

Ters Türev ve Belirsiz Integral

Ters Türev

Türevi $f(x) = 3x^2$ olan bir \bar{F} fonksiyonunu bulmak için türev kurallarından yararlanıp

$$\bar{F}(x) = x^3 \text{ 'tür diyebiliriz, çünkü } \frac{d}{dx} [x^3] = 3x^2 \text{ 'dir.}$$

Burada \bar{F} fonksiyonu f nin ters türevidir.

Tanım Bir \bar{F} fonksiyonu, bir I aralığındaki bütün x değerleri için $\bar{F}'(x) = f(x)$ eşitliğini sağlıyorsa, f nin I aralığındaki ters türevidir.

Örneğin,

$$f(x) = x^2 \text{ olsun. } \Rightarrow \bar{F}(x) = \frac{1}{3} x^3$$

$$\text{öte yandan } G(x) = \frac{1}{3} x^3 + 100 \Rightarrow G'(x) = f(x).$$

Yani hem \bar{F} hem de G fonksiyonları f nin ters türevidir.

$$\Rightarrow H = \frac{1}{3} x^3 + C$$

Teorem Eğer F fonksiyonu, f nin bir I aralığındaki

herhangi bir ters türevi'ise, o zaman f nin I aralığındaki

en genel ters türevi

$$F(x) + C \text{ 'dir.}$$

Burada C herhangi bir sabittir.

Örnek Aşağıdaki fonksiyonların en genel ters türevlerini bulunuz.

(a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = x^n, n \neq -1$

Ters Türev Formülleri

Fonksiyon

Ters Türevi

$$cf(x)$$

$$cF(x) + C$$

$$f(x) + g(x)$$

$$F(x) + G(x) + C$$

$$x^n \ (n \neq -1)$$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\frac{1}{x}$$

$$\ln|x| + C$$

$$e^x$$

$$e^x + C$$

$$b^x$$

$$\frac{b^x}{\ln b} + C$$

$$\cos x$$

$$\sin x + C$$

$$\sin x$$

$$-\cos x + C$$

$$\sec^2 x$$

$$\tan x + C$$

$$\sec x \tan x$$

$$\sec x + C$$

$$\frac{1}{1+x^2}$$

$$\arctan x + C$$

$$\sinh x$$

$$\cosh x + C$$

⋮

Örnek $g'(x) = 4\sin x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$ 'i sağlayan bütün

g fonksiyonlarını bulunuz.

- Bir fonksiyonun türevini içeren eşitliklere diferansiyel denklemler denir.

Örnek $f'(x) = e^x + 20(1+x^2)^{-1}$ ve $f(0) = -2$ ise f 'yi bulunuz.

• $f(x) = 2x$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$f(x)$ fonksiyonunun ters türevlerinin ailesi C bir sabit olmak üzere $F(x) = x^2 + C$ dir.

→ Burada C ye integrasyon sabiti denir.

→ F ile gösterilen fonksiyonlar ailesine de f nin genel ters türevi denir.

→ $F(x) = x^2 + C$ fonksiyonu da aslında $F'(x) = 2x$ diferansiyel denkleminin genel çözümüdür.

• $\frac{dy}{dx} = f(x)$ formundaki bir diferansiyel denklemini

çözmek için $dy = f(x) dx$ şeklinde yazalım.

• Bu denklemin bütün çözümlerini bulma işlemine

ters türev alma (ya da belirsiz integrali hesaplama)

işlemi diyoruz ve belirsiz integral işlemini \int ile gösteriyoruz.

Genel çözüm

integral
değişkeni

$$y = \int f(x) dx = F(x) + C$$

integrand

f'nin
ters
türevi

integrasyon
sabit

Temel Integral Kuralları

$$\int F'(x) dx = F(x) + C \rightarrow \text{integrasyon t\u00fcrev'in
bir tersidir}$$

$$\text{E\u011fer } \int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = f(x)$$

↓
t\u00fcrev integralin tersidir.

Ornekler

1) $\int (2x^3 - 6x^2 + 3x + 5) dx$

original integral

↓

Yeniden yaz

↓

integral

al

↓

Sadeleştir

$$2) \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x} + 1}{x^4} dx$$

Yeni bir u ile değiştiriyoruz

$$T(x) = (x^2 + 5x - 2)^3$$

$$T'(x) = 4(x^2 + 5x - 2)^2 (2x + 5)$$

Öyleyse,

$$\int f(x) dx = \int 4(x^2 + 5x - 2)^2 (2x + 5) dx$$

$$= (x^2 + 5x - 2)^3 + C$$

$$= F(x) + C$$

$$3) \int \left(\frac{1}{4^x} + 4^x \right) dx$$

Çünkü $f(x) = \frac{1}{4^x} + 4^x$ fonksiyonları $x \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır.

Bir fonksiyonları olsun

$$f(x) = g(x) \frac{dx}{dx} \text{ olsun}$$

$$4) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$\int f(x) dx = \int g(x) \frac{dx}{dx} dx = \int g(x) dx = G(x) + C$$

Burada G , g fonksiyonları için tanımlıdır.

Değişken Dönüşümü

Zincir Kuralını tersten düşünüyoruz.

Örnek $F(x) = (x^2 + 5x - 2)^4$

$$\Rightarrow f(x) = F'(x) = 4(x^2 + 5x - 2)^3 (2x + 5).$$

0 halde,

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \int 4(x^2 + 5x - 2)^3 (2x + 5) dx \\ &= (x^2 + 5x - 2)^4 + C \\ &= F(x) + C\end{aligned}$$

Genel olarak, f, g ve u fonksiyonları x e göre diferansiyellenebilen fonksiyonlar olsun.

$$f(x) = g(u) \frac{du}{dx} \quad \text{olsun.}$$

0 halde,

$$\int f(x) dx = \int g(u) \frac{du}{dx} dx = \int g(u) du = G(u) + C \quad \text{'dir.}$$

Burada G , g fonksiyonunun ters türevidir.

Örnek 1) $\int x^3 \cos(x^4+2) dx$

2) $\int \sqrt{2x+1} dx$

3) $\int e^{5x} dx$

$$4) \int \sqrt{1+x^2} \cdot x^5 dx$$

$$5) \int \tan x dx$$

$$6) \int \frac{\sin^2(\ln x)}{x} dx$$

$$7) \int \frac{dx}{(x \ln x) \cdot \ln(\ln x)}$$

$$8) \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$9) \int \sqrt{1+\sin x} \, dx$$

$$10) \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin 2x} \, dx$$