QAF: Quantitative Forschungsmethoden

Tarek Carls

23. Oktober 2024

Agenda

- **Session 1:** Grundlagen, induktive Statistik, Konfidenzintervalle
- **Session 2:** t-Tests, einfaktorielle ANOVA
- **Session 3:** Mehrfaktorielle ANOVA
- **Session 4:** Lineare Regression, logistische Regression
- **Session 5:** Fragen und Wiederholung

Agenda - Session 2

1. 1. t-Tests
2. 2. Varianzanalyse - ANOVA (einfaktoriell)

Agenda - Session 2

1. 1. t-Tests
2. 2. Varianzanalyse - ANOVA (einfaktoriell)

Einführung in den t-Test

- Der t-Test ist eine statistische Methode, die verwendet wird, um zu prüfen, ob es signifikante Unterschiede zwischen den Mittelwerten zweier Gruppen gibt.
- Es gibt verschiedene Arten von t-Tests, einschließlich:
  - Einstichproben-t-Test
  - Unabhängiger Zweistichproben-t-Test
  - Abhängiger oder gepaarter t-Test
- Der t-Test setzt voraus, dass die Daten normalverteilt sind und die Varianzen der beiden Gruppen gleich sind (Homoskedastizität).

Logik des t-Tests

- Die Grundidee des t-Tests besteht darin, die Differenz zwischen den Mittelwerten der beiden Gruppen im Verhältnis zur Streuung innerhalb der Gruppen zu betrachten.
- Wenn die Differenz groß ist im Vergleich zur Streuung, kann dies als Hinweis darauf gewertet werden, dass die Gruppen unterschiedlich sind.
- Der t-Test gibt einen p-Wert aus, der die Wahrscheinlichkeit angibt, eine solche Differenz (oder eine größere) zu beobachten, wenn in Wirklichkeit kein Unterschied zwischen den Gruppen besteht.

Anwendung des t-Tests

- Der t-Test kann in verschiedenen Situationen angewendet werden, z.B.:
  - Vergleich der Durchschnittsnoten von zwei verschiedenen Lehrmethoden.
  - Überprüfung, ob eine neue Maschine präziser arbeitet als eine alte.
  - Vergleich der Blutdruckwerte vor und nach einer Behandlung.
- Wichtig ist, die richtige Art von t-Test für die Situation auszuwählen und sicherzustellen, dass die Voraussetzungen erfüllt sind.

Mathematische Formel für die Prüfgröße beim t-Test

- Für den unabhängigen Zweistichproben-t-Test bei unterschiedlichen Varianzen und Stichprobengrößen (Welch's t-Test):

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

  wo $\bar{X}_1$ und $\bar{X}_2$ die Stichprobenmittelwerte, s_1^2 und s_2^2 die Stichprobenvarianzen, und n_1 und n_2 die Stichprobengrößen der beiden Gruppen sind.
- Diese Formel berücksichtigt die unterschiedlichen Varianzen und Stichprobengrößen der beiden Gruppen.
- Der berechnete t-Wert kann dann verwendet werden, um die Nullhypothese zu testen, dass es keinen Unterschied zwischen den Mittelwerten der beiden Gruppen gibt.

Einführung in Effektstärken

- Die Effektstärke ist ein Maß für die Stärke des Zusammenhangs zwischen zwei Variablen in der Statistik. Sie hilft uns zu verstehen, ob ein statistisch signifikantes Ergebnis auch praktisch bedeutsam ist.
- Es gibt verschiedene Arten von Effektstärken, die in unterschiedlichen Situationen verwendet werden:
  - Cohen's d ist geeignet für den Vergleich von Mittelwerten aus zwei Gruppen.
  - Pearson's r misst die Stärke und Richtung einer linearen Beziehung zwischen zwei Variablen.
  - Eta-Quadrat (η^2) und Omega-Quadrat (ω^2) werden oft in der Varianzanalyse verwendet.
- Eine kleine Effektstärke bedeutet nicht, dass ein Effekt unwichtig ist, besonders wenn es um wichtige gesellschaftliche oder klinische Fragen geht.
- Cohen hat Richtwerte für kleine ($d = 0.2$), mittlere ($d = 0.5$) und große ($d = 0.8$) Effektstärken vorgeschlagen, aber diese sind kontextabhängig.

Berechnung der Effektstärke

- Cohen's d wird berechnet als:

$$d = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_{\text{gepoolt}}} \tag{1}$$

- Dabei ist $\bar{X}_1$ und $\bar{X}_2$ der Mittelwert der beiden Gruppen und s_{gepoolt} ist die gepoolte Standardabweichung.
- Die gepoolte Standardabweichung wird berechnet als:

$$s_{\text{gepoolt}} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \tag{2}$$

- Hierbei sind n_1 und n_2 die Gruppengrößen und s_1^2, s_2^2 die Varianzen der Gruppen.

Arten von t-Tests

- Es gibt verschiedene Arten von t-Tests, die in unterschiedlichen Situationen angewendet werden.
- Die Wahl des richtigen Tests hängt von der Art der Daten und der Forschungsfrage ab.

Einstichproben-t-Test

- Überprüft, ob der Mittelwert einer Stichprobe signifikant von einem bekannten oder hypothetischen Populationsmittelwert abweicht.
- Formel: $t = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$
- Anwendung: Überprüfen, ob die durchschnittliche Arbeitszufriedenheit in einem Unternehmen von 5 (neutral) abweicht.

Unabhängiger Zweistichproben-t-Test

- Vergleicht die Mittelwerte von zwei unabhängigen Stichproben.
- Annahme gleicher Varianzen: $t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_p \cdot \sqrt{2/n}}$
- Annahme unterschiedlicher Varianzen (Welch's t-Test):
  $t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$
- Anwendung: Vergleich der Arbeitszufriedenheit zwischen zwei verschiedenen Abteilungen.

Abhängiger oder Gepaarter t-Test

- Vergleicht die Mittelwerte von zwei verbundenen Stichproben oder wiederholten Messungen.
- Formel: $t = \frac{\bar{D}}{s_D/\sqrt{n}}$
- Anwendung: Überprüfen, ob ein Trainingsprogramm die Arbeitszufriedenheit vor und nach der Teilnahme verändert hat.

Übungsaufgabe: t-Test bei unabhängigen Stichproben

Kontext: Ein Unternehmen hat zwei verschiedene Trainingsprogramme (A und B) entwickelt, um die Arbeitszufriedenheit seiner Mitarbeiter zu steigern. Um die Wirksamkeit der Programme zu bewerten, wurden zwei Gruppen von Mitarbeitern zufällig ausgewählt und jeweils einem der Trainingsprogramme zugewiesen. Nach Abschluss der Trainings wurden die Arbeitszufriedenheitswerte der Mitarbeiter gemessen.
Daten:

- Gruppe A (Training A): $n_1 = 15$, $\bar{X}_1 = 7,3$, $s_1^2 = 1,8$
- Gruppe B (Training B): $n_2 = 14$, $\bar{X}_2 = 8.1$, $s_2^2 = 2,1$

Aufgabe: Führen Sie einen t-Test bei unabhängigen Stichproben durch, um zu überprüfen, ob es einen signifikanten Unterschied in der Arbeitszufriedenheit zwischen den beiden Trainingsprogrammen gibt. Verwenden Sie ein Signifikanzniveau von 0,05.
Hinweise:

- Formel für den t-Wert bei unabhängigen Stichproben mit unterschiedlichen Varianzen:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Kritische t-Werte (zweiseitiger Test)

Freiheitsgrade	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,02$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,001$
15	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73
16	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69
17	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65
18	1.74	2.10	2.55	2.88	3.61
19	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58
20	1.73	2.09	2.53	2.85	3.55
21	1.72	2.08	2.52	2.83	3.52
22	1.72	2.07	2.51	2.82	3.50
23	1.72	2.07	2.50	2.81	3.47
24	1.71	2.06	2.49	2.80	3.45
25	1.71	2.06	2.49	2.79	3.43
26	1.71	2.06	2.48	2.78	3.41
27	1.71	2.05	2.47	2.77	3.39
28	1.70	2.05	2.47	2.76	3.37
29	1.70	2.05	2.46	2.76	3.35
30	1.70	2.04	2.46	2.75	3.34

Lösung: t-Test bei unabhängigen Stichproben (Teil 1)

Schritt 1: Annahmen prüfen

- Die Daten sind normalverteilt in beiden Gruppen.
- Die Varianzen in beiden Gruppen sind gleich.
- Die Beobachtungen sind unabhängig voneinander.

Schritt 2: Hypothesen aufstellen

- Nullhypothese H_0: Es gibt keinen Unterschied in der Arbeitszufriedenheit zwischen den beiden Trainingsprogrammen ($\mu_1 = \mu_2$).
- Alternativhypothese H_1: Es gibt einen Unterschied in der Arbeitszufriedenheit zwischen den beiden Trainingsprogrammen ($\mu_1 \neq \mu_2$).

Schritt 3: Teststatistik berechnen

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$t = \frac{7,3 - 8,1}{\sqrt{\frac{1,8}{15} + \frac{2,1}{14}}}$$

$$t \approx -1,54$$

Lösung: t-Test bei unabhängigen Stichproben (Teil 2)

Schritt 4: Freiheitsgrade berechnen

$$df = n_1 + n_2 - 2$$
$$df = 15 + 14 - 2$$
$$df = 27$$

Schritt 5: Kritischen t-Wert bestimmen Für ein Signifikanzniveau von 0,05 und 27 Freiheitsgraden ist der kritische t-Wert etwa 2,05.
Schritt 6: Entscheidung treffen Da der Betrag des berechneten t-Werts kleiner ist als der kritische t-Wert, können wir die Nullhypothese nicht ablehnen. Es gibt keinen signifikanten Unterschied in der Arbeitszufriedenheit zwischen den beiden Trainingsprogrammen auf dem 0,05 Signifikanzniveau.

Agenda - Session 2

Einführung in einfaktorielle ANOVA

- ANOVA steht für Analysis of Variance (Varianzanalyse) und ist eine Methode, um zu prüfen, ob es signifikante Unterschiede zwischen den Mittelwerten mehrerer Gruppen gibt.
- Die einfaktorielle ANOVA wird verwendet, wenn es einen kategorialen Faktor mit zwei oder mehr Stufen gibt und man die Wirkung dieses Faktors auf eine kontinuierliche abhängige Variable untersuchen möchte.
- **Faktor:** Eine unabhängige Variable, die in der Analyse untersucht wird. Bei der einfaktoriellen ANOVA gibt es nur einen Faktor.
- **Faktorstufen:** Die verschiedenen Kategorien oder Gruppen innerhalb des Faktors.
- Die Grundidee der ANOVA ist es, die Varianz innerhalb der Gruppen mit der Varianz zwischen den Gruppen zu vergleichen.
- Die Teststatistik ist der F-Wert, der berechnet wird als das Verhältnis der Varianz zwischen den Gruppen zur Varianz innerhalb der Gruppen.
- Ein signifikanter F-Wert deutet darauf hin, dass mindestens ein Gruppenmittelwert signifikant unterschiedlich ist.
- Die ANOVA sagt uns jedoch nicht, welche Gruppen sich unterscheiden. Dafür sind Post-hoc-Tests erforderlich.

Datenschema einer Varianzanalyse

Beobachtung	**Faktorstufe 1**	**Faktorstufe 2**	**...**
1	x_{11}	x_{21}	...
2	x_{12}	x_{22}	...
...	...	...	...
n	x_{1n}	x_{2n}	...

Tabelle: Schema der Datenorganisation für eine einfaktorielle ANOVA.

- Jede Spalte repräsentiert eine Faktorstufe (z.B. eine Behandlungsgruppe).
- Jede Zeile repräsentiert eine Beobachtung oder Messung.
- x_{ij} steht für die i-te Beobachtung in der j-ten Faktorstufe.
- Die ANOVA analysiert die Varianzen innerhalb jeder Gruppe (Faktorstufe) und vergleicht sie mit den Varianzen zwischen den Gruppen.

Beispiel für eine Varianzanalyse in der Wirtschaftspsychologie

Beobachtung	Keine Pause	Kurze Pausen	Längere Pausen
1	50	60	65
2	45	65	70
3	55	62	68
...	...	...	...
n	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}

Tabelle: Datenorganisation für eine einfaktorielle ANOVA am Beispiel der Pausengestaltung und Arbeitsleistung.

- Die Tabelle zeigt die Anzahl der korrekt bearbeiteten Aufgaben für jede Pausengruppe.
- Jede Spalte repräsentiert eine Gruppe mit unterschiedlicher Pausengestaltung.
- Jede Zeile repräsentiert die Arbeitsleistung einer Person in der entsprechenden Gruppe.

Grundlegende Annahmen der einfaktoriellen ANOVA

- **Unabhängigkeit der Beobachtungen:** Die Daten in den Gruppen sind unabhängige Stichproben.
- **Normalverteilung:** Die abhängigen Variablen sind in jeder Gruppe normalverteilt.
- **Homogenität der Varianzen (Homoskedastizität):** Die Varianzen in den Gruppen sind gleich (Varianzhomogenität).
- **Messniveau:** Die abhängige Variable ist mindestens intervallskaliert.
- Diese Annahmen sind wichtig für die Gültigkeit der F-Statistik, die in der ANOVA verwendet wird.
- Bei Verletzung dieser Annahmen können alternative Methoden wie die nichtparametrische Kruskal-Wallis-H-Test in Betracht gezogen werden.

Modellgleichung der einfaktoriellen ANOVA

Die Modellgleichung für die einfaktorielle ANOVA lautet:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij} \tag{3}$$

- Y_{ij} ist der beobachtete Wert für die j-te Beobachtung in der i-ten Gruppe.
- μ ist der Gesamtmittelwert aller Beobachtungen.
- α_i ist der Effekt der i-ten Faktorstufe (Gruppe).
- ϵ_{ij} ist der zufällige Fehler (Residuum) der j-ten Beobachtung in der i-ten Gruppe.
- Die Modellgleichung zerlegt die Gesamtvarianz in die Varianz, die durch den Faktor (zwischen den Gruppen) und die zufällige Varianz (innerhalb der Gruppen) erklärt wird.

Null- und Alternativhypothese in der einfaktoriellen ANOVA

Nullhypothese (H_0)

Die Nullhypothese besagt, dass es keinen Unterschied zwischen den Gruppenmittelwerten gibt, d.h., alle Gruppeneffekte sind gleich Null:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$$

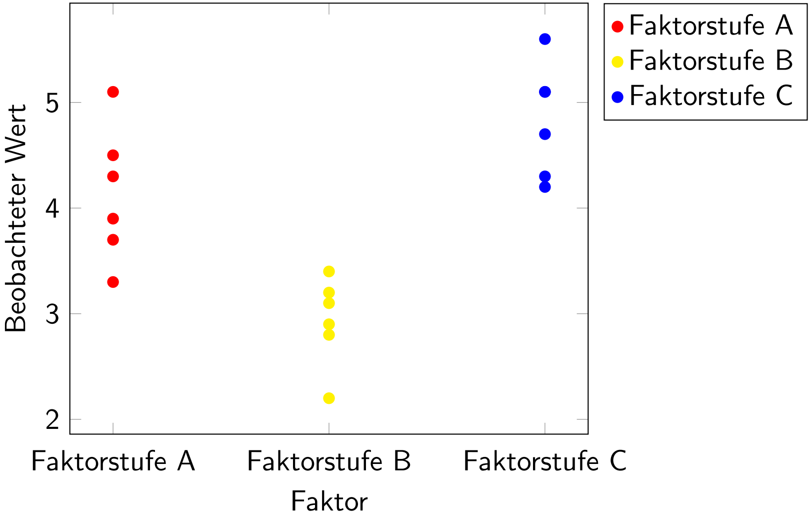
Alternativhypothese (H_1)

Die Alternativhypothese besagt, dass mindestens zwei Gruppenmittelwerte sich unterscheiden, d.h., mindestens ein Gruppeneffekt ist ungleich Null:

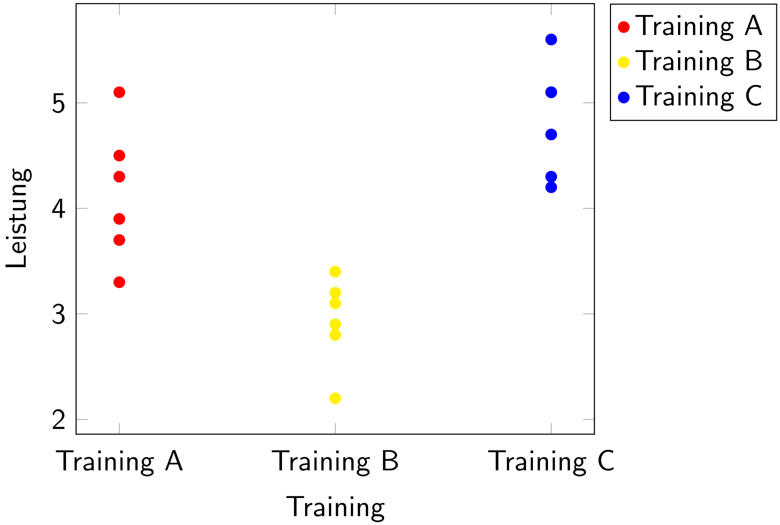
$$H_1 : \text{mindestens ein } \alpha_i \neq 0$$

Wenn der F-Wert groß genug ist und die entsprechende p-Wert kleiner als das Signifikanzniveau (α), wird die Nullhypothese verworfen.

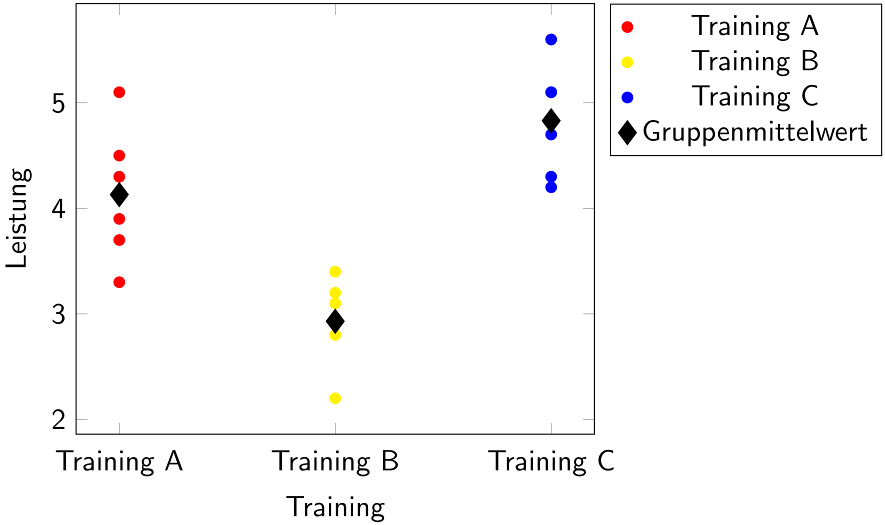
Scatterplot für ANOVA mit drei Faktorstufen



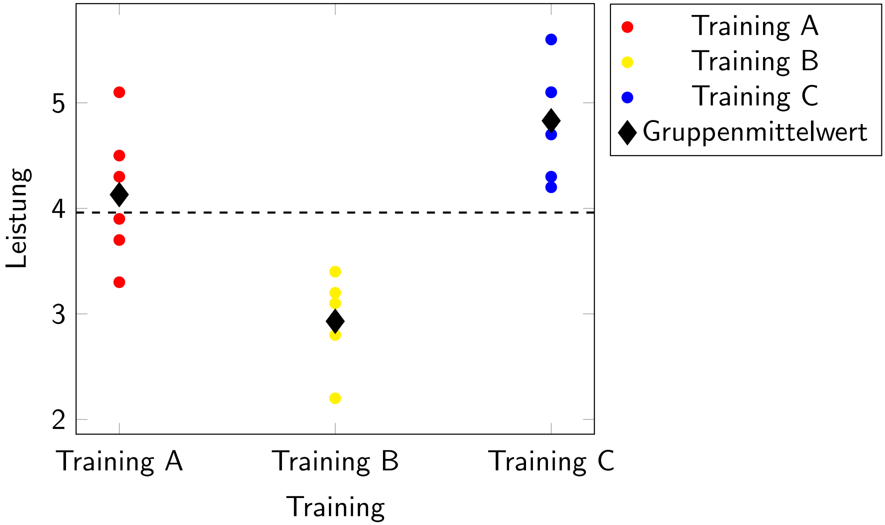
Scatterplot für ANOVA mit drei Faktorstufen



Scatterplot für ANOVA mit drei Faktorstufen



Scatterplot für ANOVA mit drei Faktorstufen



Quadratsummenzerlegung in der ANOVA

- Die Varianzanalyse (ANOVA) basiert auf der Zerlegung der Gesamtvarianz in einzelne Komponenten.
- Die Gesamtvarianz wird in zwei Teile zerlegt:
  1. Die **Zwischengruppenvarianz** (Zwischengruppenquadratsumme), die die Varianz zwischen den verschiedenen Gruppen misst.
  2. Die **Innergruppenvarianz** (Innergruppenquadratsumme), die die Varianz innerhalb jeder Gruppe misst.
- Diese Zerlegung ermöglicht es uns, zu beurteilen, ob die Unterschiede zwischen den Gruppenmittelwerten signifikant sind.

Formel für die Quadratsummenzerlegung

Die Gesamtquadratsumme (SST) wird wie folgt zerlegt:

$$SST = SSB + SSW \tag{4}$$

- SST (Total Sum of Squares) misst die Gesamtvarianz in den Daten.
- SSB (Sum of Squares Between groups) misst die Varianz, die auf Unterschiede zwischen den Gruppen zurückzuführen ist.
- SSW (Sum of Squares Within groups) misst die Varianz innerhalb der Gruppen.
- Die Signifikanz der Unterschiede zwischen den Gruppen wird durch den F-Test bewertet, der auf diesen Quadratsummen basiert.

Berechnung der Zwischengruppenquadratsumme (SSB)

Die Zwischengruppenquadratsumme wird berechnet durch:

$$SSB = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{M}_i - \bar{M})^2 \tag{5}$$

- n_i ist die Anzahl der Beobachtungen in der i-ten Gruppe.
- $\bar{M}_i$ ist der Mittelwert der i-ten Gruppe.
- $\bar{M}$ ist der Gesamtmittelwert aller Beobachtungen.
- SSB misst, wie stark die Gruppenmittelwerte vom Gesamtmittelwert abweichen.

Berechnung der Innergruppenquadratsumme (SSW)

Die Innergruppenquadratsumme wird berechnet durch:

$$SSW = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (M_{ij} - \bar{M}_i)^2 \tag{6}$$

- M_{ij} ist der j-te beobachtete Wert in der i-ten Gruppe.
- $\bar{M}_i$ ist der Mittelwert der i-ten Gruppe.
- SSW misst die Varianz innerhalb der Gruppen, also die natürliche Streuung der Daten.

Vereinfachte Berechnung der Innergruppenquadratsumme (SSW)

Wenn die Varianz innerhalb der Gruppen bekannt ist, kann die Innergruppenquadratsumme vereinfacht berechnet werden durch:

$$SSW = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot s_i^2 \tag{7}$$

- n_i ist die Anzahl der Beobachtungen in der i-ten Gruppe.
- s_i^2 ist die geschätzte Varianz innerhalb der i-ten Gruppe.
- n_i ist die Anzahl der Beobachtungen in der i-ten Gruppe.
- Die vereinfachte Formel summiert die Produkte aus der Varianz und der Stichprobengrösse jeder Gruppe.
- Diese Berechnung ist effizienter, wenn die Varianzen bereits bekannt sind und vermeidet die Notwendigkeit, jede einzelne Abweichung vom Gruppenmittelwert zu quadrieren.

Einführung in die mittlere Quadratsumme

- Die mittlere Quadratsumme (MS) ist ein Maß für die durchschnittliche Varianz.
- Sie wird berechnet, indem die Quadratsumme (SS) durch die entsprechenden Freiheitsgrade (df) dividiert wird.
- Es gibt zwei Arten von mittleren Quadratsummen in der ANOVA:
  1. Die mittlere Quadratsumme zwischen den Gruppen (MSB).
  2. Die mittlere Quadratsumme innerhalb der Gruppen (MSW).
- Diese Werte werden verwendet, um die F-Statistik zu berechnen, die bestimmt, ob es signifikante Unterschiede zwischen den Gruppen gibt.

Berechnung der mittleren Quadratsummen

Die mittleren Quadratsummen werden wie folgt berechnet:

Mittlere Quadratsumme zwischen den Gruppen (MSB)

$$MSB = \frac{SSB}{df_{zwischen}} \tag{8}$$

- SSB ist die Zwischengruppenquadratsumme.
- $df_{zwischen}$ ist die Anzahl der Freiheitsgrade zwischen den Gruppen, berechnet als $k - 1$, wobei k die Anzahl der Gruppen ist.

Mittlere Quadratsumme innerhalb der Gruppen (MSW)

$$MSW = \frac{SSW}{df_{innerhalb}} \tag{9}$$

- SSW ist die Innergruppenquadratsumme.
- $df_{innerhalb}$ ist die Anzahl der Freiheitsgrade innerhalb der Gruppen, berechnet als $N - k$, wobei N die Gesamtzahl der Beobachtungen ist.

Der F-Bruch in der ANOVA

- Der F-Bruch (F-Statistik) ist das Verhältnis der mittleren Quadratsummen zwischen den Gruppen zur mittleren Quadratsumme innerhalb der Gruppen und bei der ANOVA unsere Prüfgrösse.

$$F = \frac{MSB}{MSW} \tag{10}$$

- F ist die F-Statistik.
- MSB ist die mittlere Quadratsumme zwischen den Gruppen.
- MSW ist die mittlere Quadratsumme innerhalb der Gruppen.
- Ein hoher F-Wert deutet darauf hin, dass die Variabilität zwischen den Gruppen größer ist als die Variabilität innerhalb der Gruppen, was auf signifikante Gruppeneffekte hinweisen kann.

Effektstärke Eta-Quadrat (η^2) in der ANOVA

- Eta-Quadrat (η^2) ist ein Maß für die Effektstärke in der Varianzanalyse.
- Es gibt den Anteil der Gesamtvarianz an, der durch den untersuchten Faktor erklärt wird.
- Ein höheres η^2 deutet auf einen stärkeren Effekt des Faktors hin.

$$\eta^2 = \frac{SSB}{SST} \tag{11}$$

- SSB ist die Zwischengruppenquadratsumme.
- SST ist die Gesamtquadratsumme.
- η^2 variiert zwischen 0 und 1, wobei 0 keinen Effekt und 1 einen maximalen Effekt bedeutet.
- In der Praxis werden Werte von η^2 als klein (0.01), mittel (0.06) oder groß (0.14) interpretiert.

Voraussetzungen für die ANOVA

Bevor Sie eine ANOVA durchführen, stellen Sie sicher, dass folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

1. Unabhängigkeit der Beobachtungen
2. Homogenität der Varianzen (Levene-Test)
3. Normalverteilung der Residuen (Shapiro-Wilk-Test)

Diese Voraussetzungen müssen erfüllt sein, um valide Ergebnisse zu gewährleisten.

Berechnung der Quadratsummen

Die Quadratsummen sind wie folgt zu berechnen:

Zwischengruppenquadratsumme (SSB)

$$SSB = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \tag{12}$$

Innergruppenquadratsumme (SSW)

$$SSW = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 \tag{13}$$

Gesamtquadratsumme (SST)

$$SST = SSB + SSW \tag{14}$$

Berechnung der Freiheitsgrade

Die Freiheitsgrade für die ANOVA sind wie folgt zu berechnen:

Freiheitsgrade zwischen den Gruppen (df$_{zwischen}$)

$$df_{zwischen} = k - 1 \tag{15}$$

Freiheitsgrade innerhalb der Gruppen (df$_{innerhalb}$)

$$df_{innerhalb} = N - k \tag{16}$$

Gesamtfreiheitsgrade (df$_{gesamt}$)

$$df_{gesamt} = N - 1 \tag{17}$$

Berechnung der mittleren Quadratsummen und des F-Bruchs

Mittlere Quadratsumme zwischen den Gruppen (MSB)

$$MSB = \frac{SSB}{df_{zwischen}} \tag{18}$$

Mittlere Quadratsumme innerhalb der Gruppen (MSW)

$$MSW = \frac{SSW}{df_{innerhalb}} \tag{19}$$

F-Bruch (F-Statistik)

$$F = \frac{MSB}{MSW} \tag{20}$$

Ein signifikanter F-Wert deutet darauf hin, dass mindestens ein Gruppenmittelwert signifikant vom Gesamtmittelwert abweicht.

Beispielaufgabe - Einfaktorielle ANOVA

Kontext: Ein Unternehmen möchte die Arbeitszufriedenheit in drei verschiedenen Abteilungen untersuchen: Vertrieb, IT und Personalwesen. Es wird eine Umfrage zur Arbeitszufriedenheit durchgeführt, wobei die Zufriedenheit auf einer Skala von 1 bis 10 bewertet wird.
Aufgabe: Führen Sie eine einfaktorielle ANOVA durch, um festzustellen, ob es signifikante Unterschiede in der Arbeitszufriedenheit zwischen den Abteilungen gibt.

Datenübersicht

Abteilung	Vertrieb	IT	Personalwesen
Mitarbeiter 1	6	8	5
Mitarbeiter 2	7	7	6
Mitarbeiter 3	5	9	4
Mitarbeiter 4	6	8	5
Mitarbeiter 5	7	7	6
Mitarbeiter 6	6	8	5
Mitarbeiter 7	7	7	6
Mitarbeiter 8	5	9	4
Mittelwert	6.1	7.9	5.1
Varianz	0.39	0.39	0.39

Tabelle: Arbeitszufriedenheit in den Abteilungen mit Varianzen

Aufgabenstellung

1. Ermitteln Sie die Zwischengruppenquadratsumme (SSB), die Innergruppenquadratsumme (SSW) und die gesamte Quadratsumme (SST).
2. Bestimmen Sie die Freiheitsgrade für SSB und SSW.
3. Berechnen Sie die mittleren Quadratsummen (MSB und MSW).
4. Ermitteln Sie den F-Bruch und vergleichen Sie diesen mit dem kritischen F-Wert (F_{krit}) aus der F-Verteilungstabelle.
5. Berechnen Sie die Effektstärke Eta-Quadrat (η^2).
6. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Schritt 1: Berechnung von SSB und SSW

Zwischengruppenquadratsumme (SSB):

$$SSB = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{M}_i - \bar{M}_{gesamt})^2 \tag{21}$$

Innergruppenquadratsumme (SSW):

$$SSW = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot s_i^2 \tag{22}$$

Berechnung:

- SSB und SSW werden mit den tatsächlichen Werten berechnet.

Schritt 1: Zwischengruppenquadratsumme (SSB)

Die Zwischengruppenquadratsumme (SSB) ist die Summe der quadrierten Abweichungen der Gruppenmittelwerte vom Gesamtmittelwert, multipliziert mit der Anzahl der Beobachtungen in jeder Gruppe.

$$SSB = \sum n_i(\bar{Y}_i - \bar{Y}_{gesamt})^2 \tag{23}$$

Berechnung:

- $\bar{Y}_{Vertrieb} = 6.1,\ \bar{Y}_{IT} = 7.9,\ \bar{Y}_{Personalwesen} = 5.1$
- $SSB = 8(6.1 - 6.4)^2 + 8(7.9 - 6.4)^2 + 8(5.1 - 6.4)^2 = 32.24$

Schritt 1: Innergruppenquadratsumme (SSW)

Die Innergruppenquadratsumme (SSW) ist die Summe der quadrierten Abweichungen der Einzelwerte vom jeweiligen Gruppenmittelwert. Wir errechnen sie hier über die Varianzen, die angegeben sind.

$$SSW = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot s_i^2 \tag{24}$$

Berechnung:

- $SSW = 8 \cdot .39 + 8 \cdot .39 + 8 \cdot .39 = 9.36$

Schritt 1: Berechnung der Gesamtquadratsumme (SST)

Die Gesamtquadratsumme (SST) ist die Summe der quadrierten Abweichungen aller Einzelwerte vom Gesamtmittelwert.

$$SST = \sum (Y_{ij} - \bar{Y}_{gesamt})^2 \tag{25}$$

Da wir jedoch SSW und SSB bereits kennen, können wir sie einach aus der Summe dieser beiden Werte berechnen:

$$SST = SSW + SSB \tag{26}$$

$$SST = 9.36 + 32.24 \tag{27}$$

$$SST = 41.6 \tag{28}$$

Schritt 2: Freiheitsgrade und mittlere Quadratsummen

Freiheitsgrade:

- $df_{zwischen} = k - 1$
- $df_{innerhalb} = N - k$

Mittlere Quadratsummen:

- $MSB = \frac{SSB}{df_{zwischen}}$
- $MSW = \frac{SSW}{df_{innerhalb}}$

Berechnung:

- Die Freiheitsgrade und mittleren Quadratsummen werden berechnet.

Schritt 2: Freiheitsgrade (df)

Die Freiheitsgrade für Zwischengruppen (df zwischen) und Innergruppen (df innerhalb).

- $df_{zwischen} = k - 1$ (wobei k die Anzahl der Gruppen ist)
- $df_{innerhalb} = N - k$ (wobei N die Gesamtzahl der Beobachtungen ist)

Berechnung:

- $df_{zwischen} = 3 - 1 = 2$
- $df_{innerhalb} = 24 - 3 = 21$

Schritt 3: Mittlere Quadratsummen (MSB und MSW)

Die mittleren Quadratsummen werden berechnet, indem man die Quadratsummen durch die entsprechenden Freiheitsgrade teilt.

$$MSB = \frac{SSB}{df_{zwischen}}, \quad MSW = \frac{SSW}{df_{innerhalb}} \tag{29}$$

Berechnung:

$$MSB = \frac{32.24}{2} = 16.12 \tag{30}$$

$$MSW = \frac{9.36}{21} = 0.446 \tag{31}$$

Schritt 4: Berechnung des F-Bruchs

F-Bruch (F-Statistik):

$$F = \frac{MSB}{MSW} \tag{32}$$

Berechnung:

- Der F-Bruch wird mit den berechneten mittleren Quadratsummen bestimmt.

Schritt 4: F-Statistik

Die F-Statistik ist das Verhältnis der mittleren Quadratsummen zwischen den Gruppen zur mittleren Quadratsumme innerhalb der Gruppen.

$$F = \frac{MSB}{MSW} \tag{33}$$

Berechnung:

$$F = \frac{16.12}{0.446} = 36.14 \tag{34}$$

Schritt 5: Effektstärke Eta-Quadrat (η^2)

Effektstärke Eta-Quadrat:

$$\eta^2 = \frac{SSB}{SST} \tag{35}$$

Berechnung:

- η^2 wird mit den berechneten Quadratsummen bestimmt.

Schritt 7: Effektstärke Eta-Quadrat (η^2)

Eta-Quadrat ist ein Maß für die Effektstärke und gibt den Anteil der Varianz an, der durch die Gruppenunterschiede erklärt wird.

$$\eta^2 = \frac{SSB}{SST} \tag{36}$$

Berechnung:

- $\eta^2 = \frac{32.24}{41.6} \approx 0.775$