

1. Mertebeden homojen olmayan dif. denklemler

$$L(y) = \phi(x) \text{ gibi yani esitligin sag tarafı sıfır olmayan}$$

Lineer dif denklemler homojen olmayan dif denklemlerdir. Burada $L(y)$ yani esitligin sol tarafının lineer olması gerekmektedir. Bu durumda homojen olmayan lineer dif denkleminin lineer tarafı y_h , homojenliğini ifade eden esitligin x' e bağılı fonksiyonlu kısmını ise y_p özel çözüm yapılır. Sonra her ikisi toplanarak genel çözüm bulunur. Yani genel çözüm

$$y_G = y_h + y_p$$

↳ özel çözüm ($p = \text{particular}$)
↳ homojen çözüm

Ör: $y'' - y = 2 \sin x$ dif denkleminin özel çözümü $y_p = \sin x$ ise

genel çözümü buluruz -

$$y = y_h + y_p$$

$y'' - y = 0$ homojen hale geldi. 0 zaman homojen kısmın öz denklemini yazalım.

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1 \rightarrow \lambda_2 = -1$$

Homojen kısmın genel çözüm formu $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ dir. işte

Ör: $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ Genel çözüm ise $y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 5 \sin x$

Ör: Özel çözümü $y_p = x^2 + 4x + 6$ olan $y'' - 2y' + y = x^2$ dit. denkleminin genel çözümünü buluruz

Çöz:

Öz denklemini $y'' - 2y' + y = 0$ $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ $(\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1 \rightarrow \lambda_2 = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$ $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ Kuvadratik formül $\Delta = -2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$ -

Bu durumda homojen çözüm $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x \cdot e^{\lambda_2 x}$ genel formül.

Not: Eğer kökler birbirine eşitse $y_h = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x \cdot e^{k_2 x}$ olur.
ve deklan polinom seklinde

Kökler eşitse ve polinom hatı siz bulunur ise $y_h = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x \cdot e^{k_2 x}$ dir.
ilave ediliyor.

Bu durumda $y_h = C_1 e^x + C_2 x \cdot e^x$ ve $y = \underbrace{C_1 e^x + C_2 x e^x}_{y_h} + \underbrace{x^2 + 4x + 6}_{y_p}$ bulunur. Bz

homojen kısmın çözümüdür.
Bu durumda bu deklamin kısmı $\{e^x, x \cdot e^x\}$ dir. $W = e^{2x} \neq 0$ bulunur.
ve lineer bağımsızdır.

Hatırlatma $W = 0 \Rightarrow$ lineer bağımlı

$W \neq 0 \Rightarrow$ lineer bağımsız.

Öç:

$$y'' - y' - 2y = 4x^2 \quad \text{dit. dekl. çözüm.}$$

Çöz: 2. mertebe, lineer, 1. derece, homojen deklidir. Çözüm $y = y_h + y_p$

$$\text{Ö2 deklan } k^2 - k - 2 = 0 \quad (k+1)(k-2) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow k_1 = -1 \\ \nearrow k_2 = 2 \end{matrix}$$

$$0 \text{ hald homojen çözü } y_h = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

$$y_h = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{2x} \text{ olur.}$$

Benklemin sağ tarafı $4x^2$ yeni polinom seçilirse o/d. için en geneli

$$y_p = A_2 x^2 + A_1 x + A_0 \text{ dır. Sonra türevler alınır.}$$

$$y_p' = 2A_2 x + A_1,$$

$$y_p'' = 2A_2 \text{ bu değerler sonra yerine yazılır}$$

$$\text{yani } y'' - y' - 2y = 4x^2$$

$$\begin{aligned} -2A_2 x^2 &= 4x^2 \Rightarrow -2A_2 = 4 \Rightarrow A_2 = -2 \\ -2A_2 x - 2A_1 x &= 0 \quad (-2A_2 - 2A_1)x = 0 \Rightarrow -2A_2 - 2A_1 = 0 \end{aligned}$$

$$2A_2 - (2A_2 x + A_1) - 2(A_2 x^2 + A_1 x + A_0) = 4x^2 \Rightarrow \text{Denklemler ve}$$

$$2A_2 - 2A_2 x - A_1 - 2A_2 x^2 - 2A_1 x - 2A_0 = 4x^2 \quad -2A_2 x^2 - (2A_2 + 2A_1)x + 2A_2 - A_1 - 2A_0 = 4x^2$$

$$A \text{ lar bulunur. } A_2 = -2 \quad A_1 = 2 \quad A_0 = -3 \text{ bulunur. Bu durumda}$$

$$y_p = -2x^2 + 2x - 3 \text{ bulunur.}$$

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad x^2 - x - 2 = 0$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 & \text{Bakar} \\ x_2 &= 2 & \text{öner} \end{aligned}$$

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} \text{ ve } y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3 \text{ bulunur.}$$

ör: Sağ tarafın istediği olması

$$y'' - y' - 2y = e^{3x} \quad 2. mertebe, lineer, homojen değil \quad y = y_h + y_p$$

Daha önce $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ bulunmuştur.

Sayı tarafı istediği old. için $y_p = A \cdot e^{ax}$ genel çözüm formunda.

Burada $a = 3$ dir. Denklemi sağ tarafa e^{3x} old. için

$$\left. \begin{aligned} y_p &= A e^{3x} \\ y_p' &= 3A e^{3x} \\ y_p'' &= 9A e^{3x} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{yerine koyulur:} \\ &9A e^{3x} - 3A e^{3x} - 2A e^{3x} = e^{3x} \quad \text{denklemi} \\ &4A e^{3x} = e^{3x} \\ &4A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{4} \text{ bulunur. Bu durumda} \end{aligned}$$

$$y_p = \frac{1}{4} e^{3x} \text{ olur. Genel çözüm ise}$$

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4} e^{3x} \text{ bulunur.}$$

✎

Ör:

Sayı tərətən trigonometrik olması həli

$y'' - y' - 2y = \sin 2x$ 2 mərkəli, lineer, homojin olmayan dft. dərkən

$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ dərkən vərkən mükəmməl. Səy tərətən trigonometrik olmayan

Hərkən en qədər ədəd ödərkən $y_p = A \sin \beta x + B \cos \beta x$ dər. Bə

Sərkən β mən 2 ödərkən gərkən. Bərkən

$$y_p = A \sin 2x + B \cos 2x$$

$$y_p' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$$

$$y_p'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$$

yeğin
keçirir
ve sərkən

$$(-6A + 2B) \sin 2x + (-6B - 2A) \cos 2x = \sin 2x$$

$$-6A + 2B = 1 \quad A = -\frac{3}{20}$$

$$-6B - 2A = 0 \quad B = \frac{1}{20}$$

yeğin gərkən $y_p = -\frac{3}{20} \sin 2x + \frac{1}{20} \cos 2x$ gərkən 4 ödərkən

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{3}{20} \sin 2x + \frac{1}{20} \cos 2x \text{ bərkən.}$$

1. mertebeden sabit katsayılı lineer homojen 2. d. denklemler

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x) \quad R(x) = 0 \Rightarrow \text{homojen}$$

$$R(x) \neq 0 \Rightarrow \text{homojen değil}$$

2. denklemler ve kökleri bulma y_h bulur.

Kökler reel ve farklı ise

Ör: $y'' + 3y' - 4y = 0$ 2. mertebe, lineer, homojen genel çözüm

$$y_h = C_1 e^{x_1 x} + C_2 e^{x_2 x} \quad x_1^2 + 3x_1 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 1$$

$$x_2 = -4$$

$$y_h = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-4x} \quad \text{Çözüm dr.}$$

Not: Kökler reel ve farklı ise

Ör: Kökler $+a, -a$ ise

$$y'' - y = 0 \quad 2. \text{ mertebe, lineer homojen}$$

$$2. \text{ denklemini } x_1^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1$$

$$\rightarrow x_2 = -1$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \quad \text{olur.}$$

Hatırlatma: $e^{\lambda x} = \cosh \lambda x + \sinh \lambda x$ ise
 $e^{-\lambda x} = \cosh \lambda x - \sinh \lambda x$

$$\begin{aligned} y_h &= C_1 (\cosh x + \sinh x) + C_2 (\cosh x - \sinh x) = C_1 \cdot \cosh x + C_2 \cdot \cosh x + C_1 \cdot \sinh x - C_2 \cdot \sinh x \\ &= \underbrace{(C_1 + C_2)}_{k_1} \cosh x + \underbrace{(C_1 - C_2)}_{k_2} \sinh x \end{aligned}$$

$$y_h = k_1 \cdot \cosh x + k_2 \sinh x = k_1 \cdot \cosh(-1)x + k_2 \cdot \sinh x = k_1 \cdot \cosh x + k_2 \cdot \sinh x \quad \text{olur.}$$

Not: kökleme + vary. \rightarrow olmas. önemli değil. Çünkü $k_2 = C_1 - C_2$ de

öc: kökler kompleks ise

2 adet bir (-) var.

$y'' - 5y = 0$ 2 mertebeli lineer homoj den.

$$\ddot{O}_2 \text{ denklemin } \lambda^2 - 5 = 0. \quad (\lambda - \sqrt{5})(\lambda + \sqrt{5}) = 0 \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = \sqrt{5} \\ \lambda_2 = -\sqrt{5} \end{matrix}$$

$$\text{Çözüm } y = C_1 e^{\sqrt{5}x} + C_2 e^{-\sqrt{5}x} \text{ Bu durumda } y = k_1 \cosh \sqrt{5}x + k_2 \sinh \sqrt{5}x$$

$$\text{Not: } y_h = k_1 \cdot \cosh \lambda x + k_2 \cdot \sinh \lambda x \text{ genel çözümüdür. } k_{1,2} = \mp \sqrt{5} \text{ ile } \lambda = \sqrt{5} \text{ alınır.}$$

Ör:

$$y'' + 4y' + 5y = 0 \quad 2. mertebe lineer homojen.$$

$$\ddot{O}_2 \text{ denklemini } \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \text{ kuadratik formüllerle } \left(\Delta = b^2 - 4ac \quad \lambda_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

$$\lambda_{1,2} = -2 \mp i \text{ bulunur}$$

Bu durumda çözüm

$$y = d_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + d_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$$

$$y = d_1 e^{(-2+i)x} + d_2 e^{(-2-i)x}$$

Bu kompleks elemler eğer i'ye.

$$\text{Not: } \text{hiperbolik fonksiyonlarda } \text{çözüm } y = C_1 \cdot e^{ax} \cos bx + C_2 \cdot e^{ax} \sin bx$$

genel formatedir. Burada $a = -2$ $b = 1$ dir $\xi = -2 + i$ x

$\downarrow a$
 $\downarrow b$

Bu durumda

$$y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x \text{ bulunur.}$$

Ör: $y'' - 8y' + 16y = 0$ 2. mert, linear, homojen

Öz denklemini $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)^2 = 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ $y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$

Ör:

$$y'' = 0$$

Öz denklemini

$$\lambda^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ ve } \lambda_2 = 0$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}$$

$$y_h = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} = C_1 + C_2 x$$

Ör: Aşağıda verilen 2. mertebe linear homojen denklemleri çözünüz.

$$1.) y'' - y = 0 \quad 2.) y'' - y' - 3y = 0 \quad 3.) y'' - 2y' + y = 0 \quad 4.) y'' + 2y' + 2y = 0$$

Ör:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 \quad 3. \text{ mertebe, linear, homojen}$$

$$\text{Öz denklemini } \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \quad (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} = C_1 \cdot e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^x \text{ bulunur.}$$

Ör: $y''' - 9y'' + 20y' = 0$ 4. mertebe lineer homojen

Öz denklemini $\lambda^4 - 9\lambda^3 + 20\lambda^2 = 0$ $\lambda(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-5) = 0$

$\lambda_1 = 0$
 $\lambda_2 = -2$
 $\lambda_3 = 2$
 $\lambda_4 = 5$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + C_4 e^{\lambda_4 x}$$

$$y = \underbrace{C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}}_{k_1 \cosh 2x + k_2 \sinh 2x} + \underbrace{C_3 e^{5x} + C_4 e^{-5x}}_{k_3 \cosh 5x + k_4 \sinh 5x} \text{ ise}$$

$$y = k_1 \cosh 2x + k_2 \sinh 2x + k_3 \cosh 5x + k_4 \sinh 5x \text{ bulunur}$$

Ör: 1. mertebeden lineer homojen bir dif denkleminin kökleri 2 ve 3 dir. Bu dif denkleminin mertebesini, genel çözümünü ve buna ait dif. denklemini bulunuz.

Çöz: 11. denkleminin öz denklemini ait kökleri $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 3$ verilmiş

1. ve genel çözüm

$$y = C_1 e^{x_1 x} + C_2 e^{x_2 x} \text{ formundaki her ikisi de}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \text{ olur.}$$

Karakteristik denklemin kökleri $\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)=0$ $\lambda^2-5\lambda+6=0$ dir.

Ayrıca bu denklemin $y''-5y'+6y=0$ olur. 2. metotla