Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация «Тамбовский колледж социокультурных технологий»

ШИЛЬДЯЕВА Л.В.

Информатика. Системы счисления

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Тамбов, 2020

ББК 32.972.202я73
Ш 60

Одобрено к изданию на заседании Методического совета АНПОО ТКСКТ «28» декабря 2020 г., протокол № 5.

Автор: Шильдяева Л.В., преподаватель АНПОО «Тамбовский колледж социокультурных технологий».

Рецензент: Зайцева Л.А., преподаватель физики и информатики высшей категории АНПОО "Кооперативный техникум Тамбовского облпотребсоюза".

Шильдяева, Л.В.

Информатика. Системы счисления. МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ / Л.В. Щильдяева. – Тамбов: Изд-во ООО Орион, 2020. – 32 с. – 30 экз.

Настоящее методическое пособие предназначено для изучения теоретического материала и решения задач по предмету «Информатика» на тему: «Системы счисления».

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В курсе информатики теме “Системы счисления” уделяется внимание основным, хотя материал несет в себе большую методическую и познавательную нагрузку.

Цель данного пособия – научить обучающихся:

- знать, что представляет собой система счисления;
- различать позиционные и непозиционные системы счисления;
- находить наименьшее основание позиционной системы;
- представлять запись числа в развернутом виде;
- составлять таблицы перехода из одной системы счисления в другую систему счисления;
- переводить целое, дробное и смешанное числа из десятичной системы счисления в любую другую систему счисления;
- переводить целое, дробное и смешанное числа из любой системы счисления в десятичную систему счисления;
- переводить целое, дробное и смешанное числа из системы счисления с основанием 2 в систему счисления с основанием 2^n;
- переводить целое, дробное и смешанное числа из системы счисления с основанием 2^n в систему счисления с основанием 2;
- производить арифметические действия с числами в двоичной системе счисления;
- производить арифметические действия с числами в любой позиционной системе счисления.

1. ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ СЧЕТА

Счет появился тогда, когда человеку потребовалось информировать своих сородичей о количестве обнаруженных им предметов. В разных местах придумывались разные способы передачи численной информации: от зарубок по числу предметов до хитроумных знаков - цифр. Во многих местах люди стали использовать для счета пальцы. Одна из таких систем счета и стала общеупотребительной - десятичная. До сих пор существуют в Полинезии племена с 20-чной системой счисления (с учетом пальцев на ногах).

Сегодня мы настолько сроднились с 10-чной системой счисления, что не представляем себе иных способов счета, пока не вспомним о времени. Нас не смущает, что в минуте 60 секунд, а не 10 или 100. И в часе 60 минут, но более удивительно, что в сутках 24 часа, а в году 365 дней.

Таким образом:

- время (часы и минуты) мы считаем в 60-чной системе,
- сутки - в 24-чной,
- недели в 7-чной,
- месяцы совсем хитро - каждый по-своему,
- года в 12-чной, если в месяцах, или в 365-чной, если в днях.

Другими словами, все дело в привычке. Конечно, когда идет дождь, можно раскрыть зонтик и не думать, почему он пошел, но разобраться в причинах тоже полезно. Сейчас мы постараемся понять принцип счета.

Как мы считаем? Обычно, когда нужно посчитать что-то в небольшом количестве, загибают пальцы в кулак или наоборот - отгибают пальцы из сжатого кулака. Мы будем использовать второй способ - это удобнее для иллюстраций.

Пока счет не превышает десятка, мы никаких затруднений не испытываем. Но вот число превысило десяток - и мы в растерянности. В Полинезии это состояние наступает реже - после двадцати.

Если мы не в одиночестве и наш товарищ не занят чем-то важным, можно попросить его отогнуть один палец и после этого снова сжать свои десять - теперь каждый палец на его руке будет означать десять отогнутых наших. Поэтому каждый раз, когда все наши десять пальцев окажутся разжатыми, мы будем просить его освободить их, отгибая следующий палец.

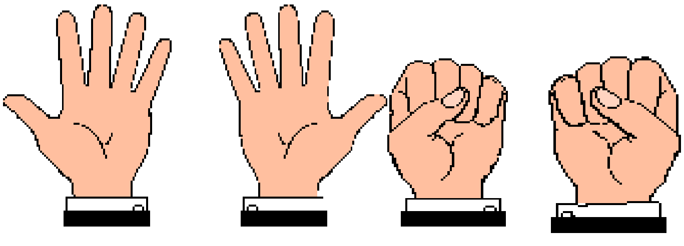


Рис. 1. Счет десятков

Только давай, чтобы не запутаться, договоримся, что первый будет справа, а второй, третий и все последующие, если нужно, будут становиться левее.

Таблица 1. Сотни

<table>
<tr><td rowspan="2">Значит, когда мы в одиночестве, больше десятка предметов нам не посчитать. Когда нас двое, второй может насчитать уже сотню!</td><td colspan="5">количество пальцев</td></tr>
<tr><td>10</td><td></td><td>1</td><td></td><td>0</td></tr>
</table>

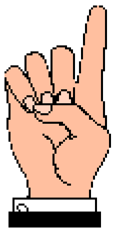
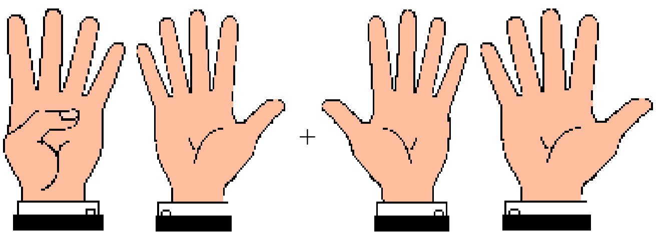


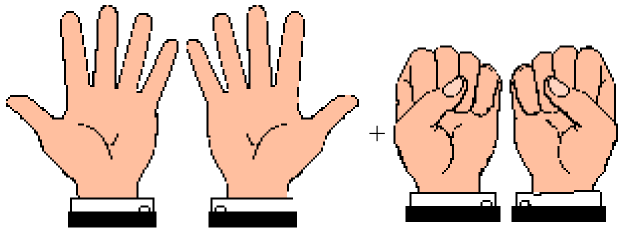
Рис. 2. Один десяток

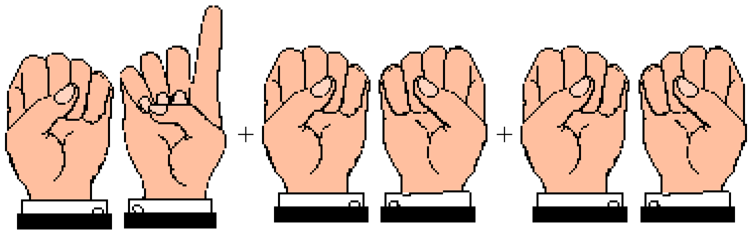
Давайте возьмем число 374. Все видят, что здесь 3 сотни, 7 десятков и 4 единицы. Ты постарайся представить, как это посчитать на пальцах. Я буду первым, ты будешь вторым, а третьего выбирай сам.

Не беспокойся! Не будем мы все до конца пальцами считать. Чтобы понять, достаточно продумать только несколько ключевых шагов и сообразить, как это закончится. Мы не первобытные люди. Кое-чему успели научиться за несколько тысячелетий.

Таблица 2. Счет сотен

<table>
<tr><th>Этап</th><th>Описа-
ние</th><th>Иллюстрация
(помнишь - первый находится справа)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>У 2-го 9 пальцев, а 1-й отгибает 10-ый палец</td><td>количество пальцев
9 10

10 1
"вес" каждого пальца</td></tr>
</table>

1	Значит, 2-ой отгибает свой 10-ый палец, а 1-й сжимает все свои	количество пальцев 10 0  10 1 "вес" каждого пальца

Этап	Описание	Иллюстрация
2	Раз у 2-го все десять пальцев разжаты, Пора 3-му показать свой первый палец, чтобы 2-ой сжал все свои опять в кулак	количество пальцев 1 0 0  100 10 1 "вес" каждого пальца

Сколько мы уже насчитали:

1. У меня все пальцы в кулаке;
2. У тебя тоже;
3. У твоего друга показан один палец.

Конечно, 100.

Нам нужно еще два раза пройти этот путь, чтобы у твоего друга было 3 пальца - так мы досчитаем до 300. После этого нам останется дождаться того, чтобы у тебя оказалось 7 пальцев, а у меня 4.

Зачем изучать системы счисления? Как минимум, потому что интересно понимать, что и как устроено. Если бы человек не был любопытным (или любознательным?), мы бы до сих пор жили в пещерах и боялись злых духов. Мы, правда, и сейчас их иногда опасаемся, но не все и не так серьезно.

Кроме того, компьютеры считают для нас (на то он и компьютер - считатель по-английски), а мы хотим понимать, что они нам насчитали. И это, если честно, главная причина моих рассуждений.

Мы считали на пальцах двумя разными способами: по 10 и по 5 пальцев. Но у компьютера-же нет пальцев? Нет! Значит что-то ему их должно заменять. Давай это обсудим.

Когда мы загибаем пальцы, если нам ничего руками делать не нужно, мы можем сколько угодно ходить с такими загнутыми пальцами и в любой момент показать руку - и сразу станет ясно, сколько мы насчитали. То есть, сколько пальцев, столько устойчивых состояний у нашей руки.

Компьютер электрический, поэтому, раз он ничего загибать не может, нужно придумать электрические устойчивые состояния. Самое простое, что для него придумали,- это ток в проводе: ток или есть, или нет: два устойчивых состояния. Это все равно, что у него, бедняжки, только два пальца. Ну-ка, посчитай до 4 по два пальца! Сколько рук нужно? Всего до 4 досчитали, а уже успели отогнуть палец на третьей руке! Хорошо, что компьютер "железный", как в шутку говорят специалисты! Проще использовать математику.

Как зашифрованы числа? Давай еще раз посмотрим на число 374. Откуда мы знаем, что в нем 3 сотни, 7 десятков и 4 единицы?
На самом деле запись "374" зашифрована, просто ключ к шифру всем известен: справа пишут количество пальцев у 1-го счетчика (единицы в любой системе), чуть левее - количество пальцев у 2-го счетчика (десятки в 10-чной системе), еще левее - количество пальцев у 3-го счетчика (сотни в 10-чной системе) и так далее.

Поскольку в любой другой позиционной системе счисления правило такое же (только пальцев у счетчика другое количество), чтобы не запутаться, будем расшифровывать запись в виде таблички: в верхнем ряду будем писать цифры (количество пальцев у счетчика), в нижнем ряду - "вес" каждой позиции (сколько значит каждый палец у этого счетчика).

Для примера расшифруем уже привычное "374":

3	7	4
100	10	1

в 10-чном виде
4
1

=

в 2-чном виде		
1	0	0
4	2	1

А теперь расшифруем число 4 - получилось 3 руки.

2. НЕПОЗИЦИОННЫЕ И ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

2.1. Непозиционные и позиционные системы счисления.

Система счисления ─ это способ записи чисел с помощью заданного набора специальных знаков (цифр). Существуют позиционные и непозиционные системы счисления.

В **непозиционных системах** вес цифры (т.е. тот вклад, который она вносит в значение числа) не зависит от ее позиции в записи числа. Так, в римской системе счисления в числе XXXII (тридцать два) вес цифры X в любой позиции равен просто десяти.

<u>В позиционных системах каждая цифра независима от другой, а ее вклад в число определяется "весом" позиции в записи числа (по-научному - разрядом)</u>.

Древнеегипетская десятичная непозиционная система счисления. Примерно в третьем тысячелетии до нашей эры древние египтяне придумали свою числовую систему, в которой для обозначения ключевых чисел 1, 10, 100 и так далее использовались специальные значки — иероглифы.

Все остальные числа составлялись из этих ключевых при помощи операции сложения. Система счисления древнего Ёгипта является десятичной, но непозиционной.

Например, чтобы изобразить 3252, рисовали три цветка лотоса (три тысячи), два свернутых пальмовых листа (две сотни), пять дуг (пять десятков) и два шеста (две единицы). Величина числа не зависела от того, в каком порядке располагались составляющие его знаки: их можно было записывать сверху вниз, справа налево или в произвольном порядке.

Римская система счисления. Примером непозиционной системы, которая сохранилась до наших дней, может служить система счисления, которая применялась более двух с половиной тысяч лет назад в Древнем Риме. В основе римской системы счисления лежали знаки I (один палец) для числа 1, V (раскрытая ладонь) для числа 5, X (две сложенные ладони) для 10, а для обозначения чисел 100, 500 и 1000 стали применять первые буквы соответствующих латинских слов (Centum - 100, Demimille - 500, Mille — тысяча).

Чтобы записать число, римляне разлагали его на сумму тысяч, полутысяч, сотен, полусотен, десятков, пятков, единиц. Например, десятичное число 28 представляется следующим образом:

XXVIII = 10 + 10 + 5 + 1 + 1 + 1

(два десятка, пяток, три единицы).

Для записи промежуточных чисел римляне использовали не только сложение, но и вычитание. При этом применялось следующее правило: каждый меньший знак, поставленный справа от большего, прибавляется к его значению, а каждый меньший знак, поставленный слева от большего, вычитается из него.

Например, IX — обозначает 9, XI — обозначает 11.

Десятичное число 99 имеет следующее представление:

XCIX = —10 + 100 —1 + 10.

Римскими цифрами пользовались очень долго. Еще 200 лет назад в деловых бумаги числа должны были обозначаться римскими цифрами (считалось, что обычные арабские цифры легко подделать). Римская система счисления сегодня используется, в основном, для наименования знаменательных дат, томов, разделов и глав в книгах.

Алфавитные системы счисления. Более совершенными непозиционными системами счисления были алфавитные системы. К числу таких систем счисления относились греческая, славянская, финикийская и другие. В них числа от 1 до 9, целые количества десятков (от 10 до 90) и целые количества сотен (от 100 до 900) обозначались буквами алфавита.

В алфавитной системе счисления Древней Греции числа 1, 2, ..., 9 обозначались первыми девятью буквами греческого алфавита, например, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ и тах далее. Для обозначения чисел 10, 20, ..., 90 применялись следующие 9 букв ($\iota = 10$, $\kappa = 20$, $\lambda = 3O$, $\mu = 40$ и так далее), а для обозначения чисел 100, 200, ..., 900 — последние 9 букв ($\rho = 100$, $\sigma = 200$, $\tau = 300$ и так далее). Например, число 141 обозначалось $\rho\mu\alpha$.

У славянских народов числовые значения букв установились в порядке славянского алфавита, который использовал сначала глаголицу, а затем кириллицу.

Буквы кириллицы	Цифровое значение кириллицы	Буквы глаголицы	Цифровое значение глаголицы	Кириллическое название
А	1	Ⰰ	1	Азъ
Б		Ⰱ	2	Буки
В	2	Ⰲ	3	Вѣди
Г	3	Ⰳ	4	Глаголь
Д	4	Ⰴ	5	Добро
Є	5	Ⰵ	6	Есть
Ж		Ⰶ	7	Живѣте
Ѕ	6	Ⰷ	8	Ѕѣло
Ꙁ	7	Ⰸ	9	Земля
И	8	Ⰻ	10	Иже
І	10	Ⰺ	20	І

Рис. 3. Древнерусская алфавитная система счисления

В России славянская нумерация сохранилась до конца XVII века. При Петре I возобладала так называемая арабская нумерация, которой мы пользуемся и сейчас. Славянская нумерация сохранялась только в богослужебных книгах.

Непозиционные системы счисления имеют ряд существенных недостатков:

1. Существует постоянная потребность введения новых знаков для записи больших чисел.
2. Невозможно представлять дробные и отрицательные числа.
3. Сложно выполнять арифметические операции, так как не существует алгоритмов их выполнения.

2.2. Позиционные системы счисления

Основные достоинства любой позиционной системы счисления — простота выполнения арифметических операций и ограниченное количество символов (цифр), необходимых для записи любых чисел.

Основанием позиционной системы счисления называется возводимое в степень целое число, которое равно количеству цифр, используемых для изображения чисел в данной системе счисления. Основание показывает также, во сколько раз изменяется количественное значение цифры при перемещении ее на соседнюю позицию.

Возможно множество позиционных систем, так как за основание системы счисления можно принять любое число, не меньшее

В **позиционных системах** счисления вес каждой цифры изменяется в зависимости от ее положения (позиции) в последовательности цифр, изображающих число. Например, в числе 757,7 первая семерка означает 7 сотен, вторая —7 единиц, а третья—7 десятых долей единицы. Сама же запись числа 757,7 означает сокращенную запись выражения 700 + 50 + 7 + 0,7.

$$7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} = 757,7$$

Любая позиционная система счисления характеризуется своим основанием.

Основание позиционной системы счисления − это количество различных знаков или символов, используемых для изображения цифр в данной системе.

В нашем случае - это число 10

Почему люди пользуются десятичной системой?

Люди предпочитают десятичную систему, вероятно, потому, что с древних времен считали по пальцам, а пальцев у людей по десять на руках и ногах.

Десятичная система характеризуется тем, что в ней 10 единиц какого-либо разряда образуют единицу следующего старшего разряда. Другими словами, единицы различных разрядов представляют собой различные степени числа 10.

В позиционной системе счисления с основанием q(q-ичная система счисления) единицами разрядов служат последовательные степени числа q, иначе говоря, q единиц какого-либо разряда образуют единицу следующего разряда. Для записи чисел в q-ичной системе счисления требуется различных цифр (0, 1, 2, ..., q-1).

Число в развернутой форме может быть представлено в следующем виде:

$$A_q = \pm (a_{n-1} \cdot q^{n-1} + a_{n-2} \cdot q^{n-2} + \ldots + a_0 \cdot q^0 + a_{-1} \cdot q^{-1} + \ldots + a_{-m} \cdot q^{-m}),$$

или

$$A_q = \pm \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot q^i$$

где a_i — цифры системы счисления; n и m — число целых и дробных разрядов, соответственно, q-основание системы.

Свернутой формой записи числа называется запись в виде:

$A = a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots\, a_1\, a_{0\,,} a_{-1} \ldots a_{-m}$

Именно такой формой записи чисел мы и пользуемся в повседневной жизни. Иначе свернутую форму записи называют естественной или цифровой.

За основание системы можно принять любое натуральное число − два, три, четыре и т.д. Следовательно, возможно бесчисленное множество позиционных систем: двоичная, троичная, четверичная и т.д. Запись чисел в каждой из систем счисления с основанием означает сокращенную запись выражения:

Какие системы счисления используют специалисты для общения с компьютером?

Кроме десятичной широко используются системы с основанием, являющимся целой степенью числа 2, а именно: **двоичная** (используются цифры 0, 1);
восьмеричная (используются цифры 0, 1, ..., 7);
шестнадцатеричная (для первых целых чисел от нуля до девяти используются цифры 0, 1,.... 9, а для следующих чисел от десяти до пятнадцати — в качестве цифр используются символы A, B, C, D, E, F).

Полезно запомнить запись в этих системах счисления первых двух десятков целых чисел:

Десятичная	Двоичная	Восьмеричная	Шестнадцатеричная
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14

2.3. Примерные решения задач по теме: «Позиционные системы счисления»

1. Записать десятичное число $A_{10} = 4718,63$ в развернутой форме.

Решение:

$A_{10} = 4\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 1\cdot 10^1 + 8\cdot 10^0 + 6\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2}$

2. Выведите формулу развернутой записи числа двоичной системы счисления и переведите число $A_2 = 1001,1$ в десятичную систему счисления.

Решение:

В двоичной системе счисления основание $q = 2$. В этом случае развернутая формула принимает вид:

$A_2 = \pm(a_{n-1}\cdot 2^{n-1} + a_{n-2}\cdot 2^{n-2} + \ldots + a_0\cdot 2^0 + a_{-1}\cdot 2^{-1} + a_{-2}\cdot 2^{-2} + \ldots +$
$+ a_{-m}\cdot 2^{-m})$

Здесь a_i − возможные цифры.

Итак, двоичное число представляет собой цепочку из нулей и единиц. При этом оно имеет достаточно большое число разрядов. Быстрый рост числа разрядов − самый существенный недостаток двоичной системы счисления.

Записав двоичное число $A_2 = 1001,1$ в развернутом виде и произведя вычисления, получим это число, выраженное в десятичной системе счисления:

$A2 = 1\cdot 23 + 0\cdot 22 + 0\cdot 21 + 1\cdot 20 + 1\cdot 2-1 = 8 + 1 + 0,5 = 9,5_{10}$

3. Записать восьмеричное число $A_8 = 7764,1$ в развернутом виде и найти десятичный эквивалент.

Решение:

Основание: $q = 8$. Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Записав, восьмеричное число $A_8 = 7764,1$ в развернутом виде и произведя вычисления, получим это число, выраженное в десятичной системе счисления:

$A_8 = 7\cdot 8^3 + 7\cdot 8^2 + 6\cdot 8^1 + 4\cdot 8^0 + 1\cdot 8^{-1} = 3584 + 448 + 48 + 4 + 0,125 =$
$= 4084,125_{10}$

4. Записать шестнадцатеричное число $A_{16} = 3AF_{16}$ в развернутом виде и найти десятичный эквивалент

Решение:

Основание: $q = 16$. Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Здесь только десять цифр из шестнадцати имеют общепринятое обозначение 0, 1, ..., 9. Для записи остальных цифр (10, 11, 12, 13, 14 и 15) обычно используются первые шесть букв латинского алфавита – A, B, C, D, E, F.

$3AF_{16} = 3\cdot 16^2 + 10\cdot 16^1 + 15\cdot 16^0 = 768 + 160 + 15 = 943_{10}$

5. Записать начало натурального ряда чисел в десятичной и двоичной системах счисления.

Решение:

A_{10}	A_2	A_{10}	A_2
0	0	10	1010
1	1	11	1011
2	10	12	1100
3	11	13	1101
4	100	14	1110
5	101	15	1111
6	110	16	10000
7	111	17	10001
8	1000	18	10010
9	1001	19	10011

2.4. Задачи по теме: «Системы счисления»

1. Какие числа записаны с помощью римских цифр:
MMMD, IV, XIX, MCMXCIVII, MDCLXXI? При решении использовать таблицу:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

2. Запишите год, месяц и число своего рождения с помощью римских цифр.

3. В старину на Руси широко применялась система счисления, отдаленно напоминающая римскую. С ее помощью сборщики податей заполняли квитанции об уплате податей. Для записи чисел употреблялись следующие знаки:
звезда – тысяча рублей, колесо – сто рублей, квадрат – десять рублей, Х – один рубль, IIIIIIIIII – десять копеек, I – копейку.

Запишите с помощью старинной русской системы счисления сумму 3452 рублей 43 копейки.

4. Какая сумма записана с помощью старинной русской системы счисления

□□□□□XXX IIIIIIIIII III

5. Выполните действия и запишите результат римскими цифрами:

XX – V;	CV – LII;	IC + XIX;	MCM + VIII;
XX : V;	X × V;	LXVI : XI;	XXI ×VII.

6. Какое количество обозначает цифра 8 в десятичных цифрах 6538, 8356, 87 и 831?

7. Что вы можете сказать о числах 111 и III?

8. Выпишите алфавиты в 5-ричной , 7-ричной, 12-ричной системах счисления.

9. Запишите первые 20 чисел натурального числового ряда в двоичной, 5-ричной, 8-ричной, 16-ричной системах счисления.

10. Какой числовой эквивалент имеет цифра 6 в десятичных числах: 6789; 3650; 16; 69?

11. Запишите в развернутом виде числа:

$A_{10} = 5341$; $A_8 = 25,341$; $A_6 = 0,25341$; $A_{16} = E41A,12$;

$A_{10} = 125,34$; $A_8 = 125,34$; $A_6 = 125,34$; $A_{16} = 125,34$.

12. Придумайте свою непозиционную систему счисления и запишите в ней числа 45, 769, 1001,256,78.

13. Запишите десятичный эквивалент числа 10101, если считать его написанным во всех системах счисления – от двоичной до девятеричной включительно?

14. Какое минимальное основание должна иметь система счисления, если в ней могут быть записаны числа: 22, 984, 1010, А219, 78, 65?

15. В каких системах счисления 10 – число нечетное?

16. В каких системах счисления справедливы равенства:

$2 \times 2 = 10$; $2 \times 3 = 11$; $3 \times 3 = 13$?

17. Запишите в свернутой форме следующие числа:

а) $A_{10} = 9 \bullet 10^1 + 1 \bullet 10^0 + 5 \bullet 10^{-1} + 3 \bullet 10^{-2}$

б) $A_{16} = A \bullet 16^1 + 1 \bullet 16^0 + 7 \bullet 16^{-1} + 5 \bullet 16^{-2}$

18. Какое минимальное основание имеет система счисления, если в ней записаны числа 127, 222, 111? Определите десятичный эквивалент данных чисел в найденной системе счисления.

19. Заполните следующую таблицу:

Систе6ма счисления	Основание	Цифры
шестнадцатеричная	16	
десятичная		0,1,2,3,4,5,6,
	8	0,1,2,3,4,5,6,7
	2	

20. Заполните следующую таблицу:

Систе6ма счисления	Основание	Разряды (степени)				
		10000	1000	100	10	1

21. Чему равен десятичный эквивалент чисел 10101_2, 10101_8, 10101_{16}?

22. Трехзначное десятичное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру переместить на два разряда влево, то есть с нее будет начинаться запись нового числа, то это новое число будет на единицу больше утроенного исходного числа. Найдите исходное число.

23. Шестизначное десятичное число начинается слева цифрой 1. Если эту цифру перенести с первого места слева на последнее место справа, то значение образованного числа будет втрое больше исходного. Найдите исходное число.

24. Какое из чисел 110011_2, 111_4, 35_8, $1B_{16}$ является:

а) наибольшим;

б) наименьшим?

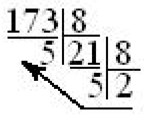
3. ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ ИЗ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДРУГУЮ

3.1. Перевод целых чисел из одной системы счисления в другую

Можно сформулировать алгоритм перевода целых чисел из системы с основанием p в систему с основанием q:

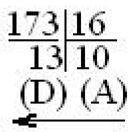
1. Основание новой системы счисления выразить цифрами исходной системы счисления и все последующие действия производить в исходной системе счисления.
2. Последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на основание новой системы счисления до тех пор, пока не получим частное, меньшее делителя.
3. Полученные остатки, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие с алфавитом новой системы счисления.
4. Составить число в новой системе счисления, записывая его, начиная с последнего остатка.

Пример 1. Перевести десятичное число 173_{10} восьмеричную систему счисления.



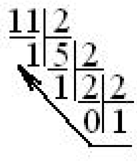
Получаем: $173_{10}=255_8$.

Пример 2. Перевести десятичное число 173_{10} в шестнадцатеричную систему счисления.



Получаем: $173_{10}=AD_{16}$.

Пример 3. Перевести десятичное число 11_{10} двоичную систему счисления.



Получаем: $11_{10}=1011_2$.

Пример 4. Иногда более удобно записать алгоритм перевода в форме таблицы.

Переведем десятичное число 363_{10} в двоичное число:

Делимое	363	181	90	45	22	11	5	2	1
Делитель	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Частное	1	1	0	1	0	1	1	0	1

Получаем: $363_{10} = 101101011_2$.

3.2. Перевод дробных чисел из одной системы счисления в другую

Можно сформулировать алгоритм перевода правильной дроби с основанием p в дробь с основанием q:

1. Основание новой системы счисления выразить цифрами исходной системы счисления и все последующие действия производить в исходной системе счисления.
2. Последовательно умножать данное число и получаемые дробные части произведений на основание новой системы до тех пор, пока дробная часть произведения не станет равной нулю или будет достигнута требуемая точность представления числа.
3. Полученные целые части произведений, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие с алфавитом новой системы счисления.
4. Составить дробную часть числа в новой системе счисления, начиная с целой части первого произведения.

Пример 1. Перевести число $0{,}65625_{10}$ в восьмеричную систему счисления.

0,	65625
	× 8
5	25000
	× 8
2	00000

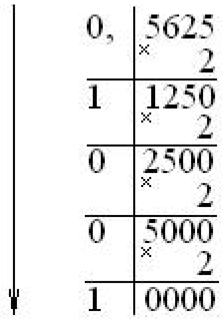
Получаем: $0{,}65625_{10}=0{,}52_8$

Пример 2. Перевести число $0{,}65625_{10}$ в шестнадцатеричную систему счисления.

0,	65625
	× 16
10	50000
(A)	× 16
8	00000

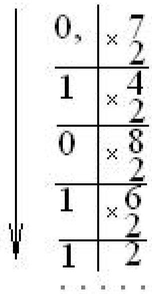
Получаем: $0{,}65625_{10}=0{,}A8_{16}$

Пример 3. Перевести десятичную дробь $0{,}5625_{10}$ в двоичную систему счисления.



Получаем $0{,}5625_{10} = 0{,}1001_2$

Пример 4. Перевести в двоичную систему счисления десятичную дробь $0{,}7_{10}$.



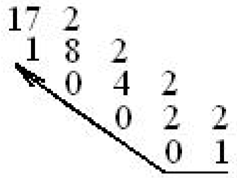
Очевидно, что этот процесс может продолжаться бесконечно, давая все новые и новые знаки в изображении двоичного эквивалента числа $0{,}7_{10}$. Так, за четыре шага мы получаем число $0{,}1011_2$, а за семь шагов число $0{,}1011001_2$, которое является более точным представлением числа $0{,}7_{10}$ в двоичной системе счисления, и так далее. Такой бесконечный процесс обрывают на некотором шаге, когда считают, что получена требуемая точность представления числа.

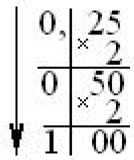
3.3. Перевод произвольных чисел

Перевод произвольных чисел, то есть чисел, содержащих целую и дробную части, осуществляется в два этапа. Отдельно переводится целая часть, отдельно — дробная. В итоговой записи полученного числа целая часть отделяется от дробной запятой.

Пример 1. Перевести число $17{,}25_{10}$ в двоичную систему счисления.

Переводим целую часть Переводим целую часть



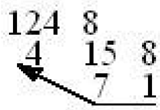


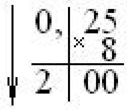
Получаем: $17{,}25_{10} = 1001{,}01_2$

Пример 2. Перевести число $124{,}25_{10}$ в восьмеричную систему счисления.

Переводим целую Переводим целую

часть   часть





Получаем: $124{,}25_{10} = 174{,}2_{8}$.

4. ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ ИЗ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ 2 В СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ 2^n И ОБРАТНО

4.1. Перевод целых чисел

Если основание q-ичной системы счисления является степенью числа 2, то перевод чисел из q-ичной системы счисления в двоичную и обратно можно проводить по более простым правилам. Для того чтобы целое двоичное число записать в системе счисления с основанием $q = 2^n$, нужно:

1. Двоичное число разбить справа налево на группы по n цифр в каждой.
2. Если в последней левой группе окажется меньше n разрядов, то ее надо дополнить слева нулями до нужного числа разрядов.
3. Рассмотреть каждую группу как n-разрядное двоичное число и записать ее соответствующей цифрой в системе счисления с основанием $q = 2^n$

Пример 1. Число 101100001000110010_2 переведем в восьмеричную систему счисления.

Разбиваем число справа налево на триады и под каждой из них записываем соответствующую восьмеричную цифру:

101	100	001	000	110	010
5	4	1	0	6	2

Получаем восьмеричное представление исходного числа: 541062_8.

Пример 2. Число 1000000000111110000111_2 переведем в шестнадцатеричную систему счисления.

Разбиваем число справа налево на тетрадьг и под каждой из них записываем соответствующую шестнадцатеричную цифру:

0010	0000	0000	1111	1000	0111
2	0	0	F	8	7

Получаем шестнадцатеричное представление исходного числа: $200F87_{16}$.

4.2. Перевод дробных чисел

Для того, чтобы дробное двоичное число записать в системе счисления с основанием $q = 2^n$, нужно:

1. Двоичное число разбить слева направо на группы по n цифр в каждой.
2. Если в последней правой группе окажется меньше n разрядов, то ее надо дополнить справа нулями до нужного числа разрядов.
3. Рассмотреть каждую группу как n-разрядное двоичное число и записать ее соответствующей цифрой в системе счисления с основанием $q = 2^n$.

Пример 1. Число $0{,}10110001_2$ переведем в восьмеричную систему счисления.

Разбиваем число слева направо на триады и под каждой из них записываем соответствующую восьмеричную цифру:

0,	101	100	010
0,	5	4	2

Получаем восьмеричное представление исходного числа: $0{,}542_8$.

Пример 2. Число $0{,}100000000011_2$ переведем в шестнадцатеричную систему счисления. Разбиваем число слева направо на тетрады и под каждой из них записываем соответствующую шестнадцатеричную цифру:

0,	1000	0000	0011
0,	8	0	3

Получаем шестнадцатеричное представление исходного числа: $0{,}8O3_{16}$.

4.3. Перевод произвольных чисел

Для того чтобы произвольное двоичное число записать в системе счисления с основанием $q = 2^n$, нужно:

1. Целую часть данного двоичного числа разбить справа налево, а дробную — слева направо на группы по n цифр в каждой.
2. Если в последних левой и/или правой группах окажется меньше n разрядов, то их надо дополнить слева и/или справа нулями до нужного числа разрядов.
3. Рассмотреть каждую группу как n-разрядное двоичное число и записать ее соответствующей цифрой в системе счисления с основанием $q = 2^n$.

*Пример 1.*Число $111100101{,}0111_2$ переведем в восьмеричную систему счисления.

Разбиваем целую и дробную части числа на триады и под каждой из них записываем соответствующую восьмеричную цифру:

111	100	101,	011	100
7	4	5,	3	4

Получаем восьмеричное представление исходного числа: $745{,}34_8$.

Пример 2. Число $11101001000{,}11010010_2$ переведем в шестнадцатеричную систему счисления.

Разбиваем целую и дробную части числа да тетрады и под каждой из них записываем соответствующую шестнадцатеричную цифру:

0111	0100	1000,	1101	0010

7	4	8,	D	2

Получаем шестнадцатеричное представление исходного числа: $748{,}D2_{16}$.

Пример 3. Переведем шестнадцатеричное число $4AC35_{16}$ в двоичную систему счисления.

Для того чтобы произвольное число, записанное в системе счисления с основанием $q = 2^n$ перевести в двоичную систему счисления, нужно каждую цифру этого числа заменить ее n-значным эквивалентом в двоичной системе счисления.

4	A	C	3	5
0100	1010	1100	0011	0101

Получаем: 1001010110000110101_2.

Пример 4. Перевести число $15FC_{16}$ в двоичную систему.

Для решения задачи воспользуемся приведенной ниже двоично-шестнадцатеричной таблицей.

Двоично-шестнадцатеричная таблица

16	**2**	**16**	**2**
0	0000	8	1000
1	0001	9	1001
2	0010	A	1010
3	0011	B	1011
4	0100	C	1100
5	0101	D	1101
6	0110	E	1110
7	0111	F	1111

В одном столбце таблицы помещены шестнадцатеричные цифры, напротив в соседнем столбце –равные им двоичные числа. Причем все двоичные числа записаны в четырехзначном виде (там, где знаков меньше четырех, слева добавлены нули).

А теперь проделаем следующее: каждую цифру в шестнадцатеричном числе $15FC_{16}$ заменим на соответствующую ей в таблице четверку двоичных знаков. Иначе говоря, перекодируем число $15FC_{16}$ по таблице в двоичную форму. Получается: 0001 0101 1111 1100.

Если отбросить нули слева (в любой системе счисления они не влияют на значение целого числа), то получим искомое двоичное число. Таким образом:

$$15FC_{16} = 1010111111100_2.$$

В справедливости этого равенства можно убедиться, производя тот же перевод через десятичную систему.

Пример 5. Перевести двоичное число110111101011101111 в шестнадцатеричную систему.

Решение:

Разделим данное число на группы по четыре цифры.

0011 0111 1010 1110 1111

А теперь глядя на двоично-шестнадцатеричную таблицу, заменим каждую двоичную группу на соответствующую цифру.

3 7 A E F

Следовательно: $110111101011101111_2 = 37AEF_{16}$.

5. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

1. Заполните таблицу, в каждой строке которой одно и то же целое число должно быть записано в различных системах счисления.

Двоичная	Восьмеричная	Десятеричная	Шестнадцатеричная
101010			
	127		
		269	
			9B

2. Заполните таблицу, в каждой строке которой одно и то же дробное число должно быть записано в различных системах счисления.

Двоичная	Восьмеричная	Десятеричная	Шестнадцатеричная
0,101			
	0,6		
		0,125	
			0,4

3. Заполните таблицу, в каждой строке которой одно и то же произвольное число (число может содержать как целую, так и дробную часть) должно быть записано в различных системах счисления.

Двоичная	Восьмеричная	Десятеричная	Шестнадцатеричная
111101,1			
	233,5		
		46,5625	
			59,B

6. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ В ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

6.1. Арифметические операции в двоичной системе счисления

Рассмотрим более подробно арифметические операции в двоичной системе счисления. Арифметика двоичной системы счисления основывается на использовании таблиц сложения, вычитания и умножения цифр. Арифметические операндьг располагаются в верхней строке и в первом столбце таблиц, а результаты на пересечении столбцов и строк:

Сложение. Таблица двоичного сложения предельно проста. Только в одном случае, когда производится сложение 1 + 1, происходит перенос в старший разряд.

Таблица 1. Сложение

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Вычитание. При выполнении операции вычитания всегда из большего по абсолютной величине числа вычитается меньшее и ставится соответствующий знак. В таблице Вычитание 1 с чертой означает заем в старшем разряде.

Таблица 2. Вычитание

–	0	1
0	0	$\bar{1}1$
1	1	0

Умножение. Операция умножения выполняется с использованием таблицы умножения по обычной схеме, применяемой в десятичной системе счисления с последовательным умножением множимого на очередную цифру множителя.

Таблица 3. Умножение

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Деление. Операция деления выполняется по алгоритму, подобному алгоритму выполнения операции деления в десятичной системе счисления

6.2. Примерные задачи по теме: «Арифметические операции в двоичной системе счисления»

1. Несколько примеров сложения двоичных чисел:

$$
\begin{array}{r} 1001 \\ +\ 1010 \\ \hline 10011 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 1101 \\ +\ 1011 \\ \hline 11001 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 11111 \\ +\ 1 \\ \hline 100000 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 1010011{,}111 \\ +\ 11001{,}110 \\ \hline 1101101{,}101 \end{array}
$$

2. Несколько примеров вычитания двоичных чисел:

$$
\begin{array}{r} 10111001{,}1 \\ -\ 10001101{,}1 \\ \hline 00101100{,}0 \end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r} 110110101 \\ -\ 101011111 \\ \hline 001010110 \end{array}
$$

3. Несколько примеров умножения двоичных чисел:

$$
\begin{array}{r} 11001 \\ \times\ 1101 \\ \hline 11001 \\ 11001 \\ 11001 \\ \hline 101000101 \end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r} 11001{,}01 \\ \times\ 11{,}01 \\ \hline 1100101 \\ 1100101 \\ 1100101 \\ \hline 1010010{,}0001 \end{array}
$$

Вы видите, что умножение сводятся к сдвигам множимого и сложениям.

4. Рассмотрим пример деления двоичных чисел:

$$
\begin{array}{l|l} -\,101000101 & 1101 \\ \cline{2-2} 1101 & 11001 \\ \cline{1-1} -\,1110 & \\ 1101 & \\ \cline{1-1} -\,1101 & \\ 1101 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}
$$

101000101:1101 = 11001

6.3. Сложение в других системах счисления

Ниже приведена таблица сложения в восьмеричной системе счисления:

+	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	10
2	3	4	5	6	7	10	11
3	4	5	6	7	10	11	12
4	5	6	7	10	11	12	13
5	6	7	10	11	12	13	14
6	7	10	11	12	13	14	15
7	10	11	12	13	14	15	16

6.4. Примерные задачи по теме: «Арифметические операции в позиционных системах счисления»

1. Выполните арифметические операции:

а) 1110_2+1001_2;	д) $1110_2 \cdot 1001_2$;	и) $74_8:24_8$;
б) 67_8+23_8;	е) 67_8-23_8;	к) $67_8 \cdot 23_8$;
в) 1110_2-1001_2;	ж) $1110_2:1001_2$;	л) $5A_{16}:1E_{16}$;
г) $AF_{16}+97_{16}$;	з) $AF_{16}-97_{16}$;	м) $AF_{16} \cdot 97_{16}$.

Ответ для каждого числа запишите в указанной и десятичной системах счисления.

2. Какое число предшествует каждому из данных:

а) 10_{10};	е) $95A_{16}$;
б) 56_8;	ж) 1010_2;
в) $9A_{16}$;	з) 45_8;
г) 110_2;	и) $68{,}3_9$;
д) 111_2;	к) 3210_4?

3. Какое число следует за каждым из данных:

а) 110_{10};	в) AF_{16};
б) 677_8;	г) 10110_2?

4. Расставьте знаки арифметических операций так, чтобы были верны следующие равенства в двоичной системе:

а) 110 ? 11 ? 100;
б) 1100 ? 10 ? 10;
в) 1100 ? 10 ? 10;
г) 1100 ? 10 ? 10;
д) 1100 ? 11 ? 100.

5. Выпишите целые числа, принадлежащие следующим числовым промежуткам:
а) $[101101_2; 110000_2]$ в двоичной системе;
б) $[14_8; 20_8]$ в восьмеричной системе;
в) $[28_{16}; 30_{16}]$ в шестнадцатеричной системе.

Ответ для каждого числа запишите в указанной и десятичной системах счисления.

6. Перевести в двоичную, восьмеричную, шестнадцатеричную системы счисления числа:

а) $231{,}5_{10}$;
б) $869{,}3_{10}$;
в) $19501{,}15_{10}$.

7. Перевести в десятичную систему счисления числа:

а) $67{,}7_8$;
б) $FD{,}3_{16}$;
в) $101{,}11_2$.

8. Сложить числа двоичной системы:

а) 101110010_2 и 1010100111_2;

б) 110101_2 и 1010101100_2;
в) $1011010{,}11_2$ и $1010101111{,}111_2$;
г) $111000111{,}01_2$ и $11001010{,}0011_2$;
д) $10110110{,}111_2$ и $1100{,}111_2$;
е) $11101{,}0010_2$ и $101100{,}100111_2$.

7. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В каких системах счисления привык считать человек?
2. Что такое система счисления?
3. Что такое непозиционная система счисления?
4. Что такое позиционная система счисления?
5. Отличие позиционных систем счисления от непозиционных систем счисления.
6. Что такое основание системы счисления?
7. Сколько может быть позиционных систем счисления?
8. Может ли в качестве цифры использоваться символ буквы?
9. Какое количество цифр используется в q-ичной системе счисления?
10. Почему человек использует десятичную систему счисления, а компьютер двоичную?
11. Алгоритм перевода целых чисел из одной системы счисления в другую;
12. Алгоритм перевода дробных чисел из одной системы счисления в другую;
13. Алгоритм перевода чисел из одной системы счисления в другую, содержащих целую и дробную части;
14. Алгоритм перевода чисел из системы счисления с основанием 2 в систему счисления с основанием q = 2n и обратно;
15. Алгоритм перевода чисел из систем счисления с основанием $q = 2^n$ в двоичную систему;
16. Арифметические операции в двоичной системе счисления.
17. Арифметическое сложение в другой позиционной системе счисления.

8. СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Microsoft Office 2000. Шаг за шагом: Практ. Пособ./ Пер. с англ. – М.: Издательство ЭКОМ, 2016. С. – 600.
2. А. Микляев. Учебник пользователя IBM PC. М.: Альтекс-А, 2001. С. – 250.
3. Н.В. Макаров. Информатика. Москва.: Финансы статистика, 2013. С. – 560.
4. Александр Левин. Самоучитель: Учебное пособие. М.: ТРИУМФ, 2010. С. – 360.
5. Н.Д. Угринович Практикум по информатике и информационным технологиям. Учебное пособие для общеобразовательных учреждений. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2014. С. – 420.
6. Инфоматика. Задачник-практикум в 2т. Под. Ред. И. Г.Семакина, Е. К. Хеннера. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2002. С. – 250.
7. Н.Д. Угринович Информатика и информационные технологии. Практикум для 10-11 классов/. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. С. – 320.
8. Логический словарь ДЕФОРТ под редакцией А. А. Ивина, В. Н. Переверзева. М.: «Мысль», 1994. С. – 120.
9. Каймин В. А. и др. Основы информатики и вычислительной техники. М.: «Новая школа», 1999. С. – 460.
10. Кушниренко А. Г. и др. Основы информатики и вычислительной техники. М.: «Новая школа», 1998. С. – 360.
11. Гейн А. Г. и др. Основы информатики и вычислительной техники. М.: «Новая школа», 1996. С. – 390.