QAF: Quantitative Forschungsmethoden

Tarek Carls

09. April 2024

Über mich

- Tarek Carls
- Psychologe M.Sc.
- Studium an der Universität Regensburg
- Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität St.Gallen (Schweiz)
- Kontakt via Mail (tarek.carls@unisg.ch) oder LinkedIn
- Kursunterlagen: `https://github.com/tarek-carls/QAF`

Agenda

- **Session 1:** Grundlagen, induktive Statistik, Konfidenzintervalle
- **Session 2:** t-Tests, einfaktorielle ANOVA
- **Session 3:** Mehrfaktorielle ANOVA
- **Session 4:** Lineare Regression, logistische Regression
- **Session 5:** Fragen und Wiederholung

Agenda - Session 1

1. 1. Grundbegriffe
2. 2. Grundlagen der induktiven Statistik
3. 3. Konfidenzintervalle
4. 4. t-Tests

Agenda - Session 1

Zufallsexperiment

Definition

Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, der unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholt werden kann und dessen Ergebnis nicht vorhergesagt werden kann.

- Beispiele: Würfelwurf, Münzwurf, Ziehen einer Karte aus einem Kartenspiel
- Ergebnismenge Ω: Menge aller möglichen Ergebnisse
- Beispiel: Beim Würfelwurf ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Zufallsvariable

Definition

Eine Zufallsvariable ist eine Funktion, die jedem Element des Ergebnisraums eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zuordnet.

- Beispiel: Beim Würfelwurf könnte eine Zufallsvariable X definiert sein als $X(i) = i$, wobei i das Ergebnis des Würfelwurfs ist.
- X nimmt den Wert i mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ für $i = 1, 2, \ldots, 6$ an.
- Die Zufallsvariable kann verwendet werden, um Fragen wie Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gerade Zahl geworfen wird? zu beantworten.

Wahrscheinlichkeitsfunktion

Definition

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer diskreten Zufallsvariable X gibt für jedes x aus dem Wertebereich von X die Wahrscheinlichkeit an, dass X den Wert x annimmt.

- Beispiel: Münzwurf
- Ergebnisraum: $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$
- Zufallsvariable X: $X(\text{Kopf}) = 0$, $X(\text{Zahl}) = 1$
- Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(x)$: $p(0) = \frac{1}{2}$, $p(1) = \frac{1}{2}$

Dichtefunktion

Definition

Die Dichtefunktion (oder Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion) einer stetigen Zufallsvariable gibt die Wahrscheinlichkeitsdichte an jedem Punkt des Wertebereichs der Zufallsvariable an.

- Beispiel: Lebensdauer einer Glühbirne
- Zufallsvariable X: Lebensdauer in Stunden
- Dichtefunktion $f(x)$: könnte z.B. eine Exponentialverteilung sein
- $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$ und $f(x) = 0$ für $x < 0$
- Hier gibt $f(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit an, dass die Lebensdauer zwischen x und $x + dx$ liegt.

Verteilungsfunktion

Definition

Die Verteilungsfunktion $F(x)$ einer Zufallsvariable X gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass X einen Wert kleiner oder gleich x annimmt, also $F(x) = P(X \leq x)$.

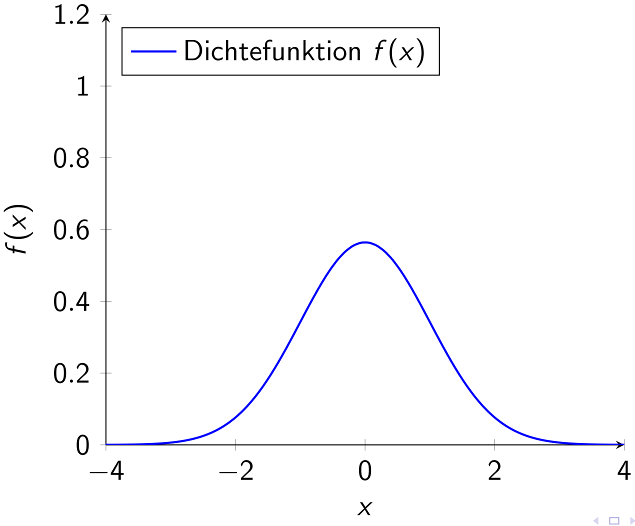
- Für stetige Zufallsvariablen ergibt sich die Verteilungsfunktion aus dem Integral der Dichtefunktion:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

- Beispiel: Lebensdauer einer Glühbirne mit Exponentialverteilung
- Dichtefunktion: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$
- Verteilungsfunktion: $F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = 1 - e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$

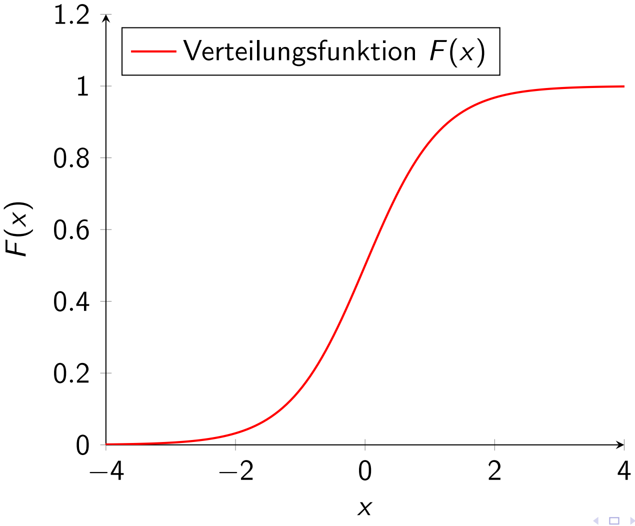
Dichte- und Verteilungsfunktion

- Dichtefunktion: beschreibt die Wahrscheinlichkeitsdichte



Verteilungsfunktion

- Verteilungsfunktion: gibt die kumulierte Wahrscheinlichkeit an



Die Normalverteilung

Definition

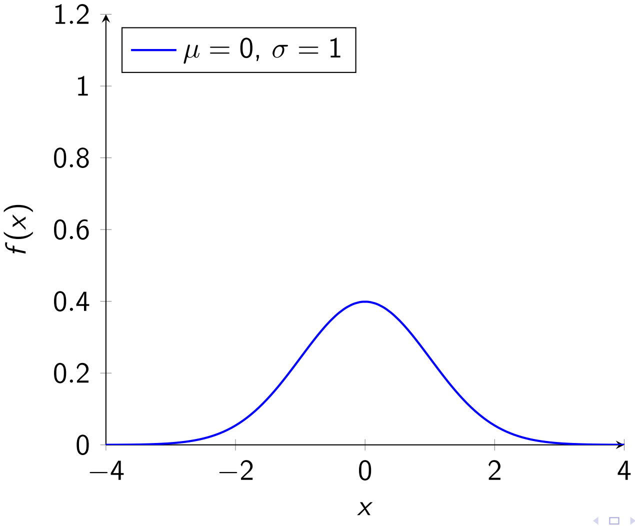
Eine Zufallsvariable X folgt einer Normalverteilung mit den Parametern μ (Erwartungswert) und σ^2 (Varianz), wenn ihre Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gegeben ist durch:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- Die Kurve ist symmetrisch um den Erwartungswert μ.
- Die Breite der Kurve wird durch die Standardabweichung σ bestimmt.
- 68% der Werte liegen innerhalb einer Standardabweichung vom Mittelwert, 95% innerhalb von zwei und 99.7% innerhalb von drei Standardabweichungen.
- Anwendungen: Messfehler, IQ-Scores, Blutdruckmessungen, etc.
- Wenn $\mu = 0$ und $\sigma = 1$, spricht man von einer Standardnormalverteilung. Die zugehörige Dichtefunktion wird oft mit $\phi(x)$ bezeichnet.

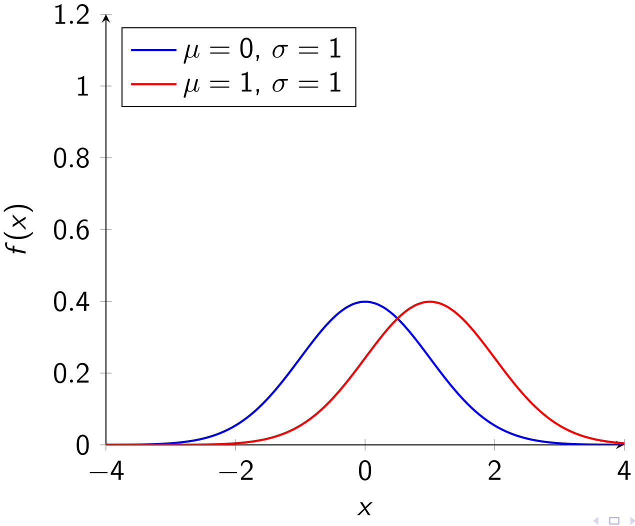
Die Normalverteilung

- Normalverteilung für verschiedene μ.



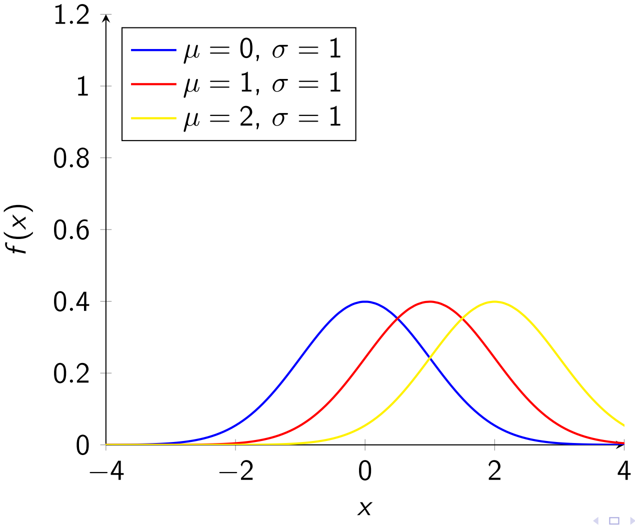
Die Normalverteilung

- Normalverteilung für verschiedene μ.



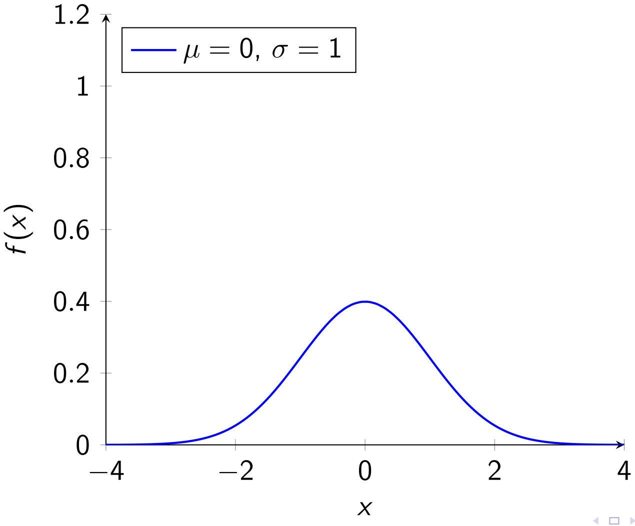
Die Normalverteilung

- Normalverteilung für verschiedene μ.



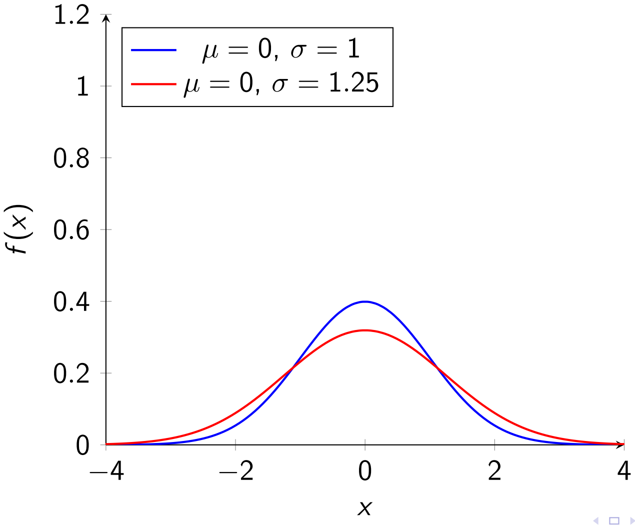
Die Normalverteilung

- Normalverteilung für verschiedene σ.



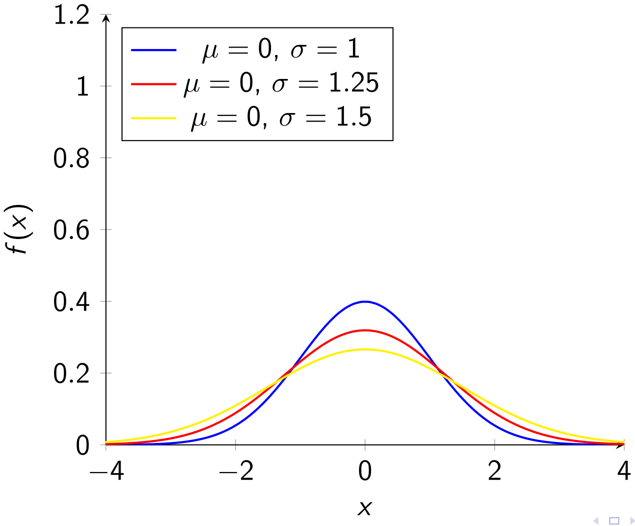
Die Normalverteilung

- Normalverteilung für verschiedene σ.



Die Normalverteilung

- Normalverteilung für verschiedene σ.



Die Chi-Quadrat-Verteilung

Definition

Eine Zufallsvariable X folgt einer Chi-Quadrat-Verteilung mit k Freiheitsgraden, wenn ihre Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gegeben ist durch:

$$f(x;k) = \begin{cases} \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

wobei Γ die Gamma-Funktion ist.

- Die Chi-Quadrat-Verteilung ergibt sich aus der Summe der Quadrate von k unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen.
- Formel: Wenn $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind, dann ist
  $$X = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_k^2$$
  chi-quadrat-verteilt mit k Freiheitsgraden.
- Anwendungen: Hypothesentests, Chi-Quadrat-Tests, Modellanpassungen, etc.
- Die Anzahl der Freiheitsgrade k beeinflusst die Form der Verteilung. Je größer k, desto symmetrischer wird die Verteilung.

Die t-Verteilung

Definition

Eine Zufallsvariable T folgt einer t-Verteilung mit v Freiheitsgraden, wenn ihre Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gegeben ist durch:

$$f(t; v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

wobei Γ die Gamma-Funktion ist.

- Die t-Verteilung ergibt sich aus der Kombination von Normalverteilungen: Wenn Z standardnormalverteilt ist und V chi-quadrat-verteilt mit v Freiheitsgraden, dann ist
$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/v}}$$
t-verteilt mit v Freiheitsgraden.
- Die t-Verteilung ist symmetrisch und ähnelt der Standardnormalverteilung, hat aber schwerere Ränder. Ihre Form wrid durch die Anzahl der Freiheitsgrade bestimmt.
- Anwendungen: t-Tests, Konfidenzintervalle, Regression, etc.

Die F-Verteilung

Definition

Eine Zufallsvariable F folgt einer F-Verteilung mit d_1 und d_2 Freiheitsgraden im Zähler bzw. Nenner, wenn ihre Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gegeben ist durch:

$$f(f; d_1, d_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{d_1+d_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d_2}{2}\right)} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{d_1/2} \frac{f^{d_1/2-1}}{\left(1+\frac{d_1}{d_2}f\right)^{(d_1+d_2)/2}}$$

wobei Γ die Gamma-Funktion ist.

- Die F-Verteilung ergibt sich aus dem Verhältnis zweier unabhängiger Chi-Quadrat-verteilter Zufallsvariablen, die jeweils durch ihre Freiheitsgrade geteilt wurden:
  $$F = \frac{X_1/d_1}{X_2/d_2}$$
  wobei $X_1 \sim \chi^2(d_1)$ und $X_2 \sim \chi^2(d_2)$.
- Die F-Verteilung wird verwendet, um Varianzen zu vergleichen und spielt eine zentrale Rolle in der Varianzanalyse (ANOVA).
- Die Verteilung ist rechtsschief, besonders für kleine Freiheitsgrade.

Übungsfragen: Zufallsvariable und Zufallsexperiment

1. Was ist ein Zufallsexperiment? Geben Sie ein Beispiel an.
2. Definieren Sie den Begriff *Zufallsvariable*.
3. Ein Würfel wird geworfen. Beschreiben Sie eine Zufallsvariable X und die Ergebnismenge Ω, die die Augenzahl des Wurfs repräsentiert.

Übungsfragen: Wahrscheinlichkeitsfunktion und Dichtefunktion

1. Erklären Sie den Unterschied zwischen einer Wahrscheinlichkeitsfunktion und einer Dichtefunktion.
2. Gegeben sei eine diskrete Zufallsvariable X mit den Werten $\{1, 2, 3\}$ und den Wahrscheinlichkeiten $P(X = 1) = 0,2$, $P(X = 2) = 0,5$, $P(X = 3) = 0,3$. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.
3. Was ist der Unterschied zwischen der Dichtefunktion und der Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariable?

Übungsfragen: Verteilungsfunktion und Normalverteilung

1. Wie ist die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable definiert?
2. Was sind die Eigenschaften einer Normalverteilung?

Lösungen: Zufallsvariable und Zufallsexperiment

1. Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, bei dem das Ergebnis unsicher ist. Beispiel: Würfelwurf.
2. Eine Zufallsvariable ist eine Funktion, die jedem Elementarereignis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zuordnet.
3. Die Zufallsvariable X: Augenzahl beim Würfelwurf. Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Lösungen: Wahrscheinlichkeitsfunktion und Dichtefunktion

1. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass eine diskrete Zufallsvariable einen bestimmten Wert annimmt. Die Dichtefunktion ist eine Funktion, die die Wahrscheinlichkeitsdichte einer stetigen Zufallsvariable beschreibt.
2. Erwartungswert von X: $E(X) = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,3 = 2,1$.
3. Die Dichtefunktion gibt die Wahrscheinlichkeitsdichte an einem Punkt an, während die Verteilungsfunktion die kumulierte Wahrscheinlichkeit bis zu einem bestimmten Punkt angibt.

Lösungen: Verteilungsfunktion und Normalverteilung

1. Die Verteilungsfunktion $F(x)$ einer Zufallsvariable X gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass X einen Wert kleiner oder gleich x annimmt: $F(x) = P(X \leq x)$.
2. Eine Normalverteilung ist symmetrisch, glockenförmig und wird vollständig durch ihren Mittelwert und ihre Standardabweichung beschrieben.

Agenda - Session 1

Stichprobe und Population

- **Population**: Die Gesamtheit aller Elemente, über die eine Aussage getroffen werden soll.
- **Stichprobe**: Eine Teilmenge der Population, die untersucht wird, um Rückschlüsse auf die gesamte Population zu ziehen.

Ziel der induktiven Statistik

Aus den Daten einer Stichprobe Rückschlüsse auf die zugrundeliegende Population ziehen.

Annahmen der induktiven Statistik

- Die Stichprobe ist **repräsentativ** für die Population.
- Die Stichprobe wurde **zufällig** aus der Population ausgewählt.
- Die Größe der Stichprobe ist ausreichend groß, um **verlässliche Schätzungen** zu ermöglichen.

Von der Stichprobe zur Population

- **Punktschätzung**: Einzelne Zahl, die einen unbekannten Parameter der Population schätzt (z.B. Mittelwert, Varianz).
- **Intervallschätzung**: Ein Intervall, das den unbekannten Parameter der Population mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit überdeckt (z.B. Konfidenzintervall).
- **Hypothesentest**: Überprüfung einer Annahme über einen Parameter der Population auf Basis der Stichprobendaten.

Beispiel: Mittelwertschätzung

- Angenommen, wir haben eine Stichprobe vom Gewicht von Äpfeln und wollen den durchschnittlichen Gewicht eines Apfels in der Population schätzen.
- **Punktschätzung**: Mittelwert der Stichprobe.
- **Intervallschätzung**: 95%-Konfidenzintervall für den Mittelwert.
- **Hypothesentest**: Testen, ob der durchschnittliche Gewicht eines Apfels in der Population 150g beträgt.

Wichtigkeit der Stichprobengröße

- Je größer die Stichprobe, desto genauer und verlässlicher sind die Schätzungen und Tests.
- Der **Zentrale Grenzwertsatz** besagt, dass der Mittelwert einer ausreichend großen Stichprobe normalverteilt ist, unabhängig von der Verteilung in der Population.
- Dies ermöglicht die Anwendung von Methoden der Normalverteilung, auch wenn die Population nicht normalverteilt ist.

Der Populationsmittelwert μ und seine Schätzung

- **Populationsmittelwert** μ: Der durchschnittliche Wert aller Elemente in der Population.
- **Stichprobenmittelwert** $\bar{X}$: Der durchschnittliche Wert aller Elemente in der Stichprobe. Ein Schätzer für μ.

Ziel

Den Populationsmittelwert μ so genau wie möglich auf Basis der Stichprobe schätzen.

Der Standardfehler

- Der **Standardfehler** gibt an, wie genau der Stichprobenmittelwert den Populationsmittelwert schätzt.
- Formel: $SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, wobei σ die Populationsstandardabweichung und n die Stichprobengröße ist.
- Je größer die Stichprobe, desto kleiner der Standardfehler.

Erwartungstreue

Definition

Ein Schätzer ist **erwartungstreu** (unbiased), wenn der Erwartungswert des Schätzers gleich dem zu schätzenden Parameter ist:

$$E(\bar{X}) = \mu$$

- Der Stichprobenmittelwert ist ein erwartungstreuer Schätzer für den Populationsmittelwert.

Konsistenz

Definition

Ein Schätzer ist **konsistent**, wenn er sich mit zunehmender Stichprobengröße dem zu schätzenden Parameter annähert:

$$\text{Wenn } n \to \infty, \text{ dann } \bar{X} \to \mu$$

- Der Stichprobenmittelwert ist ein konsistenter Schätzer für den Populationsmittelwert.

Die Varianz und die Stichprobenvarianz

- **Varianz** σ^2: Das durchschnittliche Quadrat der Abweichungen aller Elemente in der Population vom Populationsmittelwert.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$$

- **Stichprobenvarianz** s^2: Das durchschnittliche Quadrat der Abweichungen aller Elemente in der Stichprobe vom Stichprobenmittelwert.

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Varianz und Standardabweichung

- Die **Standardabweichung** ist die Quadratwurzel der Varianz.
- Populationsstandardabweichung: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
- Stichprobenstandardabweichung: $s = \sqrt{s^2}$
- Die Standardabweichung gibt die durchschnittliche Abweichung der Werte vom Mittelwert an.

Erwartungstreue der Stichprobenvarianz

- Die Stichprobenvarianz ist ein **erwartungstreuer** Schätzer für die Populationsvarianz.
$$E(s^2) = \sigma^2$$
- Der Faktor $(n-1)$ im Nenner (anstatt n) sorgt für diese Erwartungstreue.

Konsistenz der Stichprobenvarianz

- Ein Schätzer ist **konsistent**, wenn er sich mit zunehmender Stichprobengröße dem zu schätzenden Parameter annähert.
- Die Stichprobenvarianz ist ein konsistenter Schätzer für die Populationsvarianz.

$$\text{Wenn } n \to \infty, \text{ dann } s^2 \to \sigma^2$$

Die Logik des Nullhypothesen-Signifikanztests

- Der Nullhypothesen-Signifikanztest (NHST) ist eine weit verbreitete Methode in der Statistik, um Hypothesen über Populationen zu testen.
- Die Grundidee besteht darin, eine Nullhypothese (H_0) aufzustellen, die besagt, dass es keinen Effekt oder keinen Unterschied gibt, und dann zu prüfen, wie wahrscheinlich die beobachteten Daten unter dieser Annahme sind.

Schritte des NHST

1. **Nullhypothese aufstellen** (H_0): Eine Aussage, dass es keinen Effekt oder keinen Unterschied gibt.
2. **Alternativhypothese aufstellen** (H_1 oder H_A): Was wir zeigen wollen.
3. **Signifikanzniveau festlegen** (α): Die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 1. Art (fälschlicherweise die Nullhypothese ablehnen) zu begehen. Üblich sind 0.05 oder 0.01.
4. **Teststatistik berechnen**: Abhängig vom Test und den Daten.
5. **P-Wert berechnen**: Die Wahrscheinlichkeit, unter der Nullhypothese einen Wert der Teststatistik zu beobachten, der so extrem oder extremer ist als der berechnete.
6. **Entscheidung treffen**: Wenn der P-Wert kleiner oder gleich α ist, lehnen wir die Nullhypothese ab.

Fehlertypen im statistischen Test

- Beim Durchführen von statistischen Tests können verschiedene Arten von Fehlern auftreten.
- Diese Fehler können in zwei Hauptkategorien unterteilt werden: Fehler 1. Art und Fehler 2. Art.

Fehler 1. Art (Alpha-Fehler)

- Tritt auf, wenn wir die Nullhypothese fälschlicherweise ablehnen, obwohl sie wahr ist.
- Das Risiko, einen Fehler 1. Art zu begehen, wird durch das Signifikanzniveau α kontrolliert.
- Beispiel: Ein unschuldiger Angeklagter wird fälschlicherweise für schuldig befunden.

Fehler 2. Art (Beta-Fehler)

- Tritt auf, wenn wir die Nullhypothese fälschlicherweise nicht ablehnen, obwohl die Alternativhypothese wahr ist.
- Die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 2. Art zu begehen, wird mit β bezeichnet.
- Beispiel: Ein schuldiger Angeklagter wird fälschlicherweise für unschuldig befunden.

Kreuztabelle der Fehlertypen

	Nullhypothese wahr (H_0)	Alternativhypothese wahr (H_1)
Nullhypothese nicht ablehnen	Korrekte Entscheidung (1-α)	Fehler 2. Art (β)
Nullhypothese ablehnen	Fehler 1. Art (α)	Korrekte Entscheidung (Teststärke, 1-β)

Beispiel

- Angenommen, wir testen ein neues Medikament.
- H_0: Das Medikament hat keinen Effekt.
- H_1: Das Medikament hat einen Effekt.
- Fehler 1. Art: Wir schließen fälschlicherweise, dass das Medikament wirkt, obwohl es keinen Effekt hat.
- Fehler 2. Art: Wir schließen fälschlicherweise, dass das Medikament keinen Effekt hat, obwohl es wirkt.

Kritik und Missverständnisse

- Ein nicht signifikantes Ergebnis ($p > \alpha$) bedeutet nicht, dass die Nullhypothese wahr ist.
- Ein signifikantes Ergebnis ($p \leq \alpha$) bedeutet nicht, dass die Alternativhypothese wahr ist.
- Der p-Wert bezeichnet **nicht** die Wahrscheinlichkeit der Hypothesen. Er bezeichnet die Wahrscheinlichkeit der Daten unter der Annahme, dass die Nullhypothese gilt.
- Der P-Wert ist nicht die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese wahr ist.
- NHST kann anfällig für P-Hacking und andere Missbräuche sein.

Übungsfragen: Nullhypothesen-Signifikanztest

1. Was versteht man unter einem Nullhypothesen-Signifikanztest?
2. Erklären Sie den Unterschied zwischen einem einseitigen und einem zweiseitigen Test.
3. Was ist der p-Wert und wie interpretiert man ihn?

Übungsfragen: Fehler beim Hypothesentest

1. Was ist ein Fehler 1. Art und was sind die möglichen Konsequenzen?
2. Was ist ein Fehler 2. Art und in welchen Situationen kann er auftreten?
3. Wie kann man die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art kontrollieren?

Lösungen: Nullhypothesen-Signifikanztest

1. Ein Nullhypothesen-Signifikanztest ist ein statistisches Verfahren, bei dem überprüft wird, ob genügend Beweise vorliegen, um eine anfängliche Annahme (die Nullhypothese) zu verwerfen.
2. Ein einseitiger Test prüft, ob der Wert einer Statistik größer (oder kleiner) als ein kritischer Wert ist, während ein zweiseitiger Test prüft, ob die Statistik signifikant von einem bestimmten Wert abweicht, unabhängig von der Richtung.
3. Der p-Wert gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die beobachteten Daten (oder etwas Extremeres) auftreten würden, wenn die Nullhypothese wahr ist. Ein kleiner p-Wert (typischerweise 0,05) deutet darauf hin, dass die Nullhypothese abgelehnt werden kann.

Lösungen: Fehler beim Hypothesentest

1. Ein Fehler 1. Art tritt auf, wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird. Mögliche Konsequenzen können unnötige Kosten oder falsche Schlussfolgerungen sein.
2. Ein Fehler 2. Art tritt auf, wenn die Nullhypothese fälschlicherweise nicht abgelehnt wird, obwohl die Alternativhypothese wahr ist. Dies kann in Situationen mit geringer Stichprobengröße oder geringem Effekt auftreten.
3. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art kann durch die Wahl eines geeigneten Signifikanzniveaus (z.B. 0,05) kontrolliert werden.

Agenda - Session 1

Konfidenzintervalle

- Ein Konfidenzintervall gibt einen Bereich an, in dem wir den wahren Wert eines Parameters mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit erwarten.
- Beispiel: Ein 95% Konfidenzintervall für den Mittelwert bedeutet, dass wir zu 95% sicher sein können, dass der wahre Mittelwert in diesem Bereich liegt.
- Die Breite des Konfidenzintervalls hängt von der Standardabweichung der Stichprobe und der Größe der Stichprobe ab.

Formel für Konfidenzintervalle

- Die allgemeine Formel für ein Konfidenzintervall für den Mittelwert ist:

$$\bar{x} \pm t \cdot \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

- Dabei ist:
  - $\bar{x}$: Der Stichprobenmittelwert
  - t: Der t-Wert für das gewünschte Konfidenzniveau und die Freiheitsgrade der Stichprobe
  - s: Die Stichprobenstandardabweichung
  - n: Die Stichprobengröße
  - $\frac{s}{\sqrt{n}}$: Der Standardfehler der Stichprobe
- Das Konfidenzintervall gibt den Bereich an, in dem wir den wahren Mittelwert der Population mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit erwarten.

Beispielaufgabe

- Angenommen, wir haben eine Stichprobe mit den Werten: 2, 3, 5, 7, 11
- Wir möchten ein 95% Konfidenzintervall für den Mittelwert dieser Stichprobe berechnen.
- Schritte:
  1. Berechne den Mittelwert ($\bar{x}$) und die Standardabweichung (s) der Stichprobe.
  2. Bestimme den t-Wert für 95% Konfidenz und 4 Freiheitsgrade (t = 2.776).
  3. Berechne die Standardfehler (SE): $SE = \frac{s}{\sqrt{n}}$
  4. Berechne die Fehlerspanne (E): $E = t \cdot SE$
  5. Das Konfidenzintervall ist dann $\bar{x} \pm E$.

Berechnung des Konfidenzintervalls

- Mittelwert: $\bar{x} = 5.6$
- Standardabweichung: $s \approx 3.13$
- Standardfehler: $SE = \frac{3.13}{\sqrt{5}} \approx 1.4$
- Fehlerspanne: $E = 2.776 \cdot 1.4 \approx 3.89$
- 95% Konfidenzintervall: $5.6 \pm 3.89 = [1.71, 9.49]$

Interpretation

- Wir können zu 95% sicher sein, dass der wahre Mittelwert der Population, aus der diese Stichprobe stammt, zwischen 1.71 und 9.49 liegt.
- Beachte, dass dies nicht bedeutet, dass 95% der Werte in der Stichprobe in diesem Bereich liegen.

Übungsaufgabe: Konfidenzintervall für Arbeitszufriedenheit

Aufgabenstellung: Sie haben Daten von 25 Mitarbeitern zur Arbeitszufriedenheit, die auf einer Skala von 1 bis 10 bewertet wurde. Der berechnete Mittelwert der Arbeitszufriedenheit liegt bei 7,8 und die Varianz bei 1,2.

Aufgabe: Berechnen Sie ein 95% Konfidenzintervall für den durchschnittlichen Zufriedenheitswert der Mitarbeiter im Unternehmen.

Gegebene Werte:

- Mittelwert $(\bar{x}) = 7{,}8$
- Varianz $(s^2) = 1{,}2$
- Stichprobengröße $(n) = 25$
- t-Wert für 24 Freiheitsgrade (zweiseitig) $= 2{,}064$

Lösung: Konfidenzintervall für Arbeitszufriedenheit

Gegebene Werte: Mittelwert ($\bar{x}$) = 7,8 Varianz (s^2) = 1,2 Stichprobengröße (n) = 25 Konfidenzniveau = 95% t-Wert für 24 Freiheitsgrade (zweiseitig) = 2,064

Lösungsschritte:

1. Standardfehler berechnen:

$$SE = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1,2}}{\sqrt{25}} = \frac{1,095}{5} \approx 0,219$$

2. Fehlerspanne berechnen:

$$E = t \cdot SE = 2,064 \cdot 0,219 \approx 0,452$$

3. Konfidenzintervall berechnen:

$$\bar{x} \pm E = 7,8 \pm 0,452 = [7,348; 8,252]$$

Interpretation der Ergebnisse

Das 95% Konfidenzintervall für den durchschnittlichen Zufriedenheitswert der Mitarbeiter im Unternehmen liegt zwischen 7,348 und 8,252.

Was bedeutet das?

- Wir können zu 95% sicher sein, dass der wahre durchschnittliche Zufriedenheitswert der Mitarbeiter im Unternehmen zwischen 7,348 und 8,252 liegt.
- Das Unternehmen kann diese Informationen nutzen, um die Effektivität ihrer Maßnahmen zur Steigerung der Arbeitszufriedenheit zu bewerten.

Agenda - Session 1

Einführung in den t-Test

- Der t-Test ist eine statistische Methode, die verwendet wird, um zu prüfen, ob es signifikante Unterschiede zwischen den Mittelwerten zweier Gruppen gibt.
- Es gibt verschiedene Arten von t-Tests, einschließlich:
  - Einstichproben-t-Test
  - Unabhängiger Zweistichproben-t-Test
  - Abhängiger oder gepaarter t-Test
- Der t-Test setzt voraus, dass die Daten normalverteilt sind und die Varianzen der beiden Gruppen gleich sind (Homoskedastizität).

Logik des t-Tests

- Die Grundidee des t-Tests besteht darin, die Differenz zwischen den Mittelwerten der beiden Gruppen im Verhältnis zur Streuung innerhalb der Gruppen zu betrachten.
- Wenn die Differenz groß ist im Vergleich zur Streuung, kann dies als Hinweis darauf gewertet werden, dass die Gruppen unterschiedlich sind.
- Der t-Test gibt einen p-Wert aus, der die Wahrscheinlichkeit angibt, eine solche Differenz (oder eine größere) zu beobachten, wenn in Wirklichkeit kein Unterschied zwischen den Gruppen besteht.

Anwendung des t-Tests

- Der t-Test kann in verschiedenen Situationen angewendet werden, z.B.:
  - Vergleich der Durchschnittsnoten von zwei verschiedenen Lehrmethoden.
  - Überprüfung, ob eine neue Maschine präziser arbeitet als eine alte.
  - Vergleich der Blutdruckwerte vor und nach einer Behandlung.
- Wichtig ist, die richtige Art von t-Test für die Situation auszuwählen und sicherzustellen, dass die Voraussetzungen erfüllt sind.

Mathematische Formel für die Prüfgröße beim t-Test

- Für den unabhängigen Zweistichproben-t-Test bei unterschiedlichen Varianzen und Stichprobengrößen (Welch's t-Test):

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

  wo $\bar{X}_1$ und $\bar{X}_2$ die Stichprobenmittelwerte, s_1^2 und s_2^2 die Stichprobenvarianzen, und n_1 und n_2 die Stichprobengrößen der beiden Gruppen sind.
- Diese Formel berücksichtigt die unterschiedlichen Varianzen und Stichprobengrößen der beiden Gruppen.
- Der berechnete t-Wert kann dann verwendet werden, um die Nullhypothese zu testen, dass es keinen Unterschied zwischen den Mittelwerten der beiden Gruppen gibt.

Arten von t-Tests

- Es gibt verschiedene Arten von t-Tests, die in unterschiedlichen Situationen angewendet werden.
- Die Wahl des richtigen Tests hängt von der Art der Daten und der Forschungsfrage ab.

Einstichproben-t-Test

- Überprüft, ob der Mittelwert einer Stichprobe signifikant von einem bekannten oder hypothetischen Populationsmittelwert abweicht.
- Formel: $t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$
- Anwendung: Überprüfen, ob die durchschnittliche Arbeitszufriedenheit in einem Unternehmen von 5 (neutral) abweicht.

Unabhängiger Zweistichproben-t-Test

- Vergleicht die Mittelwerte von zwei unabhängigen Stichproben.
- Annahme gleicher Varianzen: $t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_p \cdot \sqrt{2/n}}$
- Annahme unterschiedlicher Varianzen (Welch's t-Test): $t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$
- Anwendung: Vergleich der Arbeitszufriedenheit zwischen zwei verschiedenen Abteilungen.

Abhängiger oder Gepaarter t-Test

- Vergleicht die Mittelwerte von zwei verbundenen Stichproben oder wiederholten Messungen.
- Formel: $t = \frac{\bar{D}}{s_D/\sqrt{n}}$
- Anwendung: Überprüfen, ob ein Trainingsprogramm die Arbeitszufriedenheit vor und nach der Teilnahme verändert hat.

Übungsaufgabe: t-Test bei unabhängigen Stichproben

Kontext: Ein Unternehmen hat zwei verschiedene Trainingsprogramme (A und B) entwickelt, um die Arbeitszufriedenheit seiner Mitarbeiter zu steigern. Um die Wirksamkeit der Programme zu bewerten, wurden zwei Gruppen von Mitarbeitern zufällig ausgewählt und jeweils einem der Trainingsprogramme zugewiesen. Nach Abschluss der Trainings wurden die Arbeitszufriedenheitswerte der Mitarbeiter gemessen.
Daten:

- Gruppe A (Training A): $n_1 = 15$, $\bar{X}_1 = 7,3$, $s_1^2 = 1,8$
- Gruppe B (Training B): $n_2 = 14$, $\bar{X}_2 = 8.1$, $s_2^2 = 2,1$

Aufgabe: Führen Sie einen t-Test bei unabhängigen Stichproben durch, um zu überprüfen, ob es einen signifikanten Unterschied in der Arbeitszufriedenheit zwischen den beiden Trainingsprogrammen gibt. Verwenden Sie ein Signifikanzniveau von 0,05.
Hinweise:

- Formel für den t-Wert bei unabhängigen Stichproben mit unterschiedlichen Varianzen:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Kritische t-Werte (zweiseitiger Test)

Freiheitsgrade	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,02$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,001$
15	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73
16	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69
17	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65
18	1.74	2.10	2.55	2.88	3.61
19	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58
20	1.73	2.09	2.53	2.85	3.55
21	1.72	2.08	2.52	2.83	3.52
22	1.72	2.07	2.51	2.82	3.50
23	1.72	2.07	2.50	2.81	3.47
24	1.71	2.06	2.49	2.80	3.45
25	1.71	2.06	2.49	2.79	3.43
26	1.71	2.06	2.48	2.78	3.41
27	1.71	2.05	2.47	2.77	3.39
28	1.70	2.05	2.47	2.76	3.37
29	1.70	2.05	2.46	2.76	3.35
30	1.70	2.04	2.46	2.75	3.34

Lösung: t-Test bei unabhängigen Stichproben (Teil 1)

Schritt 1: Annahmen prüfen

- Die Daten sind normalverteilt in beiden Gruppen.
- Die Varianzen in beiden Gruppen sind gleich.
- Die Beobachtungen sind unabhängig voneinander.

Schritt 2: Hypothesen aufstellen

- Nullhypothese H_0: Es gibt keinen Unterschied in der Arbeitszufriedenheit zwischen den beiden Trainingsprogrammen ($\mu_1 = \mu_2$).
- Alternativhypothese H_1: Es gibt einen Unterschied in der Arbeitszufriedenheit zwischen den beiden Trainingsprogrammen ($\mu_1 \neq \mu_2$).

Schritt 3: Teststatistik berechnen

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$t = \frac{7,3 - 8,1}{\sqrt{\frac{1,8}{15} + \frac{2,1}{14}}}$$

$$t \approx -1,83$$

Lösung: t-Test bei unabhängigen Stichproben (Teil 2)

Schritt 4: Freiheitsgrade berechnen

$$df = n_1 + n_2 - 2$$
$$df = 15 + 14 - 2$$
$$df = 27$$

Schritt 5: Kritischen t-Wert bestimmen Für ein Signifikanzniveau von 0,05 und 27 Freiheitsgraden ist der kritische t-Wert etwa 2,05.
Schritt 6: Entscheidung treffen Da der Betrag des berechneten t-Werts kleiner ist als der kritische t-Wert, können wir die Nullhypothese nicht ablehnen. Es gibt keinen signifikanten Unterschied in der Arbeitszufriedenheit zwischen den beiden Trainingsprogrammen auf dem 0,05 Signifikanzniveau.