

1 Разностные измерения GPS

$(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ - искомый вектор относительных координат в системе ECEF.

Кодовая псевдодальность, м:

$$\rho = r + c(\delta t_r - \delta t_{sv}) + T + I + m_\rho + \nu_\rho \quad (1)$$

r - истинное расстояние от приемника до спутника, м

c - скорость света м/с

δt_r - ошибка времени в приемнике, с

δt_{sv} - ошибка времени на спутнике, с

T - тропосферная ошибка, м

I - Ионосферная задержка, м

m_ρ - Ошибка вследствие многолучевого распространения, м

ν_ρ - Ошибка вызванная тепловым шумом, м

Фазовые измерения, кол-во циклов:

$$\phi = \lambda^{-1}(r + c(\delta t_r - \delta t_{sv}) + T + I + m_\phi + \nu_\phi) + N \quad (2)$$

ϕ - фазовое измерение GPS, циклы (количество длин волн)

λ - длина волны, м/цикл

m_ϕ - ошибка фазового измерения, вызванная многолучевым распространением, циклы

ν_ϕ - ошибка фазового измерения из-за теплового шума, циклы

N - фазовая неоднозначность (целое число длин волн, неизвестное на стороне приемника).

Первая разность фазовых измерений между двумя приемниками A и B относительно k -го спутника позволяет избавиться от ошибки δt_{sv}^k времени на k -ом спутнике:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{AB}^k &= \phi_A^k - \phi_B^k = \\ &= \lambda^{-1}(r_A^k + c(\delta t_{rA} - \delta t_{sv}^k) + T_A^k + I_A^k + m_{\phi_A}^k + \nu_{\phi_A}^k) + N_A^k - \\ &= \lambda^{-1}(r_B^k + c(\delta t_{rB} - \delta t_{sv}^k) + T_B^k + I_B^k + m_{\phi_B}^k + \nu_{\phi_B}^k) + N_B^k - \\ &= \lambda^{-1}(\Delta r_{AB}^k + c\delta t_{rAB} + \Delta T_{AB}^k + \Delta I_{AB}^k + \Delta m_{\phi_{AB}}^k + \Delta \nu_{\phi_{AB}}^k) + \Delta N_{AB}^k \end{aligned}$$

Вторая разность образуется как разность первых разностей для двух спутников j и k . Вычисление второй разности позволяет устранить разность ошибок времени δt_{rAB} между приемниками A и B :

$$\begin{aligned} \Delta\nabla\phi_{AB}^{jk} &= \Delta\phi_{AB}^j - \Delta\phi_{AB}^k = \\ &= \lambda^{-1}(\Delta r_{AB}^j + c\delta t_{rAB} + \Delta T_{AB}^j + \Delta I_{AB}^j + \Delta m_{\phi_{AB}}^j + \Delta \nu_{\phi_{AB}}^j) + \Delta N_{AB}^j - \\ &= \lambda^{-1}(\Delta r_{AB}^k + c\delta t_{rAB} + \Delta T_{AB}^k + \Delta I_{AB}^k + \Delta m_{\phi_{AB}}^k + \Delta \nu_{\phi_{AB}}^k) + \Delta N_{AB}^k - \\ &= \lambda^{-1}(\Delta\nabla r_{AB}^{jk} + \Delta\nabla T_{AB}^{jk} + \Delta\nabla I_{AB}^{jk} + \Delta\nabla m_{\phi_{AB}}^{jk} + \Delta\nabla \nu_{\phi_{AB}}^{jk}) + \Delta\nabla N_{AB}^{jk} \end{aligned} \quad (3)$$

Если приемник двухчастотный, то вместо простого фазового измерения ϕ используется сумма (narrowline) $\phi_{NL} = \phi_{L1} + \phi_{L2}$ или разность (wideline) $\phi_{WL} = \phi_{L1} - \phi_{L2}$ фазовых измерений на данном приемнике. Использование двухчастотного приемника повышает надежность процедуры разрешения неоднозначности фазовых измерений (определение истинного значения N).

2 Статический фильтр Калмана

Фильтр Калмана представляет собой итерационную процедуру, где каждая итерация состоит из двух этапов: прогноза и коррекции на основе измерения. Прогноз вектора состояния:

$$x_k^- = \Phi_{k-1} x_{k-1} \quad (5)$$

Прогноз корреляционной матрицы вектора состояния:

$$P_k^- = \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}^T + Q_d \quad (6)$$

Коррекция вектора состояния осуществляется на основе наблюдений:

$$x_k = x_k^- + K_k(z_k - Hx_k^-) \quad (7)$$

Здесь K_k - матричный коэффициент усиления Калмана на k -м шаге.

$$K_k = P_k H^T (H P_k H^T + R)^{-1} \quad (8)$$

Аналогичным образом обновляется корреляционная матрица вектора состояния:

$$P_k = P_k^- - K_k H P_k^- \quad (9)$$

Для статического случая прогноз вектора состояния

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta \nabla \phi_{AB}^{1,2} \\ \Delta \nabla \phi_{AB}^{1,3} \\ \vdots \\ \Delta \nabla \phi_{AB}^{1,numSat} \end{bmatrix}_{k+1} = \Phi_k \begin{bmatrix} x_k \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta \nabla \phi_{AB}^{1,2} \\ \Delta \nabla \phi_{AB}^{1,3} \\ \vdots \\ \Delta \nabla \phi_{AB}^{1,numSat} \end{bmatrix}_k \quad (10)$$

Прогноз ковариационной матрицы вектора состояния

$$P_{k+1} = \Phi_k P_k \Phi_k^T + Q_d \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x,x} & \sigma_{x,y} & \sigma_{x,z} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{y,x} & \sigma_{y,y} & \sigma_{y,z} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{z,x} & \sigma_{z,y} & \sigma_{z,z} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \sigma \Delta \nabla \phi_{AB}^{1,2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \sigma \Delta \nabla \phi_{AB}^{1,3} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \sigma \Delta \nabla \phi_{AB}^{1,numSat} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \sigma_{x,x} & \sigma_{x,y} & \sigma_{x,z} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{y,x} & \sigma_{y,y} & \sigma_{y,z} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{z,x} & \sigma_{z,y} & \sigma_{z,z} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \sigma \Delta \nabla \phi_{AB}^{1,2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \sigma \Delta \nabla \phi_{AB}^{1,3} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \sigma \Delta \nabla \phi_{AB}^{1,numSat} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_p \Delta t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_p \Delta t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q_p \Delta t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_N \Delta t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_N \Delta t \end{bmatrix} \quad (12)$$

Уравнение наблюдения

$$\begin{aligned}
 z_k = & \begin{bmatrix} \Delta \nabla \rho_{AB}^{1,2} \\ \Delta \nabla \rho_{AB}^{1,3} \\ \vdots \\ \Delta \nabla \rho_{AB}^{1,numSat} \\ \Delta \nabla \phi_{AB}^{1,2} \\ \Delta \nabla \phi_{AB}^{1,3} \\ \vdots \\ \Delta \nabla \phi_{AB}^{1,numSat} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} H & x_k & +v_k \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}^1 - \mathbf{e}^2) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (\mathbf{e}^1 - \mathbf{e}^3) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{e}^1 - \mathbf{e}^S) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda^{-1}(\mathbf{e}^1 - \mathbf{e}^2) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda^{-1}(\mathbf{e}^1 - \mathbf{e}^3) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda^{-1}(\mathbf{e}^1 - \mathbf{e}^S) & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta \nabla N_{AB}^{1,2} \\ \Delta \nabla N_{AB}^{1,3} \\ \vdots \\ \Delta \nabla N_{AB}^{1,numSat} \end{bmatrix}_k
 \end{aligned} \quad (13)$$

Единичный вектор \mathbf{e}^n это строка $\mathbf{e}^n = (e_x^n, e_y^n, e_z^n)$. Этот вектор определяет направление от приемника на n -ый спутник. Так как расстояние от приемника до спутника примерно 20×10^6 м, то эти вектора для обоих приемников совпадают с высокой точностью. В документе [1] указано, что эти вектора вычисляет процедура фильтра Калмана, но я пока не вижу как она это может сделать, так как эти вектора там как раз и используются как элементы матриц которые определяют параметры фильтра. Для начала буду вычислять эти вектора грубо по абсолютным координатам приемника и спутника. Тогда матрица наблюдения определяется следующим образом:

$$H = \begin{bmatrix} \Delta e_x^{1,2} & \Delta e_y^{1,2} & \Delta e_z^{1,2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Delta e_x^{1,3} & \Delta e_y^{1,3} & \Delta e_z^{1,3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta e_x^{1,S} & \Delta e_y^{1,S} & \Delta e_z^{1,S} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda^{-1}(\Delta e_x^{1,2}) & \lambda^{-1}(\Delta e_y^{1,2}) & \lambda^{-1}(\Delta e_z^{1,2}) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda^{-1}(\Delta e_x^{1,3}) & \lambda^{-1}(\Delta e_y^{1,3}) & \lambda^{-1}(\Delta e_z^{1,3}) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda^{-1}(\Delta e_x^{1,S}) & \lambda^{-1}(\Delta e_y^{1,S}) & \lambda^{-1}(\Delta e_z^{1,S}) & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Матрица H в англ. источниках называется observation matrix, line-of-sight matrix, matrix of partials, geometry matrix, design matrix, measurements sensitivity matrix или даже Jacobi Matrix.

В документе [1, стр. 45], конкретно указано: "The Kalman filter provides several useful outputs. First, the floating point carrier-phase ambiguity estimates, as well as the covariance matrix, are fed to the LAMBDA ambiguity resolution task. Second, the unit line-of-sight vector to each of the SVs is fed to the high-rate output task. Finally, the Kalman filter provides a low rate (1 Hertz), approximate relative position which is independent of the computations performed by the high-rate output task. This provides a means of validating the high-rate output since a direct comparison is possible".

Важным является утверждение, что разностные координаты взятые непосредственно из вектора состояния являются грубой оценкой. Для точного оценивания используется дополнительная процедура (High-rate task).

Еще одно важное замечание: скорее всего фильтр Калмана сам по себе не вычисляет unit line-of-sight vector. Скорее всего эти вектора вычисляются внутри процедуры calc_sv_pos (см. стр. 127 в [1]).

Перед вызовом high-rate task необходимо устранить неопределенность фазовых измерений ([1], стр.46): "The second task, an ambiguity resolution routine, is summoned by the Kalman filter when required. The Kalman filter can only provide a floating point estimate of the double-difference carrier-phase ambiguities. As previously discussed, these floating point estimates must be resolved to their integer values in order for the high-rate output to achieve the desired level of precision. The LAMBDA method, mentioned briefly in Chapter 2, is used to perform this ambiguity resolution. The LAMBDA method requires as input the floating point estimates of the ambiguity values as well as the associated covariance matrix. Both of these are provided by the Kalman filter task. The ambiguity resolution task provides as output a vector of the integer ambiguities to the high-rate output task which is discussed next. Of note, after the integer ambiguities have been initially determined, the high-rate task is able to determine the correct integer ambiguities for newly acquired SVs. However, if too many SVs are lost at a single epoch, the Kalman filter has the ability to pass the required data to the ambiguity resolution routine and re-calculate the complete ambiguity set. This will be discussed in much greater detail later in the chapter."

2.1 Разрешение неоднозначности фазовых измерений

Уравнение фазовых наблюдений имеет вид [1, стр.74, 3.47]:

$$\Delta \nabla \phi_{AB}^{j,k} = \lambda^{-1}(\mathbf{e}^j - \mathbf{e}^k) \cdot \Delta \mathbf{x} + \Delta \nabla N_{AB}^{j,k} \quad (15)$$

Здесь

- $\Delta \nabla \phi_{AB}^{j,k}$ - измеренная фазовая разность, содержащая неоднозначность
- $\lambda^{-1}(\mathbf{e}^j - \mathbf{e}^k) \cdot \Delta \mathbf{x}$ - скалярное произведение между разностью направляющих векторов на j -ый и k -ый спутники и искомым вектором относительных координат.
- $\Delta \nabla N_{AB}^{j,k}$ - целочисленная (в циклах) фазовая неоднозначность.

Исходное уравнение наблюдения для процедуры LAMBDA [6, стр.13, формула (2.1)]:

$$\mathbf{y} = B\mathbf{b} + A\mathbf{a} + \mathbf{e} \quad (16)$$

Здесь A и B - подматрицы, составляющие матрицу наблюдения H .

- $\mathbf{b} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T$ - вектор относительных координат
- $\mathbf{a} = (\Delta \nabla N_{AB}^{1,2}, \Delta \nabla N_{AB}^{1,3} \dots \Delta \nabla N_{AB}^{1,n+1})^T$ - вектор фазовых неоднозначностей

Задача наименьших квадратов для 16 использует критерий [4, стр.2], [5, стр.14]:

$$\min_{a,b} \|\mathbf{y} - B\mathbf{b} - A\mathbf{a}\|_{Q_y^{-1}}^2 = \min_{a,b} (\mathbf{y} - B\mathbf{b} - A\mathbf{a})^* Q_y^{-1} (\mathbf{y} - B\mathbf{b} - A\mathbf{a}) \quad (17)$$

Здесь $\mathbf{b} \in R^p$ и $\mathbf{a} \in Z^n$ - искомые векторы относительных координат и фазовых неоднозначностей.

Как показано в работе [3], целочисленная минимизация 17 может быть реализована с помощью двухшаговой процедуры. На первом шаге вычисляются МНК оценки искомого вектора и его корреляционной матрицы.

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{b}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q_a & Q_{ab} \\ Q_{ba} & Q_b \end{pmatrix}, \quad (18)$$

Результаты работы процедуры устранения неоднозначности позволяют пересчитать вектор фазовых измерений [6, стр.15, формула 2.7]:

$$\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}} - Q_t Q_a^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) \quad (19)$$

3 Результаты моделирования

3.1 RS_matv_50mm

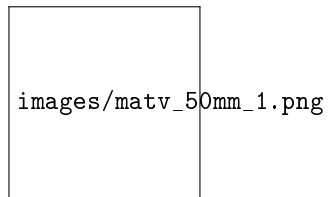


Рис. 1: RS_matv_50mm: A-B Time mismatch

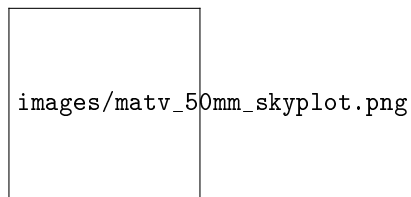


Рис. 2: RS_matv_50mm: A-B Sky plot

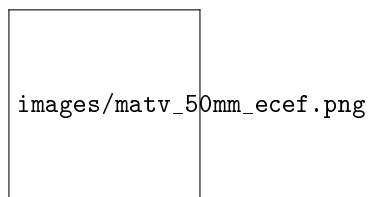


Рис. 3: RS_matv_50mm: ECEF baseline

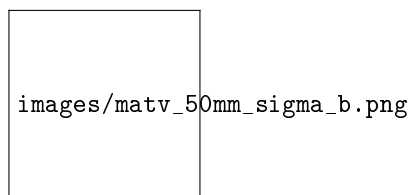


Рис. 4: RS_matv_50mm: ECEF variance

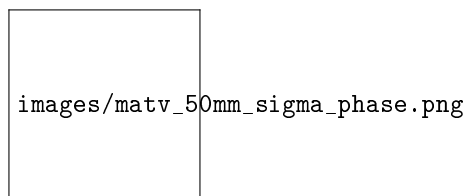


Рис. 5: RS_matv_50mm: phase double difference variances

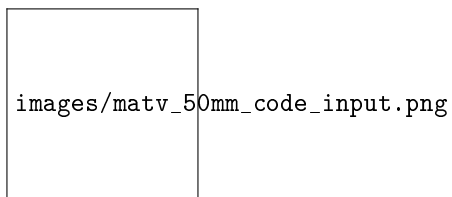


Рис. 6: RS_matv_50mm: Input code double differences

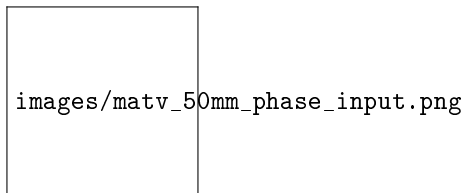


Рис. 7: RS_matv_50mm: Input phase double differences

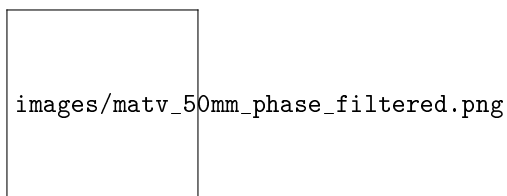


Рис. 8: RS_matv_50mm: Filtered and resolved phase double differences

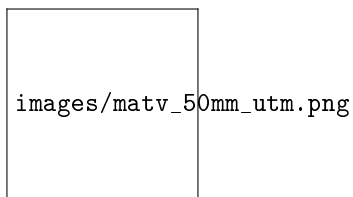


Рис. 9: RS_matv_50mm: UTM baseline

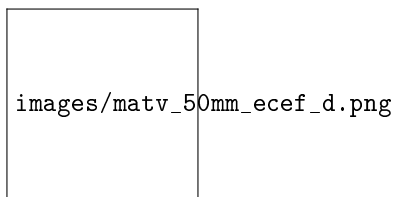


Рис. 10: RS_matv_50mm: ECEF distance

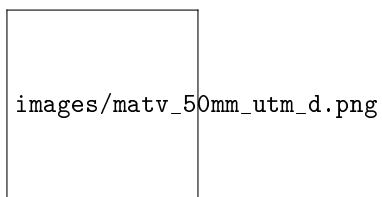


Рис. 11: RS_matv_50mm: UTM distance

4 Список продуктов relative

- Tersus-GNSS, <http://www.tersus-gnss.com/collections/all>

Список литературы

- [1] Stephen J. Comstock, Development of a Low-Latency, High Data Rate, Differential GPS Relative Positioning System for UAV Formation Flight control. THESIS Presented to the Faculty Department of Electrical and Computer Engineering Graduate School of Engineering and Management Air Force Institute of Technology, 2006.
- [2] Greg Welch, Gary Bishop, An Introduction to the Kalman Filter. ACM-2001. ACM Inc.
- [3] Teunissen, P.J.G. (1993): Least-squares estimation of the integer GPS ambiguities. Invited lecture. Section IV Theory and Methodology, IAG General meeting. Beijing, China. (16p.). Also in Delft Geodetic Computing Centre LGRseries No. 6.
- [4] P. Teunissen, P. de Jonge and C. Tiberius. The Lambda-method for fast gps surveying. International Symposium "GPS Technology Applications Bucharest Romania, September 26-29, 1995.
- [5] Peter Joosten, Christian Tiberius, Lambda: FAQs. - GPS Solutions (2002) 6:109–114. <http://www.utdallas.edu/aiken/GPSCCLASS/lambdaambigfulltext.pdf>
- [6] Paul de Jonge, Tiberius C. The LAMBDA method for integer ambiguity estimation: implementation aspects. <http://www.citg.tudelft.nl>
- [7] Mark Petovello, Cillian O'Driscoll. Carrier phase and its measurement for GNSS. -Inside GNSS, July-August 2010. <http://www.insidegnss.com/auto/julaug10-solutions.pdf>
- [8] Robert Odolinski, Peter J. G. Teunissen, Dennis Odijk. Combined BDS, Galileo, QZSS and GPS single-frequency RTK. <http://saegnss1.curtin.edu.au/Publications/2014/Odolinski2014Combined.pdf> -19 December 2013 / Accepted: 2 April 2014. Springer/GPS Solutions.
- [9] Sebastian Carcanague, Oliver Julien, Willy Vigneau, Cristophe Macabiau, Dr. Gunter Hein. Finding the right Algorithm. Low-cost, Single frequency GPS/GLONASS RTK for Road Users. Inside GNSS - November/December 2013. <http://www.insidegnss.com/auto/novdec13-WP.pdf>
- [10] M. Bahrami, M. Ziebart. Instantaneous Doppler-aided RTK positioning with single frequency receivers. - Position Location and Navigation Symposium (PLANS), 2010 IEEE/ION.
- [11] DR. Mark Petovello, How do you compute a relative position using GNSS? GNSS Solutions/Inside GNSS.