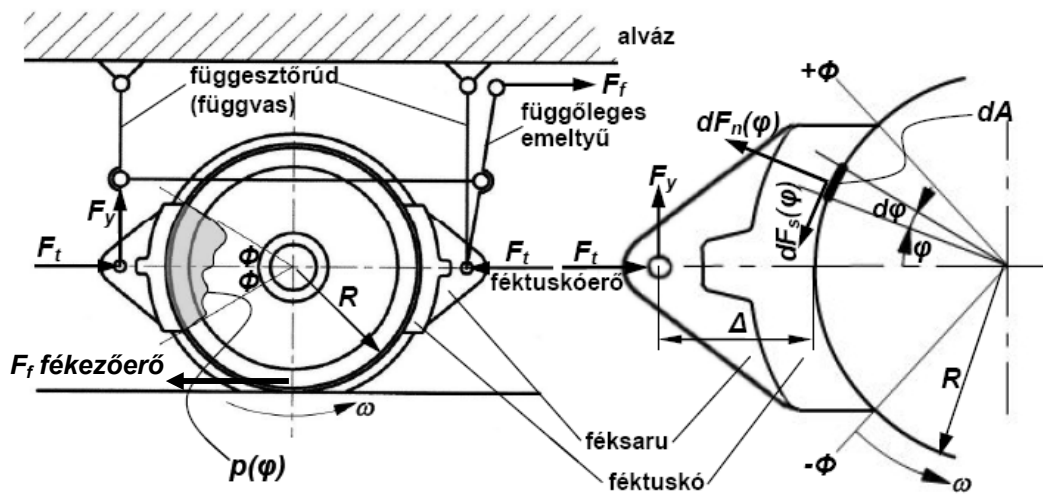
Ebben a fejezetben a fékezésdinamikai vizsgálatokat a leglényegesebb fékezési módra a járművek kerékfékezésének kérdéseire irányítva végezzük. A fékezés alapmozzanata a kerekek forgásával ellentétes értelmű nyomaték – a fékezőnyomaték – rávitele a jármű kerekeire, vagy a kerekeket hordozó tengelyre. A kerékfékezés megvalósuló nyomatékkifejtést tekintve tárgyalásunkban csak a súrlódónyomaték generálásán alapuló fékekkel foglalkozunk, ezeket súrlódásos kerékfékeknek nevezzük. A súrlódásos fékezés mindenkor disszipatív jellegű, a súrlódással felemésztett mozgási energia súrlódással generált hő formájában a járműkörnye-

zetbe távozik, további hasznosítása nem lehetséges. A mondott tulajdonsága miatt a súrlódásos fékek nem gazdaságosak. A jelen tantárgyban a súrlódásos fékek három jellegzetes reprezentáns rendszerének dinamikájával foglalkozunk. Ezek a *tuskós fékek*, a *dobfékek* és a *tárcsás fékek*.

3.2.1. A tuskós fék vizsgálata

A tuskós fék esetén a féksarukba behelyezett féktuskókat a kerék két átellenes oldalán radiálisan működő F_t féktuskóerővel nekiszorítjuk a kerék futófelületének. A 3.12. ábrán felrajzoltuk a fékrendszer vázlatát és bemutatjuk a fontosabb geometriai jellemzőket, valamint a tuskóerő létrehozását a függőleges fékemeltyűre működtetett vízszintes F_{fi} erő segítségével.

A féktuskó- féksarú rendszer bővített statikai vizsgálatához tekintsük a tuskó alatti nyomáseloszlást a φ szöghelyzet jellemző függvényében megadott: $p(\varphi)$; $\varphi \in [-\Phi; \Phi]$ függvényt, ahol Φ a tuskó súrlódó felület átfogási szögének félértékét jelenti.



3.12. ábra. A tuskós fék szerkezete és erőhatásvizonyai

Ennek ismeretében a 3.12. ábra jelöléseit figyelembe véve az alábbi differenciális összefüggéseket írhatjuk fel:

- (1) A tuskóra működő elemi normálerő a dA felületelemen: $dF_n(\varphi) = p(\varphi) \cdot dA$,
- (2) A tuskóra működő elemi súrlódóerő a dA felületelemen: $dF_s(\varphi) = \mu(\varphi) \cdot dF_n(\varphi)$,
- (3) A kerék forgástengelyére számított elemi súrlódónyomaték: $dM_s(\varphi) = R \cdot dF_s(\varphi)$.

Figyeljünk fel arra, hogy itt a (a kerék és a tuskó csúszó érintkezésére) a szöghelyzet-jellemző függvényében megadott $\mu(\varphi)$ súrlódási tényező a $\mu(\varphi) = \frac{dF_s(\varphi)}{dF_n(\varphi)}$ összefüggéssel értelmezett *differenciális* (v. lokális) *súrlódási tényező*. A fent megadott három differenciális összefüggés figyelembevételével az elemi súrlódónyomaték $dM_s(\varphi) = R \cdot \mu(\varphi) \cdot p(\varphi) dA$ alakban adódik, ahol $dA = b \cdot R d\varphi$ és b a féktuskó vastagsága (az ábrára merőleges mérete).

Végül is a behelyettesítések után az elemi $d\varphi$ szögtartományon generált súrlódónyomatékokra a

$$dM_s(\varphi) = R\mu(\varphi)p(\varphi)bRd\varphi = bR^2\mu(\varphi)p(\varphi)d\varphi$$

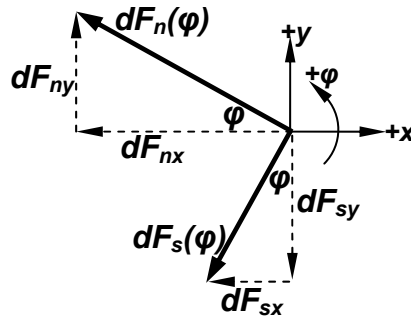
formula adódik. A kerék forgástengelyére működő teljes súrlódónyomatékokat az elemi súrlódó felületeken generált elemi súrlódónyomatékok összegzésével, azaz a teljes $[-\Phi, \Phi]$ átfogási

szögre vonatkozó integrálással kapjuk:

$$M_s = bR^2 \int_{-\Phi}^{\Phi} \mu(\varphi) p(\varphi) d\varphi .$$

Kihasználva a $\frac{2\Phi}{2\Phi} = 1$ egyenlőséget, a fenti egyenlet célszerűen átalakított változatát kapjuk:

$$M_s = bR^2 2\Phi \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} \mu(\varphi) p(\varphi) d\varphi .$$



3.13. ábra. A féktusó/kerék érintkezési felület φ szöggel azonosított pontjában a féktuskóra ható erők

Bevezetve μ súrlódási tényező és a p érintkezési nyomás szorzatának a teljes $[-\Phi, \Phi]$ átfogási szögintervallumra számított

$$\overline{\mu p} = \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} \mu(\varphi) p(\varphi) d\varphi$$

integrál-átlagát, a teljes súrlódónyomatékra a

$$M_s = bR^2 2\Phi \overline{\mu p}$$

tömör kifejezést nyerjük.

A következőkben a féktuskó csúszófelületére ható erőket elemezzük kiindulva a φ szöghelyzetben lévő elemi $d\varphi$ szögtartományhoz tartozó felületelemre ható nyomásból származó $dF_n(\varphi)$ normális és csúszósúrlódásból származó $dF_s(\varphi)$ tangenciális erőből. A módszeres statikai elemzéshez szükséges a jelzett elemi erőhatások vízszintes és függőleges vetületeinek meghatározása. A 3.13. ábra szerinti pozitív irányok figyelembevételével a vetületi jellemzők rendre meghatározhatók.

$$\begin{aligned} dF_{nx}(\varphi) &= -dF_n(\varphi) \cdot \cos \varphi \\ dF_{ny}(\varphi) &= dF_n(\varphi) \cdot \sin \varphi \\ dF_{sx}(\varphi) &= -dF_s(\varphi) \cdot \sin \varphi \\ dF_{sy}(\varphi) &= -dF_s(\varphi) \cdot \cos \varphi \end{aligned} .$$

A fenti infinitezimálisan kis növekményi erők vetületeinek összegzése (azaz integrálása) elvezet a „féktuskó-féksaru” rendszer **statikai egyensúlyi egyenletrendszeréhez**.

Az egyensúlyi egyenletek az x -irányú vetületi erők és az y -irányú vetületi erők előjeles összegének zérus voltát, valamint a sík egy pontjára – most célszerűen ez a kerék forgáspontja – vett eredő nyomaték zérus voltát írják elő.



- 1.) Az x -irányú vetületi erők összege zérus, azaz $\sum_i F_{xi} = 0$. Az elemi vetületi erők összegét integrálással tekintetbe véve a következő egyensúlyi egyenlet adódik:

$$F_t - \int_{-\Phi}^{\Phi} dF_{nx}(\varphi) - \int_{-\Phi}^{\Phi} dF_{sx}(\varphi) = 0 .$$

Figyelembe véve a bevezetőben felírt (1), (2) és (3) egyenleteket, az egyelőre ismertnek feltételezett $p(\varphi)$ nyomáseloszlás és $\mu(\varphi)$ súrlódási tényező eloszlás mellett az alábbi egyenletet kapjuk:

$$F_t = bR \int_{-\Phi}^{\Phi} (p(\varphi) \cdot \cos \varphi + \mu(\varphi) p(\varphi) \cdot \sin \varphi) d\varphi .$$

- 2.) Az y -irányú vetületi erők összege zérus, azaz $\sum_i F_{yi} = 0$. Az elemi vetületi erők összegét integrálással tekintetbe véve a következő egyensúlyi egyenlet adódik:

$$F_y + \int_{-\Phi}^{\Phi} dF_{ny}(\varphi) - \int_{-\Phi}^{\Phi} dF_{sy}(\varphi) = 0 .$$

Figyelembe véve a bevezetőben felírt (1), (2) és (3) egyenleteket, az egyelőre ismertnek feltételezett $p(\varphi)$ nyomáseloszlás és $\mu(\varphi)$ súrlódási tényező eloszlás mellett az alábbi egyenletet apjuk:

$$F_y = bR \int_{-\Phi}^{\Phi} (-p(\varphi) \cdot \sin \varphi + \mu(\varphi) p(\varphi) \cdot \cos \varphi) d\varphi .$$

- 3.) A statika egyik alaptétele, hogy valamely síkbeli egyensúlyi erőrendszernek a sík bármely A pontjára számított eredő nyomatéka zérussal egyenlő, azaz $\sum_{(A)} M_A = 0$. Most az

A pontnak a kerék forgáspontját célszerű választani, mivel a tuskókra a felületi nyomásból ható erők hatásvonalai mind átmennek ezen a forgásponton és ezek nyomatéka ezért eleve zérus. A szóban forgó eredő nyomaték alakulásába tehát csupán a sarucsapra működő függőleges F_y erő nyomatéka és a súrlódó felületen megoszló elemi

$dM_s(\varphi) = R dF_s(\varphi)$ nyomatékok $\int_{-\Phi}^{\Phi} R dF_s(\varphi)$ eredője szól bele. A most elmondottak kép-

letben a következőképp formulázhatók a nyomatékok előjelének figyelembevételével:

$$-F_y(R + \Delta) + \int_{-\Phi}^{\Phi} R dF_s(\varphi) = 0 ,$$

ahol Δ jelöli a sarucsap és a hengeres súrlódó-felület távolságát. Figyelembe véve a 2. és 3. pontban felírt elemi összefüggéseket adódik a részletesebb nyomatéki egyenlet:

$$F_y(R + \Delta) = bR^2 \int_{-\Phi}^{\Phi} \mu(\varphi) p(\varphi) d\varphi .$$

Ezt az egyenletet is bővítve a $\frac{2\Phi}{2\Phi} = 1$ azonosság alapján a végleges alakú nyomatéki egyenletet kapjuk:

$$F_y(R + \Delta) = bR^2 2\Phi \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} \mu(\phi) p(\phi) d\phi = bR^2 2\Phi \overline{\mu p}.$$

Mivel a nyert végleges nyomatéki egyenlet éppen a tuskó/féksarú rendszerre ható súrlódó nyomaték értékét adja, írható, hogy:

$$M_s = F_y(R + \Delta).$$

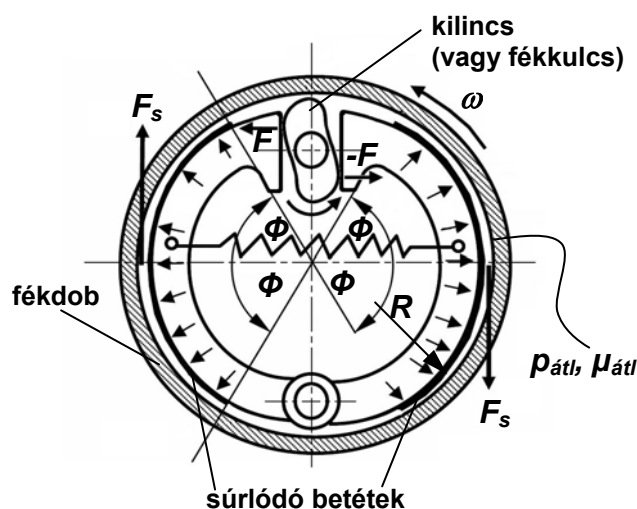
A fentiekben megkonstruált három statikai egyensúlyi egyenlet mérnöki alkalmazását tekintve két lehetőséget említünk meg.

Az egyik alkalmazási lehetőség ismert $p(\phi)$ nyomáseloszlás és $\mu(\phi)$ súrlódási tényező eloszlás esetén aknázható ki. Az egyenletekben szereplő integrálok kiszámítása után a féksarút támadó F_t féktuskóerő, F_y féksarú-felfüggesztő erő és az $M_f = -M_s$ fékezőnyomaték meghatározására. Ez a vizsgálat leginkább állandósult fékezés esetén valósítható meg, mikoris a $p(\phi)$ féktuskónyomás-eloszlás nem függ a t időtől. Elvi akadályja azonban annak sincs, hogy amennyiben ismert a nemcsak helytől, de az időtől is függő $p(\phi, t)$ nyomáseloszlás és $\mu(\phi, t)$ súrlódási tényező eloszlás, akkor meghatározhatók legyenek az $F_t(t)$ féktuskóerő, $F_y(t)$ féksarú-felfüggesztő erő és az $M_f(t) = -M_s(t)$ fékezőnyomaték időfüggvények.

A másik alkalmazási lehetőség a súrlódási tényező közepes értékének és a féktuskónyomás eloszlásának közelítő meghatározásában jelentkezik. Abból a tényből, hogy $\Delta > 0$ adódik, hogy a tuskónyomás a tuskó alatt nem lehet homogén, és hogy a tuskó ráfutó éle környezetében a tuskónyomásnak nagyobbak kell lennie mint a kifutó éle környezetében. A legegyszerűbb ilyen inhomogén tuskónyomás-eloszlási modell a $p(\phi) = A \phi + B$ lineáris alakzattal adható meg, ahol most A és B ismeretlen konstansok. A súrlódási tényezőt első közelítésben egy egyelőre ismeretlen μ_0 közepes állandó értékkel modellezhetjük. Állandósult fékezési üzemi állapotban méréssel meghatározva az F_t tuskóerő és az F_y sarúfelfüggesztő erő állandósult értékét, a három statikai egyenlet felhasználható az A , B és μ_0 konstans paraméterek meghatározására. A három egyenletből ugyanis egy három ismeretlenes nemlineáris egyenletrendszer adódik, amely numerikusan (iterációval) megoldható.

3.2.2. A dobfék vizsgálata

A dobfék vizsgálata során csak a súrlódó nyomaték alakulásának kérdésével foglalkozunk.



3.14. ábra. A dobfék szerkezete és erőhatásviszonyai

A tuskós fék bevezetőjében tárgyaltak alapján – feltételezve a kétoldali fékpofa szimmetriáját

– a súrlódó nyomatékra előbb az

$$M_s \approx 2bR^2 \int_{-\Phi}^{\Phi} \mu(\varphi) p(\varphi) d\varphi$$

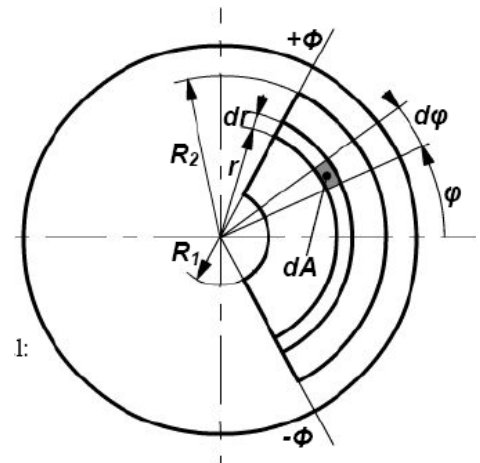
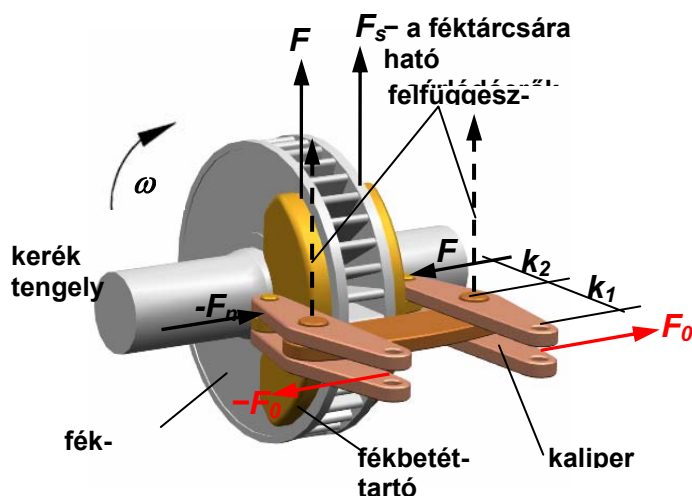
közelítő összefüggést, majd a szokásos azonos bővítés után az

$$M_s \approx 2bR^2 2\Phi \overline{\mu p}$$

közelítő végképletet nyerjük. A fenti képletekben szereplő jelölések értelmezését a következőkben adjuk meg: b a súrlódó betétek rajz síkjára merőleges szélessége, R a súrlódó felület sugara, 2Φ a teljes átfogási szög; μ az átlagos súrlódási tényező a súrlódó betétek és a fékdob között, p az F és $-F$ erők által létrehozott átlagos felületi nyomás a súrlódó betétek és a fékdob között.

3.2.3. A tárcsás fék vizsgálata

A tárcsás fék nevében az a tulajdonság jelenik meg, hogy a kerék forgását gátolni hivatott súrlódónyomaték generálása nem a fékezett kerék futófelületén, hanem a kerék tengelyére vagy a kerék két oldalára szerelt féktárcsák körgyűrű alakú, függőleges síkban fekvő súrlódó felületén történik. Jellemzőes még, hogy a súrlódóerőt generáló, féktárcsafelületre merőleges nyomóerő iránya mindig párhuzamos a tárcsa forgástengelyével. A normálerő és a súrlódóerő féktárcsára való átadása kompozit anyagú, vagy öntöttvasból készült fékbetétnek a féktárcsával való érintkezési felületén valósul meg. A fékbetétek alakzárással vezetve a fékbetét-tartóban foglalnak helyet. A fékberendezés működése során a normálerő működtetése a fékbetét-tartókra történik. A 3.15. ábrán egy vasúti tárcsás fék kaliperkaros erő kifejtő rendszerének a felépítését mutatjuk be a meghatározó szerepű erőhatások és geometriai jellemzők feltüntetésével. A fék működtetése az ábra szerinti szabad kaliper-végek közé szerelt (az ábrán nem szerepeltetett) léghenger által kifejtett F_0 és $-F_0$ erővel történik, mely erő a kaliperkarokat távolítani igyekszik.



3.15. ábra. A tárcsás fék szerkezete és erőhatásviszonyai

3.16. ábra. A féktárcsa és a fékbetét érintkezési felületének jellemzői

A tárcsás fék erőjátékának vizsgálatához először tekintsük a kaliperkarokra ható nyomatékok egyensúlya alapján a fékhenger által kifejtett F_0 erő és a betéttartóra működő F_n normálerő közötti.

$$F_n = \frac{k_1}{k_2} F_0$$

összefüggést. A fékbetétet a súrlódó felülethez szorító F_n erő ismeretében a tárcsa forgását gátolni igyekvő M_s súrlódónyomaték jó közelítéssel meghatározható. A féktárcsa felületét támadó F_n erő létrehozza a féktárcsa/fékbetét kapcsolatban kialakuló p felületi nyomást, amely a 3.16. ábra szerinti polárkoordináta-rendszerben a kétváltozós $p = p(r, \varphi)$ függvénnyel adható meg. A felületi nyomáseloszlás jellegét a fékbetét-tartó konstrukciója, a kaliperkarokhoz való csatlakoztatás módja, a szerkezeti rugalmassági viszonyok és a fékbetét rögzítésének megoldása határozza meg. A tárgyalás egyszerűsítése kedvéért a súrlódó felületet a jelen vizsgálatban körgyűrű-szektor alakúnak vettük fel. Ugyancsak kétváltozós függvényként vezetjük be a fékbetét és a féktárcsa $\mu = \mu(r, \varphi)$ csúszósúrlódási tényezőjét, mivel a féktárcsa sugárirányban változó kerületi sebessége miatt a csúszósúrlódási tényező eloszlása az érintkezési (csúszó) felület felett már nem tekinthető homogénnek. Mivel a csúszási sebesség r -rel (azaz belülről kifelé) növekszik, $\mu(r, \varphi)$ az r -rel általában csökken (a csúszósúrlódási tényező a csúszási sebesség növekedésével általában csökken), így a külső átmérő-közeli felületrészek a féknyomaték generálás szempontjából kevésbé értékesek.

A fentiek alapján tehát ismertnek tekintjük a $p(r, \varphi)$ felületi nyomáseloszlást $r \in [R_1, R_2]$ és $\varphi \in [-\Phi, \Phi]$ esetén, valamint a $\mu(r, \varphi)$ csúszósúrlódási tényező-eloszlást ugyancsak $r \in [R_1, R_2]$ és $\varphi \in [-\Phi, \Phi]$ esetén. A súrlódó felületen generált, a féktárcsa tengelyére ható súrlódónyomaték meghatározásának előkészítéseképp vegyük figyelembe a polárkoordinátás megadás sajátosságaiból adódóan az elemi dA súrlódófelület $dA = ds \cdot dr$ alakban történő felírását, ahol az elemi ds ívhossz vonatkozásában a $ds = r d\varphi$ felírás érvényes, és így a tekintett felületelemet a $dA = r d\varphi dr$ összefüggés szerint származtathatjuk.

Az r, φ koordinátákkal jellemzett helyhez csatlakozó dA felületelemen fellépő dF_n elemi normálerőt a nyomáseloszlás r, φ helyi értékéből kapjuk:

$$dF_n(r, \varphi) = p(r, \varphi) dA = p(r, \varphi) r d\varphi dr,$$

míg a dA felületelemen ébredő dF_s elemi csúszósúrlódási erő az eddigiekből adódóan

$$dF_s(r, \varphi) = \mu(r, \varphi) dF_n(r, \varphi) = \mu(r, \varphi) \cdot p(r, \varphi) \cdot r d\varphi dr$$

alakban írható fel. A nyert eredmények alapján az elemi dA felületelemen ébredő súrlódóerő által generált dM_s elemi súrlódónyomaték a féktárcsa forgástengelyére a következő lesz:

$$dM_s(r, \varphi) = r \cdot dF_s(r, \varphi).$$

Figyelembe véve, hogy a féktárcsa *mindkét* csúszófelületén fellép nyomatékgenerálás, a teljes féktárcsával megvalósítható súrlódónyomatékot a kétszeres integrálást kijelölő alábbi képlettel kapjuk:

$$M_s = 2 \int_{R_1}^{R_2} \int_{-\Phi}^{\Phi} r \cdot dF_s(r, \varphi) = 2 \int_{R_1}^{R_2} \int_{-\Phi}^{\Phi} r^2 \mu(r, \varphi) p(r, \varphi) \cdot d\varphi dr.$$

Amennyiben a jármű kerék forgását több féktárcsával fékezzük, akkor a fenti képlet szerint súrlódónyomatékot a tárcsák számával szorozni kell az eredő nyomaték meghatározásához. Az is előfordulhat, hogy a féktárcsákat nem a jármű kerekére, vagy a kerék tengelyére szerelik, hanem fogaskerék áttétellel (általában gyorsító áttétel) meghajtott előtengelyre erősített egy vagy több féktárcsa súrlódófelületein ébred a súrlódónyomaték. A nagyobb fordulatszámú előtételtengely alkalmazását az indokolja, hogy ilyen feltételek mellett ugyanolyan fékezési teljesítmény kifejtésére kisebb méretű szerkezet elegendő.



3.2.4. Termoelasztikus jelenségek fékekben

A csúszósúrlódásos érintkezés során az érintkezési felületen hőfejlődés történik, vagyis hőáram keletkezik, ennek fajlagos értéke a hőáramsűrűség (más szóval felületegységre eső, súrlódással generált hőenergia-áram), melyet a

$$q \stackrel{\text{def}}{=} p \cdot v \cdot \mu$$

képlet alapján származtatunk, ahol p a felületi nyomás, v a csúszási sebesség és μ a csúszósúrlódási tényező. Vizsgáljuk meg a hőáramsűrűség mértékegységét:

$$[q] = [p] \cdot [v] \cdot [\mu] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1 = \frac{\text{Nm}}{\text{m}^2 \text{s}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Az elemi hőenergia-áram, amely a csúszófelület valamely pontjánál elhelyezkedő dA felületelemen generálódik:

$$d\dot{Q} = q \, dA, \quad [\dot{Q}] = \text{W}.$$

A teljes súrlódó felületen generált hőáram a csúszófelületre kiterjesztett felületi integrál meghatározásával történik:

$$\dot{Q} = \int_A d\dot{Q} = \int_A q \, dA.$$

Ez a hőáram tovaáramlik a súrlódó kapcsolatban lévő tömegekbe, melegítve azokat. Természetesen merül fel a keletkezett hőáram két test közötti megoszlásának problémája. Mindenesetre elmondható, hogy a súrlódó felületen generált teljes \dot{Q} hőáram két részre, \dot{Q}_1 és \dot{Q}_2 rész-hőáramokra oszlik. \dot{Q}_1 az egyik súrlódó partner tömegébe, a \dot{Q}_2 pedig a másik súrlódó partner tömegébe áramlik. A kérdés további taglalásához bevezetjük az $\alpha \in [0,1]$ hőmegosztási jellemzőt a következő definícióval:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 = \alpha \cdot \dot{Q} + (1 - \alpha) \cdot \dot{Q}$$

A hőmegosztási tényező meghatározása a fékezési folyamatok hőtani elemzésének egyik nem könnyű kérdése. A nehézség két dologból fakad. Egyrészt a féktuskó, vagy a fékbetét a kerék vagy a féktárcsa súrlódó felületének csak egy részét fedi, az érintkezés még sebességtartó fékezés esetén sem stacionárius. Ez azt jelenti, hogy a kerék vagy a féktárcsa egyes pontjai csak időlegesen (instacionárius hőfolyamat kíséretében) kerülnek kapcsolatba a súrlódó partnerrel (a féktuskóval vagy a fékbetéttel) és így a vizsgált pont kis környezetében a súrlódásos hőbevezetés szakaszos, szaggatott jellegű. A felmelegedett kerék futófelület, vagy a féktárcsa éppen súrlódóelemmel nem fedett részeinél a környezetbe irányuló hőleadás valósul meg. Így még sebességtartó fékezés esetén is a fékezett kerék kerületi pontjainak, ill. a féktárcsa oldal-síkjának valamely sugáron elhelyezkedő pontjainak hőmérséklete periodikusan változni fog.

Ilyen szituációban közelítő vizsgálat úgy végezhető, hogy a csúszóérintkezési felületen generált \dot{Q} hőáram kerékbe vagy féktárcsába áramló $\dot{Q}_1 = \alpha \dot{Q}$ részét a kerék vagy a féktárcsa csúszófelületére egyenletesen elosztjuk, azaz \dot{Q}_1^* átlagos felületi hőárammal folytatjuk a kerék, vagy a féktárcsa felmelegedésének vizsgálatát. Az α hőmegosztási tényező meghatározásához az analóg elektrotechnikai probléma megoldása adja a kulcsot. A párhuzamosan kapcsolt R_1 és R_2 ohmos ellenállásokon folyó villamos áram meghatározására előbb az eredő I áramot számítjuk az eredő ellenállás és az U feszültség ismeretében, majd az eredő áramot megosztjuk a párhuzamos ágak között ellenállásaikkal fordított arányban. Az eredő ellenállást

a $R = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2}$ ismert összefüggés alapján kapjuk. Az eredő I áram az $I = U/R$ ebből a

kapocsfeszültség $U = I R = I \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Jelölje I_1 az R_1 ellenállású párhuzamos ágon, I_2 pedig az R_2 ellenállású párhuzamos ágon folyó áramot. A közös U kapocsfeszültség mellett fennáll, hogy $I_1 = U/R_1$ és az $I_2 = U/R_2$. A fenti részeredmények egybevetésével kapjuk I_1 kifejezését:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = \alpha I,$$

ahol bevezettük az $\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ jelölést. Hasonlóan adódik I_2 kifejezése:

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I = \frac{R_1 + R_2 - R_2}{R_1 + R_2} I = (1 - \alpha) I.$$

A kapott kifejezéseket beírva a Kirchoff első tétele miatt fennálló $I = I_1 + I_2$ összefüggésbe, kapjuk a bevezetett α tényező jelentését, mely tényező nyilvánvalóan *árammegosztási* tényezőnek bizonyul:

$$I = I_1 + I_2 = \alpha I + (1 - \alpha) I.$$

A hőmegosztási viszonyokat azon analógia alapján tudjuk kiértékelni, hogy az áramnak megfeleltetjük a súrlódással generált hőáramot, a feszültségnek a súrlódó partnetek egyedi felületi hőmérsékletei és ezek középértéke közötti hőmérséklet különbséget, a villamos ellenállásnak pedig a termikus ellenállás $[r] = K/W$ termikus ellenállást. Ilyen megközelítésben, ha \dot{Q}_1 jelenti a fékezett kerékbe vagy a féktárcsába lépő hőáram-részt és \dot{Q}_2 jelenti a féktuskóba vagy a fékbetétbe lépő hőáram-részt, akkor a korábban bevezetett hőmegosztási tényező:

$$\alpha = \frac{r_2}{r_1 + r_2},$$

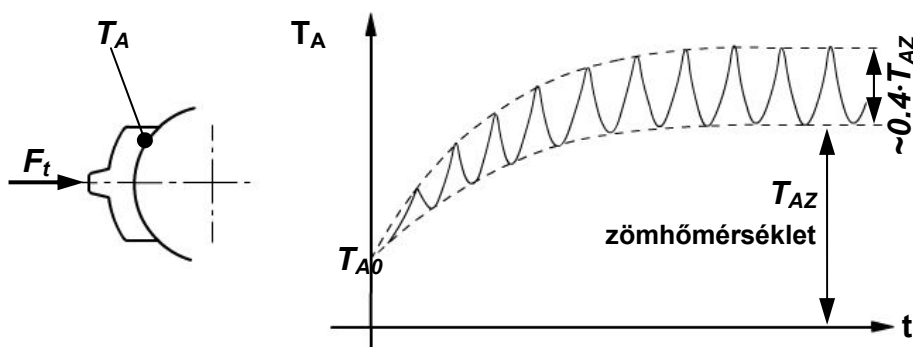
ahol r_1 a kerék vagy a féktárcsa termikus ellenállását és r_2 a féktuskó vagy a fékbetét termikus ellenállását jelenti. Konkrét, időben változó fékezőerő-kifejtés és ennek megfelelően változó sebesség esetén a dinamikai szimulációval lehet a hőmegosztási tényezőt meghatározni. Ez úgy történhet, hogy a fékezés mechanikai folyamatának szimulációs programját kétszer futtatva, egyik esetben az összes keletkezett súrlódási hőáramot a kerékbe vagy a féktárcsába vezetve meghatározzuk a kerék vagy a féktárcsa súrlódó-felületi hőmérsékletének $T_1^*(t)$ közelítő időfüggvényét, a második futtatás során megfordítva, az összes keletkezett súrlódási hőáramot a féktuskóba vagy a fékbetétbe vezetve meghatározzuk a féktuskó vagy a fékbetét súrlódó-felületi hőmérsékletének közelítő $T_2^*(t)$ időfüggvényét. A két utóbbi időfüggvény ismertében a gyakorlati számításokhoz megfelelő közelítést nyújtó időfüggő hőmegosztási tényezőt szolgáltat az

$$\alpha(t) = \frac{T_2^*(t)}{T_1^*(t) + T_2^*(t)}$$

függvény.



Áttérünk a *termoelasztikus instabilitás* jelenségének bemutatására. Ez a jelenség a súrlódó alkatrészek felületközeli pontjaiban fellépő időbeli hőmérsékletingadozással kapcsolatos, mely fizikai folyamatban a csúszósúrlódásos hőfejlődés során a súrlódó pár rugalmas jellemzői, a hőtágulási viszonyok és a felületi kopási viszonyok játszanak szerepet. A jelenség tartamfékezések (pl. hosszas sebességtartó fékezés völgymenetben) során lép fel teljesen kifejlődött formájában. Erős tartamfékezésnél pl. a féktuskók pontjaiban izzó foltok jelennek meg és az érintkezési ív mentén lassan ide-oda mozognak. A 3.17. ábrán tuskós fékezésű kerék féktuskójának A pontjában kialakuló $T_A(t)$ hőmérséklet-időfüggvényt mutatjuk be tartamfékezés esetében.



3.17. ábra. A féktuskó A pontján tartamfékezéskor kialakuló termoelasztikus instabilitással kapcsolatos hőmérsékletváltozás

A hőmérséklet ingadozásának hátterében az említett *rugalmas*, *hőtágulási* és *kopási* jellemzők kölcsönhatása bújik meg. Az egyenlőtlen kezdeti lokális kopás miatt keletkező felületi nyomás-egyenlőtlenségből közel periodikus időbeli nyomásátrendeződés, hőáram-sűrűség átrendeződés, hőmérséklet átrendeződés, hőtágulás átrendeződés és lokális kopás átrendeződés következik.

A termoelasztikus folyamat kialakulása a súrlódó felület egy adott, φ -vel jellemzett pontján a következő mozzanatokkal magyarázható:

- 1.) Az érintkezési felület valamely φ szögkoordinátájú helyén legyen jelen egy igen enyhén kidomborodó hely, ahol a lokális p felületi nyomás kicsit nagyobb, mint a környezeti átlagos érték. Ez által a súrlódással keltett hőáram is nagyobb lesz az adott helyen, a T lokális hőmérséklet jelentősen növekszik, a hőtágulás miatt a kidomborodás egy ideig tovább növekszik és ezért itt a p lokális felületi nyomás még nagyobb értéket ér el. Azonban a kialakult nagy lokális érintkezési nyomás és súrlódási hőmérséklet eredményeképpen a helyi kopás intenzív lesz és sok anyagi rész lekopik a legnagyobb nyomás és hőmérsékleti hely kis környezetében. A kopástermék (debris) pedig a csúszósúrlódás során kihordódik az érintkezési felületről.
- 2.) Az erős helyi kopás következményeképpen az eredetileg meglévő enyhe kidomborodás csökken, ezért a p helyi nyomás is csökken, csökken tehát a generált hőáram, ezért T hőmérséklet is csökken, ez pedig a hőtágulást csökkenti, a nyomás ezért tovább csökken, tehát a kopás is erősen csökken.
- 3.) A 2.) pont szerint a φ hely környezetében lecsökkent felületi terhelés miatt a teherviselést egy időre a φ hely környezete veszi át, majd ha ezeken a helyeken is lejátszódik az 1.) szerinti kopásnövekedés, akkor a φ hely fog relatíve kiemelkedni, és a p nyomás ismét növekedésnek indul, így a folyamat kezdődik előlről. Kialakul a periodikus jellegű helyi hőmérsékletingadozás az „instabil hőmérsékleti állapot”.

4. Járműfűzések dinamikája

4.1. A járműfűzér értelmezése

A közlekedési folyamatban az önjáró egyedi járműegységeken kívül egyre gyakoribb az összekapcsolt járművekből felépülő járműfűzések alkalmazása. Tipikus a vontatóhoz kapcsolt személy- vagy teherszállító közúti utánfutó esete. A mezőgazdasági munkában már régóta, de a modern nagytávolságú közúti teherszállításban is megjelennek a közúti szerelvények két vagy több utánfutó egység összekapcsolásával. A vasúti közlekedés alapegysége a több kocsiból összeállított vonat. A vízi közlekedésben vontatóhajóból és a hozzá kapcsolt uszályokból összeállított "hajóvontákkal" találkozunk. A járműfűzések járműdinamikai vizsgálatakor az alábbi tulajdonságokat tekintjük mértékadónak:

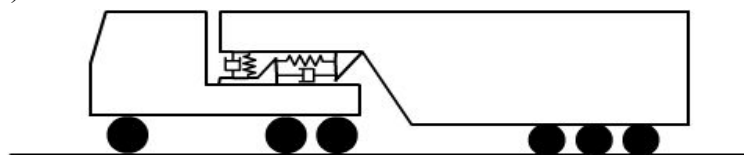
- 1.) A járműfűzér járművek rugalmasan és disszipatíván összekapcsolt láncolata.
- 2.) Az összekapcsolt járművek közül egy vagy több vonóerő kifejtésre képes.
- 3.) A láncolatbeli járművek mindegyike fékezőerő kifejtésre képes.
- 4.) Az egyes járművek egyszerűsített dinamikai modelljeiben a haladó és forgómozgást végző részek elkülönítve szerepelnek, tehát a kerekek és hozzájuk csatolt forgó szerkezeti részek saját szabadságfokkal bíró alrendszerek

A járműfűzéseket két osztályba soroljuk. Amennyiben csak két jármű rugalmas disszipatív kapcsolata adja a rendszert *elemi járműfűzerről* beszélünk (lásd a 4.1 ábrát.). Ha a vizsgált járműfűzér három vagy több jármű összekapcsolásával áll elő akkor *általános járműfűzerről* beszélünk (lásd a 4.2 ábrát).

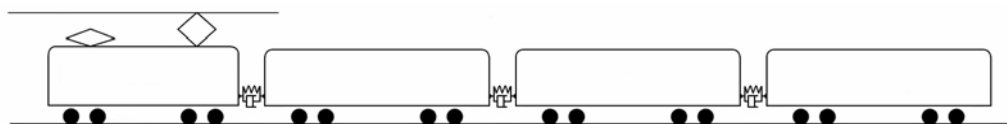
a.)



b.)



4.1. ábra. Két jármű hosszdinamikai kapcsolatából kialakuló elemi járműfűzések

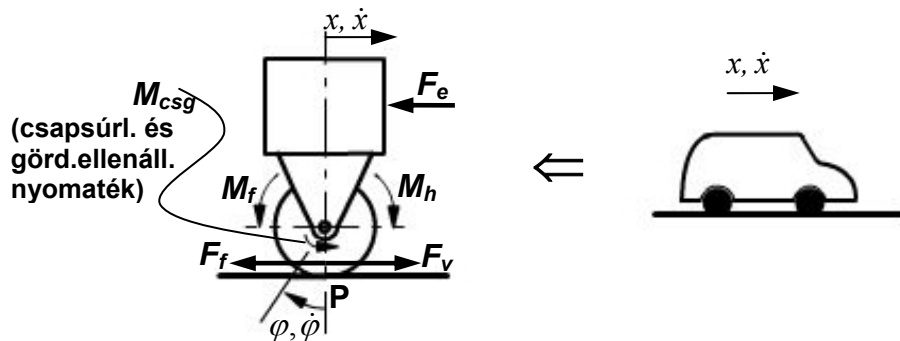


4.2. ábra. Több jármű hosszdinamikai kapcsolatából kialakuló általános járműfűzér

A járműfűzések dinamikai vizsgálatát koncentrált paraméterű modellekkel végezzük. A haladó mozgást végző tömegeket a jármű tömegközéppontjába koncentrálni kezeljük. Emlékeztünk rá, hogy valamely tömegpont pillanatnyi **mozgásállapotát** annak pillanatnyi **helyzete** és a **sebessége** határozza meg. Most a legalább két rugalmasan és disszipatíván összekapcsolt tömegpont esetén keressük az adott vonó-, fékező- és menetellenállás-erő hatására kialakuló mozgásokat! A dinamikai modellképzés járműfűzések esetén azt jelenti, hogy a fűzérben helyet vett járművek pályairányú haladó mozgást végző tömegei az egyes járművek tömegkö-

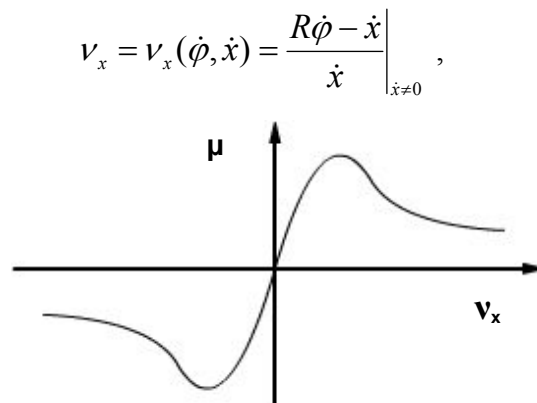
zépontjaiba koncentrálni összevontan szerepelnek, továbbá, hogy a jármű kerekei és az ahhoz kapcsolódó további forgómozgást végző tömegek egyetlen redukált tehetetlenségi nyomatékú forgó tömeggé összevonva szerepelnek. A járművenként így összevont forgó tömegek középpontjai haladó mozgását tekintve a jármű haladó mozgást végző részeit összevonva modellező tömegekkel azonos mozgásjellemzőkkel bírnak.

A fentiek alapján, ha egy járművet kiemelünk a járműfűzéből, akkor egy kétszabadságfokú elemi járműmodellt kapunk (lásd a 4.3 ábrán egy kis transzporter leképezését). A két szabadságfokú elemi járműmodell szabad koordinátáit a pályairányú haladó mozgás x helyzetjellemző koordinátája és a redukált forgó tömeg szöghelyzetét leíró φ koordinátája adja. Az elemi járműmodell mozgásba hozása a forgó tömegre ható külsőleg vezérelt M_h hajtónyomaték adagolásával, a fékezése pedig ugyancsak a forgó tömegre ható és külsőleg vezérelt M_f fékezőnyomaték adagolásával történik.



4.3. ábra. A kétszabadságfokú elemi járműmodell magyarázatához

A 4.3 ábra szerinti elemi járműmodellben a kerekeket és az azokhoz csatolt forgó alkatrészeket modelláló forgó tömeg kúszásos erőzárással viszi át a támasztófelületről a forgó tömegre ható M_h hajtó- ill. az M_f fékezőnyomaték által a P pontban kikényszerített tangenciális kapcsolati erőt. Korábbi tárgyalásunkban megismertük a gördülőkapcsolat kúszásos erőzárással alapvető szerepet játszó erőkapcsolati tényező és közepes értékének a v_x hosszirányú kúszás függvényében kirajzolódó ostorszerű diagramját. Emlékeztetésképpen a 4.4 ábrán ismételtén vázoltuk az említett diagramot, hangsúlyozva, hogy járműfűzések esetén is minden a fűzerben szerepet nyert elemi járműmodell forgó tömegének a támasztófelületi érintkezési pontjához rendelkezésre kell állnia az ott érvényes erőkapcsolati tényező diagramnak! Konkretizáljuk most a 4.3 diagram szerinti jelölésekkel a hosszirányú kúszás definiáló képletét:



4.4. ábra. A gördülőkapcsolat erőkapcsolati tényezője

ahol R az elemi járműmodellbeli kerék sugara. Ismerni kell tehát a $\mu = \mu(v_x)$ erőkapcsolati tényező függvényt – zárt alakú képletével, vagy diagramjának numerikus jellemzői alapján –

az F_v vonóerő és az F_f fékezőerő mozgásállapot-függésének kezeléséhez. Ha F_n jelöli a gördülőkontaktusban fellépő függőleges támaszerőt, akkor a két utóbbi erőre az egységes szerkezetű

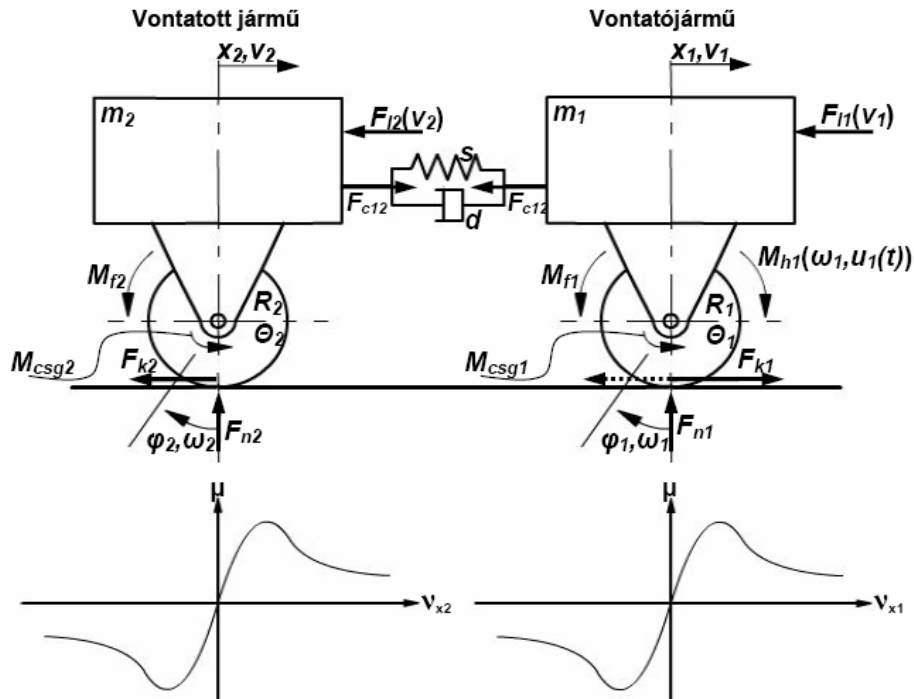
$$F_v(\dot{\phi}, \dot{x}) = F_n \mu(v_x(\dot{\phi}, \dot{x})), F_f(\dot{\phi}, \dot{x}) = F_n \mu(v_x(\dot{\phi}, \dot{x}))$$

összefüggéspár érvényes. Természetszerűen hajtás esetén az erőkapcsolati tényező a pozitív kúszásokhoz tartozó pozitív értékkel lép be a képletbe és pozitív vonóerőt szolgáltat, míg fékezés esetén a helyzet előjelek szempontjából fordított lesz: negatív kúszásokhoz negatív erőkapcsolati tényező és negatív fékezőerő-nagyság adódik.

4.2. Az elemi járműfűzér vizsgálata

4.2.1. Az elemi járműfűzér felépítése

Az elemi járműfűzér esetén két elemi járműmodell lép be a dinamikai rendszerbe, mégpedig a haladó tömegek lineárisan rugalmas és disszipatív hosszirányú kapcsolatával. Így egy 4 szabadságfokú (azaz négyszabadságfokú), elemi, lengésképes hosszirányú dinamikai modellt kapunk. A modell alkalmas a járműfűzér főmozgása során kialakuló hosszirányú lengések tanulmányozására is. A 4.5 ábrán felrajzoltuk a 4 szabadságfokú elemi járműfűzér dinamikai modelljét a szükséges rendszerparaméterek és a fellépő külső és belső erők jelölésének megadásával, feltételezve, hogy a jobb oldali elemi járműmodell mind vonó-, mind pedig fékezőerő kifejtésére alkalmas, míg a bal oldali jármű csupán fékezőerőt tud kifejteni. A forgó tömegekre a keréktalpon átvitt tangenciális erőt F_{k1} és F_{k2} jelöli. A modellben most figyelembe vételre kerülnek a forgó tömegekre ható M_{csg1} és M_{csg2} csapsúrlódási és gördülési ellenállási nyomatékok is. Az ábrán alkalmazott jelölésekkel kapcsolatban érvényesek a következő egyenlőségek $v_1 = \dot{x}_1$, $v_2 = \dot{x}_2$, $\omega_1 = \dot{\phi}_1$ és $\omega_2 = \dot{\phi}_2$.



4.5. ábra. Az elemi járműfűzér négy szabadságfokú dinamikai modellje

A modellben alkalmazott jelölések alapján a két gördülőkapsolatban fellépő hosszirányú kúszásokat a következő képletek adják:

$$v_{x2} = \frac{R_2 \dot{\phi}_2 - \dot{x}_2}{\dot{x}_2} \Big|_{\dot{x}_2 \neq 0} \quad \text{és} \quad v_{x1} = \frac{R_1 \dot{\phi}_1 - \dot{x}_1}{\dot{x}_1} \Big|_{\dot{x}_1 \neq 0}.$$

A járműfűzér állandósult hosszirányú mozgásakor a fellépő erőhatások előjelét a táblázat mutatja:

$F_{k2} = F_{n2} \mu_2 (\dot{x}_2, \dot{\phi}_2)$, előjele kiadódik $F_{k2} < 0$ (M_{csg2} által kikényszerítve) $F_{c12} > 0$ $M_{f2} = 0$ $M_{csg2} < 0$ $F_{l2} < 0$	$F_{k1} = F_{n1} \mu_1 (\dot{x}_1, \dot{\phi}_1)$, előjele kiadódik $F_{k1} > 0$ (M_h és M_{csg1} által kikényszerítve) $F_{c12} < 0$ $M_h > 0$ $M_{f1} = 0$ $M_{csg1} < 0$ $F_{l1} < 0$
--	--

A járműfűzér mozgásegyenleteinek felállításához tekintsük a szereplő erők és nyomatékok megnevezéseit, kiegészítő megjegyzésekkel az előjelek alakulására nézve.

Elsőnek a haladó mozgásra hatást gyakorló erőket vizsgáljuk:

1. Légellenállás-erők: F_{l1}, F_{l2} . Mindkettő a sebességgel ellentett értelmű.
2. Kúszásfüggő kerületi erők: F_{k1}, F_{k2} . A gördülőkapcsolatban a hajtó/fékező- ill a csapsúrlódási és gördülő-ellenállási nyomatékok által kikényszerített kúszás előjelét kapják.
3. Az összekapcsolt járművek közötti kapcsolati erő: F_{c12} . Az első járműre pozitív előjellel működik, ha a második jármű elmozdulása pozitív irányban nagyobb, mint az első jármű pozitív elmozdulása. Ugyanekkor a második járműre negatív előjellel működik (reakció-erő).

A forgó mozgást végző tömegekre ható nyomatékok a következők:

1. Csapsúrlódási és gördülési ellenállás nyomatékok: M_{csg1}, M_{csg2} . Mindkettő előjele a forgó tömeg szögsebességével ellentétes.
2. A vezérlés és mozgásállapot-függő hajtó és fékezőnyomatékok: M_h, M_{f1}, M_{f2} . A hajtónyomaték a haladási irányban gördülő tömeg szögsebességével azonos értelmű, ha a hajtás be van kapcsolva. A fékezőnyomatékok pedig ellentett értelműek, ha a fék működik.

A járműfűzérbe sorolt járművek közötti kapcsolati erőt jelen tárgyalásunkban lineáris karakterisztikájú rugó és a vele párhuzamosan működő ugyancsak lineáris karakterisztikájú csillapító valósítja meg.

Az F_{c12} kapcsolati erő mozgásállapot-függésének megadására – tekintettel a fentiekben megadott előjel követelményeket – a következő kifejezés alkalmas:

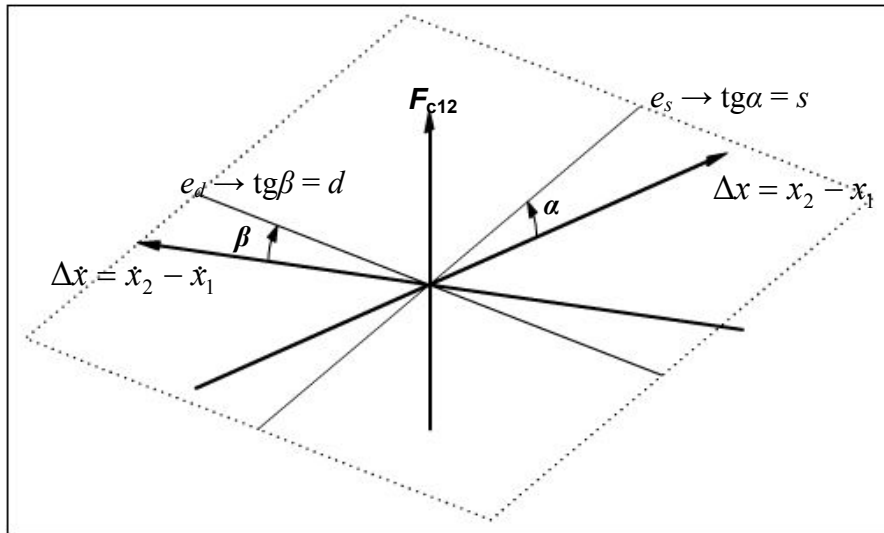
$$F_{c12} = s(x_2 - x_1) + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1),$$

ahol s a rugó merevsége $[s] = \frac{N}{m}$ mértékegységgel és d lineáris csillapítási tényező $[d] = \frac{Ns}{m}$.

Ekkor az F_{c12} kapcsolati erő mértékegysége: $[F_{c12}] = N$.

A vizsgált egyszerű esetben kapcsolati erő tehát az $x_2 - x_1$ és a $\dot{x}_2 - \dot{x}_1$ változóknál homogén és lineáris. Így elegendő az $F_{c12}(\Delta x, \Delta \dot{x})$ kétváltozós függvényt vizsgálni az $\{\Delta x, \Delta \dot{x}\}$ fázissík

felett. Az $F_{c12}(\Delta x, \Delta \dot{x}) = s \cdot \Delta x + d \cdot \Delta \dot{x}$ függvényről viszont azonnal látható, hogy az a fázis-sík felett egy origóra illeszkedő sík egyenlete, tehát a tekintett kétváltozós lineáris kapcsolati erő jellegfelülete egy origón átmenő síkfelület. A 4.6 ábrán felrajzoltuk a szóban forgó sík jellegfelületet. A sík meghatározásához elegendő két egymást metsző egyenesének megadása. A jelen esetben kézenfekvően adódik két jellegzetes egyenes. Az egyik a $\Delta \dot{x} = 0$ esetén adódó, az $\{F_{c12}, \Delta x\}$ síkba eső e_s egyenes megadása, amely lineáris rugó $F_{c12} = s \Delta x$ erőátadási függvényeként azonosítható. Az ábrán a Δx tengelyhez α szög alatt hajló egyenes iránytangense éppen a kapcsolatban szereplő lineáris karakterisztikájú rugó merevsége: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{c12}}{\Delta x} = s$. A másik jellegzetes egyenes a $\Delta x = 0$ esetén adódó, az $\{F_{c12}, \Delta \dot{x}\}$ síkba eső e_d egyenes megadása, amely lineáris csillapító $F_{c12} = d \Delta \dot{x}$ erőátadási függvényeként azonosítható. Az ábrán a $\Delta \dot{x}$ tengelyhez β szög alatt hajló egyenes iránytangense éppen a kapcsolatban szereplő lineáris csillapító csillapítási tényezője: $\operatorname{tg} \beta = \frac{F_{c12}}{\Delta \dot{x}} = d$.



4.6. ábra. Lineáris rugalmassággal és lineáris csillapítással bíró járműkapcsolati erő jellegfelülete origóra illeszkedő sík

Az $F_{c12} = F_{c12}(\Delta x, \Delta \dot{x}) = s \cdot \Delta x + d \cdot \Delta \dot{x}$ függvény megadja a járműkapcsolat által átvitt mozgásállapot-függő kapcsolati erőt így nyilvánvalóan be kell épülnie a dinamikai rendszer mozgásegyenleteibe.

4.2.2. A mozgásegyenletek felírása:

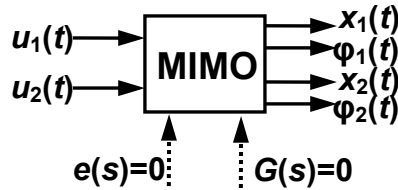
A vizsgált elemi járműfűzér 2 elemi járműmodelljének mindegyikére 1 haladó- és 1 forgómozgásra vonatkozó mozgásegyenlet írható fel Newton II. axiómájának alkalmazásával, összesen tehát 4 mozgásegyenlet alkotta másodrendű nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer jön létre az ismeretlen $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\varphi_1(t)$ és $\varphi_2(t)$ helyzetjellemző függvények meghatározására. Az előálló differenciálegyenlet-rendszer nemlinearitása alapvetően a lényegi szerepet játszó *nemlineáris gördülőkapcsolati erők*, a *légellenállás-erők* valamint a *csapsúrlódási és gördülési ellenállási nyomaték* nemlinearitásából adódik. További nemlinearítások lépnek be az $M_h(\dot{\varphi}_1, u_1)$ hajtónyomatéki, valamint $M_{f1}(\dot{\varphi}_1, u_2)$ és $M_{f2}(\dot{\varphi}_2, u_2)$ fékezőnyomatéki függvények nemlineáris szerkezete miatt.

A fentiek előrebocsátása után felírjuk a sík egyenes mozgáspályán haladó elemi járműfüzér mozgásegyenleteit a korábban taglalt előjelszabály érvényessége mellett, azonban 4.5 ábrán vázolt modellnél annyiban általánosabb modellre, hogy a hátulfutó jármű forgó tömege esetén is megengedjük hajtónyomaték működését. A mozgásegyenletek a következők:

- 1.) $m_1 \ddot{x}_1 = F_{n1} \mu_1 (\dot{x}_1, \dot{\varphi}_1) + F_{l1} (\dot{x}_1) + F_{c12} (\Delta x, \Delta \dot{x})$
- 2.) $\Theta_1 \ddot{\varphi}_1 = M_{h1} (\dot{\varphi}_1, u_1(t)) + M_{f1} (\dot{\varphi}_1, u_2(t)) - R_1 F_{n1} \mu_1 (\dot{x}_1, \dot{\varphi}_1) + M_{csg1} (\dot{\varphi}_1)$
- 3.) $m_2 \ddot{x}_2 = F_{n2} \mu_2 (\dot{x}_2, \dot{\varphi}_2) + F_{l2} (\dot{x}_2) - F_{c12} (\Delta x, \Delta \dot{x})$
- 4.) $\Theta_2 \ddot{\varphi}_2 = M_{h2} (\dot{\varphi}_2, u_1(t)) + M_{f2} (\dot{\varphi}_2, u_2(t)) - R_2 F_{n2} \mu_2 (\dot{x}_2, \dot{\varphi}_2) + M_{csg2} (\dot{\varphi}_2)$

Mármost a feladat azon $x_1(t)$ és $x_2(t)$ elmozdulás-függvények valamint $\varphi_1(t)$ és $\varphi_2(t)$ elfordulás-függvények meghatározása, amelyeket a differenciálegyenlet-rendszerbe visszahelyettesítve minden t időpontra érvényes azonosságokat kapunk, miközben a valamely megadott τ kezdő időpontban fennállnak az előírt $x_1(\tau) = x_{10}$, $x_2(\tau) = x_{20}$, $\dot{x}_1(\tau) = \dot{x}_{10}$, $\dot{x}_2(\tau) = \dot{x}_{20}$ és a $\varphi_1(\tau) = \varphi_{10}$, $\varphi_2(\tau) = \varphi_{20}$, $\dot{\varphi}_1(\tau) = \dot{\varphi}_{10}$, $\dot{\varphi}_2(\tau) = \dot{\varphi}_{20}$ kezdeti feltételek.

Eddig az elemi járműfüzér mozgását sík-egyenes mozgáspályán vizsgáltuk a 4.7 ábra szerinti vezérelt MIMO modell keretében, azaz eddig a közlekedési pálya emelkedési és görbületi viszonyait nem vettük figyelembe. Másképp fogalmazva: eddig az $e(s) = 0$ és $G(s) = 0$ feltételek mellett vizsgáltunk.



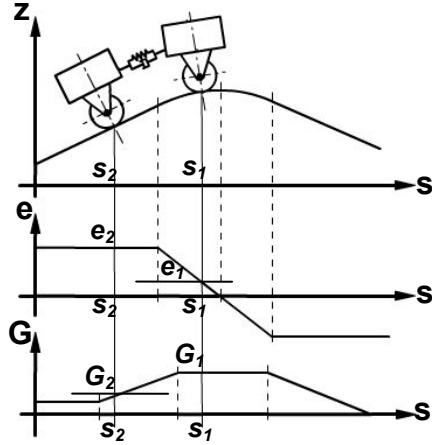
4.7. ábra. Az elemi járműfüzért jellemző MIMO modell sík, egyenes pályán

Az elemi járműfüzér mozgásegyenletei nyilvánvalóan módosulni fognak, ha a közlekedési pálya okozta járulékos ellenállásereket is figyelembe vesszük. A feladat megoldásához alapfeltételt jelent a tekintett közlekedési pálya emelkedési viszonyait leíró $e(s)$ emelkedési iránytangens-függvény és a görbületi viszonyokat jellemző $G(s)$ görbületfüggvény rendelkezésre állása. A 2.6. és 2.7. fejezetekben tárgyaltuk a járulékos ellenállásereket meghatározó előbb említett két függvény numerikus megadását és lineáris interpolációval való kezelését. A 4.8 ábrán vázoljuk egy elemi járműfüzér hegymeneti mozgásának azon pillanatát, amikor a járműfüzér első járművének a tömegközéppontja balról megközelíti a lejt-törés lekerekítő parabolaívének csúcspontját. Az ábra úgy készült, hogy elfogadtuk az $s \approx x$ közelítést. A járműfüzér első járműve az s_1 helyen, második járműve pedig az s_2 helyen van. Mindkét helyzetjellemző koordinátához meghatározható az aktuális $e(s_1)$ és $e(s_2)$ emelkedési iránytangens és az aktuális $G(s_1)$ és $G(s_2)$ görbület érték. Az ábra szerinti helyzeteknél a járulékos emelkedési ellenállások negatívak: $F_{eje1} < 0$ és $F_{eje2} < 0$ ugyanígy a járulékos görbületi ellenállások: $F_{ejg1} < 0$ és $F_{ejg2} < 0$. Azonban az ábra alapján leolvashatók a két ellenállásfajta nagyságrendi viszonyai is, azaz:

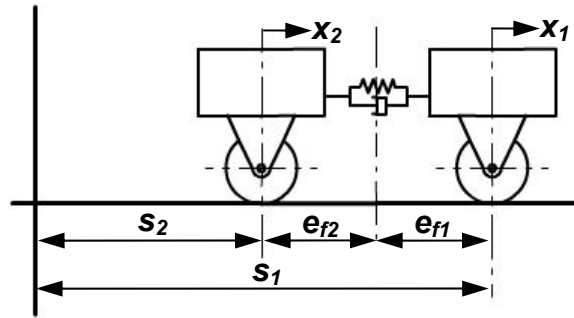
$$|F_{eje1}| \approx 0, |F_{eje2}| > |F_{eje1}| \text{ és } |F_{ejg1}| > |F_{ejg2}|.$$

A járműfüzér természetesen változtatja a helyzetét mozgása során, ezért minden időpontban ismerni kell az elemi járműmodellek tömegközéppontjainak helyzetét a közlekedési pályán. Tehát a járműfüzér mozgásának a dinamikai szimulációja során nemcsak a hosszdinamikai

lengések szempontjából lényeges relatív elmozdulásokat kell vizsgálni, hanem befutott úthossz abszolút nagyságának alakulását is vizsgálni kell. Ennek a kérdésnek a megoldásához a járműfüzér elemeinek *félhosszait* használjuk fel. Az alapgondolat az, hogy a járműfüzér elemeinek a mozgáspályán elfoglalt helyzetét a menetirányban előlfutó jármű által befutott s_1 úthosszára alapozzuk. Az általunk vizsgált elemi járműfüzér esetében a 4.9 ábrán vázolt módon, az e_{f1} és e_{f2} félhosszak alapján felírható az $s_2 \approx f(x_1)$ függvénykapcsolat $s_2 \approx x_1 - (e_{f1} + e_{f2})$ alakban, majd a $\sigma_1 = (e_{f1} + e_{f2})$ jelölés bevezetésével adódik, hogy $s_2 \approx x_1 - \sigma_1$.



4.8. ábra. Az elemi járműfüzérre ható járulékos ellenálláserek meghatározásához



4.9. ábra. Az elemi járműfüzér járműveinek a közlekedési pályán elfoglalt helyzete

Az emelkedési ellenálláserek *előjelviszonyai* a pályán elfoglalt aktuális s_1 és s_2 helyzettől függően az $s_1 \approx x_1$ közelítés elfogadásával a következőképp adódnak:

$$F_{ejel}(s_1) = F_{ejel}(x_1) \begin{cases} < 0 & \text{ha } e(x_1) > 0 \\ = 0 & \text{ha } e(x_1) = 0 \\ > 0 & \text{ha } e(x_1) < 0 \end{cases}$$

és

$$F_{ejel}(s_2) \approx F_{ejel}(x_1 - \sigma_1) \begin{cases} < 0 & \text{ha } e(x_1 - \sigma_1) > 0 \\ = 0 & \text{ha } e(x_1 - \sigma_1) = 0 \\ > 0 & \text{ha } e(x_1 - \sigma_1) < 0 \end{cases}$$

A görbületi ellenálláserek viszont mindig *nem pozitívak*:

$$F_{ejg1}(s_1) = F_{ejg1}(x_1) \leq 0 \quad , \quad F_{ejg2}(s_2) \approx F_{ejg2}(x_1 - \sigma_1) \leq 0 \quad .$$

Az elemi járműfüzér változó emelkedési és irányviszonyokkal bíró közlekedési pályán történő vizsgálata esetén a korábban a sík, egyenes pályára vonatkozóan felírt mozgásegyenleteknek ki kell egészülniük a belépett helyfüggő erőhatásokkal:

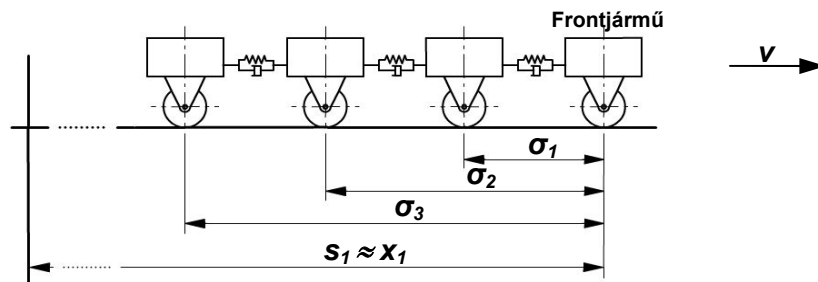
- 1.) $m_1 \ddot{x}_1 = F_{n1} \mu_1(\dot{x}_1, \dot{\phi}_1) + F_{l1}(\dot{x}_1) + F_{c12}(\Delta x, \Delta \dot{x}) + F_{ejel}(x_1) + F_{ejg1}(x_1)$
- 2.) $\Theta_1 \ddot{\phi}_1 = M_{h1}(\dot{\phi}_1, u_1(t)) + M_{f1}(\dot{\phi}_1, u_2(t)) - R_1 F_{n1} \mu_1(\dot{x}_1, \dot{\phi}_1) + M_{csg1}(\dot{\phi}_1)$
- 3.) $m_2 \ddot{x}_2 = F_{n2} \mu_2(\dot{x}_2, \dot{\phi}_2) + F_{l2}(\dot{x}_2) - F_{c12}(\Delta x, \Delta \dot{x}) + F_{ejel}(x_1 - \sigma_1) + F_{ejg2}(x_1 - \sigma_1)$
- 4.) $\Theta_2 \ddot{\phi}_2 = M_{h2}(\dot{\phi}_2, u_1(t)) + M_{f2}(\dot{\phi}_2, u_2(t)) - R_2 F_{n2} \mu_2(\dot{x}_2, \dot{\phi}_2) + M_{csg2}(\dot{\phi}_2)$

Figyeljük meg, hogy a most felírt differenciálegyenlet-rendszerben a sík, egyenes pályára vonatkozó egyenletekhez képest csak a haladó mozgásra vonatkozó első és a harmadik egyenlet egészült ki.

A kapott mozgásegyenlet-rendszert explicitté tesszük, azaz a gyorsulásokat az egyenletek bal oldalán kifejezzük:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dot{\phi}_1, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \\ \ddot{\phi}_1 &= f_2(\dot{\phi}_1, \dot{x}_1, u_1(t), u_2(t)) \\ \ddot{x}_2 &= f_3(x_1, x_2, \dot{\phi}_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \\ \ddot{\phi}_2 &= f_4(\dot{\phi}_2, \dot{x}_2, u_1(t), u_2(t))\end{aligned}$$

A nyert tömör alakú *nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer* felírásában megjelent f_1 és f_3 ötváltozós függvény természetesen magában foglalja a közlekedési pálya $e(s)$ emelkedési iránytangens függvényét és $G(s)$ görbületfüggvényét. Ezzel a járműfűzér mozgásegyenlet-rendszere rendelkezésünkre áll, és a megadott kezdeti feltételek figyelembevételével a kezdeti érték feladat megoldását kell vizsgálnunk. Mielőtt azonban erre rátérnénk a vizsgálatainkat általános járműfűzerekre is kiterjesztendő, megjegyezzük, hogy általános járműfűzerek esetén is az elől haladó (azaz front-) járműtől visszafelé adjuk meg a jármű félhosszakat, figyelembe véve a hátrább elhelyezkedő járművek tömegközéppontjainak az első jármű tömegközéppontjától vett távolságát. A viszonyokat a 4.10 ábrán szemléltetjük.



4.10. ábra. Az általános járműfűzér járműveinek a közlekedési pályán elfoglalt helyzete meghatározásához

A vizsgált n -elemű járműfűzér esetén az eddigi tárgyalásunk logikus kiterjesztésével a fűzérben hátrább elhelyezkedő járművek helyzetét a frontjármű helyzetére vezetjük vissza a következő összefüggés sorozattal: $s_1 = x_1$, $s_2 = x_1 - \sigma_1, \dots, s_n = x_1 - \sigma_{n-1}$. Látható, hogy az n járműből felépülő járműfűzérhez hozzárendelendő az n -dimenziós $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}]^T$ vektor, amelyet a járművek félhosszainak figyelembevételével mindig felépíthetünk.

4.2.3. Állapotvektor bevezetése a mozgásegyenlet-rendszer megoldásához

Állapottér-módszerre térünk át, és a mozgásegyenlet-rendszer explicit alakját alapul véve elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre vezetjük a problémát. Ezt az elsőrendűre redukált differenciálegyenlet-rendszert oldjuk meg előírt kezdeti feltételek mellett valamely alkalmas numerikus módszerrel.

Az állapotvektor alkalmazásával a később tárgyalandó anyagrészekben még többször találkozunk. Itt annyit kell felidézni, hogy egy tömegpont *adott időpillanatbeli mozgásállapotát* a pont *helyzetének és sebességének* az adott időpillanathoz tartozó egyidejű megadásával egyértelműen jellemezhetjük. Ha a dinamikai rendszerünk n -számú tömegpontból áll, akkor a mozgásállapot jellemzéséhez n -számú helyzetjellemző és n -számú sebesség megadása szükséges,

azaz egy $2n$ -dimenziós vektor jellemzi a vizsgált rendszer rögzített időpillanatbeli mozgásállapotát. Az általunk részletesebben vizsgált elemi járműfűzér esetében *négy tömeg* szerepelt, tehát mozgásállapotának leírásához *nyolc adat* szükséges minden t időponthoz.. A jelzett nyolc adatot az $Y(t)$ -vel jelölt állapotvektorba foglaljuk a következőképpen. Az első 4 helyre a *koordinátasebességek pillanatértékeit* pozícionáljuk, a második 4 helyre pedig a *helyzetjellemző koordináták pillanatértékei* kerülnek.

Az oszlopvektorként felírt állapotvektor időfüggvénye a következőképp alakul:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{\phi}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{\phi}_2(t) \\ x_1(t) \\ \phi_1(t) \\ x_2(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{sebesség-jellemzők} \\ \text{helyzet-jellemzők} \end{array} \right.$$

Az állapotvektor időszerinti deriváltvektorát képezve előáll a feladat megoldásához szükséges

$$\dot{Y}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{\phi}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{\phi}_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{\phi}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{\phi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t), \dot{\phi}_1(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) \\ f_2(\dot{\phi}_1(t), \dot{x}_1(t), u_1(t), u_2(t)) \\ f_3(x_1(t), x_2(t), \dot{\phi}_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) \\ f_4(\dot{\phi}_2(t), \dot{x}_2(t), u_1(t), u_2(t)) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{\phi}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{\phi}_2(t) \end{bmatrix} = F(Y(t), u_1(t), u_2(t))$$

elsőrendű nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer. A nyert $\dot{Y}(t) = F(Y(t), u_1(t), u_2(t))$ differenciálegyenlet-rendszerhez hozzátartozik az előírt t_0 kezdeti időpontokhoz megadott kezdeti állapotot rögzítő $Y(t_0) = Y_0$ vektor, részletesen kiírva

$$Y(t_0) = Y_0 = [\dot{x}_{1,0} \ \dot{\phi}_{1,0} \ \dot{x}_{2,0} \ \dot{\phi}_{2,0} \ x_{1,0} \ \phi_{1,0} \ x_{2,0} \ \phi_{2,0}] \in R^8.$$

Az így rögzített vektoriális kezdeti érték feladat megoldását a dinamikai rendszert vezérlő $u_1(t)$ és $u_2(t)$ vezérlőhatások bemenetként történő alkalmazása mellett numerikus módszerrel oldjuk meg. Legegyszerűbb az Euler-módszer alkalmazása, amikor állandó h idő-lépésközzel előrehaladva a kezdeti t_0 időpontból a $t_0, (t_0 + h), (t_0 + 2h), \dots$ stb. időpontokban kapjuk az állapotvektor számszerű jellemzőit az $Y(t+h) \cong Y(t) + F(Y(t), u_1(t), u_2(t))h$ algoritmus szerint.

Ezzel az $Y(t)$ állapotvektor-időfüggvény nyolc koordináta-függvénye előáll a jelzett ekvidisz táns időpontosorozaton. A megoldással elért közelítés akkor jó, ha h elég kicsi

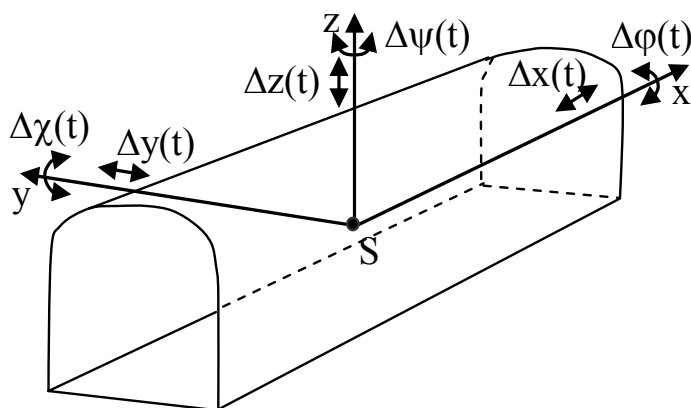
Hosszabb (n -elemi járműmodellből álló) járműfűzerek esetén a követendő eljárás teljesen hasonló a fent elmondottakhoz. Ekkor a járműfűzér mozgásegyenleteként adódó $2n$ számú másodrendű differenciálegyenlet-rendszert kell kezelni, melyet át kell írni a $4n$ dimenziós $Y(t)$ állapotvektorra vonatkozó elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre és a kezdeti feltételek rögzítésével kijelölt kezdeti érték feladatot numerikus módszerrel meg kell oldani.

5. Járművek parazita mozgásai, gerjesztett lengések

5.1. A parazita mozgások

A parazita mozgásfolyamatok kialakulásával kapcsolatosan rögzítsük, hogy mind az egyedi jármű, mind a járművek összekapcsolt rendszere a járműfüzér *lengésképes* dinamikai rendszer. A járművek rendeltetésszerű mozgásuk során a kívülről érkező különböző gerjesztő hatások miatt lengésállapotokon mennek keresztül. A lengéseket kiváltó gerjesztő-hatások forrásai az alábbiak szerint csoportosíthatók:

- vezérelt (időfüggő) vonó- és fékezőerő-kifejtés – hosszdinamika
- menetellenállás változások (út- azaz ívhosszkoordináta-függő) – $e(s)$ és $G(s)$ függvények
- a környezetből jövő gerjesztő hatások



5.1. ábra. A parazita mozgások magyarázata

A c.) szerint gerjesztések kerekcs járműveknél (vasúti járművek, közúti járművek, terepjárók valamint a repülőgépek a felszállás előtt, ill. leszállás után a kifutópályán) elsősorban a közlekedési pálya egyenetlenségei miatt lépnek fel. Légi járművek esetén a széljárás és a mindenkori légköri turbulencia okoz gerjesztő-hatást a járműtest felületén kialakuló nyomásváltozások miatt. Vízi járművek esetében a gerjesztő-hatások a víz természetes áramlása, ill. a hullámok jelenléte miatt lépnek fel. Hangsúlyozni kell azonban, hogy a szél és a légköri turbulencia mind a szárazföldi, mind a vízi járművek esetében is gerjesztő hatások forrásaként azonosítható. Mivel a jelzett gerjesztő hatások által kiváltott mozgások több szempontból (szerkezeti kifáradás, utaskényelem, árubiztonság, stb.) nem kívánatosak, ezért ezeket „parazita” mozgásoknak nevezzük.

A járműtest – hasonlóan a többi járműrész – parazita mozgásait alapvetően két osztályba soroljuk. A két osztályt a haladó (transzlációs) mozgások, illetve az elforduló (rotatórikus) mozgások adják. Az 5.1 ábrán felvázoltuk egy járműszekrényt, a tömegközéppontjában felvett derékszögű koordinátarendszerrel egyetemben. A transzlációs mozgásokat tekintve a hossztengety (x irány) mentén kialakuló $\Delta x(t)$ lengést *rángatásnak*, a keresztirányú tengely (y tengely) mentén kialakuló $\Delta y(t)$ lengést *szitálásnak*, a függőleges tengely (z irány) mentén kialakuló $\Delta z(t)$ lengést pedig *rázásnak* nevezzük. A rotatórikus mozgásokat tekintve a hosszirányú (x irányú) tengely körüli $\Delta \varphi(t)$ szöglengést *tárolgásnak*, a keresztirányú tengely (y tengely) körül kialakuló $\Delta \chi(t)$ szöglengést *bólintásnak*, a függőleges tengely (z irány) körül kialakuló $\Delta \psi(t)$ szöglengést pedig *kígyózásnak* nevezzük.

5.2. Járműdinamikai mozgásegyenletek generálása

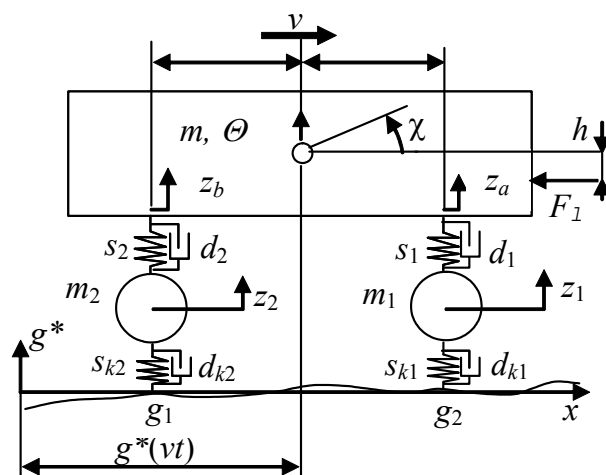
5.2.1. A mozgásegyenletek szintetikus származtatása

Mind a jármű főmozgása, mind pedig parazita mozgásai vizsgálatára szolgáló dinamikai modellek mozgásegyenleteinek meghatározása legtöbbször Newton II. axiómája alapján történik. Az m tömegű tisztán translációs mozgást végző járműrész esetében a vezérléstől, mozgásállapottól és időtől függő erők koordináta tengelyek irányába működő összetevőinek vektoriális összegként való meghatározása után ezeket az adott koordináta irányú eredő erőket egyenlővé kell tenni a vizsgált mozgás megfelelő koordináta irányú gyorsulásainak a tömeggel vett szorzatával:

$$\sum_{(i)} F_{xi} = m\ddot{x}, \quad \sum_{(j)} F_{yj} = m\ddot{y}, \quad \sum_{(k)} F_{zk} = m\ddot{z}.$$

A tisztán elfordulást ill. forgómozgást végző tömegek esetén a tömegközéppontra (vagy a megadott fix forgáspontra) a mozgásegyenletek a perdülettétel alapján az egyes koordináta tengelyek körül forgató eredő nyomaték az adott koordinátatengely körüli forgás szöggyorsulásának és a forgástengelyre vett tehetetlenségi nyomatéknak a szorzataként adódnak:

$$\sum_{(i)} M_{xi} = \Theta_x \ddot{\phi}, \quad \sum_{(j)} M_{yj} = \Theta_y \ddot{\chi}, \quad \sum_{(k)} M_{zk} = \Theta_z \ddot{\psi}.$$



5.2. ábra. Járműdinamikai síkmodell 4 szabad koordinátával

Mivel igen sok esetben a tekintett járműbeli tömegek elfordulást, vagy forgómozgást is végeznek, ezért sok esetben a haladó mozgást befolyásoló erőösszetevők mozgásállapot-függése az elfordulásokat is megjeleníti, ill. a forgást befolyásoló nyomaték-összetevők mozgásállapot-függése a haladó mozgás jellemzőket is magába foglalja, ezért a haladó és forgó mozgást leíró mozgásegyenletek is csatolásba kerülhetnek.

A mozgásegyenletek felállítását az 5.2 ábra szerinti síkbeli járműmodell esetére mutatjuk be. A kerekek rugón keresztül kapják a közlekedési pálya (útfelület vagy sínfelület) x hosszkoordináta függvényében megadott függőleges egyenletlenségei okozta gerjesztő hatást.

A modellben a kerekek csak függőleges mozgást végezhetnek, a jármű felépítmény (járműszekrény) pedig függőleges és bólintó lengéseket végezhet. Jelölje a kerekek nehézségi erőterben fennálló nyugalmi helyzetétől mért függőleges kitérést z_1 és z_2 . A járműszekrény tömegközéppontjának az egyensúlyi helyzetből való függőleges kilengését jelölje z , a szekrény tömegközéppont körüli elfordulásával definiált bólintási szögelfordulást pedig jelölje χ . A keréktalpakon jelentkező függőleges elmozdulás gerjesztést (pályaegyenletlenséget) jelölje g_1 és g_2 . Amennyiben a közlekedési pálya profilját a $g^*(x)$ függvény adja meg, akkor a szekrény

hosszirányban x -szel megadott tömegközépponti helyzetéből a jármű v sebességű haladása esetén kerekre ható időfüggő függőleges gerjesztő kitéréseket a $g_1(t)=g^*(vt-L_1)$ és a $g_2(t)=g^*(vt+L_2)$ függvények adják meg (a $t = 0$ időpontban a szekrény tömegközéppontja az $x=0$ helyen van). Ezen $g_1(t)$ és $g_2(t)$ függvényt tekintjük a dinamikai modell bemenő (input) függvényeinek. A szereplő L_1 és L_2 jelölések a kerek szekrény tömegközépponttól mért vízszintes távolságát jelentik. A mozgásegyenletek felállításához szükséges még megadni a járműszekrény két rugóbekötési pontjának függőleges kitérését és sebességét a szekrény tömegközéppont z és χ mozgásjellemzőire visszavezetve. A rugóbekötési pontoknál érvényesülő függőleges mozgásjellemzőkre a következő linearizált (kis szögekre $\sin \alpha \approx \tan \alpha$) jól közelítő összefüggések érvényesek, melyek egybeszerkesztik a szekrény tömegközéppont függőleges mozgásjellemzőit a szekrény tömegközéppont körüli bólintási szögmozgásának jellemzőivel:

$$\begin{aligned} z_a(t) &= z(t) + L_1 \chi(t) \quad , \quad z_b(t) = z(t) - L_2 \chi(t) \quad , \\ \dot{z}_a(t) &= \dot{z}(t) + L_1 \dot{\chi}(t) \quad , \quad \dot{z}_b(t) = \dot{z}(t) - L_2 \dot{\chi}(t) \quad . \end{aligned}$$

Elsőnek a két kerék függőleges mozgására vonatkozó egyenleteket írjuk fel. A modellben szerepeltetett rugók és csillapítók lineárisak, azaz a rugókon átvitt erő a rugóvégek relatív elmozdulásának lineáris függvénye, a csillapító erő pedig a csillapító bekötési pontjainak relatív sebességének lineáris függvénye. A pozitív erők felfelé irányítottak. A kerek mozgásegyenletei tehát a következőképp alakulnak:

$$\begin{aligned} s_{k1}(g_1(t) - z_1(t)) + d_{k1}(\dot{g}_1(t) - \dot{z}_1(t)) - s_1(z_1(t) - z_a(t)) - d_1(\dot{z}_1(t) - \dot{z}_a(t)) &= m_1 \ddot{z}_1(t) \\ s_{k2}(g_2(t) - z_2(t)) + d_{k2}(\dot{g}_2(t) - \dot{z}_2(t)) - s_2(z_2(t) - z_b(t)) - d_2(\dot{z}_2(t) - \dot{z}_b(t)) &= m_2 \ddot{z}_2(t) \end{aligned}$$

A járműszekrény (függőleges) rázási és bólintási mozgásegyenletei a következők lesznek, ha a felfelé történő elmozdulást és az óramutató járásával ellentétes szögelfordulást vesszük pozitívnak:

$$\begin{aligned} s_1(z_1(t) - z_a(t)) + d_1(\dot{z}_1(t) - \dot{z}_a(t)) + s_2(z_2(t) - z_b(t)) + d_2(\dot{z}_2(t) - \dot{z}_b(t)) &= m \ddot{z}(t) \\ [s_1(z_1(t) - z_a(t)) + d_1(\dot{z}_1(t) - \dot{z}_a(t))] L_1 - [s_2(z_2(t) - z_b(t)) + d_2(\dot{z}_2(t) - \dot{z}_b(t))] L_2 - F_l h &= \Theta \ddot{\chi}(t) . \end{aligned}$$

A nyomaték felírása során a járműszekrényre ható F_l légellenállás-erő tömegközéppontra vett nyomatékát is figyelembe vettük. Visszatekintve eljárásunkra, megállapíthatjuk, hogy a mozgásegyenletek rendszerét az egyes tömegek mozgásegyenleteinek egyedi felállítása után kapott egyenletek szintézise szolgáltatta, ezért az alkalmazott módszert a mozgásegyenletek „szintézissel” történő generálásának is nevezik.

Az alábbiakban megadjuk a mozgásegyenlet szokásos standard alakját mátrixos felírással is:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\chi} \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & L_1 d_1 - L_2 d_2 & -d_1 & -d_2 \\ L_1 d_1 - L_2 d_2 & L_1^2 d_1 + L_2^2 d_2 & -L_1 d_1 & L_2 d_2 \\ -d_1 & -L_1 d_1 & d_{k1} + d_1 & 0 \\ -d_2 & L_2 d_2 & 0 & d_{k2} + d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\chi} \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} s_1 + s_2 & L_1 s_1 - L_2 s_2 & -s_1 & -s_2 \\ L_1 s_1 - L_2 s_2 & L_1^2 s_1 + L_2^2 s_2 & -L_1 s_1 & L_2 s_2 \\ -s_1 & -L_1 s_1 & s_{k1} + s_1 & 0 \\ -s_2 & L_2 s_2 & 0 & s_{k2} + s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \chi \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_{lh} \\ s_{k1} g_1 + d_{k1} \dot{g}_1 \\ s_{k2} g_2 + d_{k2} \dot{g}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A fenti egyenlet az $x = [z \ \chi \ z_1 \ z_2]^T$ vektor és a rendszerparaméterekből felépülő most meghatározott M „tömegmátrix”, D „csillapítási mátrix” és S „merevségi mátrix” bevezetésével a

következő vektoregyenlet alakot nyeri:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{S}\mathbf{x} = \mathbf{f} .$$

Fontos kiemelni, hogy az eredetileg kinematikai gerjesztésű rendszerből a fenti átalakításokkal formálisan erőgerjesztett rendszert kaptunk, ugyanis az egyenlet jobb oldalán megjelent \mathbf{f} vektorfüggvény már erő koordinátákat tartalmaz. A második koordináta az állandó haladási sebesség esetén konstansnak tekintett légellenállás-erő tömegközéppontra vett nyomatékát adja. A harmadik és negyedik koordinátában az m_1 és m_2 tömegekre a közlekedési pálya gerjesztő egyenletlenségei hatásaként átvitt rugalmas és disszipatív „alaperőt”, mely az m_1 és m_2 tömeg függőleges kitérésével és sebességével a merevségekkel és a csillapításokkal már az egyenlet jobb oldalába beépített erőrészekkel együtt adja a pályáról a tömegekre érkező tényleges mérhető erőhatásokat. Mindazonáltal a differenciálegyenlet-rendszer ezen erőgerjesztett alakjának megoldásával helyesen kapjuk meg a keresett kitérés és sebesség függvényeket.

Figyeljük meg, hogy a vektoregyenletben szereplő mátrixok szimmetrikusak, és a főátlóikban nemnegatív elemek állnak. Amennyiben a modellben szereplő rugók és csillapítók nemlineáris karakterisztikájúak lennének, akkor a szerepet játszó kapcsolati erők már nem fejezhetők ki a fentiek szerinti (lineáris mozgásállapot-függést feltételező) mátrixos formában. Ezen nemlineáris esetben a mozgásegyenleteket a négy differenciálegyenlet alkotta közös inhomogén differenciálegyenlet-rendszert csak a gyorsulások mozgásállapottól és a gerjesztéstől való függését explicit módon az f_1, f_2, f_3 és f_4 nemlineáris jobboldalfüggvényekkel adjuk meg:

$$\begin{aligned}\ddot{z} &= f_1(z, z_1, z_2, \chi, \dot{z}, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{\chi}) \\ \ddot{\chi} &= f_2(z, z_1, z_2, \chi, \dot{z}, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{\chi}) \\ \ddot{z}_1 &= f_3(z, z_1, \chi, g_1, \dot{z}, \dot{z}_1, \dot{\chi}, \dot{g}_1) \\ \ddot{z}_2 &= f_4(z, z_2, \chi, g_2, \dot{z}, \dot{z}_2, \dot{\chi}, \dot{g}_2)\end{aligned}$$

5.2.2. A mozgásegyenletek analitikus származtatása

A mozgásegyenletek meghatározásának másik fontos módja az egyenletek „analitikus” generálása. Ennél az eljárásnál a dinamikai rendszerben lévő energiaformák mozgásállapottól való függéséből indulunk ki, és az *energia-megmaradás elvét* érvényesítjük. A dinamikai rendszer tömegei sebességállapotuktól függő nagyságú kinetikus energiát tárolnak, a rugalmas elemek pedig deformációs állapotuktól függően potenciális energiát (deformációs munkát) tárolnak.

A rendszerben szereplő csillapítók sebességállapotuktól függően disszipálnak (veszteségenerációt helyeznek a rendszeren kívülre), míg a rendszerre működő külső erők vagy energiát vezetnek be (pl. hajtás), vagy szintén disszipálnak (pl. disszipatív fékezés, lengéscsillapítók, stb.).

Az energetikai viszonyok áttekintéséhez tegyük fel, hogy a t és $t+\Delta t$ időpontokban vizsgáljuk a dinamikai rendszerünket. A Δt időnövekményről feltesszük, hogy az pozitív, de igen kicsi. Tekintsük a rendszer teljes energiátartalmát a t és a $t+\Delta t$ időpontokban.. A $t+\Delta t$ időpillanatban a dinamikai rendszerben a mozgó tömegekben tárolt $E(t+\Delta t)$ kinetikus energia és a rugalmas elemekben tárolt $U(t+\Delta t)$ potenciális energia összege az energia-megmaradás elvének érvényesítésével felírható a rendszerben a korábbi t időpontban jelenlévő $E(t)$ kinetikus energia, az $U(t)$ potenciális energia, valamint a Δt idő alatt a rendszerből disszipáció következtében távozó $\Delta W(t, \Delta t)$ energia, valamint a Δt idő alatt a rendszerbe kívülről bevitt $\Delta L(t, \Delta t)$ munka kifejezéseként a következő alakban:

$$E(t + \Delta t) + U(t + \Delta t) = E(t) + U(t) - \Delta W(t, \Delta t) + \Delta L(t, \Delta t) .$$



A kívülről közölt munka kifejezését az egyenlet jobb oldalára vité:

$$E(t + \Delta t) - E(t) + U(t + \Delta t) - U(t) + \Delta W(t, \Delta t) = \Delta L(t, \Delta t).$$

Mindkét oldalt Δt -vel osztva és $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenetet kijelölve:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E(t + \Delta t) - E(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U(t + \Delta t) - U(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W(t, \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta L(t, \Delta t)}{\Delta t}.$$

Az így belépett differenciálhányados függvények energiaáramokat jelenítenek meg (mértékegységük Nm/s), vagyis az energiaáramokra (teljesítményekre) vonatkozó

$$\frac{dE(t)}{dt} + \frac{dU(t)}{dt} + \frac{dW(t)}{dt} = \frac{dL(t)}{dt}$$

mérlegegyenlet adódott, melynek minden időpontban érvényesnek kell lennie. Az így kapott *energiaáram mérlegegyenletből* már meghatározható a vizsgált dinamikai rendszer mozgását leíró differenciálegyenlet-rendszer. Az egyenletben szereplő tagok mozgásállapot-függésének módszeres figyelembe vételével és a kijelölt deriváltak kiszámításával jutunk eredményre.

A továbbiakban a vizsgált járműdinamikai rendszerben szereplő n számú diszkrét tömeget jelölje rendre m_1, m_2, \dots, m_n . Amennyiben a rendszerben forgó mozgást végző tömegek is szerepelnek, akkor a megfelelő indexű helyeken tömegek helyett tehetetlenségi nyomatékokat kell szerepeltetni..

Azonosítsa továbbá a tömegpontok helyzetét (ill. a szereplő forgó tömegek szöghelyzetét) a $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in R^n$ vektor, ennek időfüggő koordinátáit deriválhatónak feltételezve, az idő szerinti deriváltakat jelölje a $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T \in R^n$ vektor. Nyilvánvaló, hogy a most bevezetett \mathbf{q} vektor összetevői haladó vagy forgó mozgást jellemző translációs vagy elfordulási szögjellemzők, míg a $\dot{\mathbf{q}}$ vektor összetevői haladási sebességek vagy szögsebességek lehetnek. A $\mathbf{q} \in R^n$ vektor a szabad koordináták n -dimenziós vektora. A \mathbf{q} koordinátáinak n száma megadja a dinamikai rendszer szabadságfokát (degree-of-freedom, jele: DF), míg a $\dot{\mathbf{q}}$ vektorral együtt tekintve *hipervektorként* bevezethető a dinamikai rendszer $2n$ dimenziós (mozgás-) *állapotvektora* $\mathbf{x} = [\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}]^T \in R^{2n}$ alakban.

A teljesítménymérlegben szereplő tagok mozgásállapot-függésének módszeres figyelembe vételével és a kijelölt deriváltak kiszámításával jutunk a mozgásegyenletek meghatározásához..

a. A kinetikus energiaáram

A teljes dinamikai rendszerben tárolt össz-kinetikus energiát felírva az energiaáramot szolgáltató derivált-függvényt két lépésben származtatjuk. Az első lépésben az általánosan érvényes $E = E[\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ $2n$ -változós kinetikus energia függvény minden koordinátafüggvényét időfüggőnek tekintve a többváltozós függvényekre érvényes láncszabály szerint deriválunk. A levezetés mellőzésével a végeredmény:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial q_i} \dot{q}_i.$$

b. A potenciális energiaáram

A teljes járműdinamikai rendszerben tárolt össz-potenciális energiát felírva az energiaáramot szolgáltató derivált-függvény felírható. A rugalmas elemekben tárolt potenciális energia csak

a szabad koordináták függvénye: $U=U(q_1, q_2, \dots, q_n)$. Ennek figyelembevételével a többváltozós függvényekre vonatkozó láncszabály alkalmazásával a keresett energiaáram:

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} \dot{q}_i.$$

c. A disszipált energiaáram

További vizsgálatainkban a disszipált energiaáram felírásának tárgyalása során csupán az olyan esetekre szorítkozunk, amikor a disszipált energiaáram (teljesítmény) elvonásában szerepet nyelő erőhatás a koordinátasebességek lineáris függvénye, azaz az i -edik tömegre ható

„energia-elvonó” erő $F_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} \dot{q}_j$ alakban írható fel. Ebben az esetben az i -edik tömegről

elvont energiaáram $P_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i$. A teljes rendszerből elvont disszipált energiaáram a szabad koordináták szerinti összegzéssel:

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i.$$

A kapott eredmény elvileg szolgáltatja a keresett disszipált energiaáramot, azonban a könnyebb gyakorlati munka érdekében érdemes bevezetni fenti eredménytől csak egy $1/2$ -es szorzóban különböző

$$D(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i$$

disszipáció-függvényt (másképp: disszipációs potenciált). Könnyű belátni ugyanis, hogy a D disszipáció függvény koordinátasebességek szerinti parciális deriváltjaira fennáll a

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n d_{ij} \dot{q}_j$$

összefüggés. Ezen utóbbi összefüggés figyelembevételével a disszipációs energiaáram a potenciális energiaáramhoz hasonló szerkezetű kifejezéssel adható meg:

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i.$$

d. A kívülről bevitt energiaáram

A rendszerbe kívülről bevitt energiaáram a q_1, q_2, \dots, q_n elmozdulás-koordináták irányában működő Q_1, Q_2, \dots, Q_n erők ill. nyomatékok teljesítményeként írható fel a $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ koordinátasebességek figyelembevételével:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n Q_i \dot{q}_i.$$

e. A Lagrange féle másodfajú egyenletek

Az energiaáram mérlegben szereplő összes tag meghatározása után a következő alakot nyeri:



$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n Q_i \dot{q}_i.$$

Közös szumma alá írva a bal oldali tagokat:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n Q_i \dot{q}_i, \forall t.$$

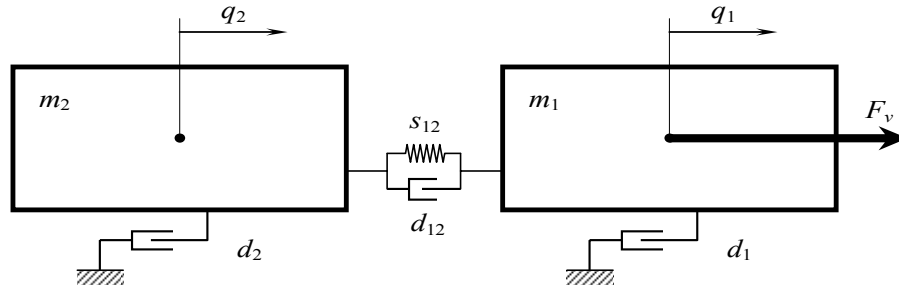
A fenti egyenlet által megkövetelt minden t értékre fennálló azonos egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha a \dot{q}_i koordinátasebességek szorzói is minden i -index mellett minden t időpontra azonosak. Ez a feltétel n számú *másodrendű közönséges differenciálegyenletet* szolgáltat, amivel előállt a vizsgált dinamikai rendszer keresett *mozgásegyenlet-rendszere*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \forall t$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

A kiadódott n egyenletből álló differenciálegyenlet-rendszer neve: a **Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletek** rendszere.

A Lagrange-féle másodfajú egyenletek alkalmazásával történő mozgásegyenlet generálást egy elemi járműfüzér linearizált modelljére mutatjuk be. A dinamikai modell az 5.3 ábrán látható. A rendszerben szereplő két jármű a forgó alkatrészeik kerék kerületére redukált tömegeivel megnövelt tömege legyen m_1 és m_2 . A két tömeg kapcsolatát az s_{12} merevségű rugó és a vele párhuzamosan kapcsolt d_{12} csillapítási tényezőjű lineáris csillapító valósítja meg. A két jármű menetellenállását linearizálással közelítjük, ami egy meghatározott sebesség intervallumban elfogadható.



5.3. ábra. Az elemi járműfüzér lineáris dinamikai modellje

Ez ellenálláserőket modellező környezethez kapcsolt lineáris csillapítók csillapítási tényezői: d_1 és d_2 . Az m_1 tömegű előfutó járműre a \dot{q}_1 sebességtől és az $u(t)$ és vezérléstől függő $F_v(\dot{q}_1, u)$ vonóerő-függvény működik.

Felírjuk a szükséges energiafüggvényeket. A járműfüzér össz-kinetikus energiája a

$$E(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2$$

másodfokú függvénnyel írható fel. A vizsgált rendszer esetén az össz-potenciális energia a rugóban tárolódik és az

$$U(q_1, q_2) = \frac{1}{2} s_{12} (q_2 - q_1)^2$$

másodfokú függvény adja meg. A vizsgált járműfüzér-modell disszipáció-függvényét most a

kétváltozós

$$D(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2} d_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} d_{12} (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2} d_2 \dot{q}_2^2 .$$

másodfokú függvény azonosítja.

A másodfajú *Lagrange*-egyenletek felírásához szükséges deriváltfüggvények most a következőképp alakulnak:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{d}{dt} m_1 \dot{q}_1 = m_1 \ddot{q}_1 , & \frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{d}{dt} m_2 \dot{q}_2 = m_2 \ddot{q}_2 , \\ \frac{\partial U}{\partial q_1} &= s_{12} (q_2 - q_1) (-1) , & \frac{\partial U}{\partial q_2} &= s_{12} (q_2 - q_1) , \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} &= d_1 \dot{q}_1 + d_{12} (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) (-1) . & \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} &= d_2 \dot{q}_2 + d_{12} (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) . \end{aligned}$$

A fent kiszámított deriváltakat behelyettesítve a *Lagrange*-egyenletbe, adódik a dinamikai rendszer mozgásviszonyait leíró másodrendű differenciálegyenlet-rendszer:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + s_{12} (q_2 - q_1) (-1) + d_1 \dot{q}_1 + d_{12} (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) (-1) &= F_v (\dot{q}_1, u(t)) , \\ m_2 \ddot{q}_2 + s_{12} (q_2 - q_1) + d_1 \dot{q}_1 + d_{12} (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) &= 0 . \end{aligned}$$

A szokásos mátrixos írásmód alkalmazásával az **M** tömegmátrix, a **D** csillapítási mátrix és az **S** merevségi mátrix bevezetésével a $\mathbf{q}(t) = [q_1(t), q_2(t)]^T$ ismeretlen kitérésfüggvényre vonatkozó másodrendű differenciálegyenlet-rendszer a következő alakot ölti:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 + d_{12} & -d_{12} \\ -d_{12} & d_2 + d_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{12} & -s_{12} \\ -s_{12} & s_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_v (\dot{q}_1, u(t)) \\ 0 \end{bmatrix} .$$

A bevezetett mátrix és vektor jelölésekkel a rendszer mozgását leíró differenciálegyenlet-rendszer végül is a következő alakú:

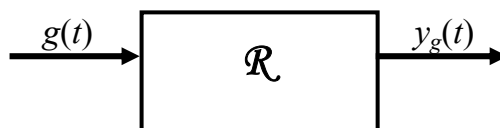
$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{S} \mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, u(t)) .$$

A kapott vektoregyenlet ismét egy állandó együtthatós másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszer.

5.3. Lineáris időinvariáns járműdinamikai rendszer

A járműdinamikai rendszerek analizisét a legtöbb esetben célszerű lineáris rendszermodellek alkalmazásával indítani. Elsőnek a viselkedő rendszer fogalmát adjuk meg. A viselkedő rendszert úgy definiáljuk, hogy az meghatározott bemeneti függvény (input függvény) esetén a rendszer belső felépítésével meghatározott *specifikus* (a rendszerre jellemző) *kimenőfüggvényt* (válaszfüggvényt, output függvényt) ad. A rendszer ilyen módon *függvénytranszformációt* valósít meg. A járművek esetét tekintve pl. azt mondhatjuk, hogy a haladási irányban befutott út mentén adott geometriájú (pl. szinuszos) függőleges síkbeli profilgörbén futó adott felépítésű jármű tömegközéppontja az útprofil – mint bemenő függvény – hatására jól meghatározott függőleges gerjesztett lengőmozgást végez, megvalósul a rázásnak nevezett parazita mozgás. Ez a tömegközépponti függőleges lengőmozgás most a rendszer válaszfüggvénye az adott útprofil gerjesztésre. A jelzett függvénytranszformációt egyszerű blokkdiagrammal szemléltetjük (5.4 ábra). A függvénytranszformációt az *R* operátorral jellemezzük.





5.4. ábra. A viselkedő rendszer szemléltetése

Azt a tényt, hogy az \mathcal{R} operátor a $g(t)$ bemenő függvényt (gerjesztést) az $y_g(t)$ válaszfüggvénybe viszi át, úgy fejezzük ki, hogy az $y_g(t)$ válaszfüggvény a $g(t)$ gerjesztőfüggvény \mathcal{R} operátor szerinti képe, képletszerűen:

$$y_g(t) = \mathcal{R}g(t) .$$

Tárgyalásunk második lépéseként a *lineáris rendszer* fogalmát vezetjük be. Valamely viselkedő rendszert akkor nevezzük **lineárisnak**, ha a rendszer \mathcal{R} operátora a rendszerre működő bemenő jellemző és a rendszerből "távozó" kimenő jellemző (a rendszerválasz) között **összeg-és aránytartó leképezést** valósít meg. Az elmondottak a $g(t)$ bemenő- és az $y_g(t)$ kimenő jellemzők esetén képletszerű megfogalmazásban a következő két összefüggéssel jelentkeznek:

1.) $\mathcal{R}(g_1(t)+g_2(t)) = \mathcal{R}g_1(t)+\mathcal{R}g_2(t) = y_{g_1}(t)+y_{g_2}(t),$ (összegtarás), 2.) $\mathcal{R}(\lambda g(t)) = \lambda \mathcal{R}g(t) = \lambda y_g(t),$ (aránytartás)

A felírt két összefüggés gyakorlati szempontból az alapozó tantárgyakban (mechanika, elektrotechnika) már megismert és alkalmazott ún. *egymásra-halmazási* elvet (szuperpozíciós elvet) fogalmazza meg.

A lineáris rendszerek között egyszerű kezelhetőségük miatt kiemelt szerepet játszanak az ún. **időinvariáns** rendszerek. Az időinvariancia tulajdonságának magyarázatához tegyük fel, hogy egy adott $\tau \neq 0$ időeltolás mellett a vizsgált lineáris rendszer bemenetére az eredeti $g(t)$ -hez képest τ -val eltolt $g(t-\tau)$ gerjesztőfüggvény működik. Az időinvariancia fennállása esetén a rendszer kimenetén jelentkező

$$v(t, \tau) = \mathcal{R} g(t - \tau)$$

válasz az eredeti $g(t)$ gerjesztőfüggvényre adott $y_g(t)$ válaszból szintén időeltolással,

$$v(t, \tau) = y_g(t - \tau)$$

alakban nyerhető, azaz "a τ -val eltolt bemenetre adott válasz egyenlő az eltolatlan bemenetre adott válasz τ -val való eltoltjával". Az időinvariancia tehát tömör formában a

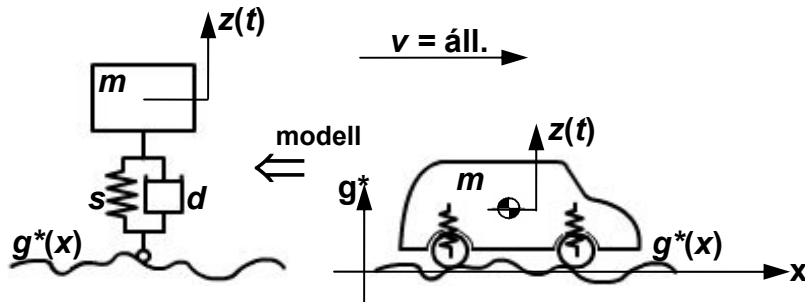
$y_g(t - \tau) = \mathcal{R} g(t - \tau)$

kifejezéssel ragadható meg. A járműdinamikában mindazon problémák lineáris időinvariáns dinamikai rendszermodellel kezelhetők, amelyek mozgásegyenletei *állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszerként* azonosíthatók. Ez az eset a járműdinamikában viszont alapesetnek mondható.

Mivel a rendelkezésre álló szoftverek nagy része előnyben részesíti az elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerek kezelését, célszerű végrehajtani a másodrendű differenciálegyenlet átírását elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre. A numerikus megoldás mindig kezdeti érték probléma megoldását veti fel. Ez azt jelenti, hogy a vizsgált mozgásfolyamat esetében egy rögzített t_0 kezdeti időpontra előírjuk az ottani helyzetet és sebességet, azaz a kitérést vagy helyzetet megadó válaszfüggvény $y_g(t_0)$ helyettesítési értékét, valamint deriváltjának (az $dy_g(t_0)/dt$ sebességnek) a helyettesítési értékét. Ezen kezdeti értékek (feltételek) figyelembe

vételével a mozgást leíró másodrendű differenciálegyenlet, vagy az azzal ekvivalens elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer egyértelműen megoldható.

Az elmondottak szemléltetésére az 5.5 ábrán a konstans sebességgel egyenes irányban haladó jármű tömegközéppontjának az útfelületi egyenetlenségek okozta rázómozgásait vizsgáljuk. A korábbi tárgyalásunkkal összhangban ismét legyen $g^*(x)$ az útfelület hosszirányú függőleges síkmetszeteként adódó egyenetlenség profil. A $v =$ állandó sebességgel haladó járművet helyettesítő egyszabadságfokú lengőrendszer a jármű tömegközéppont függőleges rázómozgásainak leírását célozza. Az ábra szerint a rugó/csillapító kapcsolati elem alsó pontjára érkezik a $g(t) = g^*(vt)$ időfüggő gerjesztő elmozdulás. A jármű tömegközéppont függőleges kitérését a nehézségi erőterbeli nyugalmi helyzettől a $z(t)$ válaszfüggvény írja le.

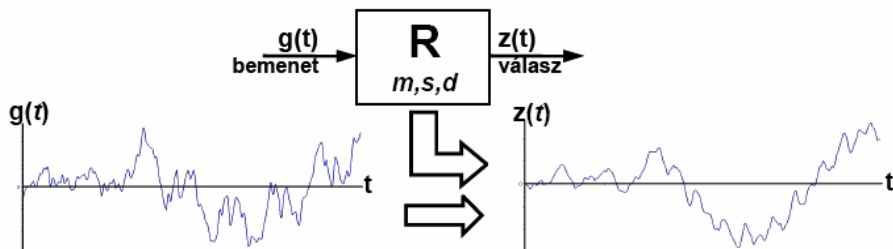


5.5. ábra. Konstans sebességgel egyenes irányban haladó jármű útgerjesztett lengése

A járműdinamikai modell – mint egyszabadságfokú gerjesztett és csillapított rendszer – mozgásegyenlete Newton II. axiómájának alkalmazásával standard alakban adódik:

$$m \ddot{z}(t) + d \dot{z}(t) + sz(t) = sg(t) + d \dot{g}(t) .$$

Az R rendszeroperátornak a $g(t)$ gerjesztőfüggvényre gyakorolt hatását az 5.6 ábra szemlélteti.



5.6. ábra. A gerjesztés függvényre adott válaszfüggvény: $z(t) = \mathcal{R}g(t)$

Az ábrán feltüntetett két vastag ürestestű nyíl azt domborítja ki, hogy a $z(t)$ választ két tényező, egyrészt a gerjesztés lefutása másrészt a rendszer operátorának sajátosságai alakítják ki.

A tömegközéppont függőleges gyorsulását explicit formában felírva a következő képlet adódik:

$$\ddot{z}(t) = -\frac{1}{m}d\dot{z}(t) - \frac{1}{m}sz(t) + \frac{1}{m}sg(t) + \frac{1}{m}d\dot{g}(t) .$$

Bevezetjük az $Y_1(t) = \dot{z}(t)$ és $Y_2(t) = z(t)$ új változókkal mint koordinátafüggvényekkel a dinamikai rendszerünk (mozgás-) állapotvektorát az

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \in R^2$$

definíció szerint. Az állapotvektor deriváltvektora most értelemszerűen a következő alakban adódik:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Y}}(t) &= \begin{bmatrix} \ddot{z}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m}d\dot{z}(t) - \frac{1}{m}sz(t) + \frac{1}{m}sg(t) + \frac{1}{m}d\dot{g}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{d}{m} & -\frac{s}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ z(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{s}{m}g(t) + \frac{d}{m}\dot{g}(t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}(t)} .\end{aligned}$$

A kiadódott elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszert az alábbi

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{Y}(t) + \mathbf{G}(t)$$

alakban kapjuk, amely a t_0 kezdeti időponthoz az $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti érték vektor előírása után közvetlenül megoldható valamely numerikus módszerrel, pl. legegyszerűbb esetben a már korábban tárgyalt Euler-féle módszerrel. A numerikus megoldás egy ekvidisztáns időpont sorozaton szolgáltatja az $Y_1(t_i) = \dot{z}(t_i)$ és $Y_2(t_i) = z(t_i)$; $i = 0, 1, 2, \dots, N$ értéksorozatokat, azaz egyszerre kapjuk a függőleges sebesség és a függőleges kitérés értéksorozatát az előírt időpontsorozaton.

5.4. Sajátérték feladat, a homogén rendszerre vonatkozó K.É.P.

Mondottuk fentebb, hogy a járműdinamikában vizsgálandó összetettebb modellek esetén érvényesülő homogén lineáris \mathcal{R} rendszeroperátor legtöbbször másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlettel vagy differenciálegyenlet-rendszerrel hozható kapcsolatba.

További tárgyalásunkban feltételezzük, hogy a vizsgált koncentrált paraméterű járműdinamikai rendszer szabad koordinátáit az $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in R^n$ n -dimenziós vektorba foglaltuk, és a rendszerre működő gerjesztő hatások koordinátáit - esetleg bizonyos számú zérus beiktatásával - a szintén n -dimenziós $\mathbf{g}(t) = [g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)]^T \in R^n$ gerjesztő vektorba foglaltuk. A rendszerben szereplő véges sok tömeg, tehetetlenségi nyomaték, rugómevség, csillapítási tényező, geometriai jellemző és esetleges további üzemi paraméter az eddigi tárgyalásunkban már bemutatott szintetikus vagy analitikus elvek szerint a mozgásegyenlet-rendszer \mathbf{M} tömegmátrixában, \mathbf{D} csillapítási mátrixában ill. \mathbf{S} merevségi mátrixában jelenik meg. Az n -szabadságfokú rendszer mozgását leíró lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszer mármost a következő standard alakban írható fel:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{S}\mathbf{x}(t) = \mathbf{g}(t) .$$

A felírt mozgásegyenlet-rendszerhez természetesen kapcsolódik a kezdeti értékek előírt rendszere, azaz a t_0 megadott kezdeti időponthoz tartozó előírt $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ helyzet- és $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \dot{\mathbf{x}}_0$ sebességvektor. A dinamikai feladat megoldását az így kirajzolódó "kezdetiérték probléma" (K.É.P.) megoldása jelenti.

Ismeretes, hogy a lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{X}(t)$ általános megoldását a jobboldali zavarófüggvény (most a $\mathbf{g}(t)$ vektorértékű függvény) elhagyásával adódó

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{S}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

homogén rész $\mathbf{x}_h(t)$ általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy $\mathbf{x}_1(t)$ partikuláris megoldásának összege szolgáltatja, azaz:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_1(t) .$$

Az inhomogén egyenletre vonatkozó K.É.P. megoldásának keresésekor célszerű úgy eljárni, hogy a homogén rész $\mathbf{x}_h(t)$ általános megoldását mindjárt az előírt $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ és $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \dot{\mathbf{x}}_0$ kezdeti értékekhez illesztjük, és így elegendő az inhomogén egyenletnek az adott t_0 -nál az $\mathbf{x}_1(t_0) = \mathbf{0}$ és $\dot{\mathbf{x}}_1(t_0) = \mathbf{0}$ összefüggéspárral meghatározott ún. *zéró kezdeti feltételeknek* megfelelő partikuláris megoldását hozzáadni. Az inhomogén egyenletnek a *zéró kezdeti feltételeknek* eleget tevő egy partikuláris megoldását általában nagyobb nehézség nélkül meg lehet határozni.

További tárgyalásunkban ismét bevezetjük a vizsgált dinamikai rendszer $\mathbf{Y}(t)$ *állapotvektorát*, és a megoldandó másodrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszerünket nagyobb méretű - *de már csupán elsőrendű lineáris differenciálegyenletekből felépülő* - rendszerré írjuk át.

Az állapotteres tárgyalás előkészítő lépéseként a lineáris időinvariáns járműdinamikai rendszer fentiekben megfogalmazott differenciálegyenlet-rendszerét explicit alakra hozzuk:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{x}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{g}(t) .$$

Vezessük be most a $2n$ -dimenziós $\mathbf{Y}(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t)]^T \in R^{2n}$ (mozgás-) *állapotvektort*! Ezen *hipervektor* első n sorában a dinamikai rendszer sebességkoordinátái, míg a második n sorában a rendszer elmozdulás-koordinátái állnak. Készítsük el most az állapotvektor idő szerinti első deriváltját, és vegyük figyelembe, hogy az így kapott deriváltvektor első n sorában a dinamikai rendszer gyorsuláskoordinátái, míg második n sorában a rendszer sebességkoordinátái állnak. Ezek szerint az:

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{x}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{g}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S} \\ \mathbf{E} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{g}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

kifejezés adódik, ahol azonnal felismerhető, hogy a megjelent együttható *hipermátrix* szorzóvektorra éppen a rendszer $\mathbf{Y}(t)$ állapotvektora! Az együttható hipermátrix 4 db $n \times n$ -es blokkból épül fel, a két felső blokk dinamikai jelentése nyilvánvaló, az \mathbf{E} blokk az $n \times n$ -es *egységmátrixot*, míg az \mathbf{O} blokk az $n \times n$ -es *zérómátrixot* jelöli. A szóban forgó együttható hipermátrixot a lineáris időinvariáns dinamikai rendszer rendszermátrixának nevezzük, és \mathcal{A} -val jelöljük. A dinamikai rendszerre ható $\mathbf{g}(t) \in R^n$ gerjesztés-vektor \mathbf{M}^{-1} -szereséből és egy n -dimenziós zérusvektorból felépülő hipervektort $\mathbf{f}(t)$ -vel jelölve, valamint megfogalmazva az $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0 = [\dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0]^T \in R^{2n}$ állapotvektorra vonatkozó kezdetiérték vektort, a dinamikai rendszer elsőrendűre redukált differenciálegyenlet-rendszeréhez rendelt kezdetiérték probléma a következő tömör alakban írható fel:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Y}}(t) &= \mathcal{A} \mathbf{Y}(t) + \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{Y}(t_0) &= \mathbf{Y}_0 \end{aligned} .$$

Mivel a bevezetett konstans elemű \mathcal{A} rendszermátrix a rendszerparaméterektől függ, szokásos az $\mathcal{A}(\mathbf{M}, \mathbf{S}, \mathbf{D})$ jelölés alkalmazása. A rendszermátrix paraméterei bizonyos üzemidő elteltével némiképp megváltozhatnak, és ez a paraméterváltozás a rendszer állapotvektorában jelentős változásokat okozhat.



Fordítsuk ismét figyelmünket a kapott elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdetiérték probléma (K.É.P.) megoldására. Ezen probléma megoldását is úgy konstruálhatjuk meg, hogy először keressük a differenciálegyenlet-rendszer homogén részének az adott $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0$ kezdeti értékeket kielégítő $\mathbf{Y}_h(t, \mathbf{Y}_0)$ partikuláris megoldását, és ehhez hozzáadjuk az inhomogén (gerjesztett) egyenlet $\mathbf{y}_g(t_0) = \mathbf{0}$ kezdeti érték vektornak eleget tevő $\mathbf{Y}_g(t, \mathbf{0})$ partikuláris megoldását. Így a járműdinamikai rendszerünk gerjesztés hatására előálló mozgásviszonyait az adott kezdeti értékekhez illeszkedő

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}_h(t, \mathbf{Y}_0) + \mathbf{Y}_g(t, \mathbf{0}) \in R^{2n}$$

állapotvektor-időfüggvénnyel - mint partikuláris megoldással - *egyértelműen jellemezni lehet!*

Az elmondottak szerint elsőként az állapotvektorra felírt lineáris inhomogén (gerjesztett) differenciálegyenlet-rendszer gerjesztetlen $\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathcal{A} \mathbf{Y}(t)$ homogén részének az adott $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0$ kezdeti vektorhoz tartozó $\mathbf{Y}_h(t, \mathbf{Y}_0)$ partikuláris megoldását kell meghatároznunk! Keressük a megoldást $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{h}e^{\lambda t}$ alakban, azaz egy egyelőre határozatlan $\mathbf{h} \in C^{2n}$ komplex elemű vektor, és az egyelőre határozatlan $\lambda \in C$ komplex együttható mellett képzett $e^{\lambda t}$ exponenciális függvény szorzataként. Deriválva a feltételezett alakú megoldásfüggvényt az $\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{h}\lambda e^{\lambda t}$ függvényt kapjuk. Viszszahelyettesítve a homogén lineáris differenciálegyenletünkbe, a

$$\mathbf{h}\lambda e^{\lambda t} = \mathcal{A} \mathbf{h} e^{\lambda t}$$

vektoregyenletet kapjuk. tekintve, hogy a mindkét oldalon szereplő $e^{\lambda t}$ függvény sehol sem lesz zéró a számegyenesen, ezért mindkét oldalt el szabad osztani $e^{\lambda t}$ -vel, így az egyenlet két oldalát felcserélve a szokásos alakú

$$\mathcal{A} \mathbf{h} = \mathbf{h}\lambda$$

sajátérték-feladatra jutunk. Keresni kell azon $\lambda \in C$ számokat, amelyek mellett a felírt sajátérték-feladatnak létezik $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ - ún. nemtriviális - megoldása. Kismértékben átrendezve a sajátérték-feladat egyenletét a

$$\mathcal{A} \mathbf{h} - \mathbf{h}\lambda = (\mathcal{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{h} = \mathbf{0}$$

homogén lineáris algebrai egyenletrendszeret kapjuk az ismeretlen $\mathbf{h} \in C^{2n}$ vektor meghatározására. Itt \mathbf{E} a $2n \times 2n$ méretű egységmátrixot jelöli. Mivel bennünket csupán a $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ nem triviális megoldások érdekelnek, ezért először az ezek létezését biztosító feltételnek megfelelő $\lambda \in C$ számokat - az ún. *sajátértékeket* - kell meghatároznunk. Ismeretes, hogy egy négyzetes együtthatómátrixú homogén lineáris algebrai egyenletnek akkor és csak akkor van nem triviális megoldása, ha együtthatómátrixa szinguláris, azaz az együtthatómátrix determinánsa zérus. Ez a feltétel esetünkben azt jelenti, hogy meg kell határoznunk az \mathcal{A} rendszermátrix $\det(\mathcal{A} - \mathbf{E}\lambda)$ *karakterisztikus polinomjának* gyökeit. A gyökök meghatározása a

$$\det(\mathcal{A} - \mathbf{E}\lambda) = 0$$

karakterisztikus egyenlet megoldásával történik. Ha a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n} \in C$ gyökök - amelyek között lehetnek zérus képzetes résszel bíróak, azaz valós gyökök is - rendelkezésre állnak, akkor meg kell határozni ezen sajátértékekhez tartozó $\mathbf{h}_i \in C^{2n}, i = 1, 2, \dots, 2n$ ún. *sajátvektorokat* is az

$$(\mathcal{A} - \mathbf{E}\lambda_i)\mathbf{h}_i = \mathbf{0}, i = 1, 2, \dots, 2n$$

homogén lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldásával. A "Matematika" c. tárgyból ismere-

tes, hogy a homogén lineáris egyenletrendszerek nemtriviális megoldása *sohasem egyértelmű*! Az egyenletrendszerre tekintve azonnal látszik ugyanis, hogy bármely \mathbf{h}_i megoldással együtt tetszőleges $c \in C$ együttható (szorzó) mellett a $c\mathbf{h}_i$ vektor is kielégíti az egyenletet. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy ha az $(\mathcal{A} - \mathbf{E}\lambda_i)$ együttható mátrix rangja r_i , akkor a lineáris egyenletrendszer megoldásakor $2n-r_i$ számú ismeretlenre tetszőleges (célszerűen egységnyi) értéket lehet adni, és ezen feltétel mellett a többi ismeretlenre kiadódó lineáris inhomogén egyenletrendszert már a szokásos módszerek valamelyikével meg lehet oldani, és így a \mathbf{h}_i sajátvektorok rendre meghatározhatók.

A fenti tárgyalásunk során láttuk, hogy a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n} \in C$ sajátértékek a homogén rész megoldásának előállításában kulcsfontosságú szereppel bírnak. Tovább növekszik ezen sajátértékek jelentősége, ha tekintetbe vesszük, hogy a sajátértékek képzetes része megadja a dinamikai rendszerünk *sajátkörfrekvenciáit*, és így a rendszer *sajátfrekvenciái* abszolút érték képzés és 2π -vel való osztás után

$$f_i = \left| \frac{\text{Im}\lambda_i}{2\pi} \right|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

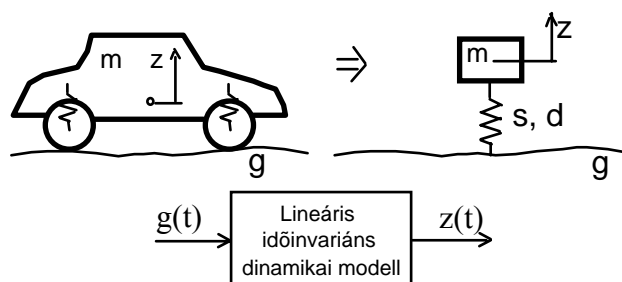
alakban adódnak. A sajátfrekvenciák alapinformációt adnak arra vonatkozóan, hogy milyen frekvenciájú gerjesztésekre fog a rendszer esetleg veszélyes nagyságú kitérésértékekkel "rezonálni".

A sajátértékek másik - nem kevésbé fontos - szerepe a lineáris dinamikai rendszer *stabilitásának* indikálásában van. Mivel a homogén differenciálegyenlet-rendszer megoldásai exponenciális időfüggvények lineáris kombinációjaként állnak elő, ahol az exponenciális időfüggvények kitevőjében szerepelnek a sajátértékek, azonnal adódik, hogy ha valamely sajátérték valós része pozitív valós számértéket vesz fel, akkor az a megoldás-összetevő exponenciális sebességgel végtelenhez fog tartani, és ez a tulajdonság a mozgásamplitúdók veszélyes megnövekedéséhez vezet. Az elmondottak miatt járművekben a megvalósított lineáris dinamikai rendszer nem rendelkezhet olyan paraméterekkel, amelyek mellett a stabilitásvesztést jelző pozitív valós részű sajátértékek alakulnak ki. Ezen okok miatt a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n} \in C$ sajátértékek

$$\rho_i = \text{Re}\lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2n$$

valós részeinek *negatív* számértékeit mint *stabilitástartalékokat* értelmezhetjük, míg *zéró* vagy *pozitív* értékük a *stabilitás határát* ill. a *stabilitásvesztést* indikálja. Minél nagyobb a stabilitástartalék, annál kisebb a stabilitásvesztéssel járó veszélyes mozgás- és terhelésállapotok kialakulásának lehetősége.

A lineáris időinvariáns dinamikai rendszerekre vonatkozó összefüggéseket egy egyszabadságfokú járműdinamikai modellen szemléltetjük. Az 5.7 ábra szerint a járműnek csupán a *függőleges gerjesztett lengéseit* kívánjuk vizsgálni a felrajzolt - erősen egyszerűsített - lineáris dinamikai modellel.



5.7. ábra. Lineáris időinvariáns egyszabadságfokú járműdinamikai modell

A jármű dinamikai modelljének függőleges mozgását az

$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + sz(t) = sg(t) + d\dot{g}(t)$$

másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet írja le, ahol a $g(t)$ gerjesztő időfüggvényt deriváltjával együtt ismertnek tételezzük fel. Ily módon a differenciálegyenlet zavarófüggvényét egy adott $f^*(t) = sg(t) + d\dot{g}(t)$ függvénynek tekinthetjük. Bevezetve az $\mathbf{Y}(t) = [\dot{z}(t), z(t)]^T \in R^2$ állapotvektort, kapjuk a dinamikai probléma rendszermátrixos megfogalmazását:

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{z}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d}{m} & -\frac{s}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{f^*(t)}{m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathcal{A} \mathbf{Y}(t) + \mathbf{f}(t)$$

Határozzuk meg először az \mathcal{A} rendszermátrix *sajátértékeit*! A karakterisztikus polinom most a

$$\det(\mathcal{A} - \lambda \mathbf{E}) = \det \left(\begin{bmatrix} -\frac{d}{m} & -\frac{s}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

alakot ölti, ennek figyelembevételével pedig a *karakterisztikus egyenlet*

$$\det \left(\begin{bmatrix} -\frac{d}{m} & -\frac{s}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0, \det \left(\begin{bmatrix} -\frac{d}{m} - \lambda & -\frac{s}{m} \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 + \frac{d}{m} \lambda + \frac{s}{m} = 0$$

alakú lesz. Ezen (ismert alakú) karakterisztikus egyenletnek a megoldása adja a két sajátértéket:

$$\lambda_1 = -\frac{d}{2m} + \sqrt{\left(\frac{d}{2m}\right)^2 - \left(\frac{s}{m}\right)}, \lambda_2 = -\frac{d}{2m} - \sqrt{\left(\frac{d}{2m}\right)^2 - \left(\frac{s}{m}\right)}.$$

További vizsgálatunkban tételezzük fel, hogy a járműdinamikai rendszerünk gyengén csillapított, azaz a sajátértékek kifejezésében a *diszkrimináns* negatív, és így a két sajátérték *komplex konjugált gyökpár*. Bevezetve a

$$\beta = -\frac{d}{2m}, \gamma = \sqrt{\left(\frac{s}{m}\right) - \left(\frac{d}{2m}\right)^2} > 0$$

kifejezés-párt, a két sajátértékre a

$$\lambda_1 = \beta + i\gamma, \lambda_2 = \beta - i\gamma$$

konjugált komplex számpár adódik. A sajátértékek ismeretében a lengő rendszer *saját-körfrekvenciája* és *sajátfrekvenciája* az

$$\omega = |\operatorname{Im} \lambda| = \gamma, [\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}; f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\gamma}{2\pi}, [f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$$

képlet-párral számítható, míg a *stabilitástartaléka* a

$$\rho_1 = \rho_2 = \operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = \beta = -\frac{d}{2m} < 0$$

értéket veszi fel. A most nyert eredmény azt mutatja, hogy a vizsgált lengő rendszerünk $d > 0$ esetén *stabilis*.

Az adott kezdeti értékeknek eleget tevő megoldásfüggvény megadásához szükséges még az $\mathbf{f}(t)$ gerjesztővektorral meghatározott inhomogén egyenlet zéró kezdeti feltételeknek megfele-

lő egy partikuláris megoldásának ismerete. Ennek meghatározása a következő fejezetben világossá válik.

5.5. Rendszerjellemező függvények

A lineáris időinvariáns járműdinamikai rendszerhez tartozó \mathcal{R} rendszeroperátort ismertnek véve megvizsgáljuk, hogy speciális gerjesztések esetében a rendszer válasza hogyan alakul. Ha a rendszerre működő tényleges gerjesztőfüggvényt sikerül a jelzett speciális gerjesztő függvények lineáris kombinációjaként legalább is közelítőleg előállítani, akkor a tényleges gerjesztésre adott válasz az \mathcal{R} operátor összeg- és aránytartása, valamint az időinvariancia fennállása miatt előállítható lesz a speciális gerjesztésekre adott válaszok lineáris kombinációjaként.

a.) *Első speciális gerjesztőfüggvényként* a rendszerbe elhanyagolhatóan rövid idő alatt *egységnyi impulzust* betápláló négyszöglökés alakú erőfüggvényt tekintjük. Ha $\Delta t > 0$ jelöli az impulzus tartóintervallumának hosszát, akkor képletszerűen a következőképp adhatjuk meg a szóban forgó egységimpulzus függvényt:

$$\delta_{\Delta t}(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \notin [0, \Delta t] \\ \frac{1}{\Delta t} & \text{ha } t \in [0, \Delta t] \end{cases}.$$

Nyilvánvaló, hogy ezen függvény t változó szerinti $-\infty$ -tól $+\infty$ ig vett integrálja egységnyi értéket vesz fel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\Delta t}(t) dt = \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\Delta t} dt = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} 1 dt = \frac{1}{\Delta t} \Delta t = 1.$$

Mivel a Δt tartóintervallumot igen kicsinek, de mégis végesnek tételeztük fel, ezért a rendszer $h(t)$ súlyfüggvényének $h_{\Delta t}(t)$ közelítő kifejezését kapjuk. Ez a közelítés annál jobb lesz, minél kisebb a Δt időköz. Ezek figyelembevételével:

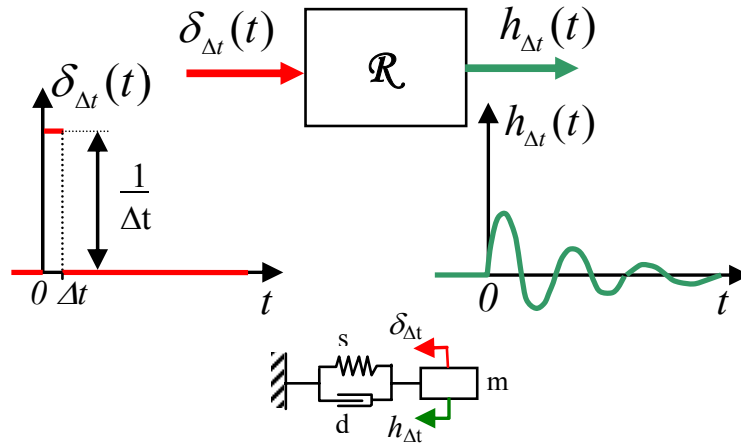
$$h_{\Delta t}(t) = \mathcal{R} \delta_{\Delta t}(t).$$

A levezetés mellőzésével megadjuk egy egytömegű lineáris rugót és csillapítót tartalmazó lengőrendszer súlyfüggvényét. Jelölje e rendszerbeli tömeget m , a rugó merevséget s a csillapítási tényezőt pedig d . Magyarázatként annyit fűzünk hozzá, hogy a Δt intervallum elhanyagolhatóan rövid volta azt jelenti, hogy a $t=0$ időpontban a nyugalomban lévő rendszerre ható $\delta_{\Delta t}(t)$ egységimpulzusra érvényes $I = mv = m \dot{h}_{\Delta t}(0) = 1$ összefüggés miatt a sebesség kezdeti értékét $\dot{h}_{\Delta t}(0) = 1/m$ értéknek lehet venni az elhanyagolhatóan kis Δt intervallum végén. Másrészt, mivel a Δt intervallum elhanyagolhatóan rövid, ezért a tömegnek „nincs ideje” elmozdulni, vagyis az elhanyagolhatóan kis Δt intervallum végén $h_{\Delta t}(0)$ közelítőleg zérusnak vehető. Mindez azt jelenti, hogy a súlyfüggvényt a csillapított lengőmozgás ismert *homogén lineáris* differenciálegyenletének a $h_{\Delta t}(0) \approx 0$ és a $\dot{h}_{\Delta t}(0) \approx 1/m$ kezdeti feltételek melletti megoldása szolgáltatja. A levezetést mellőzve a súlyfüggvény a következőképp adódik:

$$h_{\Delta t}(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \leq 0 \\ \frac{1}{m\gamma} e^{\beta t} \sin(\gamma t) & \text{ha } t > 0 \end{cases}, \text{ ahol } \beta = -\frac{d}{2m} \text{ és } \gamma = \sqrt{\frac{s}{m} - \left(\frac{d}{2m}\right)^2}.$$

A közelítő súlyfüggvény alakulását a következő 5.8 ábra szemlélteti.





5.8. ábra. A lineáris dinamikai rendszer közelítő súlyfüggvénye

- b.) A rendszerre hirtelen ráadott egységnyi erőhatás adja a *másik speciális gerjesztő-függvényt*. Ennek neve: egységugrás-függvény vagy Heaviside-féle függvény. Képletszerű megadása a következő:

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \leq 0 \\ 1 & \text{ha } t > 0 \end{cases} .$$

Ezen $U(t)$ függvény a $t = 0$ helyen nem differenciálható, azonban negatív t értékekre és Δt -nél nagyobb pozitív értékekre deriváltja megegyezik a korábban bevezetett $\delta_{\Delta t}(t)$ egységimpulzus függvénnyel, nevezetesen a derivált a jelzett t értékekre mindenütt zérus. Az is világos hogy megadható az $U(t)$ függvénynek egy olyan $U_{\Delta t}(t)$ közelítő változata, amely szakaszonként lineáris, és amelynek a deriváltja minden pontban ahol az differenciálható, vagyis a töréspontjaitól különböző helyeken tényleg megegyezik $\delta_{\Delta t}(t)$ -vel. Az itt mondott közelítő függvény képletszerű megadása a következő:

$$U_{\Delta t}(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \leq 0 \\ t / \Delta t & \text{ha } 0 < t \leq \Delta t \\ 1 & \text{ha } t > \Delta t \end{cases} .$$

Az elmondottak szerint tehát az $U_{\Delta t}(t)$ két törésponti abszcisszája kivételével:

$$\frac{d}{dt} U_{\Delta t}(t) = \delta_{\Delta t}(t) .$$

Alkalmazzuk most az rendszeroperátort a fenti egyenlőség mindkét oldalára! Ekkor figyelembe véve, hogy a d/dt differenciáloperátor és az \mathcal{R} rendszeroperátor mint lineáris operátorok felcserélhetőek, akkor tekintettel $h_{\Delta t}(t)$ jelentésére, adódik a rendszer $A(t) = \mathcal{R} U(t)$ összefüggéssel definiált pontos átmeneti függvényének $A_{\Delta t}(t)$ közelítése deriváltjaként adódik ki a rendszer $h_{\Delta t}(t)$ közelítő súlyfüggvénye:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \frac{d}{dt} U_{\Delta t}(t) &= \mathcal{R} \delta_{\Delta t}(t) , \\ \frac{d}{dt} \mathcal{R} U_{\Delta t}(t) &= \mathcal{R} \delta_{\Delta t}(t) = h_{\Delta t}(t) , \\ \frac{dA_{\Delta t}(t)}{dt} &= h_{\Delta t}(t) . \end{aligned}$$

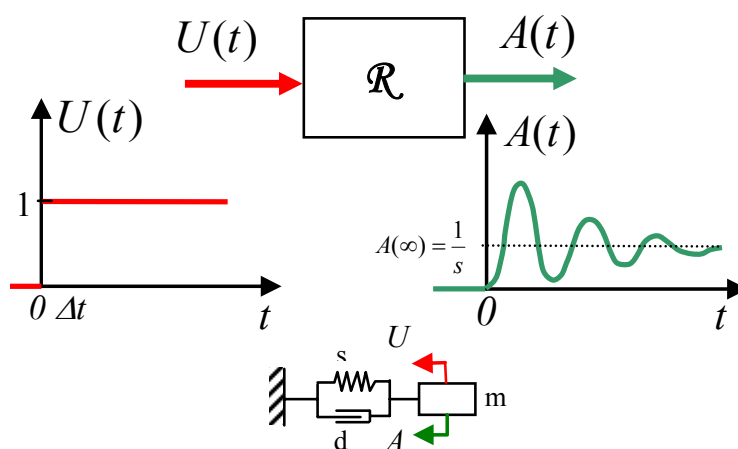
Ha most elvégezzük a $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenetet, akkor a bal oldalon a közelítő átmeneti függvény deriváltja a pontos átmeneti függvény deriváltjába, a jobb oldalon pedig a közelítő súlyfüggvény a pontos súlyfüggvénybe megy át. Így végül is kiadódik egyrésről a

$$\frac{dA(t)}{dt} = h(t)$$

összefüggés, másrészt mindkét oldal zérustól t -ig való integrálásával az

$$A(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$$

explicit kifejezés a rendszer átmeneti függvényére vonatkozóan. Világossá vált tehát a két rendszerjellemező függvény explicit összefüggése. Az egységugrás gerjesztést és az átmeneti függvényt egyszerű egytömegű lineáris lengőrendszer estére az 5.9 ábrán vázoltuk fel.



5.9. ábra. Az $U(t)$ egységugrás gerjesztésre adott válasz az $A(t)$ átmeneti függvény

- c.) A rendszerre ráadott egységnyi abszolút értékű konstans szögsebességgel forgó komplex számmal megadott függvény adja *harmadik speciális gerjesztőfüggvényt*. Ennek neve: *elemi komplex harmonikus függvény* vagy *elemi fázor*. Képletszerű megadása a következő:

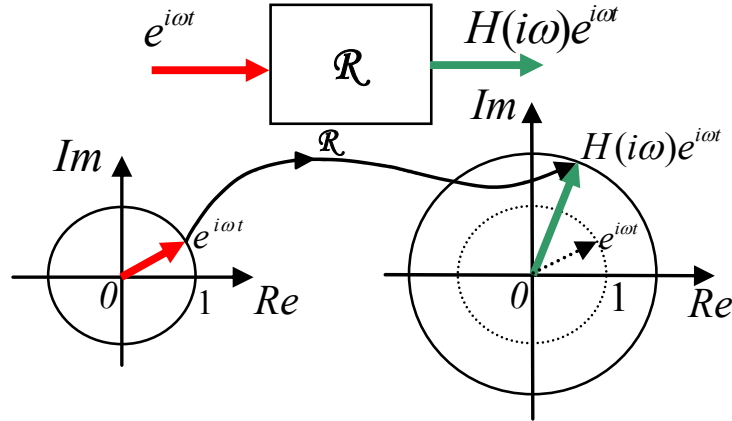
$$f(t, \omega) = e^{i\omega t} \in \mathbb{C}.$$

A komplexértékű $f(t, \omega)$ függvény tehát a t időtől és az ω körfrekvenciától függ. Figyeljük meg, hogy a $t=0$ helyen a függvény a valós 1 értéket veszi fel. Mivel ekkor az ωt szorzat jelentése szögelfordulás, az $f(t, \omega)$ függvényt ábrázoló egységnyi hosszúságú forgó komplex vektor fázisszöge éppen az ωt mennyiség. A vizsgált lineáris időinvariáns rendszer ω körfrekvencia-függő *komplex frekvenciafüggvényét* – mit újabb rendszerjellemező függvényt – az \mathcal{R} rendszeroperátornak az elemi komplex harmonikus függvényre történő alkalmazásával és az így kapott függvénynek ugyanezen elemi komplex harmonikus függvénnyel való normálásával kapjuk:

$$H(i\omega) = \frac{\mathcal{R} e^{i\omega t}}{e^{i\omega t}}.$$

A jelzett normálás mindig elvégezhető, mert a bevezetett elemi komplex harmonikus függvény minden t és ω érték esetén egységnyi abszolút értékű, azaz mindig lehet vele osztani.

A bevezetett definíció alapján kiviláglik, hogy a lineáris időinvariáns rendszer elemi komplex harmonikussal történő gerjesztése esetén a válaszfüggvényt $\mathcal{R} e^{i\omega t} = H(i\omega)e^{i\omega t}$ alakban kapjuk. Az elemi komplex harmonikus gerjesztés és a komplex frekvenciafüggvény összefüggését az 5.10 ábra szemlélteti.



5.10. ábra. Az elemi komplex harmonikus gerjesztés és a rendszer komplex frekvenciafüggvényének összefüggése

Az eddigiekben is vizsgált egyszabadságfokú lineáris lengőrendszer a komplex frekvenciafüggvényének meghatározásához tekintsük először a rendszer differenciálegyenletét, ahol most az inhomogenitást okozó jobb oldali zavarófüggvény az $e^{i\omega t}$ elemi komplex harmonikus. Az ismeretlen kitérésfüggvényt $y(t)$ -vel jelölve:

$$m\ddot{y}(t) + d\dot{y}(t) + sy(t) = e^{i\omega t}.$$

Tekintettel a komplex frekvenciafüggvény jelentésére (mint az elemi komplex harmonikus gerjesztésre adott komplex rendszerválasz együtthatójára) indokolt a megoldást $y(t) = H(i\omega)e^{i\omega t}$ alakban keresni. Tekintsük ezen feltételezett megoldásfüggvény deriváltjait: $\dot{y}(t) = H(i\omega)i\omega e^{i\omega t}$, és $\ddot{y}(t) = H(i\omega)(i\omega)^2 e^{i\omega t}$. Visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$mH(i\omega)(i\omega)^2 e^{i\omega t} + dH(i\omega)i\omega e^{i\omega t} + sH(i\omega)e^{i\omega t} = e^{i\omega t}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát a sohasem zérus $e^{i\omega t}$ -val osztva, és a bal oldalon $H(i\omega)$ kiemelésével a

$$H(i\omega)(m(i\omega)^2 + di\omega + s) = 1$$

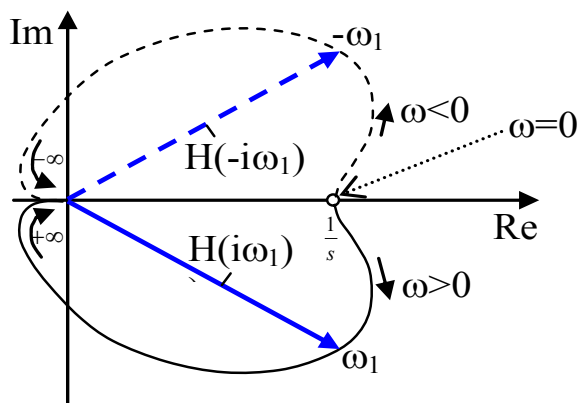
egyenlet adódik, amelyből $H(i\omega)$ kifejezésével adódik a lengő rendszerünk komplex frekvenciafüggvénye:

$$H(i\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + di\omega + s}.$$

A kapott kifejezésre tekintve először is rögzítsük, hogy az különböző ω körfrekvencia értékekhez más és más $H(i\omega)$ általában komplex értéket rendel. Először is, ha $\omega=0$, akkor a $H(i\omega)$ speciálisan valós értéket vesz fel, ennek nagysága: $1/s$. Ha a különböző ω körfrekvencia értékekhez tartozó $H(i\omega)$ komplex értékek vektorait végpontjait vizsgáljuk, akkor az ezen végpontok által kirajzolt görbe a rendszerjellemező függvény lesz: ez maga a $H(i\omega)$ komplex frekvenciafüggvény diagramja. A komplex frekvenciafüggvény a valós tengelyre szimmetrikus lefutású alsó és felső ívből tevődik össze zárt görbévé. Az alsó óramutató járásával megegyező irányítást nyerő ág a pozitív körfrekvenciákhoz, a felső óramutató járásával ellentétes irá-

nyitást nyerő ág a negatív körfrekvenciákhoz tartozó komplex értékeket jeleníti meg.

Részletekben való elmélyedés nélkül rámutatunk, hogy az alsó és a felső görbeív másodrendű differenciálegyenlettel leírt dinamikai rendszer esetén két síknegyedre jár be. Mindkét görbe jobb végpontja a zéró körfrekvenciához tartozik és a valós tengelyről emelkedik el. Az alsó ív mentén balra haladva egyre növekvő ($+\infty$ -hez tartó) pozitív körfrekvenciák mellett végül is az origóba fut be a görbe, és pedig vízszintes végérintővel. Hasonlóképp, a felső ív mentén balra haladva egyre nagyobb abszolút értékű negatív ($-\infty$ -hez tartó) körfrekvenciák mellett végül is az origóba fut be a görbe, és pedig ismét vízszintes végérintővel. A most magyarázott görbe alakulást az 5.11 ábrán szemléltetjük



5.11. ábra. A rendszer komplex frekvenciafüggvényének diagramja a komplex síkon

5.6. Gerjesztett lengések

5.6.1. Vizsgálat az időtartományban

Jelölje a $g(t)$ időfüggvény járműrendszerre az idő függvényében jelentkező külső gerjesztő hatást. Ez a vizsgált dinamikai feladattól függően lehet erőhatás, nyomás, elmozdulás, sebesség, stb. A gerjesztő időfüggvényt a következőkben előállítjuk négyszöglökés függvények vagy egységugrás függvények lineáris kombinációjaként. Amennyiben a dinamikai rendszerünk lineáris és időinvariáns, akkor a szuperpozíció és határátmenet alkalmazásával integrálható gerjesztőfüggvények esetében jellegzetes integrál-kifejezésekkel nyerhetők a keresett lengések időfüggvényei.

a.) Konvolúciótétel

A bevezető részben jelzett módon a $g(t)$ gerjesztőfüggvényt előállítjuk négyszöglökés-függvények összegeként. Első lépésként tekintsük a megadott $[t_0, t_n]$ időkeretnek egy ekvidisztáns felbontását Δt hosszúságú intervallumokra. Az így adódó $t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_n$ pontokban rendelkezésünkre állnak a $g(t)$ függvénynek a felosztás-intervallumok bal végpontjához tartozó $g(t_0), g(t_1), \dots, g(t_i), \dots, g(t_n)$ mintavételi értékek. A $g(t)$ függvényt összegként felépítő Δt tartóintervallumú $g_i(t)$ négyszöglökéseket az alábbi esetszétválasztásos definíció szolgáltatja az $i = 0, 1, \dots, n-1$ indexekre.

$$g_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < t_i \\ g(t_i) & \text{ha } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{ha } t \geq t_{i+1} \end{cases}.$$

A Δt tartóintervallumú korábban tárgyalt $\delta_{\Delta t}(t)$ egységimpulzus függvényt be tudjuk hozni a fenti kifejezésbe a következő megfontolással. A $\delta_{\Delta t}(t)$ egységimpulzus magassága $1/\Delta t$, ezért

ha a $\delta_{\Delta t}(t)$ Δt impulzust tekintjük, akkor a Δt tartóintervallumú és egységnyi magasságú lesz. Nyilvánvaló ezek után, hogy a $g(t_i)$ $\delta_{\Delta t}(t)$ Δt négyyszöglőkés magassága éppen $g(t_i)$ lesz és így a $g_i(t)$ négyyszöglőkés az egységimpulzus megfelelő $t_i \geq 0$ helyre jobbra eltol kifejezésének szerepeltetésével

$$g_i(t) = g(t_i) \delta_{\Delta t}(t - t_i) \Delta t$$

alakban adódik, minden i -indexre. A végigvitt gondolatmenet alapján az eredeti $g(t)$ gerjesztőfüggvényünk lépcsős függvénné durvított közelítő változatát a most bevezetett $g_i(t)$ négyyszöglőkések összegeként írhatjuk fel:

$$g(t) \approx \sum_{i=0}^{n-1} g_i(t) = \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i) \delta_{\Delta t}(t - t_i) \Delta t.$$

A kapott kifejezés már közel visz a feladat megoldásához. Vegyük figyelembe, hogy a keregett $y_g(t)$ válaszfüggvényt a lineáris időinvariáns dinamikai rendszer \mathcal{R} operátorának alkalmazásával kapjuk és a gerjesztőfüggvény pedig egymást „nem zavaró” diszjunkt tartóintervallumú négyyszöglőkések összegeként (azaz speciális, csupa egységnyi együttthatós lineáris kombinációként) adódott. Érvényes tehát az alábbi összefüggés-sor:

$$y_g(t) = \mathcal{R}g(t) \approx \mathcal{R} \sum_{i=0}^{n-1} g_i(t) = \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i) \mathcal{R} \delta_{\Delta t}(t - t_i) \Delta t.$$

Vegyük figyelembe most, hogy az eltoltt egységimpulzusra ható rendszeroperátor előállítja a rendszer közelítő súlyfüggvényének az eltoltt változatát, azaz minden t_i -re érvényes a

$$\mathcal{R} \delta_{\Delta t}(t - t_i) = h_{\Delta t}(t - t_i)$$

összefüggés. Ennek figyelembe vételével az $y_g(t)$ válaszfüggvény – a gerjesztett lengést megadó kimenőfüggvény – következő közelítése adódik:

$$y_g(t) = \mathcal{R}g(t) \approx \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i) h_{\Delta t}(t - t_i) \Delta t.$$

Könnyű felismerni, hogy itt egy integrálközelítő összeggel állunk szemben. Ha a felosztás-intervallumok Δt hosszát minden határon túl csökkentjük – és ezzel egyidejűleg a beosztáspontok száma minden határon túl növekszik – akkor a szereplő összeg egy *integrálkifejezésbe* megy át:

$$y_g(t) = \mathcal{R}g(t) \approx \int_{-\infty}^t g(\tau) h(t - \tau) d\tau = g(t) * h(t).$$

A képletben felhasználtuk a rendszer $h(t)$ súlyfüggvényét, amely a $h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} h_{\Delta t}(t)$ relációval van értelmezve. Az $y_g(t)$ rendszerválaszra kapott integrál-kifejezés neve „*konvolúciós integrál*”. Az eredményünk tehát így olvasható ki: **a lineáris időinvariáns rendszer választ a rendszer súlyfüggvényének a gerjesztőfüggvénnyel számított konvolúciója szolgáltatja.** A két függvény konvolúcióját, mint függvények közötti műveletet a két függvény függő változója közé helyezett csillag műveleti jellel azonosítjuk. Így tehát a most kapott eredményünk rövid felírással: $y_g(t) = g(t) * h(t)$, ez a *konvolúciótétel*.

b.) Duhamel integrál

A rendszerre működő a $g(t)$ gerjesztőfüggvényt elő lehet állítani eltoltt egységugrás függvények lineáris kombinációjaként. Első lépésként tekintsük az $U(t)$ egységugrás függvényt. A

következőkben feltesszük, hogy a $g(t)$ gerjesztőfüggvény $t < 0$ időpontokban azonosan zérus értéket vesz fel. Amennyiben a $t=0$ helyen a $g(t)$ gerjesztőfüggvénynek véges ugrása van, jelölje a $g(t)$ függvény $t = 0$ helyen létező jobb oldali határértékét $g(0^+)$. A zérus időpont jobb oldali környezetében a $g(0^+)U(t)$ függvény elfogadható lépcsős közelítése $g(t)$ függvénynek a valamely $t_1 > 0$ időpontig. Hasonlóképpen, jó közelítése adódik a $g(t)$ gerjesztőfüggvénynek valamely $t_2 > t_1$ időpontig a $g(0^+)U(t) + U(t - t_1)(g(t_1) - g(0^+))$ lépcsős függvény. Folytatva ezt az eljárást egy kiterjedt $[0, t_n]$ időkeretre a $g(t)$ -nek egy

$$\begin{aligned}\tilde{g}(t) &= U(t)g(0^+) + U(t - t_1)(g(t_1) - g(0^+)) + \dots + U(t - t_n)(g(t_n) - g(t_{n-1})) = \\ &= \tilde{g}(t) = U(t)g(0^+) + \sum_{i=1}^n U(t - t_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))\end{aligned}$$

lépcsős közelítő függvényét kapjuk, azaz írható, hogy a $[0, t_n]$ időkeretben $g(t) \approx \tilde{g}(t)$. Tekintsük most az $y_g(t)$ rendszerválasz meghatározását! A rendszeroperátort most a közelítő $\tilde{g}(t)$ függvényre alkalmazva a válasz $\tilde{y}_g(t)$ közelítő értéke adódik, azonban az időtengelyen alkalmazott t_i felosztáspontok sűrűségét minden határon túl növelve könnyű belátni, hogy a így a keresett $y_g(t)$ válaszfüggvény integrál-előállításához jutunk. Ez a nevezetes *Duhamel* (ejtsd: Düamel) integrál. A mondottaknak megfelelően – kihasználva a rendszer operátorának lineáris voltát és az időinvarianciát, valamint az átmeneti függvény definícióját – az alábbi összefüggés-sor adódik:

$$\begin{aligned}y_g(t) &= \mathcal{R}g(t) \approx \mathcal{R}\tilde{g}(t) = \mathcal{R}\left\{g(0^+)U(t) + \sum_{i=1}^n U(t - t_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))\right\} = \\ &= \mathcal{R}g(0^+)U(t) + \mathcal{R}\left\{\sum_{i=1}^n U(t - t_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))\right\} = \\ &= g(0^+)\mathcal{R}U(t) + \sum_{i=1}^n \mathcal{R}U(t - t_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})) = \\ &= g(0^+)A(t) + \sum_{i=1}^n A(t - t_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})) .\end{aligned}$$

A határátmenet végrehajtása után a rendszerválaszt a $g(t)$ gerjesztőfüggvényre nézve vett *Stieltjes-integrállal* kapjuk:

$$y_g(t) = \mathcal{R}g(t) = g(0^+)A(t) + \int_0^t A(t - \tau)dg(\tau) .$$

Ha a $g(t)$ gerjesztőfüggvény differenciálható minden $t > 0$ érték mellett, akkor a kapott Stieltjes integrál *Riemann integrálba* megy át a következőképp:

$$y_g(t) = \mathcal{R}g(t) = g(0^+)A(t) + \int_0^t A(t - \tau)\dot{g}(\tau)d\tau .$$

5.6.2. Vizsgálat a frekvenciatartományban

A frekvenciatartománybeli vizsgálatok során a $g(t)$ gerjesztőfüggvény (folyamat) különböző korfrekvenciájú elemi komplex harmonikus függvények lineáris kombinációjaként történő előállítására vannak alapozva. A vizsgálatokat linearizált modellekre vonatkozólag végezzük a gerjesztő hatások alábbi csoportosításának megfelelően:

1. Periodikus gerjesztés: $g(t)$ gerjesztőfüggvény T periódusidővel,



2. Aperiodikus gerjesztés: ha $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$,
3. Sztochasztikus gerjesztés: ha a gerjesztőfüggvény $g(t, w)$, azaz a t időn kívül a w elemi eseménytől (vagyis a véletlentől) is függ.

5.6.2.1. Periodikus gerjesztés

A periodikus gerjesztőfüggvény tulajdonsága, hogy érvényes a: $g(t \pm T) = g(t) \forall t \in D(g)$ feltétel, ahol T a periódusidő, és $D(g)$ a $g(t)$ gerjesztőfüggvény értelmezési tartománya. A periodikus gerjesztés alapesete a tiszta koszinuszos vagy tiszta szinuszos gerjesztőfüggvény jelenléte. Megkülönböztetjük az erőgerjesztést és az útgerjesztést. Erőgerjesztés esetén a $g(t) = A \cos \omega t$ vagy a $g(t) = B \sin \omega t$ függvényeket tekintjük, ahol az A és B amplitúdók erődimenziójúak. Útgerjesztés esetén a $g(t) = a \cos \omega t$ vagy a $g(t) = b \sin \omega t$ függvényeket tekintjük, ahol az a és b amplitúdók hosszúság dimenziójúak. Az idő mértékegysége $[t] = s$, a körfrekvencia mértékegysége $[\omega] = \text{rad/s}$.

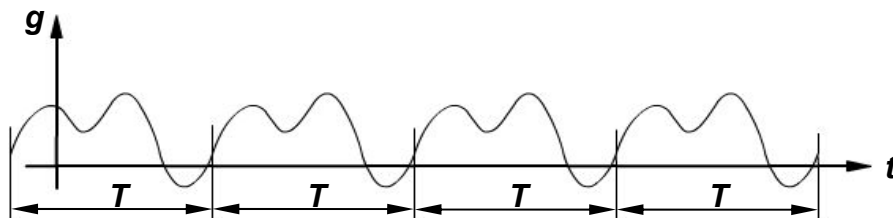
A dinamikai rendszerek vizsgálatakor sokszor fennáll, hogy a szinuszos és koszinuszos tagok összegződnek, sőt fáziseltolást is szenvednek, és maga az eredő gerjesztő-függvény ezek lineáris kombinációjaként áll elő:

$$g(t) = a \cos(\omega t + \varphi_1) + b \sin(\omega t + \varphi_2) , \quad *$$

ahol φ_1 és φ_2 fázisszögek mértékegysége: $[\varphi_1] = [\varphi_2] = \text{rad}$.

Sok járműdinamikai feladatban a gerjesztés több különböző ω_j körfrekvenciájú koszinuszos vagy szinuszos tag lineáris kombinációja.

A periodikus gerjesztő-hatás lefutás egy lehetséges alakulását az 5.12 ábra szemlélteti. Célszerű a periodikus gerjesztések módszeres felbontása különböző (egymással kapcsolatban lévő) körfrekvenciájú koszinuszos és szinuszos tagok lineáris kombinációjára.



5.12. ábra. T-periodikus gerjesztő hatás az idő függvényében

Ez az eljárás a Fourier sorfejtés. Valamely T -periodikus $g(t)$ gerjesztőfüggvényt nagyon általános feltételek mellett előállítja a Fourier-sora, melynek alakja:

$$g(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_j \cos\left(\frac{2\pi j}{T} \cdot t\right) + b_j \sin\left(\frac{2\pi j}{T} \cdot t\right) \right].$$

A fenti kifejezésben szereplő együtthatók a_0 , illetve a_j és b_j ($j > 1$) indexszel a $g(t)$ függvény Fourier együtthatói. A szereplő koszinuszos és szinuszos tagok körfrekvenciáját tekintve a következőket kell elmondani:

- 1.) A T -periodikus $g(t)$ függvény alapharmonikus körfrekvenciája: $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
- 2.) A szereplő j -indexű felharmonikus körfrekvenciák az alapharmonikus pozitív egész szám-sorozai: $\omega_1 = \omega$; $\omega_2 = 2\omega = 2\frac{2\pi}{T}$; $\omega_3 = 3\omega = 3\frac{2\pi}{T}$; $\omega_j = j\omega = j\frac{2\pi}{T}$

A T periódusú $g(t)$ gerjesztőfüggvény Fourier együtthatóit (az ún. valós Fourier együtthatókat) az alábbi összefüggések szolgáltatják:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt \text{ az integrálátlag} \\ a_j &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cos\left(\frac{2\pi j}{T} \cdot t\right) dt \\ b_j &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \sin\left(\frac{2\pi j}{T} \cdot t\right) dt \end{aligned} \right\} j = 1, 2, \dots$$

A járműdinamikai problémák kényelmes tárgyalása adódik komplex Fourier sorok segítségével, mivel elkerülhető az addíciós tételek sorozatos alkalmazása. Ismeretes a „Matematika” c. tárgyból az Euler-reláció, miszerint az ω körfrekvenciájú elemi komplex harmonikus függvény felírható az azonos ω körfrekvenciájú koszinusz és szinuszos függvények kifejezéseiként. Alkalmazva az Euler relációt ω és $-\omega$ körfrekvencia esetére, a $\forall t$ -re érvényes alábbi két összefüggés adódik:

$$\begin{aligned} e^{i\omega t} &= \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \\ e^{-i\omega t} &= \cos(\omega t) - i \sin(\omega t) \end{aligned}$$

A fenti két kifejezés összeadásával kapjuk a $\cos(\omega t)$ függvényt, kivonva a felsőből az alsót, kapjuk a $\sin(\omega t)$ függvényt:

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, \quad \sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

A nyert két összefüggést a már tárgyalt valós Fourier-sor koszinuszos és szinuszos tagjaiba beírva, a T $g(t)$ -periodikus valós gerjesztőfüggvény következő komplex tagú sorelőállítását kapjuk:

$$g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_j e^{i\omega_j t},$$

ahol $c_j : j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ a komplex Fourier-együtthatók rendszere. A képlet szerint tehát a T -periodikus $g(t)$ gerjesztő hatás előállt $e^{i\omega_j t}$ függvények komplex együtthatós lineáris kombinációjaként. A belépett c_j komplex Fourier-együtthatók kapcsolatban állnak a valós együtthatókkal a:

$$c_j = \frac{1}{2}(a_j - i \cdot b_j) \in \mathbb{C}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

összefüggés szerint. Ha a $g(t)$ gerjesztőfüggvény *valósértékű* dinamikai jellemző, akkor a Fourier együtthatókra a következő reláció teljesül: $c_{-j} = \bar{c}_j$, ahol \bar{c}_j a c_j komplex Fourier együttható komplex konjugáltja. A c_j komplex Fourier-együtthatók előállítását közvetlenül a

$$c_j = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_j t} dt \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

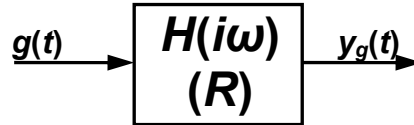
integrálok kiszámításával is elvégezhetjük.



A periodikusan gerjesztett lineáris idővariáns SISO dinamikai válasza nagyon egyszerűen adódik. Legyen \mathcal{R} a lineáris időinvariáns dinamikai rendszer operátora. Feltehető, hogy ekkor

a rendszer $H(i\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{R} \cdot e^{i\omega t}}{e^{i\omega t}}$ komplex frekvenciafüggvénye is ismert. A megadott definiáló

összefüggés szerint idézzük emlékezetünkbe, hogy a $H(i\omega)$, mint az ω körfrekvenciától függő komplex frekvenciafüggvény, az $e^{i\omega t}$ elemi komplex harmonikus gerjesztésre az $R \cdot e^{i\omega t}$ rendszerválaszt $y_g(t) = H(i\omega) e^{i\omega t}$ alakban szorzat kifejezéssel szolgáltatja. Tekintsük a $g(t)$ T -periodikus bemenőjellel gerjesztett rendszer kimenőjelét, az $y_g(t)$ rendszerválaszt az 5.13 ábra szerinti vázlattal érzékeltetve:



5.13. ábra. A periodikus gerjesztés és a válasz kapcsolata

Az $y_g(t)$ rendszerválaszt a $g(t)$ gerjesztőfüggvény \mathcal{R} operátor szerinti képe, így:

$$y_g(t) = \mathcal{R}g(t) = \mathcal{R} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{i\omega_j t} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \mathcal{R} e^{i\omega_j t},$$

Figyelembe véve, hogy az elmondottak szerint a $H(i\omega) \cdot e^{i\omega t} = R \cdot e^{i\omega t}$ a sorfejtésben szereplő összes körfrekvenciára érvényes, ezért a válasz az

$$y_g(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j H(i\omega_j) \cdot e^{i\omega_j t}$$

végtelen sor alakjában áll elő.

Jelöljük $d_j = c_j H(i\omega_j)$; $j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ módon a sorelőállításban szereplő t -független együtthatókat, ezzel előáll az $y_g(t)$ válaszfüggvény komplex Fourier-sora

$$y_g(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j \cdot e^{i\omega_j t},$$

lesz, ahol a $d_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ értékek az $y_g(t)$ rendszerválaszt komplex Fourier-együtthatói. Emeljük ki ezzel az eredménnyel kapcsolatban, hogy a válasz ismét az elemi komplex harmonikus függvények lineáris kombinációja lett. Ez a tény még jobban aláhúzza a $\{e^{i\omega_j t}\}_{j=-\infty}^{\infty}$ függvények „építőkö” jellegét, azaz belőlük lineáris kombináció-képzéssel előállt mind a gerjesztő-, mind pedig a válaszfüggvény.

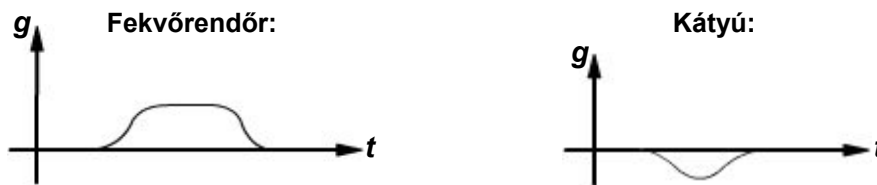
5.6.2.2. Aperiodikus gerjesztés (lökésgerjesztés)

Csak olyan gerjesztő függvényeket vizsgálunk, amelyek a teljes számegyenesen abszolút integrálhatóak, azaz létezik az alábbi improprius integrál:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$$

Néhány jellegzetes aperiodikus gerjesztőfüggvény változatot az alábbi ábra mutat be. Aperiodikus gerjesztést okoz például az útfelületen kialakított „fekvő rendőr”, az útfelület károsodása miatt keletkezett kátyú, illetve bármely véges tartóintervallumú, hosszirányban kiterjedt

egyéb útfelületi vagy közlekedési pálya menti egyenetlenség.



5.14. ábra. Véges tartóintervallumú aperiodikus gerjesztések



5.15. ábra. Nem véges hosszúságú tartóintervallumú aperiodikus gerjesztés

Amennyiben a korlátos gerjesztő függvény véges tartóintervallummal bír, azaz azon intervallum hossza, ahol a $g(t)$ függvény zérustól különböző, az véges hosszúságú, akkor az abszolút integrálhatóság automatikusan teljesül. Ha azonban a tartóintervallum nem véges hosszúságú (lásd az 5.15 ábrát), akkor a $g(t)$ függvény végeinek $t \rightarrow \pm\infty$ esetén gyorsan ($1/t$ -nél gyorsabban) kell zéróhoz tartania, hogy az abszolút integrálhatóság teljesüljön. Az abszolút integrálhatóság feltétele azért fontos, mert ennek teljesülése biztosítja a $g(t)$ gerjesztőfüggvény inverz Fourier transzformáltjának létezését, amely egy $\Phi_g(i\omega)$ komplex értékű, körfrekvencia-függő

$$\Phi_g(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt$$

függvény, neve: a $g(t)$ gerjesztőfüggvény **amplitúdósűrűség-spektruma**. Ez a függvény minden ω körfrekvenciához egy $\Phi_g(i\omega) \in \mathbb{C}$ komplex számot rendel. A $\Phi_g(i\omega)$ szerepe hasonló a periodikus gerjesztőfüggvény esetén használt Fourier-együtthatók szerepéhez, azok folytonos analógója. Így tehát magát a gerjesztő függvényt is elő lehet állítani integrálalakban, a $\Phi_g(i\omega)$ amplitúdó-sűrűség spektrum Fourier transzformáltjaként a következő alakban:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_g(i\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

A jelzett analógia abban foglalható össze, hogy a periodikus esetben jellemző diszkrét $\{\omega_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ körfrekvencia-sorozat helyett most egy intervallumot kitöltő kontinuum-számoosságú körfrekvencia-sokaság lép be, hasonlóképp, a periodikus esetben jellemző Fourier együtthatók $\{c_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ komplex számsorozata helyett most a kontinuum-sok körfrekvenciához rendelt $\Phi_g(i\omega)$ komplex amplitúdó-sűrűség értékek lépnek be. Az elemi komplex harmonikus függvények a periodikus esetben szereplő diszkrét körfrekvenciák helyett most kontinuum számoosságú körfrekvencia-intervallumon értelmezett $\{e^{i\omega t}\}$ függvénysokasággal lépnek be. Azt nem is kell külön kiemelni, hogy a periodikus esetben szereplő sorösszegzés helyett most ω -szerinti “folytonos összegzés” (=integrálás) lép be. Összefoglalva: a $g(t)$ aperiodikus ger-

jesztést sikerült az $e^{i\omega t}$ elemi komplex harmonikus függvények „folytonos” lineáris kombinációjaként *integrálalakban* előállítani.

A következőkben levezetjük a *lineáris dinamika alaptételét*. Vizsgáljuk a lineáris időinvariáns dinamikai rendszer $y_g(t)$ válaszáinak alakulását a tekintett aperiodikus $g(t)$ gerjesztés esetén! Az $y_g(t)$ válaszfüggvény a rendszer \mathcal{R} operátorának hatására áll elő, mint a $g(t)$ gerjesztőfüggvény \mathcal{R} szerinti képe:

$$y_g(t) = \mathcal{R}g(t) = \mathcal{R} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_g(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_g(i\omega) \mathcal{R}e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_g(i\omega) H(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (*)$$

Másképpen viszont a rendszer $y_g(t)$ válaszáinak is képezhető a komplex amplitúdó-sűrűség-spektruma az $y_g(t)$ inverz Fourier transzformáltjaként az alábbi alakban:

$$\Phi_{y_g}(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y_g(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Következésképpen maga az $y_g(t)$ válaszfüggvény is előállítható a $\Phi_{y_g}(i\omega)$ amplitúdó-sűrűség Fourier transzformáltjaként:

$$y_g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{y_g}(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (**)$$

Az $y_g(t)$ válaszfüggvény fentiekben kapott két különböző integrál előállítását (a * és ** kifejezések) szemügyre véve azonnal látható, hogy azok egyenlősége csak az integrálok alatt szereplő elemi komplex harmonikus szorzók együttható függvényeinek minden ω körfrekvenciára történő megegyezése esetén állhat fenn. Ezen megfontolásból adódik a **lineáris dinamika alaptételeként** ismert nevezetes

$$\boxed{\Phi_{y_g}(i\omega) = H(i\omega) \cdot \Phi_g(i\omega), \forall \omega}$$

összefüggés. Tehát a rendszerválasz amplitúdó-sűrűség spektruma meghatározható átviteli tulajdonságát jellemző $H(i\omega)$ komplex frekvenciafüggvény és a bemenő gerjesztés $\Phi_g(i\omega)$ amplitúdó-sűrűség függvény szorzataként. Ha $\Phi_{y_g}(i\omega)$ megvan, akkor a válasz időfüggvénye nyilvánvalóan Fourier transzformációval integrálalakban adódik:

$$y_g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{y_g}(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Összefoglalva:

- 1.) Az aperiodikus gerjesztés $\Phi_g(i\omega)$ amplitúdó-sűrűség függvénye a $g(t)$ gerjesztőfüggvény ismeretében, annak Fourier-transzformációjával adott.
- 2.) A rendszert jellemezzük a $H(i\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{R} \cdot e^{i\omega t}}{e^{i\omega t}}$ komplex frekvenciafüggvénnyel.
- 3.) A lineáris dinamika alaptétele kapcsolatot teremt a $\Phi_g(i\omega)$ gerjesztés-jellemző és az $y_g(t)$ válasz $\Phi_{y_g}(i\omega)$ amplitúdó-sűrűség spektruma között. Ha $\Phi_{y_g}(i\omega)$ ismert, akkor $y_g(t)$ válasz-időfüggvény is előáll a $\Phi_{y_g}(i\omega)$ válasz-amplitúdósűrűség függvény Fourier transzformálásával.

Térjünk ki végül még a periodikusan ill. aperiodikusan gerjesztett lineáris dinamikai rendszer esetén a $H(i\omega)$ komplex frekvenciafüggvénynek a válaszfüggvény jellemzőinek alakításában betöltött szerepére. Analógia állapítható meg a periodikus gerjesztés vizsgálatánál tárgyalattal, ugyanis a periodikus esetben a $H(i\omega)$ függvény diszkrét ω_j ; $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ körfrekvencia-sorozaton felvett helyettesítési értékei a gerjesztést leíró Fourier sor Fourier együtthatóinak szorzótényezőiként határozták meg a válaszfüggvény Fourier sorának együtthatóit:

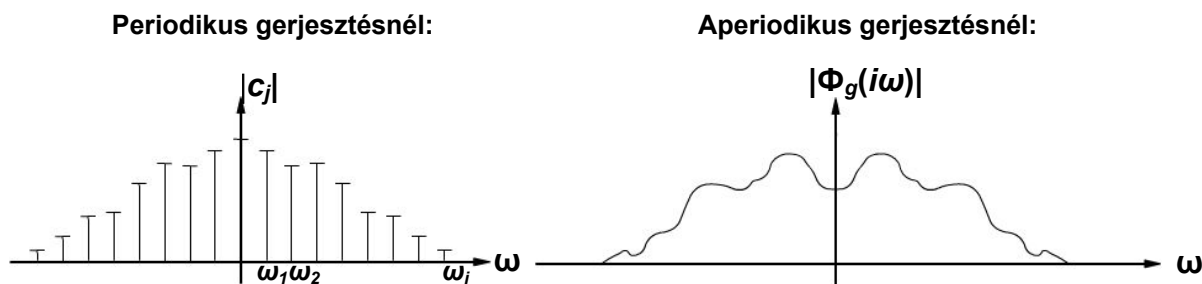
$$d_j = H(i\omega_j) \cdot c_j; \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ahol c_j a gerjesztés és d_j a válaszfüggvény j -edik komplex Fourier-együtthatója.

Aperiodikus $g(t)$ gerjesztés esetben viszont a kontinuum-sok ω értékre értelmezett amplitúdó-sűrűség-függvények kapcsolata lép be:

$$\Phi_{y_g}(i\omega) = H(i\omega) \cdot \Phi_g(i\omega); \quad \omega \in (-\infty, +\infty).$$

A periodikus $g(t)$ gerjesztés esetén adódó diszkrét c_j komplex Fourier együtthatók abszolút értékét és az aperiodikus $g(t)$ gerjesztés esetén adódó $\Phi_g(i\omega)$ komplex amplitúdó-sűrűség spektrum abszolút értékének alakulását az 5.16 ábra diagram párja mutatja be.



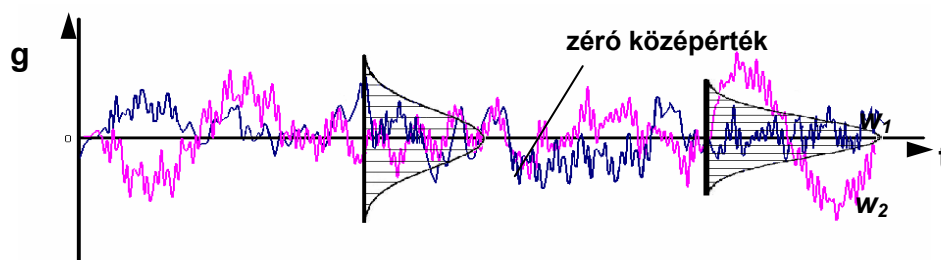
5.16. ábra. A diszkrét Fourier együtthatók abszolút értékének és a folytonos amplitúdó-sűrűség spektrum függvény abszolút értékének összehasonlító diagramja

Záró összefüggésként arra hívjuk fel a figyelmet, hogy mind a komplex Fourier együtthatókat, mind pedig a komplex amplitúdó-sűrűség függvényt az abszolút értékük csak részlegesen jellemzi. Érvényes ugyanis a $c_j = |c_j| e^{i\psi_j}$ és a $\Phi_g(i\omega) = |\Phi_g(i\omega)| e^{i\psi(\omega)}$ összefüggés-pár, ahol ψ_j a j -edik ω_j diszkrét körfrekvenciához tartozó fázisszög, $\psi(\omega)$ pedig a folytonosan változó ω körfrekvenciától függő fázisszög. A fázisszög ismeretének hiányában tehát az abszolút értékek valóban csak részleges jellemzést adhatnak.

5.6.2.3. Sztochasztikus (véletlen) gerjesztés – lineáris, időinvariáns SISO rendszer esetén

Sztochasztikus gerjesztésen a t időparamétertől függő véletlen erőhatás-folyamatot, vagy véletlen geometriai (út-) gerjesztés-folyamatot értünk. A véletlentől való függés tényét a w független változó (az elemi esemény) szerepeltetésével formalizáljuk. Így tehát a sztochasztikus gerjesztés-folyamat formálisan egy időtől és véletlentől függő kétváltozós $g(t, w)$ függvényként kezelhető.

Jelen tárgyalásunkban csak zéró középpértékű véletlen folyamatokkal foglalkozunk, amelyeknél a háttérben munkálkodó véletlen mechanizmus **stabilis jellegű**, azaz **gyenge stacionaritás** mutatkozik. A sztochasztikus folyamat egy lefutását **realizációs függvénynek** nevezzük. Egy realizációt műszeresen regisztrálhatunk az időtengely felett, és a kijött realizációt (mint elemi eseményt) w -vel indexelhetjük (lásd az 5.17 ábrát).



5.17. ábra. Gyengén stacionárius sztochasztikus folyamat két realizációs függvénye

A $g(t, w)$ gerjesztő-folyamatot alkotó valószínűségi változók várható értéke minden t időpont esetén zérus, ezért a tekintett gerjesztés-folyamat várható érték függvénye most az azonosan nulla függvény lesz. A várható érték képzés operátorát E -vel jelölve írható, hogy:

$$E\{g(t, w)\} = 0$$

minden t időpillanatban. Természetesen készíthető a folyamatot alkotó valószínűségi változók másik fontos jellemzője is, a *szórásnégyzet függvény*:

$$D^2\{g(t, w)\} = E\{g(t, w) - E\{g(t, w)\}\}^2 \geq 0.$$

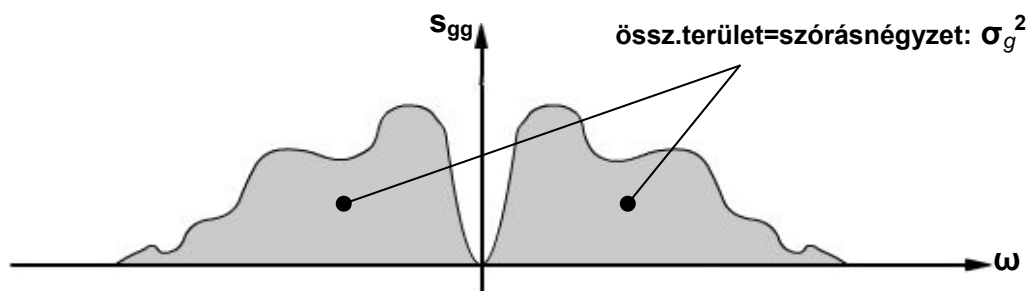
A tekintett gyengén stacionárius gerjesztő-folyamat esetén azonban a szórásnégyzet függvény minden t időpontra azonos *konstans* értéket vesz fel.

A gyengén stacionárius $g(t, w)$ véletlen folyamat is $e^{i\omega t}$ elemi komplex harmonikusokból épül fel, az ω körfrekvencia végtelen sok értéke mellett.

A stacionárius folyamatok felépítésében jelenlévő körfrekvenciák jelentőségét az $s_{gg}(\omega)$ **spektrális sűrűség-függvénnyel** jellemezzük. Ennek a függvénynek egy adott ω -nál lévő ordináta-magassága (=függvényértéke) azt jelenti, hogy az adott ω körfrekvencia kis környezetében lévő körfrekvenciák mekkora súllyal szerepelnek a folyamat elemi komplex harmonikusokból való felépülésében.

Jelölje $s_{gg}(\omega)$ a spektrális sűrűségfüggvényt, mely az alábbi három lényeges tulajdonsággal bír:

- 1.) $s_{gg}(\omega) \geq 0$, $\forall \omega$ -ra
- 2.) $s_{gg}(\omega) = s_{gg}(-\omega)$, $\forall \omega$ -ra, azaz a függvény páros
- 3.) $\int_{-\infty}^{\infty} s_{gg}(\omega) d\omega = \sigma_g^2$, megadja a $g(t, w)$ gerjesztő-folyamat szórásnégyzetét



5.18. ábra. Gyengén stacionárius sztochasztikus gerjesztő-folyamat kétoldalas spektrális sűrűségfüggvénye

Amely ω körfrekvenciáknál tehát $s_{gg}(\omega)$ ordinátája magas, azokhoz a körfrekvenciákhoz tartozó $e^{i\omega t}$ elemi komplex harmonikusok nagyobb súllyal (nagyobb amplitúdóval) szerepelnek a $g(t, \omega)$ gyengén stacionárius gerjesztés-folyamat felépítésében.

A lineáris idővariáns SISO válaszában jellemzőivel kapcsolatban gyengén stacionárius sztochasztikus gerjesztés estében a következőképp tájékozódhatunk. A rendszer $H(i\omega)$ komplex frekvencia függvényének és a bemenő gerjesztő folyamat spektrális sűrűségfüggvényének ismeretében meghatározható az $y_g(t, \omega)$ kimenő folyamat szórásnégyzete, és Gauss folyamat esetén a $\pm 3\sigma_y$ -os szórásmező is, melybe a vizsgált valószínűségi változónk (azaz a kimenő folyamat ordinátája) 0.9972 valószínűséggel beleesik.

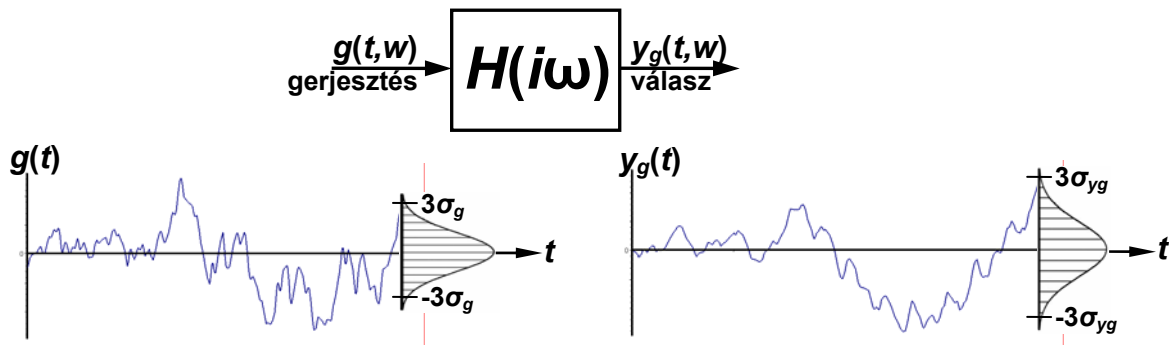
A statisztikai dinamika alaptétele a vizsgált rendszerünkre a következő összefüggést adja:

$$s_{y_g y_g}(\omega) = |H(i\omega)|^2 s_{gg}(\omega), \forall \omega$$

Ezen alaptétel szerint a válaszfolyamatának $s_{y_g y_g}(\omega)$ spektrális sűrűségfüggvénye a gerjesztés ismert $s_{gg}(\omega)$ spektrális sűrűségfüggvénye és a rendszer ismert $H(i\omega)$ komplex frekvenciafüggvénye alapján meghatározható, és az $y_g(t, \omega)$ kimenő folyamat szórásnégyzete a

$\sigma_{y_g}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s_{y_g y_g}(\omega) d\omega$ képlet szerint meghatározható. A kimenő folyamat szórásnégyzetének

ismeretében, a válaszfolyamat $\pm 3 \cdot \sigma_{y_g}$ sáv szélesség is ismertté válik. Az elmondottakat az alábbi 5.19 ábra szemlélteti.



5.19. ábra. A gyengén stacionárius sztochasztikus Gauss-folyamat gerjesztésre a lineáris rendszer által adott gyengén stacionárius sztochasztikus Gauss válaszfolyamat

Összefoglalásképp kiemeljük, hogy a gerjesztő-folyamatokat periodikus, aperiodikus és gyengén stacionárius sztochasztikus esetben is sikerült elemi komplex harmonikusokból lineáris kombinációként „kikeverni”. Tehát az $e^{i\omega t}$ függvény a gerjesztőfüggvények előállításában általános „építőkönek” bizonyult.

6. Ábrajegyzék

1.1. ábra. Ideális és valóságos menetciklusok mozgás- és erőhatás időfüggvényei.....	1
1.2. ábra. Villamos motorral hajtott erőátvitel vonóerő-generálása	2
1.3. ábra. Egy bemenetű és egy kimenetű dinamikai modell	4
1.4. ábra. A hajtásrendszer blokkdiagramos megjelenítése.....	5
1.5. ábra. A fékrendszer blokkdiagramos megjelenítése	5
1.6. ábra. A jármű alapellenállásának sebességfüggését megjelenítő blokkdiagram	5
1.7. ábra. A sík, egyenes pályán haladó jármű főmozgásának rendszermodellje.....	6
1.8. ábra. A közlekedési pálya által gerjesztett járműmozgás tanulmányozására alkalmas síkbeli dinamikai modell	6
2.1. ábra. Négytengelyes vasúti kocsik alapellenállás-erejének mérése a mozdony és a kocsi közé beépített dinamométerrel	11
2.2. ábra. A jármű kétváltozós alapellenállás-erő függvényének jellegfelülete	12
2.3. ábra. Kvázistatikus vonóerőgörbe sorozat a sebesség függvényében különböző u_1 hajtásvezérlési paraméterek mellett.....	12
2.4. ábra. A vonóerőgörbék pontjainak megadása koordinátpárokkal	13
2.5. ábra. Az interpolációs eljárás	14
2.6. ábra. Vonóerő explicit megadása	14
2.7. ábra. Tranziens vonóerő-kifejlődés	14
2.8. ábra. A fékezőerő jelleggörbe pontjainak numerikus megadása koordinátpárokkal.....	15
2.9. ábra. A lejtőn felfelé mozgó járműre ható pályairányú erő.....	16
2.10. ábra. A közlekedési pálya emelkedési viszonyainak jellemzése a lokális iránytangens számértékével a befutott út függvényében.....	17
2.11. ábra. A közlekedési pálya emelkedés megadása százalékos értékkel és ezrelékes értékkel	17
2.12. ábra. A teljes klotoid görbe	18
2.13. ábra. A közlekedési pálya emelkedés iránytangensének közelítése töröttvonallal, ha a lekerekítő körívet másodfokú parabolával közelítjük.....	20
2.14. ábra. Az emelkedési iránytangens numerikus megadása a teljes befutott út felett a töröttvonal törésponti koordinátpárjaival	20
2.15. ábra. A közlekedési pálya görbületi viszonyaira jellemző helyszínrajz az egyenes szakaszok, az átmeneti ívek és a köríves szakaszok határpontjainak feltüntetésével.....	21
2.16. ábra. A görbület numerikus megadása a teljes befutott út felett a töröttvonal törésponti koordinátpárjaival	21
2.17. ábra. A befutott úttól függő járulékos ellenálláserőket meghatározó emelkedési és görbületi jellemzők visszacsatolása.....	22
2.18. ábra. A $v(t)$ menetábra közelítő számítása konstans gyorsuláslépcsőkkel	23
2.19. ábra. A gyorsítóerő szakaszonként lineáris közelítése	24
2.20. ábra. Az Euler-módszerrel az idő függvényében nyert közelítő szakaszonként lineáris sebesség és befutott út függvények.....	27
3.1. ábra. A nyugalomban lévő ($\omega=0$ és $v=0$) rugalmas kerék és a rugalmas támasztófelület érintkezési felületének partíciója A_a adhéziós és A_s szliptartományra	28
3.2. ábra. A normális trakció eloszlása a Hertz-féle érintkezési ellipszis felett	28
3.3. ábra. A rugalmas támasztófelületen gördülő rugalmas kerék kontaktfelületének és a kerékre működő tangenciális trakciójának alakulása hajtás és fékezés esetén.....	29
3.4. ábra. A gördülőkapcsolatban a keréktalpra átvitt tangenciális erő alakulása fékezés és hajtás esetén	32

3.5. ábra. A gördülőkapcsolat tangenciális erőátszármaztatását jellemző erőkapcsolati tényező a hosszirányú kúszás függvényében.....	33
3.6. ábra. Az erőkapcsolati tényező kúszásfüggését megadó négy paraméter értelmezéséhez	33
3.7. ábra. Az erőkapcsolati tényező parabolikus részének paraméter-beállításához	34
3.8. ábra. Az erőkapcsolati tényező exponenciális részének paraméter-beállításához	35
3.9. ábra. Az erőkapcsolati tényező adott kúszásnál valószínűségi változónak bizonyul és bizonytalansági sáv rajzolódik ki	36
3.10. ábra. Az erőkapcsolati tényező és a hosszirányú kúszás bizonytalanságának szemléltetése a befutott s ívhossz függvényében.....	37
3.11. ábra. A gördülési ellenálláserő kialakulásában szerepet nyelő szliptartományi súrlódási energiaáram értelmezéséhez	38
3.12. ábra. A tuskós fék szerkezete és erőhatásvizonyai	39
3.13. ábra. A féktusó/kerék érintkezési felület φ szöggel azonosított pontjában a féktuskóra ható erők.....	40
3.14. ábra. A dobfelek szerkezete és erőhatásvizonyai	42
3.15. ábra. A tárcsás fék szerkezete és erőhatásvizonyai	43
3.16. ábra. A féktárcsa és a fékbetét érintkezési felületének jellemzői	43
3.17. ábra. A féktuskó A pontján tartamfékezéskor kialakuló termoelasztikus instabilitással kapcsolatos hőmérsékletváltozás	47
4.1. ábra. Két jármű hosszdinamikai kapcsolatából kialakuló elemi járműfüzerek.....	48
4.2. ábra. Több jármű hosszdinamikai kapcsolatából kialakuló általános járműfüzér	48
4.3. ábra. A kétszabadságfokú elemi járműmodell magyarázatához	49
4.4. ábra. A gördülőkapcsolat erőkapcsolati tényezője.....	49
4.5. ábra. Az elemi járműfüzér négy szabadságfokú dinamikai modellje	50
4.6. ábra. Lineáris rugalmassággal és lineáris csillapítással bíró járműkapcsolati erő jellegfelülete origóra illeszkedő sík	52
4.7. ábra. Az elemi járműfüzért jellemző MIMO modell sík, egyenes pályán	53
4.8. ábra. Az elemi járműfüzérre ható járulékos ellenálláserők meghatározásához	54
4.9. ábra. Az elemi járműfüzér járműveinek a közlekedési pályán elfoglalt helyzete.....	54
4.10. ábra. Az általános járműfüzér járműveinek a közlekedési pályán elfoglalt helyzete meghatározásához	55
5.1. ábra. A parazita mozgások magyarázata.....	57
5.2. ábra. Járműdinamikai síkmodell 4 szabad koordinátával	58
5.3. ábra. Az elemi járműfüzér lineáris dinamikai modellje.....	63
5.4. ábra. A viselkedő rendszer szemléltetése.....	65
5.5. ábra. Konstans sebességgel egyenes irányban haladó jármű útgerjesztett lengése.....	66
5.6. ábra. A gerjesztés függvényre adott válaszfüggvény: $z(t) = \mathcal{R}g(t)$	66
5.7. ábra. Lineáris időinvariáns egyszabadságfokú járműdinamikai modell	70
5.8. ábra. A lineáris dinamikai rendszer közelítő súlyfüggvénye	73
5.9. ábra. Az $U(t)$ egységugrás gerjesztésre adott válasz az $A(t)$ átmeneti függvény	74
5.10. ábra. Az elemi komplex harmonikus gerjesztés és a rendszer komplex frekvenciafüggvényének összefüggése	75
5.11. ábra. A rendszer komplex frekvenciafüggvényének diagramja a komplex síkon	76
5.12. ábra. T-periodikus gerjesztő hatás az idő függvényében	79
5.13. ábra. A periodikus gerjesztés és a válasz kapcsolata	81
5.14. ábra. Véges tartóintervallumú aperiodikus gerjesztések.....	82
5.15. ábra. Nem véges hosszúságú tartóintervallumú aperiodikus gerjesztés	82
5.16. ábra. A diszkrét Fourier együtthatók abszolút értékének és a folytonos amplitúdó-sűrűség spektrum függvény abszolút értékének összehasonlító diagramja	84

5.17. ábra. Gyengén stacionárius sztochasztikus folyamat két realizációs függvénye.....	85
5.18. ábra. Gyengén stacionárius sztochasztikus gerjesztő-folyamat kétoldalas spektrális sűrűségfüggvénye.....	85
5.19. ábra. A gyengén stacionárius sztochasztikus Gauss-folyamat gerjesztésre a lineáris rendszer által adott gyengén stacionárius sztochasztikus Gauss válaszfolyamat.....	86

Irodalomjegyzék

Felhasznált, ajánlott irodalom

- [1] Popp, K. – Schiehlen, W.: *Fahrzeugdynamik*, Teubner, Stuttgart, 1993.
- [2] Zobory, I.: *Vehicle Dynamics, Lecture notes*, BME Dept. of Railway Vehicles, Budapest 2006.
- [3] Zobory, I.: *Járműdinamika (lineáris időinvariáns dinamikai rendszerek)*, Egyetemi jegyzet, BME Vasúti Járművek Tanszék, Budapest, 2007.

