Gars 17 - 19
Pers 19 - 21
Saatleri iö

Diferansiyel Denklemler (1. Hafta)

1 Bölüm : Önbilgiler

Tanım : En az bir bağımsız değişken, en az bir bağımlı değ. ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bağıntılara diferansiyel denklem denir.

Eğer bağımsız değişken sayısı bir tane ise denklem adi dif. denklem, birden fazla ise kısmi türevli denklem kullanılır.

$$F(x, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0$$

Tanım : Bir dif. denklemdeki en yüksek mertebeli türeve denklemin mertebesi denir. En yüksek mertebeli türevin polinom şeklindeki yazılışının kuvvetine denklemin derecesi denir.

$(y')^2 + 5y' + 2y = \sin x \rightarrow$ 1. mertebe , 2. derece dif. denklem

Eğer bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin dereceleri 1 ve bunların katsayıları sadece bağımsız değişkenlerden oluşuyorsa bu tip denklemlere lineer (doğrusal) denir.

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = F(x)$$

- $(y''')^2 = \frac{3}{4}\frac{x}{y} \rightarrow$ 3. Mertebe, 2. Derece , Lineer Değil

- $y'' = 3y' + xy \rightarrow$ 2. Mertebe, 1. Derece , Lineer

- $\sqrt{y'} = 3(y'')^{2/3} \rightarrow$ 2. Mertebe, 4. derece , Lineer Değil
  ↳ iki tarafın 6. üssü alınır

- $y''' + 2xy' + xy = 0 \rightarrow$ 3. Mertebe , 1. Derece , Tanım: Bir dif. denklemi özdeş olarak sağlayan fonksiyona diferansiyel denklemin çözümü denir. Eğer çözüm mertebe sayısı kadar keyfi sabit içerirse genel çözüm adını alır.

Genel çözümdeki keyfi sabitlere değerler verilerek elde edilen çözümlere özel çözüm denir. Denklemi sağladığı halde genel çözümdeki keyfi sabitlere değer verilerek elde edilemeyen çözümler de vardır. Bu tür çözümler aykırı (tekil) çözümler olarak adlandırılır.

- $y = c^2 + cx^{-1}$ eğri ailesinin $y + xy' = x^4 (y')^2$ denklemini sağladığını gösteriniz.

$c^2 + cx^{-1} + x(-cx^{-2}) - x^4(c^2x^{-4}) = 0$ sağlıyor mu?

sağlıyor. ✓

= Denklem Elde Etme

Verilen bir eğri ailesini çözüm kabul eden en düşük basamakta dif. denklemi elde etmek için eğri ailesindeki keyfi sabit sayısı kadar türev alınarak bu türevlerle eğri ailesi arasında keyfi sabitler yok edilmeye çalışılır. * kapalı fonksiyonlar.

$$f(x,y,c) = 0 \qquad\qquad f(x,y,c_1,c_2) = 0$$

$$f_x + f_y y' = 0 \qquad\qquad f_x + f_y y' = 0$$

$$F(x,y,y') = 0 \qquad\qquad f_{xx} + f_{yx} y' + f_y y'' = 0$$

$$F(x,y,y',y'') = 0$$

- $y = c_1 x + c_2$ eğri ailesini sağlayan min. basamaklı dif. denklemi bulunuz.

$y' = c_1$

$\boxed{y'' = 0}$

- $y = c_1 e^x + c_2 x$

$y' = c_1 e^x + c_2$

$y'' = c_1 e^x$

yerine yazmalar yapılınca $\rightarrow$

$y' = y'' + c_2$

$c_2 = y' - y''$

$y = y'' + (y' - y'')x$

$\rightsquigarrow (1-x)y'' + xy' - y = 0$

$y = cx^2 + cx$ eğri ailesini sağlayan min. basamaklı dif. denklemi bulunuz.

$y' = 2cx + c \dashrightarrow c(x^2+x)$

$\dashrightarrow c(2x+1)$

$(x^2+x)y' = (2x+1)y$

Diferansiyel Denklemler (1. Hafta 2. Ders)

- Merkezi x ekseninde bulunan, sabit r yarıçaplı çember ailelerinin diferansiyel denklemini elde ediniz.

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2 \quad (1)$$

$$2(x-a) + 2yy' = 0 \quad (2)$$

$$\rightsquigarrow (-yy')^2 + y^2 = r^2$$

$$= y^2(y')^2 + y^2 = r^2$$

- $x^2 - xy = c$ bağıntısını çözüm kabul eden min. basamaklı dif. denk. bulunuz.

$$2x - y - xy' = 0$$

Tanım: Diferansiyel denklemler içeren uygulamalarda, denklemin genel çözümünden çok, önceden verilen yardımcı koşulları sağlayan çözümün bulunması istenir. Bu koşullar bağımsız değişkenin bir veya daha çok değeri için bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin önceden verilmesiyle ortaya çıkar. Eğer bu koşullar bağımsız değişkenin bir tek değeri için veriliyorsa başlangıç koşulları, birden fazla değeri için ise sınır koşulları adını alır. İlgili denklem ise başlangıç değer prob. veya sınır değer problemi adını alır.

- $y'' + y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \ , \quad y(\pi) = 0$

sınır değer problemidir.

= Bölüm 2 : 1. Mertebe 1. Derece Diferansiyel Denklemler

1. Mertebe 1. Derece bir dif. denklem en genel şekilde

(1) $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ şeklinde ifade edilir.

(2) $P(x,y) + Q(x,y)\,y' = 0$

$$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

aynı ifadenin farklı şekillerde gösterimleridir.

(3) $y' = f(x,y)$

Eğer 1. Mer. 1. Derece bir dif denklem $|y' = f(x)|$ görünümündeyse direkt integral yardımıyla çözümü bulabiliriz.

= Değişkenlerine Ayrılabilir Denklemler

Eğer (1) denklemi $\overset{(4)}{X_{(x)}dx + Y_{(y)}dy = 0}$ şeklinde yazılabiliyor ise ona değişkenlerine ayrılabilir denir. Ve denklemin genel çözümü (4)'den taraf tarafa integral alınarak kolaylıkla elde edilebilir.

$$F(x) + G(y) = c$$

Örneğin $\sin x\,dx + \cos y\,dy = 0$ ifadesinde taraf tarafa integral alınabilir.

$$-\cos x + \sin y = c$$

∘ $x \sin y\,dx + (x^2+1)\cos y\,dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

(4) formatına benzetmeye çalışılır.

$$\frac{x.\sin y\,dx + (x^2+1)\cos y\,dy}{\sin y\,.\,(x^2+1)} \Rightarrow \frac{x}{x^2+1}dx + \frac{\cos y}{\sin y}dy = 0$$

artık taraf tarafa integral alınabilir.

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln|\sin y| = c$$

∘ $(xy+x)dx = (x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1)dy$

$$x(y+1)\,dx = (x^2+1)(y^2+1)\,dy$$

$\dfrac{x}{x^2+1}dx = \dfrac{y^2+1}{y+1}dy$ ifadesinde taraf tarafa integral alınır ve çözüme ulaşılır.

Diferansiyel Denklemler (2. Hafta 1. Ders)

· $y' - xy^2 + x = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y' = xy^2 - x$

$\frac{dy}{dx} = x(y^2-1) \longrightarrow dy = x(y^2-1)dx \rightarrow \frac{dy}{y^2-1} = x\,dx$

taraf tarafa integral alınabilir.

$\left(\frac{1}{y^2-1} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1}\right) \rightsquigarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)$

$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy = \int x\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln|y-1| - \ln|y+1|\right] = \frac{x^2}{2} + C$

$= \frac{y-1}{y+1} = ce^{x^2}$

· $\frac{dy}{dx} = x + y$

Not: Eğer verilen denklem $y' = f(ax+by+c)$ şeklinde ise $ax+by+c = z$ dönüşümü yardımıyla denklem değişkenlerine ayrılabilir hale getirilebilir.

$x + y = z$

$1 + y' = z'$

$z' - 1 = z$

$z' = z + 1$

$\int \frac{dz}{z+1} = \int dx = \ln|z+1| = x + c$

$= \ln(x+y+1) = x + c$

· $2dy = (\cos x \cdot \cos 2y + \sin x \cdot \sin 2y + 1)\,dx$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$2dy = (\cos(x-2y)+1)\,dx$

$2y' = 1 + \cos(x-2y)$

$x - 2y = z$

$1 - 2y' = z'$

$z' = -\cos z$

$z' + \cos z = 0 \rightsquigarrow \frac{dz}{dx} + \cos z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{\cos z} + dx = 0$

taraf tarafa integral alınabilir $\rightarrow \int \sec z\,dz + \int dx = 0 \rightarrow \ln|\sec z + \tan z| + x = c$

- $y' = (3x+3y+8)^2$

?

- $(x\,dx + y\,dy)(x^2+y^2) = x^3 dx$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$x^2+y^2 = z$

$2x\,dx + 2y\,dy = dz$ $\rightsquigarrow \displaystyle\int \frac{1}{2} z\,dz = \int x^3 dx$

- Bir memleketin nüfusu, o memlekettеki insan sayısına orantılı olarak değişiyor. Orantı sabiti 0.028 ve 2020 yılındaki nüfus 60 milyon olduğuna göre 2030 yılındaki nüfusu bulunuz.

m: doğum oranı

n: ölüm oranı

y(t): zamana bağlı nüfus

Δy: nüfustaki değişim

Δt: zamandaki değişim

$$\Delta y = m\,y(t)\,\Delta t - n\,y(t)\,\Delta t$$

$$\Delta y = \underbrace{(m-n)}_{k} y(t)\,\Delta t$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = k\,y(t) \quad \rightsquigarrow \quad \xrightarrow{\Delta t \to 0 \text{ iken}} \quad \frac{dy}{dt} = k\,y(t)$$

$\rightarrow \dfrac{dy}{y} = k\,dt \rightarrow \ln y = kt + \ln c \rightarrow \boxed{y = ce^{kt}}$ değerler yerine yazılarak c bulunur. Sonrasında 2030 yılı için y bulunur.

= Homojen Diferansiyel Denklemler

İki değişkenli fonksiyonu için $f(tx, ty) = t^n f(x,y)$ oluyorsa f fonksiyonuna homojen fonksiyon denir (n. dereceden).

$f(x,y) = x^2+y^2$

$f(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2$

$= t^2(x^2+y^2) \rightarrow$ 2. dereceden homojen bir fonksiyondur.

$f\left(\frac{y}{x}\right)$ tipindeki fonksiyonlar 0. dereceden homojen fonksiyonlardır.

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ dif denklemi verilmiş olsun. Eğer P ve Q fonksiyonları aynı dereceden homojen fonksiyonlar ise denkleme homojen diferansiyel denklem denir. Bu şekildeki bir denklem eşdeğer olarak $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ şeklinde yazılabileceğinden o denklem homojendir.

Teorem: Eğer $Pdx + Qdy = 0$ denklemi homojen ise $y = v.x$ dönüşümü yardımıyla degişkenlerine ayrılabilir hale getirilebilir. Burada $v = v(x)$, en azından 1. mertebe sürekli türeve sahip bir fonksiyondur.

$y' = v'x + v$

$v'x + v = f(v)$

$x\frac{dv}{dx} = f(v) - v$

$x\,dv = f_1(v)dx$

$\int \frac{dv}{f_1(v)} = \int \frac{dx}{x}$

• $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$

$y' = \frac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x} = \frac{x\left(\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}\right)}{x} \rightarrow y' = \sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$ Homojendir.

$y = v.x$ dönüşümü yapılır.

$y' = v'x + v \sim xv' + v = \sqrt{1-v^2} + v \rightarrow x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1-v^2}$

$\Rightarrow \frac{x\,dv = \sqrt{1-v^2}\,dx}{x\sqrt{1-v^2}} \sim \int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \int \frac{dx}{x}$

$\arcsin v = \ln x + c$

$\boxed{\arcsin \frac{y}{x} = \ln x + c}$

• $x^2y\,dx - (x^3-y^3)\,dy=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Homogen dif. denklemdir.

$y = v\cdot x$

$$y' = \frac{x^2y}{x^3-y^3} = \frac{x^2y}{x^3\left(1-\left(\frac{y}{x}\right)^3\right)} = \frac{\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^3}$$

$$xv' + v = \frac{x^2vx}{x^3-v^3x^3} = \frac{x^3v}{x^3(1-v^3)} = \frac{v}{1-v^3}$$

$$\rightsquigarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1-v^3} - v = \frac{v^4}{1-v^3} \rightsquigarrow x\,dv = \frac{v^4}{1-v^3}\,dx$$

$$\int\frac{1-v^3}{v^4}\,dv = \int\frac{dx}{x} \longrightarrow \frac{v^{-3}}{-3} - \ln v = \ln x + c \quad \dots$$

Diferansiyel Denklemler (2. Hafta 2. Ders)

• $y' = \dfrac{y + xe^{\frac{y}{x}} + ye^{\frac{y}{x}}}{x + xe^{\frac{y}{x}}}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$= \dfrac{x\left[\frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\right]}{x\left[1 + e^{\frac{y}{x}}\right]}$ verilen denklem $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ kalıbında olduğu için homojen dif. denklemdir.

$y = v.x$

$y' = v'x + v$

$v'x + v = \dfrac{v + e^{v} + ve^{v}}{1 + e^{v}} \rightsquigarrow x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{v + e^{v} + ve^{v} - v - ve^{v}}{1 + e^{v}}$

$= x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{e^{v}}{1 + e^{v}} \Rightarrow x\,dv = \dfrac{e^{v}}{1 + e^{v}}dx \Rightarrow \dfrac{1 + e^{v}}{e^{v}}dv = \dfrac{dx}{x}$ artık iki tarafın integrali alınabilir.

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{1 + e^{v}}{e^{v}}dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int (e^{-v} + 1)\,dv = \int \frac{dx}{x}$

$= -e^{-v} + v = \ln x + c$

$\boxed{-e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = \ln x + c}$

? • $y' = \dfrac{y}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right)$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

• $x^2dy - (y^2 + 2xy)dx = 0$ denkleminin g. çözümünü bulunuz.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\dfrac{y}{x}\right)$ artık denklem $y = v.x$ yardımıyla çözülebilir.

$v'x + v = v^2 + 2v$ $\qquad \displaystyle\int \frac{dv}{v^2 + v} = \int \frac{dx}{x}$

$xv' = v^2 + v$

$\Rightarrow \displaystyle\int \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right)dv = \int \frac{dx}{x}$

= Homojen hale getirilebilen denklemler

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0 \quad (*)$$

denklemi homojen olmamasına rağmen basit dönüşümler yardımıyla ya doğrudan değişkenlerine ayrılabilir ya da homojen hale getirilebilir.

dx ve dy'nin katsayıları düzlemde birer doğru belirttiğinden dolayı ilgili dönüşümler doğruların paralel olması ya da bir noktada kesişmelerine göre belirlenir.

i) 2 doğrunun paralel olma durumu

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k \quad \text{veya} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{paralellik belirtir.}$$

$(*)$ $[k(a_2x + b_2y) + c_1]dx + [a_2x + b_2y + c_2]dy = 0$ halinde yazılabilir.

$a_2x + b_2y = z$ kullanılarak çözüme ulaşılabilir.

ii) 2 doğrunun kesişme durumu

Kabul edelim ki dx ve dy'nin katsayılarındaki doğrular düzlemde (α, β) noktasında kesişsinler. Bu durumda;

$$x = X + \alpha$$
$$y = Y + \beta$$

dönüşümleri yardımıyla $(*)$ denklemi homojen hale indirgenir.

$(a_1X + b_1Y)dX + (a_2X + b_2Y)dY = 0$ homojen olmuştur.

• $(x + 2y + 7)y' + (2x - y + 4) = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\Rightarrow (x + 2y + 7)dy + (2x - y + 4)dx = 0$ (doğrular paralel değil)

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= -7 \\ 2x - y &= -4 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= -3 \\ y &= -2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= X - 3 \\ y &= Y - 2 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow (X - 3 + 2Y - 4 + 7)dY + (2X - Y)dX = 0$

$\Rightarrow (X + 2Y)dY + (2X - Y)dX = 0$

denklem artık homojen.

$y = vx$ kullanılır.

$y' = v'x + v$ $\rightarrow$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-2x}{x+2y} \Rightarrow v'x + v = \dfrac{vx - 2x}{x + 2vx} = \dfrac{v-2}{1+2v} \ldots$

bu aşamadan sonra integral alınarak çözüm bulunur.

• $(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

doğrular paraleldir.

$(x+2y+3)dx + [2(x+2y)-1]dy = 0$

$x+2y = z$

$1+2y' = z'$ $\rightarrow y' = \dfrac{x+2y+3}{2(x+2y)-1} \rightarrow \dfrac{z'-1}{2} = \dfrac{z+3}{2z+1}$

$= z' = \dfrac{2z+6}{1-2z} + 1 \qquad z' = \dfrac{2z+6+1-2z}{1-2z} = \dfrac{7}{1-2z}$

$\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{7}{1-2z} \Rightarrow (1-2z)dz = 7dx$

$z - z^2 = 7x + c \rightarrow x+2y-(x+2y)^2 = 7x+c$

$\Rightarrow \boxed{x^2+4xy+4y^2+6x-2y = c}$

?

• $(x+y)dx + (3x+3y-4)dy = 0$

$(5x+2y+1)dx + (2x+y+1)dy = 0$ denklemlerinin genel çözümlerini bulunuz.

= Tam Diferansiyel Denklemler

Tanım: iki değişkenli $f(x,y)$ fonksiyonunun tam diferansiyeli

$$df = f_x dx + f_y dy$$

f_x: f'nin x'e göre türevi

ile ifade edilir.

• $f(x,y) = x^2 y + e^{xy}$

$$df = (2xy + e^{xy} \cdot y)\, dx + (x^2 + e^{xy} \cdot x)\, dy$$

Tanım: Eğer $df = \boxed{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy}$ ifadesinde

çerçeve içerisindeki ifadeye tam diferansiyel denir.

Eğer bu ifade bir tam diferansiyel ise

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ ifadesine tam dif. denklem denir.

Diferansiyel Denklemler (3. Hafta 1. Ders)

Teorem: $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ denkleminin tam diferansiyel olması için gerek ve yeter koşul;

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$ denkleminin sağlanmasıdır.

$(Q_x = P_y)$

dolayısıyla $F(x,y) = c$ için

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$$

olmalıdır $\xrightarrow{\text{integral alınırsa}}$ $F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + h(y)$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)\,dx\right] + h'(y) = Q(x,y)$$

$$h'(y) = A(y)$$

• $\underbrace{(3x^2+4xy)}_{P}\,dx + \underbrace{(2x^2+2y)}_{Q}\,dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$P_y = 4x$

$Q_x = 4x$ $\Big\rangle$ $P_y = Q_x$ olduğundan denklem tam diferansiyeldir.

Dolayısıyla öyle bir $F(x,y) = c$ eğri ailesi vardır ki;

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 4xy$$

sağlamalıdır. $\xrightarrow{\text{integral alınırsa}}$ $F(x,y) = x^3 + 2x^2y + h(y)$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2 + 2y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2 + 2y = 2x^2 + h'(y)$$

$h(y) = y^2 + c$ $\longrightarrow$ $\boxed{x^3 + 2x^2y + y^2 = c}$

• $\underbrace{\frac{y+\ln x}{x^2}}_{P} dx - \underbrace{\frac{1}{x}}_{Q} dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\left.\begin{array}{l} P_y = \frac{1}{x^2} \\ Q_x = \frac{1}{x^2} \end{array}\right\}$ Tam dif. denklem

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y+\ln x}{x^2}$

sağlayan eğri ailesi vardır.

$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{x}$

$\int_y \frac{\partial F}{\partial y} = -\int_y \frac{1}{x} \rightarrow F(x,y) = -\frac{y}{x} + h(x)$

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y+\ln x}{x^2} = \frac{y}{x^2} + h'(x) \rightsquigarrow h'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

$h(x) = \int \frac{\ln x}{x^2} dx \Longrightarrow h(x) = \frac{-1}{x}(1+\ln x)$

$\left(\ln x = u \quad \frac{dx}{x^2} = dv \right.$

$\left. \frac{1}{x} dx = du \quad -\frac{1}{x} = v \right)$

• $(ye^x + 2e^x + y^2)dx + (e^x + 2xy)dy = 0$, $y(0) = 6$ old. göre başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

$P_y = e^x + 2y$

$Q_x = e^x + 2y$

$\frac{\partial F}{\partial x} = ye^x + 2e^x + y^2 \Rightarrow F(x,y) = ye^x + 2e^x + y^2x + h(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = e^x + 2xy \Rightarrow F(x,y) = e^x y + xy^2 + h(x)$

$\rightarrow ye^x + 2e^x + y^2x = c$

$x=0$, $y=6$ yazılırsa

$c = 8$ bulunur.

$\boxed{ye^x + 2e^x + y^2x = 8}$

• $(2x\cos y + 3x^2y)dx + (x^3 - x^2\sin y - y)dy = 0$, $y(0) = 2$ genel çöz. bulunuz.

Cevap $\Rightarrow x^2\cos y + x^3y - \frac{y^2}{2} = -2$

İntegrasyon Çarpanı

$Pdx + Qdy = 0$ denklemi için $P_y \neq Q_x$ ise denklem tam dif. olmayacaktır.

Bu durumda denklem uygun bir $\lambda = \lambda(x,y)$ şeklinde integrasyon çarpanı ile çarpılarak tam diferansiyel hale getirilebilir.

$\underbrace{(\lambda P)}dx + \underbrace{(\lambda Q)}dy = 0$ denklemi elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda P) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda Q) \rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial y}.P + \lambda\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial x}Q + \lambda\frac{\partial Q}{\partial x}$$

olmalı (tam dif. olması için)

i) $\lambda = \lambda(x)$ ise (λ, sadece x'e bağlı ise)

$$\lambda P_y = \frac{d\lambda}{dx}Q + \lambda Q_x$$

$$\lambda(P_y - Q_x) = \frac{d\lambda}{dx}Q \rightarrow \frac{(P_y - Q_x)}{Q}dx = \frac{d\lambda}{\lambda}$$

ii) $\lambda = \lambda(x,y)$ ise

$$\frac{d\lambda}{dy}.P + \lambda P_y = \lambda Q_x \rightarrow \frac{Q_x - P_y}{P}dy = \frac{d\lambda}{\lambda}$$

Diferansiyel Denklemler (3. Hafta 2. Ders)

• $(x^2+y^2+x)dx + xy\,dy = 0$ denklemi için uygun bir integrasyon çarpanı araştırınız ve genel çözümünü bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} P_y = 2y \\ Q_x = y \end{array}\right\rangle \text{ Tam dif. değil.}$$

$$\frac{Q_x - P_y}{-Q} = \frac{y-2y}{-xy} = \frac{1}{x} \qquad \int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int \frac{1}{x}dx \Rightarrow \ln\lambda = \ln x$$

$$\underline{\underline{\lambda = x}}$$

denklem x ile çarpılacak.

$$\underbrace{(x^3+y^2x+x^2)}_{P}dx + (\underbrace{x^2y}_{Q})dy = 0$$ buradan sonra çözüm araştırılır.

• $(2xy^2-3y^3)dx + (7-3xy^2)dy = 0$ denklemi için uygun bir integrasyon çarpanı araştırınız.

$$P_y = 4xy - 9y^2 \qquad \frac{Q_x - P_y}{-Q} = \frac{-3y^2-4xy+9y^2}{3xy^2-7} \qquad \frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{6y^2-4xy}{2xy^2-3y^3}$$
$$Q_x = -3y^2$$

$$= \frac{2y(3y-2x)}{y^2(2x-3y)} = \frac{-2}{y}$$

$$\lambda = e^{\int -\frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln y} = \frac{1}{y^2}$$ ile çarpılacak.

• $(x^3y-y^2)dx - (x^4+xy)dy = 0$ denklemi için $x^m y^n$ şeklinde integrasyon çarpanı araştırınız.

NOT: $y(a+\alpha x^p y^q)dx + x(b+\beta x^p y^q)dy$ şeklindeki denklemlerde $x^m y^n$ şeklinde integrasyon çarpanı aranabilir.

denklem $x^m y^n$ ile çarpılır. $\rightarrow (x^{m+3}y^{n+1} - x^m y^{n+2})dx - (x^{m+4}y^n + x^{m+1}y^{n+1})dy = 0$

$P_y = Q_x \quad (n+1)x^{m+3}y^n - (n+2)x^m y^{n+1} = -\left((m+4)x^{m+3}y^n + (m+1)x^m y^{n+1}\right)$

olacaktır.

$m=-2$, $n=-3$ bulunur $\rightarrow$ $x^{-2}y^{-3}$ integrasyon çarpanıdır.

• $4y\,dx - x\,dy = xy^2 dx$ denklemi için $x^m y^n$ şeklindeki integrasyon çarpanı araştırınız.

? $x^3 y^{-2}$ (cevap)

• $(x - xy)dx + (x^2 + y)dy = 0$ denklemi için $u = x^2 + y^2$, $\lambda = \lambda(u)$ şeklinde integrasyon çarpımı araştırınız.

NOT: Eğer bir denklemde $x\,dx + y\,dy$ varsa $u = x^2 + y^2$ olmak üzere $\lambda = \lambda(u)$ sağlayan integrasyon çarpanı araştırılabilir.

$$\left[\lambda(x - xy)\right]'_y = \left[\lambda(x^2 + y)\right]'_x \Rightarrow \frac{d\lambda}{dy}(x - xy) + \lambda(-x) = \frac{d\lambda}{dx}(x^2 + y) + 2x\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{d\lambda}{du}\frac{du}{dy}(x - xy) - \lambda x = \frac{d\lambda}{du}\frac{du}{dx}(x^2 + y) + 2x\lambda$$

$$= 2y\frac{d\lambda}{du}(x - xy) - \lambda x = 2x\frac{dx}{du}(x^2 + y)2x\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{d\lambda}{du}\left[2yx - 2xy^2 - 2x^3 - 2xy\right] = 3\lambda x \Rightarrow -2x(y^2 + x^2)\frac{d\lambda}{du} = 3\lambda x$$

$$\Rightarrow -2u\frac{d\lambda}{du} = 3\lambda \longrightarrow \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-3}{2}du$$

$$\ln\lambda = \frac{-3}{2}\ln u \longrightarrow \ln\lambda = \ln u^{\frac{-3}{2}}$$

$$\lambda = u^{-3/2}$$

$$\lambda = (x^2 + y^2)^{-3/2}$$

• $y\,dx + x(1 - 3x^2y^2)dy = 0$ denklemi için $u = xy$, $\lambda = \lambda(u)$ sağlayan integrasyon çarpanı araştırınız. $\left(\text{Cevap} = \frac{1}{x^3y^3}\right)$

NOT: Eğer bir denklemde $y\,dx + x\,dy$ durumu varsa $u = xy$ olacak şekilde $\lambda = \lambda(u)$ sağlayan integrasyon çarpanı araştırılabilir.

• $(x^4+y^4)dx - xy^3dy = 0$ denklemi için uygun bir integrasyon çarpanı araştırınız.

NOT : Eğer bir denklem homojen ise $\lambda = \dfrac{1}{xP+yQ}$ şeklinde integrasyon çarpanı araştırılabilir.

$$\lambda = \frac{1}{x(x^4+y^4)+y(-xy^3)} = \frac{1}{x^5+xy^4-xy^4} = \frac{1}{x^5}$$

• $y^2dx + (x^2-xy-y^2)dy = 0$ denklemi için integrasyon çarpanı araştırınız.

? Cevap $= \dfrac{1}{y(x^2-y^2)}$

= Lineer Diferansiyel Denklemler =

1. Mertebe 1. derece en genel bir lineer dif. denklem

(1) $a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$

şeklinde ifade edilmektedir.

(2) $y' + p(x).y = q(x)$

$$\frac{dy}{dx} = q(x) - p(x).y \longrightarrow \underbrace{[q(x) - p(x).y]}_{P}dx \underbrace{-dy}_{Q} = 0$$

(2) şeklindeki bir denklem için $\lambda = e^{\int p(x)dx}$ integrasyon çarpanı vardır.

(2) denklemini λ ile çarparsak;

$$e^{\int p(x)dx}.y' + e^{\int p(x)dx}p(x)y = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow \int\left(e^{\int p(x)dx}y\right)' = \int e^{\int p(x)dx}q(x)$$

$$\boxed{\lambda y = \int \lambda q\, dx + c}$$

Diferansiyel Denklemler (4. Hafta 2. Ders)

• $6y^2 dx - x.(2x^3+y)dy = 0$ genel çözümünü bulunuz.

Her taraf dy'ye bölünür

$$6y^2\frac{dx}{dy} - 2x^4 - xy = 0 \rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{2x^4}{6y^2} - \frac{xy}{6y^2} = 0 \rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{1}{6y}x = \frac{1}{3}y^{-2}x^4$$

$$x^{-4}\frac{dx}{dy} - \frac{1}{6y}x^{-3} = \frac{1}{3}y^{-2} \longrightarrow -3x^{-4}\frac{dx}{dy} = \frac{du}{dy} \rightarrow -\frac{1}{3}\frac{du}{dy} - \frac{1}{6y}u = \frac{1}{3}y^{-2}$$

$x^{-3} = u$

Her taraf -3 ile çarpılırsa $\Rightarrow \dfrac{du}{dy} + \dfrac{1}{2y}u = -y^{-2}$ } Lineer denklem.

$$\lambda = e^{\int \frac{1}{2y}dy} = e^{\frac{1}{2}\ln y} = y^{1/2}$$. Denklem λ ile çarpılır.

$$y^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dy} + \frac{1}{2}y^{-1/2}u = -y^{-3/2} \Rightarrow \frac{d}{dy}\left(y^{\frac{1}{2}}u\right) = -y^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow y^{\frac{1}{2}}u = 2y^{-\frac{1}{2}} + c$$

Her tarafın y'ye göre integrali alınır.

u yerine x^{-3} yazılır : $y^{\frac{1}{2}}.x^{-3} = 2y^{-\frac{1}{2}} + c$

• $y' + y = xy^3$

$$y^{-3}y' + y^{-2} = x \xrightarrow{y^{-2}=u} -2y^{-3}y' = u' \longrightarrow -\frac{1}{2}u' + u = x$$

$u' - 2u = -2x$ (lineer) , $\lambda = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$

$$e^{-2x}u' - 2e^{-2x}u = -2xe^{-2x}$$

$$\int (e^{-2x}u)'dx = -\int 2xe^{-2x}dx \frown u = x + \frac{1}{2} + ce^{2x} \xrightarrow{u=y^{-2}} y^{-2} = ce^{2x} + x + \frac{1}{2}$$

• $xy' + y = -2x^6 y^4$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y' + \frac{1}{x} y = -2x^5 y^4$$

Her taraf y^4'e bölünür

$$y^{-4} y' + \frac{1}{x} y^{-3} = -2x^5 \xrightarrow{y^{-3}=u} -3y^{-4} y' = u' \longrightarrow -\frac{1}{3} u' + \frac{1}{x} u = -2x^5$$

$$\Rightarrow u' - \frac{3}{x} u = 6x^5 \quad (\text{lineer}) \qquad \Rightarrow \frac{1}{x^3} u' - \frac{3}{x^4} u = 6x^2 \rightsquigarrow \left(\frac{1}{x^3} u\right)' = 6x^2$$

$$\lambda = e^{-\int \frac{3}{x} dx} = e^{-3\ln x} = \frac{1}{x^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3} u = 2x^3 + c \longrightarrow \boxed{\frac{1}{x^3} y^{-3} = 2x^3 + c}$$

= Riccati Diferansiyel Denklemleri =

(*) $y' + P(x) \cdot y^2 + q(x) \cdot y + r(x) = 0$ denklemine Ricatti dif denklemi denir.

Eger (*) denkleminin herhangi bir $y_1(x)$ özel çözümü biliniyor ise bu durumda

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

dönüşümü yardımıyla Riccati denklemi $u' + P_1(x) u = q_1(x)$ lineer denklemine indirgenir. $(u = u(x))$.

• $(1-x^3) y' - y^2 + x^2 y + 2x = 0$ denklemi için $y = ax^2$ özel çözümü yardımıyla genel çözümü araştırınız

$$(1-x^3)(2ax) - a^2 x^4 + ax^4 + 2x = 0$$

$$\underbrace{(-a-a^2)}_{0} x^4 + \underbrace{(2a+2)}_{0} x = 0$$

$-a - a^2 = 0 \rightarrow a = 0$, $a = -1$

$2a + 2 = 0 \rightarrow a = -1$

$y = -x^2 + u$

$y' = -2x - \frac{u}{u^2}$

$$\rightsquigarrow (1-x^3)\left(-2x - \frac{u'}{u^2}\right) - \left(-x^2 + \frac{1}{u}\right)^2 + x^2\left(-x^2 + \frac{1}{u}\right) + 2x = 0$$

$$(x^3-1)\frac{u'}{u^2}+\frac{3x^2}{u}-\frac{1}{u^2}=0 \xrightarrow[u^2 \text{ ile çarpılır}]{\text{Her taraf}} (x^3-1)u'+3x^2u=1$$

$$\Rightarrow \left| u'+\frac{3x^2}{x^3-1}u=\frac{1}{x^3-1} \right|$$

• $y'+y^2+\frac{1}{x}y-\frac{4}{x^2}=0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1=\frac{2}{x}$ olduğuna göre genel çözümü bulunuz.

$$y=\frac{2}{x}+\frac{1}{u} \qquad y'=-\frac{2}{x^2}-\frac{u'}{u^2} \quad \rightsquigarrow \quad u'-\frac{5}{x}u=1$$

$$\lambda=e^{\int -\frac{5}{x}dx}=\frac{1}{x^5}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x^5}\cdot u\right)'=\frac{1}{x^5} \longrightarrow \frac{1}{x^5}u=\frac{x^{-4}}{-4}+c \longrightarrow u=cx^5-\frac{x}{4}$$

• $y'=y^2-2xy+x^2+1$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y'=(y-x)^2+1 \qquad y_1=x \longrightarrow y=x+\frac{1}{u} \qquad \cancel{1}-\frac{u'}{u^2}=\frac{1}{u^2}+\cancel{1} \rightsquigarrow u'=-1$$

$$u=-x+c \quad \rightsquigarrow \quad y=x+\frac{1}{c-x}$$

• Örnek sorular ve cevapları

i) $y'-y^2+2e^xy-e^{2x}-e^x=0$, $y_1=e^x$

i) $y'+\frac{y}{3}=\frac{1}{3}(1-2x)y^4$

i) $y'-\frac{1}{x}y=-\frac{1}{x}y^2$

i) $y'+3y=3x^2e^{-3x}$

genel çözümlerini bulunuz.

Diferansiyel Denklemler (5. Hafta 2. Ders)

Eğer $F(x,y,p)=0$ denklemi $(p=y')$

$$y=f(x,p) \quad (4)$$

$$x=g(y,p) \quad (5)$$

şekillerinden herhangi biri biçiminde yazılabilirse bu durumda (4) için x'e göre (5) için ise y'ye göre türev alarak hem genel çözüm hem de (varsa) aykırı çözüm elde edilebilir.

$$p=f_x+f_p\frac{dp}{dx} \quad (*)$$

Eğer (*) denkleminde p'nin tanımsızlık oluşturan değerleri (4) denkleminde yerine yazılıp eğer varsa aykırı çözümler de elde edilebilir.

• $y=\frac{xp}{2}+\frac{x}{2p}$ denkleminin genel çözümünü ve varsa aykırı çözümünü bulunuz.

$(p=y')$

denklem $y=f(x,p)$ şeklinde olduğundan her iki tarafın x'e göre türevini alalım.

$$p=\frac{1}{2}\left(p+x\frac{dp}{dx}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{p-x\frac{dp}{dx}}{p^2}\right)$$

$$2p=p+x\frac{dp}{dx}+\frac{1}{p}-\frac{x}{p^2}\frac{dp}{dx} \xrightarrow{dp/dx \text{ parantezi alınır.}} (p^2-1)\left(x\frac{dp}{dx}-p\right)=0$$

$p^2-1=0 \Rightarrow p=\mp1$

$p=-1 \Rightarrow y=-x$

Sağlar ✓ $p=-1$ Aykırı çözümdür.

$p=1 \Rightarrow y=x$

Sağlar ✓ $p=1$ Aykırı çözümdür.

$p^2-1\neq0$

$x\frac{dp}{dx}-p=0 \rightarrow \frac{1}{p}dp-\frac{1}{x}dx=0$

$\ln p-\ln x=\ln c$

$p=cx \rightarrow y=\frac{xcx}{2}+\frac{x}{2cx}$ genel çözüm.

= Clairout Denklemi

F(x,y,p) = 0 denklemi eğer $y = xp + f(p) \quad (7)$ şeklinde ise clairout denklemidir.

(7) denkleminden x'e göre türev alınırsa;

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}(x + f'(p)) = 0 \quad (8) \rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow \boxed{y = cx + f(c)}$$ genel Gözüm

$$\left.\begin{array}{l} x + f'(p) = 0 \\ y = xp + f(p) \end{array}\right\} \phi(x,y) = 0$$

Aykırı Gözüm

• $y = xp - e^p$ denkleminin Gözümlerini bulunuz.

Clairout formundadır.

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - e^p\frac{dp}{dx} \longrightarrow \frac{dp}{dx}(x - e^p) = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

$$\boxed{y = cx - e^c}$$ genel Gözüm

$$\left.\begin{array}{l} y = xp - e^p \\ x - e^p = 0 \end{array}\right\} x - e^p = 0 \Rightarrow p = \ln x$$

$$\boxed{y = x\ln x - x}$$ Aykırı Gözüm

• $(y - px)^2 = 1 + p^2$ denkleminin Gözümlerini bulunuz.

$$y - px = \sqrt{1 + p^2}$$

$$y = xp + \sqrt{1 + p^2} \longrightarrow p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{1}{2\sqrt{1+p^2}} \cdot 2p \cdot \frac{dp}{dx} \rightarrow \frac{dp}{dx}\left[x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right] = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow \boxed{y = cx + \sqrt{1 + c^2}}$$ genel Gözüm

$$y = xp + \sqrt{1 + p^2}$$

$$x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}}$$

Aykırı Gözüm.

$y = xp + p^3$ çözümlerini bulunuz.

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx} \longrightarrow \frac{dp}{dx}(x+3p^2) = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow \boxed{y = cx + c^3}$$

genel çözüm

$$\left.\begin{array}{l} y = xp + p^3 \\ x + 3p^2 = 0 \end{array}\right\} \quad 3p^2 = -x \Rightarrow p^2 = \frac{-x}{3}$$

$$p = \sqrt{-\frac{x}{3}} \quad (x \leq 0)$$

$$\boxed{y = x \cdot \sqrt{\frac{-x}{3}} + \left(-\frac{x}{3}\right)^{3/2}}$$

Aykırı çözüm

- $y = xp + \dfrac{1}{p}$
- $y = xp + 1 + p^2$

= Lagrange Denklemi =

$F(x,y,p) = 0$ denklemi $y = x \cdot f(p) + g(p)$ şeklinde ise Lagrange denklemidir.

$$p = f(p) + x\,f'(p)\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$p - f(p) = \frac{dp}{dx}\left(x\,f'(p) + g'(p)\right)$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x \cdot f'(p) + g'(p)}{p - f(p)} \longrightarrow \frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p - f(p)}x = \frac{g'(p)}{p - f(p)} \quad (\text{lineer})$$

$$\left.\begin{array}{l} G(x,p,c) = 0 \\ y = xf(p) + g(p) \end{array}\right\} \text{genel çözümün parametrik gösterimi}$$

$$\left.\begin{array}{l} p - f(p) = 0 \\ y = x \cdot f(p) + g(p) \end{array}\right\} \text{Aykırı çözüm araştırılır. Olmak zorunda değildir.}$$

• $y = 2xp + \ln p$

Lagrange formundadır.

x'e göre türev alınır $\longrightarrow p = 2p + 2x\dfrac{dp}{dx} + \dfrac{1}{p}\dfrac{dp}{dx} \Rightarrow -p = \dfrac{dp}{dx}\left(2x + \dfrac{1}{p}\right)$

$\dfrac{dx}{dp} = -\dfrac{2x}{p} - \dfrac{1}{p^2} \Rightarrow \dfrac{dx}{dp} + \dfrac{2}{p}x = \dfrac{-1}{p^2}$ $(p \neq 0)$ (lineer) $\qquad \lambda = e^{\int \frac{2}{p}dp} = e^{2\ln p} = p^2$

$\dfrac{d}{dp}(p^2 x) = -1$

$p^2 x = -p + c$

$y = 2xp + \ln p$
$xp^2 + p - c = 0$
} genel çözümün parametrik gösterimi

$p = 0$ için $\ln p$ tanımsız olduğundan $p = 0$'a karşılık aykırı çözüm yoktur.

• $y = xp^2 + p^2$

Lagrange. x'e göre türev.

$p = p^2 + 2xp\dfrac{dp}{dx} + 2p\dfrac{dp}{dx} \rightarrow p - p^2 = \dfrac{dp}{dx}(2xp + 2p) \rightarrow (p - p^2)\dfrac{dx}{dp} = 2xp + 2p$

$\rightarrow \dfrac{dx}{dp} = \dfrac{2xp + 2p}{p - p^2} \rightarrow \dfrac{dx}{dp} = \dfrac{2xp}{p - p^2} + \dfrac{2p}{p - p^2} \rightarrow \dfrac{dx}{dp} - \dfrac{2p}{p - p^2}x = \dfrac{2p}{p - p^2}$ $\quad p \neq 0$, $p \neq 1$

$\rightarrow \dfrac{dx}{dp} - \dfrac{2}{1-p}x = \dfrac{2}{1-p}$ (lineer) $\qquad \lambda = e^{\int \frac{2}{p-1}dp} = e^{2\ln(p-1)} = (p-1)^2$

$\rightarrow \dfrac{d}{dp}\left((p-1)^2 x\right) = 2(1-p)$

$p = 0$ | $p = 1$
$y = 0$ ✓ | $y = x + 1$ ✓
Aykırı Çözüm | Aykırı Çözüm

• $y = xp^2 + p^3$

• $y = xp^2 + p$

20.03.24

Diferansiyel Denklemler (6. Hafta 1. Ders)

= Yüksek basamaktan lineer dif denklemler =

n'inci mertebeden en genel bir lineer denklem

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x) \quad (1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

$a_i(x) \ (i=\overline{0,n}),\ F(x)$

$I \subseteq \mathbb{R}$

Eğer (1) denklemindeki $F(x)=0$ ise bu denkleme (1) denklemine ilişkin homojen denklem denir.

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (2)$$

(1) denklemi formunda örnekler

$x^3y'' + 2xy' + 5y = \sin x$ $\qquad$ $y'' + y = \sin x$

$3y^{(4)} + 5y'' + 6y' = 0$ $\qquad$ $x^2y'' + 2xy' + 5y = 0$

Tanım: $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları ve $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabitler olmak üzere $c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ ifadesine $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonu denir.

Tanım:

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n = 0 \iff c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

ise $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlarına lineer bağımsızdır denir.

En az bir c_i 0 değilse lineer bağımlıdır.

$\{e^x, e^{2x}\}$ → lineer bağımsızdır. Çünkü biri birinin katı şeklinde yazılamıyor.

Tanım: (1) denkleminin genel çözümünü elde edebilmek için önce (2) homojen denklemine ait y_h genel çözümü ve y_p de (1) denkleminin özel çözümü olmak üzere

$y_g = y_h + y_p$

Tanım: $y_1, y_2, \dots, y_n$, (2) denklemini sağlayan n tane lineer bağımsız çözüm olmak üzere (2)'nin genel çözümü

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$

şeklindedir.

• $y'' + y = 0$ denklemini ele alalım.

Kolaylıkla görülebilir ki $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonları bu denklemi sağlayan lineer bağımsız çözümlerdir.

Denklemin genel çözümü $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ dir.

= yüksek mertebeden sabit katsayılı homojen lineer denklemler =

$a_i \in R \quad (i = \overline{0,n})$ olmak üzere

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (3)$

$n = 1$ için çözümü araştıralım

$a_1 y' + a_0 y = 0$

$y' + \frac{a_0}{a_1} y = 0 \rightsquigarrow \frac{dy}{y} + \frac{a_0}{a_1} dx = 0 \rightarrow \ln y + \frac{a_0}{a_1} x = \ln c$

$\ln \frac{y}{c} = -\frac{a_0}{a_1} x \rightarrow y = c e^{-\frac{a_0}{a_1} x}$

$\boxed{y = c e^{rx}}$

$n = 2$ için

$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (5)$

$n = 1$ için elde edilen çözüm üstel tipten olduğundan $n = 2$ için de çözümü $y = e^{rx}$ şeklinde araştıralım. $y = e^{rx}$, (5) denklemini sağlayacak şekilde r değerlerini bulmaya çalışalım.

$y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$

$a_2 r^2 e^{rx} + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0$

$e^{rx}\left[a_2 r^2 + a_1 r + a_0\right] = 0$ buradan $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$ (6) elde edilir.

(6) denklemi, (5) denkleminin karakteristik denklemi olarak adlandırılır. (6)'ya ilişkin r_1 ve r_2 kökleri için 3 durum söz konusudur.

i) $r_1 \neq r_2$ olmak üzere kökler farklı ve reel olsun

$e^{r_1 x}$ ve $e^{r_2 x}$ lineer bağımsız iki çözüm olur.

$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

ii) $r_1 = r_2 = r$ olsun

$\{e^{rx}, \; xe^{rx}\}$

$y = e^{rx}(c_1 + c_2 x)$

iii) $r_1 = a + ib$, $r_2 = a - ib$ olsun

$e^{(a \mp ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx}$ (euler formülü)

$= e^{ax}(\cos bx \mp i\sin bx)$

$= e^{ax}\cos bx \mp ie^{ax}\sin bx$

$\{e^{ax}\cos bx, \; e^{ax}\sin bx\}$

$y = e^{ax}(c_1\cos bx + c_2 \sin bx)$

21.03.24

Diferansiyel Denklemler (6. Hafta 2. Ders)

m.m.m /2023

- $y = c_1x^2 + c_2\sqrt{x}$ eğri ailesini çözüm kabul eden min. basamaktan dif. denklemi bulunuz. (Benzeri kesinlikle çıkacak). (En basit formda yazınız)

$$y' = 2c_1x + \frac{c_2}{2\sqrt{x}}$$

$$y'' = 2c_1 - \frac{c_2}{4}x^{-3/2}$$

c_1 ve c_2 ler bulunur. Ve y'' denkleminde yerine yazılır.

$$c_2 x^{-1/2} = \frac{4}{3}(y' - xy'')$$

$$c_1 x^2 = \frac{x^2y''}{3} + \frac{xy'}{6}$$

$$y = \frac{x^2y''}{3} + \frac{xy'}{6} + \frac{4}{3}(xy' + x^2y')$$

$$= 2x^2y'' + 2xy' + 2y = 0$$

2. Mertebe

1. Derece

Lineer.

- $y' = x^3(y-x)^2 + \frac{y}{x}$ denkleminin $y = ax$ şeklinde özel çözümünü elde edip genel çözümünü bulunuz. (Özel çözüm $\Rightarrow$ Riccati)

$$y' = a$$

$$a = x^3(ax - x)^2 + \frac{ax}{x} \longrightarrow a = 1 \text{ bulunur.}$$

$$y_1 = x \rightarrow y = x + \frac{1}{u} \text{ dönüşümü yapılır.}$$

$$y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$$ denklemde yerine yazılır $\Rightarrow u' + \frac{1}{x}u = -x^3 \rightarrow xu' + u = -x^4$

$$= (x \cdot u)' = -x^4 \longrightarrow x \cdot u = \frac{-x^5}{5} + c \longrightarrow u = -\frac{x^4}{5} + \frac{c}{x}$$

$$\boxed{y = x + \frac{1}{\frac{c}{x} - \frac{x^4}{5}}}$$

✓

- $y = xy' + 2(y')^2$ denkleminin genel ve varsa aykırı çözümünü bulunuz.

$y = xp + 2p^2$ $(y = xp + f(p)$ türünde olduğundan clairout)

$p = p + x\frac{dp}{dx} + 4p\frac{dp}{dx}$ $\quad \frac{dp}{dx}(x+4p) = 0$ $\quad \frac{dp}{dx} = 0 \ \vee \ x + 4p = 0$

$\frac{dp}{dx} = 0 \Downarrow \boxed{p = c}$ $\quad \left. \begin{array}{l} x + 4p = 0 \\ y = xp + 2p^2 \end{array} \right\} p = -\frac{x}{4}$

$\downarrow$ "$y = -\frac{x^2}{8}$ bulunur"

"$y = cx + 2c^2$" genel çözüm $\qquad$ Aykırı çözüm

Bilg. Müh. 2022

- $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^3}$ eğri ailesini kabul eden min. basamaktan dif denklemi bulunuz. Lineerlik, mertebe ve dereceyi inceleyiniz.

$y' = -c_1x^{-2} - 3c_2x^{-4}$

$y'' = 2c_1x^{-3} + 12c_2x^{-5}$

$c_1 = \left(\frac{-y'' - 4x^{-1}y'}{2}\right)x^3$ $\qquad c_2 = \left(\frac{2x^{-1}y' + y''}{6}\right)x^5$

yerlerine yazılır $\longrightarrow x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$ " $\qquad$ 1. Derece
2. Mertebe

- $2p^2(y - xp) = 1$ denkleminin genel ve varsa aykırı çözümünü elde ediniz.

✓

$y - xp = \frac{1}{2p^2} \longrightarrow y = \frac{1}{2p^2} + xp \quad \ldots$ $\qquad$ Cevap $\Rightarrow 8y^3 = 27x^2$

Fizik 2013

- $x^3y^3(2ydx + xdy) - (5ydx + 7xdy) = 0$ denklemi için x^my^n şeklinde integrasyon çarpanı araştırınız.

$(2x^3y^4 - 5y)dx + (x^4y^3 - 7x)dy = 0$ ifadesi x^my^n ile çarpılır.

$$\underbrace{(2x^{m+3}y^{n+4} - 5x^my^{n+1})}_{P}dx + \underbrace{(x^{m+4}y^{n+3} - 7x^{m+1}y^n)}_{Q}dy = 0$$

$P_y = Q_x$ olmalı

$$2(n+4)x^{m+3}y^{n+3} - 5(n+1)x^m y^n = (m+4)x^{m+3}y^{n+3} - 7(m+1)x^m y^n$$

$$\left.\begin{aligned} 2n+8 &= m+4 \\ -5n-5 &= 7m-7 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} m &= -8/3 \\ n &= -10/3 \end{aligned} \rightarrow \lambda = x^{-8/3} y^{-10/3}$$

- $x^3 y' = y(3y - x^2)$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y' = \frac{3y^2}{x^3} - \frac{x^2 y}{x^3} \longrightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{3}{x^3}y^2 \quad \text{(Bernoulli)}$$

$$y^{-2} \cdot y' + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{3}{x^3} \qquad y^{-1} = z \text{ dönüşümü yapılır} \longrightarrow -y^{-2}y' = z'$$

$$-z' + \frac{1}{x}z = \frac{3}{x^3}$$

$$= z' - \frac{1}{x}z = -\frac{3}{x^3} \quad \text{(lineer)}$$

$$\left(\frac{1}{x}z\right)' = -\frac{3}{x^4} \longleftarrow \lambda = e^{-\ln x} = 1/x$$

$$\frac{1}{x}z = -3\frac{x^{-3}}{-3} + c \implies \frac{1}{xy} = \frac{1}{x^3} + c$$

- $(2x+3y)dx + (y-x)dy = 0$ genel çöz. bulunuz. $\left(\ln(y^2+2xy+2x^2) - 4\arctan\left(\frac{x+y}{x}\right) = c\right)$

- $y = c_1 x + c_2 e^x$ eğri ailesi ... $\left((1-x)y'' + xy' - y = 0\right)$

- $y = xp^2 + p^3$

- $xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0$

2019 BM
- $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + x$ eğri ailesini ...

- $(12e^{2x}y^2 - y)dx = dy$ bernoulli denk. çözümü?

- $yp = xp^2 - 1$ çözümlerini bulunuz.

2016 BM
- $(2-xy)y\,dx + (2+xy)x\,dy = 0$ için $\lambda = \lambda(x,y)$ o.a çöz. bulunuz.

- $x.(y')^2 + (1 - x\ln x)y' - \ln x = 0$ çözümünü bulunuz.

Diferansiyel denklemler (8. Hafta 2. Ders) (soru çözümü dersi)

- $y'' + 5y' + 6y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$r^2 + 5r + 6 = 0$

$r_1 = -2,\ r_2 = -3$

T.G.K $= \{e^{-2x}, e^{-3x}\}$ $\rightarrow y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$

- $y'' - 8y' + 16y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$r^2 - 8r + 16 = 0 \longrightarrow r_1 = r_2 = 4$

T.G.K $\{e^{4x}, xe^{4x}\} \rightarrow y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$

- $y'' + 4y' + 5y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$r^2 + 4r + 5 = 0 \rightarrow r_{1,2} = -2 \mp i$

T.G.K $= \{e^{-2x}\cos x,\ e^{-2x}\sin x\}$

$\rightarrow y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

- $y^{(4)} - 9y'' + 20y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$r^4 - 9r^2 + 20 = 0$

$r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r_1 = -2,\ r_2 = 2$

$r^2 - 5 = 0 \Rightarrow r_3 = -\sqrt{5},\ r_4 = \sqrt{5}$

T.G.K $= \{e^{-2x}, e^{2x}, e^{-\sqrt{5}x}, e^{\sqrt{5}x}\}$

$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-\sqrt{5}x} + c_4 e^{\sqrt{5}x}$

- $y^{(4)} + 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$r^4 + 4r^3 + 14r^2 - 20r + 25 = 0$

$(r^2 - 2r + 5)^2 = 0$

$r_{1,2} = 1 \mp 2i$

$r_{3,4} = 1 \mp 2i$

T.G.K $= \{e^x \cos 2x,\ e^x \sin 2x,\ xe^x \cos 2x,\ xe^x \sin 2x\}$

$y = e^x \cdot \cos 2x\,(c_1 + c_2 x) + e^x \sin 2x\,(c_3 + c_4 x)$

• $y''' - 6y'' + 5y' + 12y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$r^3 - 6r^2 + 5r + 12 = 0$

$\downarrow$

eğer tamsayı kök varsa
bunun çarpanlarından biridir. $\rightarrow$ -1 sağlıyor.

$r^3 - 6r^2 + 5r + 12 \;|\; r+1$

$\vdots \qquad\qquad r^2 - 7r + 12$

0

$(r+1)(r^2 - 7r + 12) = 0$

$r_1 = -2 \quad r_2 = 3 \quad r_3 = 4$

$T.G.K = \{e^{-x}, e^{3x}, e^{4x}\}$

$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{4x}$

• Karakteristik denkleminin kökleri $2, 2, 2, 3, 1 \mp 2i, 2 \mp i$ olan sabit katsayılı homojen lineer denklemin genel çözümünü yazınız.

$T.G.K = \{e^{2x}, xe^{2x}, x^2 e^{2x}, e^{3x}, e^{x}\cos 2x, e^{x}\sin 2x, e^{2x}\cos x, e^{2x}\sin x\}$

$y = e^{2x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) + c_4 e^{3x} + e^{x}(c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x) + e^{2x}(c_7 \cos x + c_8 \sin x)$

• Aynı soruyu $0, 0, 0, \mp i, \mp i, \sqrt{2}, 1-\sqrt{3}, 4, 4$ için çözünüz.

$T.G.K = \{1, x, x^2, \cos x, \sin x, x\cos x, x\sin x, e^{\sqrt{2}x}, e^{(1-\sqrt{3})x}, e^{4x}, xe^{4x}\}$

$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos x + c_5 \sin x + c_6 \cos x + c_7 x\sin x, c_8 e^{\sqrt{2}x} + c_9 e^{(1-\sqrt{3})x} + c_{10} e^{4x} + c_{11} x e^{4x}$

• $4y'' - 12y' + 5y = 0$

• $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$

ödev sorular

17/04/24

Diferansiyel Denklemler (9. Hafta 1. Ders)

= Homojen Olmayan Denklemler =

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = F(x) \quad (1)$$

y_h, y_p

$y_g = y_h + y_p$

• $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$

$r^3 - 3r^2 - r + 3 = 0$ (1, sağlıyor.)

$= (r-1)(r^2-2r-3)$ (polinom bölmesinden bulundu.)

$= (r-1)(r-3)(r+1) = 0$

kökler = $\{1, 3, -1\}$

T.Ç.K = $\{e^x, e^{3x}, e^{-x}\}$ $\quad y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-x}$ genel çözümdür.

= Belirsiz Katsayılar Yöntemi =

(1) denkleminin sağ tarafındaki F(x) fonksiyonunun polinom, üstel, trigonometrik (sin, cos) fonksiyonlarından herhangi biri ya da bunların çarpımı şeklinde olması durumunda özel çözüm tahmin edilmek suretiyle belirsiz katsayılar yöntemi yardımıyla elde edilebilir.

i) $F(x) = P_n(x)$ ($P_n(x)$, n. dereceden bir polinom ifade eder)

$y_p = Q_n(x)$ ($Q_n(x)$, n. dereceden en genel polinom)

Eğer karakteristik denklemin k tane kökü 0 ise

$y_p = x^k \cdot Q_n(x)$ şeklinde seçilmelidir.

ii) $F(x) = A_1 e^{mx}$ ise

$y_p = A e^{mx}$ şeklinde seçilmelidir.

Eğer karakteristik denklemin k tane kökü m ise

$y_p = A x^k e^{mx}$ şeklinde seçilmelidir.

iii) $F(x) = \sin(\alpha x \mp B)$

$\cos(\alpha x \mp B)$

$A_1 \sin\alpha x \mp A_2 \cos\alpha x$ ise

$y_p = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x$

Eğer karakteristik denklemin k tane kökü $\mp i\alpha$ ise

$y_p = x^k (A\sin\alpha x + B\cos\alpha x)$ şeklinde seçilmelidir.

• $y'' + 2y' + 2y = x + 1$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y'' + 2y' + 2y = 0 \longrightarrow r^2 + 2r + 2 = 0$

$(r+1)^2 + 1 = 0$

$r = -1 \mp i$ bulunur.

$T.G.K = \{e^{-x}\cos x, e^{-x}\sin x\}$

$y_h = e^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$

$y_p = Ax + B$

$y_p' = A \longrightarrow 2A + 2Ax + 2B = x + 1$

$y_p'' = 0$

$2A = 1 \quad A = 1/2 \quad \sim y_p = \frac{1}{2} \cdot x$

$2A + 2B = 1 \quad B = 0$

$y_g = e^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + \frac{1}{2}x$ bulunur.

• $y''' - y' = x^2 + 1$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$r^3 - r = 0$

$r(r^2 - 1) = 0$

$T.G.K = \{1, e^x, e^{-x}\}$

$r_1 = 0, \ r_2 = 1, \ r_3 = -1 \qquad y_h = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$

$y_p = Ax^2 + Bx + C \xrightarrow[\text{çarpılır}]{x \text{ ile}} y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx$

$y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C$

$y_p'' = 6Ax + 2B$

$y_p''' = 6A$

...

• $y''' - 3y'' - y' + 3y = 2e^x$ genel çözümünü bulunuz.

Az önceki sorudan $y_h = c_1e^x + c_2e^{3x} + c_3e^{-x}$ bulmuştuk.

$y_p = Axe^x$ ... devamı ödev sorusu. (Cevabı $y_g = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{3x} - \frac{1}{2}xe^x$ buldum.)

• $y'' - 3y' - 4y = 2\cos x$ genel çözümünü bulunuz.

$y'' - 3y' - 4y = 0$

$r^2 - 3r - 4 = 0$ $\qquad$ T.Ç.K $= \{e^{4x}, e^{-x}\}$

$(r-4)(r+1) = 0 \rightarrow r_1 = 4,\ r_2 = -1$

$y_h = c_1e^{4x} + c_2e^{-x}$

$y_p = A\cos x + B\sin x$

$y_p' = -A\sin x + B\cos x$ $\quad \rightsquigarrow -A\cos x - B\sin x + 3A\sin x - 3B\cos x - 4A\cos x - 4B\sin x = 2\cos x$

$y_p'' = -A\cos x - B\sin x$ $\quad (\underbrace{-A - 3B - 4A}_{2})\cos x + (\underbrace{-B + 3A - 4B}_{0})\sin x = 2\cos x$

$A = -5/17$

$B = -3/17$ bulunur

denklemde yazılır...

IV) $F(x) = P_n(x)\, e^{mx}$

$y_p = e^{mx} \cdot Q_n(x)$

Eğer karakteristik denklemin k tane kökü m ise

$y_p = (e^{mx} \cdot Q_n(x)) \cdot x^k$

V) $F(x) = P_n(x) \cdot \sin(\alpha x \mp B)$

$= P_n(x) \cdot \cos(\alpha x \mp B)$

$y_p = Q_n(x) \sin\alpha x + R_n(x) \cos\alpha x$

Eğer karakteristik denklemin k tane kökü $\mp i\alpha$ ise

$y_p = (Q_n(x) \cdot \sin\alpha x + R_n(x) \cos\alpha x) \cdot x^k$

VI) $F(x) = e^{mx} \cdot \sin(\alpha x \mp B)$

$e^{mx} \cdot \cos(\alpha x \mp B)$

$y_p = e^{mx}(A \cdot \cos\alpha x + B \cdot \sin\alpha x)$

Eğer karakteristik denklemin k tane kökü $m \mp i\alpha$ ise

$y_p = \left[e^{mx} \cdot (A \cdot \cos\alpha x + B \sin\alpha x)\right] \cdot x^k$

VII) $F(x) = P_n(x) \cdot e^{mx} \cdot \sin(\alpha x \mp B)$

$P_n(x) \cdot e^{mx} \cdot \cos(\alpha x \mp B)$

$y_p = e^{mx}\left(Q_n(x) \sin\alpha x + R_n(x) \cos\alpha x\right)$

Eğer karakteristik denklemin k tane kökü $m \mp i\alpha$ ise

$y_p = \left[e^{mx}(Q_n(x) \sin\alpha x + R_n(x) \cos\alpha x)\right] x^k$

• $y'' + 3y' + 2y = x \sin x$ genel çözümünü bulunuz.

$y'' + 3y' + 2y = 0$

$r^2 + 3r + 2 = 0 \quad (r_1 = -1, r_2 = -2) \rightsquigarrow y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x}$

$y_p = (Ax + B) \sin x + (Cx + D) \cos x$

...

$y'' + y' - 2y = xe^{x}$ genel çözümünü bulunuz.

$r^2 + r - 2 = 0$

$(r+2)(r-1) = 0 \rightarrow r_1 = -2 \,,\, r_2 = 1 \qquad T.Ç.K = \{e^{-2x}, e^{x}\}$

$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$

$y_p = (Ax + B)e^{x} . x$

...

• $y'' - y' - 2y = e^{-x} . \sin x$ genel çözümünü bulunuz.

$r^2 - r - 2 = 0$

$r_1 = 2 \,,\, r_2 = -1 \qquad y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$

$y_p = e^{-x} (A\sin x + B\cos x)$

...

18/04/24

Diferansiyel Denklemler (9. Hafta 2. Ders)

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = F(x) \qquad (1)$$

$$y_g = y_h + y_p$$

• $y'' + 6y' + 13y = x.e^{-3x}\sin 2x + x^2 e^{-2x}\sin 3x$ denkleminin y_p özel çözümünü bulunuz.

$$y'' + 6y' + 13y = 0$$

$$r^2 + 6r + 13 = 0 \rightarrow r = -3 \mp 2i \quad \sim \quad T.G.K = \{e^{-3x}\sin 2x,\ e^{-3x}\cos 2x\}$$

$$y_h = e^{-3x}(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)$$

benzerlik olduğu için x ile çarpıldı

$$y_p = \underbrace{e^{-3x}\left[(Ax+B)\sin 2x + (Cx+D)\cos 2x\right].x}_{y_{p_1}} + \underbrace{e^{-2x}\left[(Ex^2+Fx+G)\sin 3x + (Hx^2+Kx+C)\cos x\right]}_{y_{p_2}}$$

• $y'' - 2y' - 3y = 2x^2 e^{3x} - 10\sin x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$r^2 - 2r - 3 = 0 \rightarrow r = 3,\ r = -1 \sim T.G.K = \{e^{3x}, e^{-x}\}$$

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$$

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}.x + (D\sin x + E\cos x)$$

• $y'' + 2y' + 5y = 6\sin 2x + 7\cos 2x$

• $y'' + y' - 2y = 6e^{-2x} + 3e^{x} - 4x^2$

genel çözümlerini bulunuz. Ödev soruları.

= Parametrelerin Değişimi Yöntemi =

(1) denklemindeki $F(x)$ fonksiyonunun keyfi herhangi bir fonksiyon olması durumunda özel çözüm elde edebilmek için kullanılacak en genel yöntem parametrelerin değişimi yöntemidir.

Örneğin $n=2$ özel durumunu inceleyelim.

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = F(x)$$

y_1 ve y_2 homojen kısma ait lineer bağımlı iki çözüm olmak üzere $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ şeklinde yazılacaktır.

Kabul edelim ki (1) denklemine ait özel çözüm $y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ şeklinde olsun.

$$y_p' = c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2'$$

$$y_p' = c_1y_1' + c_2y_2' \qquad (c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \ \text{[Kabul 1]})$$

$$y_p'' = c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2''$$

$$\rightsquigarrow a_2[c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2''] + a_1[c_1y_1' + c_2y_2'] + a_0[c_1y_1 + c_2y_2] = F(x)$$

$$\rightsquigarrow c_1[a_2y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1] + c_2[a_2y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2] + a_2[c_1'y_1' + c_2'y_2'] = F(x)$$

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = \frac{F(x)}{a_2} \quad \text{[Kabul 2]}$$

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$$
$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = \frac{F(x)}{a_2} \qquad y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

• $y'' + y = \tan x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y'' + y = 0$$

$$r^2 + 1 = 0 \rightsquigarrow r = \mp i \rightsquigarrow TÇK = \{\cos x, \sin x\}$$

$$y_h = c_1\cos x + c_2\sin x$$

$$y_p = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$$

$\sin x /$ $$c_1'\cos x + c_2'\sin x = 0$$

$\cos x /$ $$c_1'(-\sin x) + c_2'\cos x = \tan x$$

$$c_2' = \sin x$$
$$c_2 = -\cos x$$

$$c_1'\cos x + \sin^2 x = 0$$

?

$$\int c_1' = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} \quad \ldots$$

• $y''' + y'' = \frac{x-1}{x^2}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y''' + y'' = 0$ Çift kök geldi

$r^3 + r^2 = 0 \rightarrow r_1 = 0 \quad r_3 = -1 \qquad T.G.K = \{1, x, e^{-x}\}$

$r_2 = 0$

$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$

$y_p = c_1(x) \cdot 1 + c_2(x) \cdot x + c_3(x) \cdot e^{-x}$

$= c_1' \cdot 1 + c_2' x + c_3' e^{-x} = 0$

$= c_1' \cdot 0 + c_2' \cdot 1 + (-1) c_3' e^{-x} = 0$

$= c_1' \cdot 0 + c_2' \cdot 0 + c_3' \cdot e^{-x} = \frac{x-1}{x^2}$

$c_3' = e^x \left(\frac{x-1}{x^2}\right) \rightsquigarrow c_3 = \frac{e^x}{x}$

$c_2' = \frac{x-1}{x} \rightsquigarrow c_2 = \ln x + \frac{1}{x}$

$c_1' = -\left(\frac{x-1}{x}\right) - \left(\frac{x-1}{x^2}\right) \rightsquigarrow c_1 = -x - \frac{1}{x}$

c_1, c_2 ve c_3 y_p'de yerlerine yazılırsa

$y_p = x \ln x - x + 1$

Ödev Soruları

• $y'' + y = \sec x$

$y_p = (\cos x)(\ln \cos x) + x \sin x$

• $y'' - y = \sin^2 2x$

• $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ Çözümlerini bulunuz.

24/04/24

Diferansiyel Denklemler (10. Hafta 1. Ders)

• $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ genel çözümünü bulunuz.

$y'' - 2y' + y = 0$

$r^2 - 2r + 1 = 0 \rightarrow (r-1)^2 = 0 \rightsquigarrow r_1 = r_2 = 1 \qquad \{e^x, xe^x\}$

$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$

$y_p = c_1(x) e^x + c_2(x) x e^x \qquad c_1' e^x + c_2' x e^x = 0$

$c_1' e^x + c_2'(e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{x} \qquad c_1' + c_2' x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} c_1' + c_2' x = 0 \\ c_1' + c_2'(1+x) = \dfrac{1}{x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_2' = 1/x \rightarrow c_2 = \ln x \\ c_1' = -1 \rightarrow c_1 = -x \end{array}$$

$y_p = -xe^x + \ln x (xe^x)$

$y_g = c_1 e^x + c_2 x e^x - xe^x + \ln x (xe^x)$

= Cauchy - Euler Denklemi =

$a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ olmak üzere

$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = F(x) \qquad (1)$ denklemine

Cauchy - Euler diferansiyel denklemi denir.

(1) denkleminde $x = e^t$ $(t = \ln x)$ dönüşümü yapılacak olursa denklem

$$b_n \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = F_1(t) \qquad (2)$$

şeklinde n'inci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen olmayan denklem elde edilir.

$$y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)' = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$y''' = (y'')' = \left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right]' = -\frac{2}{x^3}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + \frac{1}{x^2}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right]$$

$$y''' = -\frac{2}{x^3}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^3y}{dt^3}\cdot\frac{1}{x} - \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$y''' = \frac{1}{x^3}\left[\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right]$$

Veya (1) denkleminde $y = x^r$ dönüşümü de yapılabilir. (Tavsiye edilmez çünkü çakışık r'lerde $\ln x$ ile çarpmak gerekir.)

• $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Cauchy - Euler tipi bir denklem olduğundan $x = e^t$ $(t = \ln x)$ dönüşümü yapılır.

$$y' = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}$$

$$y_h = c_1e^t + c_2e^{2t}$$

$$y'' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$y_p = Ae^{3t} \rightsquigarrow A = 1/2$$

$$y_p = \frac{1}{2}e^{3t}$$

$$y_g(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

"

$$y_g(x) = c_1x + c_2x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

$x^3y''' - 4x^2y'' + 8xy' - 8y = 4\ln x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Cauchy-Euler formatında.

$x = e^t \quad (t = \ln x)$

$y' = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$

$y'' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \xrightarrow[\text{yazılır}]{\text{yerine}} \frac{d^3y}{dt^3} - 7\frac{d^2y}{dt^2} + 14\frac{dy}{dt} - 8y = 4t$

$y''' = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$

$r^3 - 7r^2 + 14r - 8 = 0$

kökler $= \{1, 2, 4\} \longrightarrow$ T.G.K $= \{e^t, e^{2t}, e^{4t}\}$

$y_h = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{4t}$

$y_p = At + B \quad \left(A = -1/2\ ,\ B = -7/8\right) \sim y_g(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{4t} - \frac{1}{2}t - 7/8$

$y_p = -\frac{t}{2} - \frac{7}{8}$

$y_g(x) = c_1x + c_2x^2 + c_3x^4 - \frac{1}{2}\ln x - \frac{7}{8}$

- $x^2y'' - 3xy' + 13y = 0$ (trigonometrik ifadeler çıkacak)
- $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

ödev soruları

= Mertebe düşürme (basamağın indirilmesi) yöntemi

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x) \qquad (1)$$

denklemi verilmiş olsun.

Eğer (1) denklemine ilişkin homojen denkleme ait bir özel çözüm biliniyor ise y_1 özel çözüm olmak üzere

$y = y_1 \cdot u \quad (u = u(x))$ dönüşümü yardımıyla denklemin mertebesi 1 birim düşürülebilir.

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x)$$

$$a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 = 0$$

$y = y_1 \cdot u$ dönüşümü $\longrightarrow$ $y' = y_1' u + y_1 u'$

$$y'' = y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u''$$

$$a_2\left[y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u''\right] + a_1\left[y_1' u + y_1 u'\right] + a_0 y_1 u = F(x)$$

$\vdots$

$$A_1(x)u'' + A_2(x)u' = F(x)$$

$$A_1 V' + A_2 V = F(x)$$

25/04/24

Diferansiyel Denklemler (10. Hafta 2. Ders)

$$a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (1)$$

Eğer (1) denkleminde katsayılar arasında $a_0 x + a_1 = 0$ bağıntısı varsa $y_1 = x$ özel çözümdür.

Eğer (1) denkleminin katsayıları toplamı 0 ise $y_1 = e^x$ özel çözümdür.

Eğer $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots = 0$ ise $y_1 = e^{-x}$ özel çözümdür.

- $(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$1 + x^2 - 2x + 2 \neq 0$

$(1+x^2)y'' - 2\underbrace{(xy' - y)} = 0 \rightarrow$ denklemde $xy' - y$ kalıbı olduğundan $y_1 = x$ özel çözümdür.

$y = x.u \rightarrow y' = u + xu'$ $\quad (1+x^2)(2u' + xu'') - 2x(u + xu') + 2xu = 0$

$y'' = 2u' + xu''$ $\quad \rightsquigarrow (1+x^2)xu'' + (2 + 2x^2 - 2x^2)u' = 0$

$x(1+x^2)u'' + 2u' = 0$

$u' = v$, $u'' = v'$ deriz.

$x(1+x^2)v' + 2v = 0 \rightsquigarrow x(1+x^2)\dfrac{dv}{dx} + 2v = 0 \rightsquigarrow \dfrac{dv}{v} + \dfrac{2}{x(1+x^2)}dx = 0$

$$\frac{2}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{1+x^2} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{1+x^2}$$

$\Rightarrow \ln v + 2\ln x - \ln(1+x^2) = \ln c \longrightarrow \ln \dfrac{vx^2}{1+x^2} = \ln c \rightsquigarrow c = \dfrac{vx^2}{1+x^2}$

$v = \dfrac{c_1(1+x^2)}{x^2} \rightarrow u' = \dfrac{c_1}{x^2} + c_1 \longrightarrow u = -\dfrac{c_1}{x} + c_1 x + c_2$

$y = u.x = x\left(-\dfrac{c_1}{x} + c_1 x + c_2\right) \rightarrow \boxed{y = c_1(x^2 - 1) + c_2 x}$

• $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

(bu soru $y_1 = x$ özel çözümü ile de çözülebilir.)

$x-1-x+1=0$

$\boxed{y_1 = e^x} \rightarrow y = e^x . u$

$y' = e^x u + e^x u'$ $\xrightarrow[\text{yazılır}]{\text{yerine}}$ $e^x\left[(x-1)u'' + (x-2)u'\right] = (x-1)^2 e^x$

$y'' = e^x u + 2e^x u' + e^x u''$

$\Rightarrow (x-1)u'' + (x-2)u' = (x-1)^2 \rightarrow (x-1)v' + (x-2)v = (x-1)^2$

$u' = v$, $u'' = v'$ denilirse $\quad v' + \dfrac{x-2}{x-1} v = x-1$

lineer denklem çözümünden $v = (x-1) + c_1 e^{-x}(x-1)$ bulunur

integral alınarak u bulunur. $u = \dfrac{x^2}{2} - x - c_1 e^{-x} + c_2$ bulunur.

$y = e^x . u$

$\boxed{y = e^x \dfrac{x^2}{2} - xe^x - c_1 x + c_2 e^x}$

• $(x-2)y'' - (4x-7)y' + (4x+6)y = 0$ denklemi için $y_1 = e^{ax}$ şeklinde bir özel çözüm araştırınız ve bunun yardımıyla genel çözüm araştırınız.

$y_1' = ae^{ax}$

$y_1'' = a^2 e^{ax}$

$\rightarrow (x-2)a^2 e^{ax} - (4x-7)ae^{ax} + (4x+6)e^{ax} = 0$ olacak şekilde a araştıralım.

$(x-2)a^2 - (4x-7)a + (4x+6) = 0$

$a^2 x - 4ax + 4x - 2a^2 + 7a - 6 = 0$

$\underbrace{(a^2 - 4a + 4)}_{0} x + \underbrace{(-2a^2 + 7a - 6)}_{0} = 0 \rightsquigarrow a = 2$ bulunur.

$y_1 = e^{2x}$ özel çözümü vardır. $\rightarrow$ $y = y_1 . u = e^{2x} . u$

$y' = e^{2x} . u' + 2e^{2x} . u$

$y'' = e^{2x} u'' + 4e^{2x} u' + 4e^{2x} . u$

denklemde yerine yazılırsa

$(x-2)u'' - u' = 0$ bulunur.

$(x-2)v' - v = 0$

$\frac{dv}{v} - \frac{dx}{x-2} = 0 \rightarrow \ln v - \ln(x-2) = \ln c_1$

$c_1 = \frac{v}{x-2}$ bulunur.

$v = c_1(x-2)$

$u' = c_1(x-2)$

$u = c_1 \frac{x^2}{2} - 2c_1 x + c_2$ bulunur.

$y = \frac{c_1}{2} x^2 e^{2x} - 2c_1 x e^{2x} + c_2 e^{2x}$ bulunur.

• $x^2 y'' + (2x^2 - x)y' - 2xy = 0$ denkleminde $y = ax + b$ özel çözümü araştırınız ve bunun yardımıyla genel çözümü bulunuz

= Seri Çözümler =

Tanım: c_n 'ler reel sabitler olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ şeklindeki seriye $(x-x_0)$'a göre kuvvet serisi denir.

$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots$

$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

→ Adi nokta - adi nokta civarında seri çözümler

2. Mertebeden lineer homojen

(1) $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ denklemini ele alalım. Burada a_0, a_1 ve a_2 katsayıları x-ekseninin bir I alt aralığında ortak çarpana sahip olmayan analitik fonksiyonlardır.

Tanım: I aralığının bir x_0 noktasında $a_0(x_0) \neq 0$ ise x_0 noktasına (1) denkleminin adi noktası denir. Eğer adi nokta değilse tekil nokta adı verilir.

• $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

(bu soru $y_1 = x$ özel çözümü ile de çözülebilir.)

$x - 1 - x + 1 = 0$

$y_1 = e^x$ $\rightarrow y = e^x . u$

$y' = e^x u + e^x u'$ $\xrightarrow[\text{yazılır}]{\text{yerine}}$ $e^x \left[(x-1)u'' + (x-2)u'\right] = (x-1)^2 e^x$

$y'' = e^x u + 2e^x u' + e^x u''$

$\Rightarrow (x-1)u'' + (x-2)u' = (x-1)^2$ $\rightarrow$ $(x-1)v' + (x-2)v = (x-1)^2$

$u' = v$, $u'' = v'$ denilirse $\qquad v' + \dfrac{x-2}{x-1} v = x - 1$

lineer denklem çözümünden $v = (x-1) + c_1 e^{-x}(x-1)$ bulunur

integral alınarak u bulunur. $u = \dfrac{x^2}{2} - x - c_1 e^{-x} + c_2$ bulunur.

$y = e^x . u$

$y = e^x \dfrac{x^2}{2} - xe^x - c_1 x + c_2 e^x$

• $(x-2)y'' - (4x-7)y' + (4x+6)y = 0$ denklemi için $y_1 = e^{ax}$ şeklinde bir özel çözüm araştırınız ve bunun yardımıyla genel çözüm araştırınız.

$y_1' = ae^{ax}$ $\rightarrow (x-2)a^2 e^{ax} - (4x-7)ae^{ax} + (4x+6)e^{ax} = 0$ olacak şekilde a araştıralım.

$y_1'' = a^2 e^{ax}$

$(x-2)a^2 - (4x-7)a + (4x+6) = 0$

$a^2 x - 4ax + 4x - 2a^2 + 7a - 6 = 0$

$(a^2 - 4a + 4)x + (-2a^2 + 7a - 6) = 0$

$0 \qquad\qquad 0$ $\rightsquigarrow$ $a = 2$ bulunur.

$y_1 = e^{2x}$ özel çözümü vardır. $\rightarrow$ $y = y_1 . u = e^{2x} . u$

$y' = e^{2x} u' + 2e^{2x} u$

$y'' = e^{2x} u'' + 4e^{2x} u' + 4e^{2x} . u$

denklemde yerine yazılırsa

$(x-2)u'' - u' = 0$ bulunur.

$(x-2)v' - v = 0$

$\frac{dv}{v} - \frac{dx}{x-2} = 0 \rightarrow \ln v - \ln(x-2) = \ln c_1$

$c_1 = \frac{v}{x-2}$ bulunur.

$v = c_1(x-2)$

$u' = c_1(x-2)$

$u = c_1 \frac{x^2}{2} - 2c_1 x + c_2$ bulunur.

$y = \frac{c_1}{2} x^2 e^{2x} - 2c_1 x e^{2x} + c_2 e^{2x}$ bulunur.

• $x^2y'' + (2x^2 - x)y' - 2xy = 0$ denkleminde $y = ax + b$ özel çözümü araştırınız ve bunun yardımıyla genel çözümü bulunuz

= Seri Çözümler =

Tanım: c_n'ler reel sabitler olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ şeklindeki seriye $(x-x_0)$'a göre kuvvet serisi denir.

$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots$

$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

→ Adi nokta - adi nokta civarında seri çözümler

2. Mertebeden lineer homojen

(1) $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ denklemini ele alalım. Burada a_0, a_1 ve a_2 katsayıları x-ekseninin bir I alt aralığında ortak çarpana sahip olmayan analitik fonksiyonlardır.

Tanım: I aralığının bir x_0 noktasında $a_0(x_0) \neq 0$ ise x_0 noktasına (1) denkleminin adi noktası denir. Eğer adi nokta değilse tekil nokta adı verilir.

02/05/2024

Diferansiyel Denklemler (11. Hafta)

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (1)$$

(1) denkleminde her taraf a_0'a bölünürse

$$y'' + \underbrace{P(x)}_{\frac{a_1}{a_0}}y' + \underbrace{q(x)}_{\frac{a_2}{a_0}}y = 0 \quad (2)$$

Teorem (Analitik çözümlerin varlığı): Eğer x_0 noktası (2) denkleminin bir adi noktası ise (2)'nin her çözümü x_0 noktasında analitiktir ve çözümlerin kuvvet serisine açılımı hiç olmazsa $|x - x_0| < R$ aralığında yakınsaktır.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

çözümler bu şekilde araştırılabilir.

• $y'' + xy = 0$ denkleminin genel çözümünü $x_0 = 0$ noktası civarında kuvvet serileri yardımıyla elde ediniz.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$n \to n+2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+1)(n+2) a_{n+2} + a_{n-1} \right\} x^n = 0$$

$2a_2 = 0$

$(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_{n-1} = 0 \quad , \; n \geq 1$

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} a_{n-1}$$

$n=1$

$$a_3 = -\frac{1}{6} a_0$$

$n=2$

$$a_4 = -\frac{1}{12} a_1$$

$n=3$

$$a_5 = -\frac{1}{20} a_2 = 0$$

$n=4$

$$a_6 = -\frac{1}{30} a_3 = \frac{1}{180} a_0 \quad \ldots$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{1}{6} a_0 x^3 - \frac{1}{12} a_1 x^4 + \frac{1}{180} a_0 x^6 + \ldots$$

$$y = a_0 \left(1 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{180} x^6 + \ldots\right) + a_1 \left(x - \frac{1}{12} x^4 + \ldots\right).$$

- $(x^2-1)y'' + xy' - y = 0 \quad (x_0 = 0)$

$x_0 = 0$ adi nokta olduğu için

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ldots$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \ldots$$

$$(2a_2 x^2 + 6a_3 x^3 + 12a_4 x^4 + 20a_5 x^5 + \ldots) - (2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \ldots)$$

$$+ (a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + 4a_4 x^4 + 5a_5 x^5 + \ldots) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots) = 0$$

$$(-2a_2 - a_0) + (-6a_3)x + (2a_2 - 12a_4 + 2a_2 - a_2)x^2 + (6a_3 - 20a_5 + 3a_3 - a_3)x^3 + \ldots = 0$$

$2a_2 - a_0 = 0 \qquad a_2 = -\frac{1}{2}a_0$

$a_3 = 0 \qquad a_3 = 0$

$3a_2 - 12a_4 = 0 \qquad a_4 = \frac{1}{4}a_2 = -\frac{1}{8}a_0$

$8a_3 - 20a_5 = 0 \qquad a_5 = \frac{2}{5}a_3 = 0$

$\vdots$

$$y = a_0 + a_1x - \frac{1}{2}a_0x^2 - \frac{1}{8}a_0x^4$$

$$\boxed{y = a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \dots\right) + a_1x}$$

• $y'' + xy' + 2y = 0$ $\quad x_0 = 0$ noktası civarında kuvvet serileri yardımıyla genel çözümü bulunuz.

$x_0 = 0$ noktası adi noktadır.

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklinde çözümler araştırılabilir.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

$n \to n+2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

$$2a_2 + 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n+2)a_n\right\}x^n = 0$$

$2a_2 + 2a_0 = 0 \quad \wedge \quad (n+1)(n+2)a_{n+2} + (n+2)a_n = 0$

$a_2 = -a_0 \qquad a_{n+2} = -\frac{1}{n+1}a_n \longrightarrow$

$n=1$: $a_3 = -\frac{1}{2}a_1$

$n=2$: $a_4 = -\frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{3}a_0$

$n=3$: $a_5 = -\frac{1}{4}a_3 = \frac{1}{8}a_1$

$n=4$: $a_6 = -\frac{1}{5}a_4 = -\frac{1}{15}a_0$

$\vdots$

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

$$= a_0 + a_1x - a_0x^2 - \frac{1}{2}a_1x^3 + \frac{1}{3}a_0x^4 + \frac{1}{8}a_1x^5 - \frac{1}{15}a_0x^6 + \dots$$

$$y = a_0\left(1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{15}x^6 + \dots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^5 + \dots\right)$$

• $y'' + xy' + (2x-1)y = 0$ denkleminin genel çözümünü $x_0 = -1$ noktası civarında kuvvet serileri yardımıyla bulunuz.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \qquad x+1 = t \text{ denilir.}$$

$$y' = \frac{dy}{dt} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + (t-1)\frac{dy}{dt} + (2t-3)y = 0$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$$

• $y'' + xy' + (x^2-3)y = 0 \qquad (x_0 = 0)$

09/05/2024

Diferansiyel Denklemler (12. Hafta 2. Ders)

= Ters Laplace dönüşümleri

Tanım: Bir $F(s)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ olacak şekilde $f(x)$ fonksiyonu varsa $f(x)$'e $F(s)$'nin ters Laplace dönüşümü denir.

Ters Laplace dönüşümü hesaplanırken öncelikli olarak doğrudan sonuç elde edilmeye çalışılmalıdır. Eğer doğrudan sonuç elde edilemiyorsa, verilen ifade basit kesirlere ayrılarak veya tam kare şeklinde yazılarak Laplace dönüşümünün özellikleri de dikkate alınarak istenilen sonuç elde edilmeye çalışılır.

- $L^{-1}\left\{\dfrac{s^2+2}{s^3+4s}\right\} = ?$

$$\frac{s^2+2}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4} \Rightarrow s^2+2 = As^2+4A+Bs^2+Cs$$

$$A+B=1$$
$$4A=2 \rightarrow A=1/2 \quad , \quad B=1/2 \text{ bulunur.}$$
$$C=0$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{s} + \frac{1/2 \cdot s}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right) = \underline{\cos^2 x}$$

- $L^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{s^2+4s+8}\right\} = ?$

$$\frac{s+4}{(s+2)^2+4} = \frac{s+2+2}{(s+2)^2+4} = \frac{s+2}{(s+2)^2+4} + \frac{2}{(s+2)^2+4}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^2+4}\right\} = e^{-2x}\cdot\cos 2x + e^{-2x}\cdot\sin 2x$$

$$\bullet\ L^{-1}\left\{\frac{8}{s^2(s^2-s-2)}\right\} = ?$$

$$\frac{8}{s^2(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s+1}$$

$$8 = A\cdot s\cdot(s-2)(s+1) + B(s-2)(s+1) + C\cdot s^2(s+1) + D s^2(s-2)$$

$s=0 \qquad 8 = -2B \qquad B = -4$

$s=2 \qquad 8 = 12C \qquad C = 2/3$

$s=-1 \qquad 8 = -3D \qquad D = -8/3$

$s=1 \qquad \cancel{8} = -2A + \cancel{8} + 4/3$ [redacted] $\qquad A = 2$

$+8/3$

$$= L^{-1}\left\{\frac{2}{s} - \frac{4}{s^2} + \frac{2/3}{s-2} - \frac{8/3}{s+1}\right\} = 2 - 4x + \frac{2}{3}e^{2x} - \frac{8}{3}e^{-x}$$

$$\bullet\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = ? \quad \left(\frac{1-\cos 2x}{4} \text{ Cevap}\right)$$

$$\bullet\ L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^5}\right\} = ?$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^4} - \frac{1}{(s+1)^5}\right\} \Rightarrow \frac{e^{-x}x^3}{6} - \frac{e^{-x}x^4}{24}$$

$$\bullet\ L^{-1}\left\{e^{-4s}\overbrace{\left(\frac{2}{s^3} + \frac{8}{s^2} + \frac{16}{s}\right)}^{F(s)}\right\} = ? \quad \begin{cases} 0, & x<4 \\ f(x-4), & x>4 \end{cases}$$

$$f(x) = L^{-1}\{F(s)\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3} + \frac{8}{s^2} + \frac{16}{s}\right\} = x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$$

= Laplace Dönüşümünün adi dif. denklemlere uygulanması

Teorem: F, $[0,\infty)$ aralığında sürekli, α-üstel mertebeden ve f' bu aralıkta parçalı sürekli olsun. Bu durumda $s > \alpha$ için

$$L\{f'(x)\} = s \cdot L\{f(x)\} - f(0) \quad \text{dir.}$$

$$L\{y'\} = s \cdot Y(s) - y(0)$$

$$L\{y^{(n)}\} = s^n \cdot y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$$

Verilen bir diferansiyel denkleme ilişkin başlangıç değer problemi Laplace dönüşümü yardımıyla çözülmek istendiğinde, önce denkleme ilişkin eşitliğin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanır. İlgili koşullar yardımıyla elde edilen ifade cebirsel bir denkleme dönüştürülerek s'ye ait bilinmeyen bir fonksiyon elde edilir. Son olarak ters Laplace dönüşümü yardımıyla problemin çözümü elde edilir.

Örneğin

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

$$y(0) = c_1$$

$y'(0) = c_2$ olsun. f(x) denkleminde her iki tarafa Laplace uygulanırsa

$$a_2(s^2 y(s) - s y(0) - y'(0)) + a_1(s y(s) - y(0)) + a_0 y(s) = F(s)$$

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0) y(s) = F_1(s)$$

$$Y(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} = G(s)$$

• $y'' - y' - 2y = 4x^2$

$y(0) = 1, \; y'(0) = 4$ Baslangıç değer problemini Laplace dönüsümü ile bulunuz.

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) - \big(sY(s) - y(0)\big) - 2Y(s) = \frac{8}{s^3}$$

$$(s^2 - s - 2)\, Y(s) - s + 1 = \frac{8}{s^3} \quad \rightsquigarrow \quad (s^2 - s - 2)\, Y(s) = \frac{8}{s^3} + s - 1$$

$$Y(s) = \frac{s^4 - s^3 + 8}{s^3 (s^2 - s - 2)}$$

$$\Rightarrow y(x) = L^{-1}\left\{ \frac{s^4 - s^3 + 8}{s^3 (s^2 - s - 2)} \right\}$$

$$\frac{s^4 - s^3 + 8}{s^3 (s-2)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s-2} + \frac{E}{s+1}$$

değerler bulunduktan sonra

$$\Rightarrow y(x) = 2e^{2x} + 2e^{-x} - 2x^2 + 2x - 3$$

15/05/2024

Diferansiyel Denklemler (13. Hafta 1. Ders)

• $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 20\sin x$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$ probleminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$$\mathcal{L}(y''' - 5y'' + 7y' - 3y) = \mathcal{L}(20\sin x)$$

$$s^3 Y(s) - s^2 y(0) - sy'(0) - \underbrace{y''(0)}_{-2} - 5(s^2 y(s) - sy(0) - y'(0)) + 7(sy(s) - y(0)) - 3y(s) = \frac{20}{s^2+1}$$

$$(s^3 - 5s^2 + 7s - 3)\,y(s) = \frac{20}{s^2+1} - 2 \quad \rightsquigarrow \quad y(s) = \frac{18 - 2s^2}{(s^2+1)(s^3 - 5s^2 + 7s - 3)}$$

$$y(s) = \frac{-2(s-3)(s+3)}{(s^2+1)(s-3)(s-1)^2} \quad \rightsquigarrow \quad y(s) = \frac{-2s-6}{(s^2+1)(s-1)^2} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2}$$

$$= \frac{-3s+1}{s^2+1} + \frac{3}{s-1} - \frac{4}{(s-1)^2}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-3s}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-1)^2}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = -3\cos x + \sin x + 3e^x - 4xe^x$$

• $y'' + 2y' + y = xe^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ Laplace ile çözümü bulunuz.

$$\mathcal{L}(y'' + 2y' + y) = \mathcal{L}(xe^x) \rightsquigarrow s^2 y(s) - sy(0) - y'(0) + 2(sy(s) - y(0)) + y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow (s^2 + 2s + 1)\,y(s) - s - 2 - 2 = \frac{1}{(s+1)^2} \quad \rightsquigarrow \quad y(s) = \frac{1}{(s+1)^4} + \frac{s+4}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow y(s) = \frac{1}{(s+1)^4} + \frac{1}{s+1} + \frac{3}{(s+1)^2} \quad \rightsquigarrow \quad y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+1)^2}\right\}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{6}x^3 e^{-x} + e^{-x} + 3xe^{-x}$$

• $y'' + y = f(x)$, $f(0) = f'(0) = 0$, $f(x) = \begin{cases} 0 , & x<1 \\ 2 , & x>1 \end{cases}$ Laplace ile çözünüz.

$\mathcal{L}(y''+y) = \mathcal{L}(f(x))$

$s^2 y(s) - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} + y(s) = \frac{2e^{-s}}{s} \rightsquigarrow (s^2+1)y(s) = \frac{2}{s} e^{-s}$

$\Rightarrow y(s) = \frac{2}{s(s^2+1)} e^{-s} = \begin{cases} 0 , & x<1 \\ f(x-1) , & x>1 \end{cases}$ $F(s) = \frac{2}{s(s^2+1)}$

$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+1)}\right\}$

$\frac{2}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{2}{s} - \frac{2s}{s^2+1} \rightsquigarrow f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} - \frac{2s}{s^2+1}\right\} = 2 - 2\cos x$

$f(x) = 2 - 2\cos x$

$f(x-1) = 2 - 2\cos(x-1)$ bulunur.

• $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$

• $y'' - y' = e^x \cos x$, $y(0) = y'(0) = 0$

• $y^{(4)} - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 0$

• $y'' + 6y' + 13y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$

ödev soruları

• $y'' + xy' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ Laplace ile çözünüz.

$\mathcal{L}(y'' + xy' - y) = 0$

$s^2 y(s) - s\cancel{y(0)} - y'(0) - \frac{d}{ds}(sy(s) - y(0)) - y(s) = 0$

$s^2 y(s) - 1 - (y(s) + sy'(s)) - y(s) = 0 \rightsquigarrow -sy'(s) + (s^2-2)y(s) - 1 = 0$

$\Rightarrow y'(s) - \frac{s^2-2}{s} y(s) = -\frac{1}{s}$ (lineer) $\lambda = e^{\int(-s+\frac{2}{s})ds} = e^{-s^2/2} \cdot s^2$

$\longrightarrow$

$$\left(s^2 e^{\frac{-s^2}{2}} y(s)\right)' = -\frac{1}{s} s^2 e^{\frac{-s^2}{2}} \implies y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{c}{s^2} e^{\frac{s^2}{2}}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{c}{s^2} e^{\frac{s^2}{2}}\right\} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{c}{s^2} e^{s^2/2} = 0$$ olacak şekilde c seçilir.

c, 0 seçilirse $\longrightarrow y(x) = x$

= Diferansiyel Denklem Sistemleri =

Bir bağımsız değişken ve en az 2 bağımlı değişken ile bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denklemlere dif. denklem sistemi denir.

$$x'' - t^2 y'' + t x' = 1$$
$$y'' - (x')^2 = t$$

sistemi t'nin bağımsız, x ve y'nin bağımlı olduğu bir sistemdir.

Tanım: Her bir denkleminde bilinmeyenlerden sadece birinin birinci mertebeden türevi bulunan sistemlere normal sistemler denir.

$$y' = 5x - y$$
$$z' = -2x + 3y$$

sistemi normal bir sistemdir.

Ama eşdeğer sistemlerdir.

$$y' + 4y - z' = 7x$$
$$y' + z' - 2y = 3x$$

sistemi normal değildir.

Tanım: Verilen denklem sistemini özdeş olarak sağlayan çözümlerin kümesine denklem sisteminin çözümü denir.

= Sabit Katsayılı denklem sistemleri

- Yok Etme yöntemi

16/05/2024

Diferansiyel Denklemler (13. Hafta 2. Ders)

- Yok Etme Yöntemi

$$\left(\begin{array}{l} L = D^2 + 2D + 1 \\ Lx = x'' + 2x' + x \end{array} \right)$$

$D = \dfrac{d}{dt}$ olmak üzere

$$L_{11}(D)x_1 + \dots + L_{1n}(D)x_n = f_1(t)$$
$$\vdots$$
$$L_{n1}(D)x_1 + \dots + L_{nn}(D)x_n = f_n(t)$$ denklem sistemini ele alalım.

Yöntem, verilen sistem yerine sisteme denk olan ancak çözümü daha kolay olan yeni bir sistemin elde edilmesine dayanır. Bunun için aşağıdaki adımlar izlenebilir:

1) Sistemdeki herhangi iki denklemin yeri değişebilir.

2) Sistemdeki bir denklem bir sabit ile çarpılabilir.

3) Sistemdeki bir denklem bir P(D) polinomu ile çarpılabilir ve başka bir denkleme eklenebilir.

- $x' = 3x - 4y + 1$

$y' = 4x - 7y + 10t$ sisteminin çözümünü bulunuz.

$$Dx - 3x + 4y = 1 \quad \xrightarrow{4/\!/ \text{ çarp}} \quad (D-3)x + 4y = 1$$
$$Dy - 4x + 7y = 10t \quad \xrightarrow{(D-3)/\!/ \text{ çarp}} \quad -4x + (D+7)y = 10t$$

$$\longrightarrow 16y + \underbrace{(D-3)(D+7)}_{D^2+4D-21}y = 4 + (D-3)10t$$

$$\boxed{(D^2+4D-5)y = 14 - 30t}$$

$\Rightarrow y_h = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{t}$

$y_p = At + B \leadsto y_B = 6t + 2$

$$y(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{t} + 6t - 2$$

$y(t)$'yi bulduk. Bunu $x(t) = \dfrac{1}{4}\left[y' + 7y - 10t\right]$ de uygularsak

$$x(t) = \frac{1}{4}\left[-5c_1 e^{-5t} + c_2 e^{t} + 6 + 7c_1 e^{-5t} + 7c_2 e^{t} + 42t + 14 - 10t\right]$$

$$x(t) = \frac{c_1}{2} e^{-5t} + 2c_2 e^{t} + 8t + 5$$

• $x' = 4x + 6y$
$y' = -3x - 5y$
$\left(\text{Cevap} = \begin{array}{l} x(t) = -2c_1e^t - c_2e^{-2t} \\ y(t) = c_1e^t + c_2e^{-2t} \end{array} \right)$

• $\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{dy}{dt} - x - 3y = e^t$

$\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + x = e^t$ denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

D+1 çarp: $(D-1)x + (D-3)y = e^t$

D-1 çarp: $(D+1)x + Dy = e^{3t}$

$-$

$(D+1)(D-3)y - (D-1)Dy = (D+1)e^t - (D-1)e^{3t}$

$\Rightarrow (D^2 - 3D + D - 3 - D^2 + D)y = e^t + e^t - 3e^{3t} + e^{3t}$

$\Rightarrow (D+3)y = 2e^{3t} - 2e^t$

$y_h = ce^{-3t}$

$y_p = Ae^{3t} + Be^t \rightsquigarrow y_p = \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{2}e^t$

$y(t) = ce^{-3t} + \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{2}e^t$,

$x(t)$'yi bulmak adına y''yi yok edecek şekilde işlem yapalım. 1. denklem D ile, 2. denklem $(D-3)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa,

$(D^2 - D)x - (D^2 - 2D - 3)x = e^t + 3e^{3t} - 3e^{3t}$

$(D+3)x = e^t$

$x_h = ke^{-3t}$

$x_p = Ae^t \rightsquigarrow x_p = \frac{1}{4}e^t$

$x(t) = ke^{-3t} + \frac{1}{4}e^t$

$x(t)$ ve $y(t)$ deki k ve c değerleri arasındaki bağıntı denklem sağlanacak şekilde bulunur.

$-3ke^{-3t} + \frac{1}{4}e^t - 3ce^{-3t} + e^{3t} - \frac{1}{2}e^t + ke^{-3t} + \frac{1}{4}e^t = e^{3t}$

$-3k - 3c + k = 0$

$-2k = 3c \rightsquigarrow k = -3/2\, c$

- $x' + y' = -2y$

$x - 2y = y'$ denklem sistemini çözünüz.

- Laplace Dönüşümü Yardımıyla Çözüm

Denklem sistemleri laplace dönüşümü ile çözülmek istendiğinde normal bir denklemde olduğu gibi önce denklemlere laplace uygulanır ve cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistemden bilinmeyenler s'nin fonksiyonları olarak elde edilip ters laplace dönüşümü uygulanırsa sistemin çözümü elde edilmiş olur.

- $y' + z = x$ $\quad \begin{pmatrix} y(0) = 1 \\ z(0) = -1 \end{pmatrix}$

$z' + 4y = 0$

Laplace yardımıyla çözünüz.

$L(y'+z) = L(x) \rightsquigarrow s y(s) - \overbrace{y(0)}^{1} + z(s) = \frac{1}{s^2} \rightsquigarrow s y(s) + z(s) = \frac{s^2+1}{s^2}$

$L(z'+4y) = L(0) \quad\quad s z(s) - \overbrace{z(0)}^{-1} + 4y(s) = 0 \quad\quad 4y(s) + s z(s) = -1$

$y(s) = \dfrac{s^2+s+1}{s(s^2-4)}$ bulunur. $= \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s-2} + \dfrac{C}{s+2}$

//

$y(x) = -\frac{1}{4} + \frac{7}{8} e^{2x} + \frac{3}{8} e^{-2x}$ //

$z(x) = x - y'$

//

$z(x) = x - \frac{7}{4} e^{2x} + \frac{3}{4} e^{-2x}$ //

- $z'' + y' = \cos x$

$y'' - z = \sin x$ $\quad (z(0) = z'(0) = 1 \;, \; y(0) = 1 \;, \; y'(0) = 0)$ Çözünüz.

$\left(\text{Cevap} = \begin{array}{l} y(x) = \cos x \\ z(x) = \cos x - \sin x \end{array} \right)$

22/05/2024

Diferansiyel Denklemler (14. Hafta, 1. Ders) - Final Çalışması

2022
B.M

- $x^2y'' + 3xy' + y = \dfrac{1}{x\ln x}$ $(x>1)$ genel çözümünü bulunuz.

Cauchy - Euler tipidir.

$x = e^t$ $\qquad y' = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt}$ $\qquad \rightsquigarrow \underbrace{\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + y}_{=0 \text{ için}} = \dfrac{e^{-t}}{t}$

$y'' = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right)$

y_h bulunur $\to r_1 = r_2 = -1$

$TÇK = \{e^{-t}, te^{-t}\}$

$y_h = c_1e^{-t} + c_2te^{-t}$

$y_p = c_1(t)e^{-t} + c_2(t)te^{-t}$

$c_1'e^{-t} + c_2'te^{-t} = 0$

$c_1'(-e^{-t}) + c_2'(e^{-t} - te^{-t}) = \dfrac{e^{-t}}{t}$

$c_1 = -t$

$c_2 = \ln t$ yerlerine yazılır ve y_g bulunup t yerine $\ln x$ yazılır.

- $y'' + y' + xy = 0$ genel çözümünü $x=0$ noktası civarında kuvvet serileri yardımıyla bulunuz.

$x=0$ bir adi noktadır.

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$

$y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$

$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+1} = 0$$

$n \to n+2 \qquad n \to n+1 \qquad n \to n-1$

$$\rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n = 0$$

$$2a_2 + a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n+1)a_{n+1} + a_{n-1}\right\}x^n = 0$$

$$2a_2 + a_1 = 0$$

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \rightsquigarrow a_{n+2} = \frac{-(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_1$$

$$a_3 = \frac{1}{6}a_1 - \frac{1}{6}a_0 \quad \rightsquigarrow y = a_0 + a_1 x - \frac{1}{2}a_1 x^2 + \left(\frac{1}{6}a_1 - \frac{1}{6}a_0\right)x^3 + \left(\frac{1}{24}a_0 - \frac{3}{24}a_1\right)x^4 + \dots$$

$$a_4 = \frac{1}{24}a_0 - \frac{3}{24}a_1$$

y, a_i ler parantezine alınarak daha düzenli yazılabilir.

• $(2y^2 - xy - 2xy^2)dx + (x + 4xy + 1)dy = 0$ için $\lambda = \lambda(x)$ bulunuz

$$\frac{Q_x - P_y}{-Q} = -1 \text{ bulunur.} \qquad \lambda = e^{\int -dx} = e^{-x} \text{ integrasyon çarpanıdır.}$$

$$F(x,y) = c$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{-x}(2y^2 - xy - 2xy^2) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = e^{-x}(x + 4xy + 1)$$

$e^{-x}(xy + 2xy^2 + y) = c$ bulunur.

• $y' + z = x$

$z' + 4y = 0 \qquad y(0) = z(0) = 0$ Laplace yardımıyla çözünüz.

$\mathcal{L}(y' + z) = \mathcal{L}(x)$

$\mathcal{L}(z' + 4y) = \mathcal{L}(0)$

Çözümü daha önceki derslerde yapıldı.

Çıkmış sorular

- $y' + \frac{2}{x} y = \frac{y^3}{x^3}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

- $y'' + 4y = \operatorname{cosec}(2x)$ genel çözümü bulunuz.

Cevap $\Rightarrow y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \frac{x}{2}\cos 2x \, \frac{1}{4}\sin 2x \cdot \ln(\sin(2x))$

- $y'' + 16y = 5\sin x \qquad y(0) = y'(0) = 0$. Laplace yardımıyla çözünüz.

$s^2 y(s) - s y(0) - y'(0) + 16 y(s) = \frac{5}{s^2+1} \quad \rightsquigarrow \quad y(s) = \frac{5}{(s^2+1)(s^2+16)}$

Cevap $\Rightarrow \frac{\sin x}{3} - \frac{\sin 4x}{12}$

- Karakteristik denkleminin kökleri $0, 0, \mp 2i, \mp 2i, 3 \mp 5i, \sqrt{3}$ olan sabit katsayılı lineer homojen olmayan denklem için sağ taraftaki fonksiyon $f(x) = 3x^2 + 5\sin 2x + 5xe^{3x}$ şeklindedir.

a) Homojen kısma ait genel çözümü bulunuz. $\left(y_h = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x)\cos 2x + (c_5 + c_6)\sin 2x + e^{3x}(c_7\cos 5x + c_8\sin 5 \right.$
$\left. + c_9 e^{\sqrt{3}x}\right)$

b) Homojen olmayan kısma ait özel çözümü b.s.i.z katsayılar yardımıyla nasıl seçilmesi gerektiğini belirtiniz. $\left(y_p = x^2(Ax^2 + Bx + C) + (D\sin 2x + E\cos 2x)x^2 + (Fx + G)e^{3x}\right)$

2017 / BM

- $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' = 3x^2 + x + 2e^{-x}\cos x$ için aynı soru.

2019

- $(2x+1)y'' - (4x+4)y' + 4y = 0$ için $y = e^{ax}$ şeklinde özel çözüm araştırınız ve bunun yardımıyla genel çözümü bulunuz.

$y' = ae^{ax}$

$y'' = a^2 e^{ax}$ $\rightarrow$ yerlerine yazılır ve $a = 2$ bulunur. $y = e^{2x} \cdot u$

$(2x+1)u'' + 4xu' = 0$

$u' = v$, $u'' = v'$ $\rightsquigarrow$ $(2x+1)v' + 4xv = 0$ ...

23/05/2024

Diferansiyel Denklemler (14. Hafta 2-Ders)

Laplace'da sag taraftaki fonksiyon parçalı ise,

• $y'' + 4y = f(x)$, $y(0) = y'(0) = 0$, $f(x) = \begin{cases} 0 , & x<2 \\ 3 , & x>2 \end{cases}$

$f(x-2)$

$$s^2 y(s) - s y(0) - y'(0) + 4y(s) = \frac{e^{-2s} \cdot 3}{s}$$

$$y(s) = \frac{3}{s} \frac{e^{-2s}}{s^2+4} \Rightarrow y(x) = \begin{cases} 0 , & x<2 \\ f(x-2) , & x>2 \end{cases}$$

...

Parametrelerin degisimi

• $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{e^x+1}$ genel çözümünü bulunuz.

$TÇK = \{e^x, e^{2x}\}$ bulunur.

$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

$y_p = c_1(x) e^x + c_2(x) e^{2x}$ $\rightarrow$ $c_1' e^x + c_2' e^{2x} = 0$ | $c_1 = -\ln(1+e^x)$

$c_1' e^x + c_2' (2e^{2x}) = \frac{e^{2x}}{e^x+1}$ / $c_2 = -\ln(1+e^{-x})$

Mertebe düsürme

• $(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0$ $y = e^{ax}$ seklinde özel çözüm arastırıp g. çözüm bulunuz.

$(2x+1)a^2 e^{ax} - 4(x+1)a e^{ax} + 4e^{ax} = 0$

$(2x+1)a^2 - 4(x+1)a + 4 = 0$ $\rightsquigarrow$ $a = 2$ bulunur. $\rightarrow$ $y = e^{2x} . u$

... $(2x+1)u'' + 4xu' = 0$

• $9x(1-x)y'' - 12y' + 4y = 0$ denklemi için $x=0$ ve $x=1$ noktalarının durumlarını inceleyiniz.

...

Düzgün aykırı noktalardır.

Belirsiz katsayılar yöntemi

• Karakteristik denkleminin kökleri $1, 1, 0, 0, 2 \mp 3i$ olan sabit k.s lineer homojen olmayan denkleme ilişkin sağ taraftaki fonksiyon $f(x) = x^2 e^{2x} \sin 3x + x^2 e^x + 3x^2 + 1$ şeklindedir. y_h, y_p bulunuz.

$$\{e^x, xe^x, 1, x, e^{2x}\cos 3x, e^{2x}\sin 3x\}$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 + c_4 x + c_5 e^{2x}\cos 3x + c_6 e^{2x}\sin 3x$$

$$y_p = \underline{\underline{x}} \cdot e^{2x}\left[(Ax^2+Bx+C)\sin 3x + (Dx^2+Ex+F)\cos 2x\right] + \underline{\underline{x^2}}(Hx^2+Kx+L)e^x + \underline{\underline{x^2}}(Mx^2+Nx+P)$$

şeklindedir.

Lagrange

• $y = xp^2 + p$

$$p = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx} \rightsquigarrow p - p^2 = \frac{dp}{dx}(2xp+1)$$

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2p}{p-p^2}x = \frac{1}{p-p^2} \quad \ldots$$

Euler - Couchy

• $x^2y'' - 3xy' + 4y = 6x^2\ln x + \frac{6}{x}$ genel çözümü bulunuz. $(e^x = t$, $t = \ln x)$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 6te^{2t} + 6e^{-t}$$

$$y_h = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$$

$$y_p = t^2(At+B)e^{2t} + ce^{-t} \quad \ldots$$