EULER (COUCHY) DİF. DENKLEMLER

$$A_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_n y_n = f(x)$$ gibi denklemlerdir.

$f(x) = 0 \Rightarrow$ homojendir.

$f(x) \neq 0 \Rightarrow$ homojen değil

Bu konu başlığı adı altında seqonder Euler dif. denklemleri incelenecektir.

Seqonder Euler tipindeki bir denklemin genel görüntüsü

$$A_0 x^2 y'' + A_1 x y' + A_2 y = f(x)$$ gibidir.

$f(x)$ in sıfır olması halinde yani seqonder, homojen bir Euler dif. denkleminin çözümü için $y = x^r$ dönüşümü yapılır. Ve seqonder için 2 kere türevi alınır.

$y = x^r$

$$\left.\begin{array}{l} y' = r x^{r-1} \\ y'' = r(r-1)x^{r-2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Bu değerler denklemde yerine koyularak çözüm yapılır.

Segonder, homojen bir Euler dif denklemi için çözüm $y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$ şeklindedir.

Ör: $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ dif. denklemini çözünüz.

Bu denklem Segonder tipinde Euler ve homojen dif. denklemidir.

Çöz: $$\left.\begin{array}{l} y = x^r \\ y' = r x^{r-1} \\ y'' = r(r-1)x^{r-2} \end{array}\right\}$$ Bu değerler Denklemde yerine yazılır.

$$x^2 \cdot r(r-1)x^{r-2} + 4 \cdot x \cdot r \cdot x^{r-1} + 2 \cdot x^r = 0$$

$$\cancel{x^2}\, r(r-1)x^r \cdot \cancel{x^{-2}} + 4\cancel{x}\, r x^r \cdot \cancel{x^{-1}} + 2x^r = 0$$

$$x^r\left[r(r-1) + 4r + 2\right] = 0 \qquad x^r \neq 0 \Rightarrow$$

$r(r-1) + 4r + 2 = 0 \qquad r^2 - r + 4r + 2 = 0 \qquad r^2 + 3r + 2 = 0 \qquad (r+1)(r+2) = 0 \to r_1 = -1,\ r_2 = -2$

$y = y_h = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2}$ bu denklemin çözümü olur.

Not: Segonder Euler dif denklemi (homojen) için genel çözüm:

$$\Delta > 0 \Rightarrow y_h = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$$

$\Delta = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r \quad y_h = C_1 x^r + C_2 . \ln x \, x^r$

$\Delta < 0 \Rightarrow \quad y_h = x^{r\alpha} \left[C_1 \cos\beta \ln(x) + C_2 . \sin\beta \ln(x) \right]$

Ör: $x^3 y''' - 2 x y' + 4 y = 0$

$$\left.\begin{aligned} y &= x^r \\ y' &= r x^{r-1} \\ y'' &= r.(r-1)\, x^{r-2} \\ y''' &= r.(r-1)(r-2) . x^{r-3} \end{aligned}\right\} \text{denklemde yerine yaz}$$

$x^3 . r(r-1)(r-2) x^{r-3} - 2 x . r . x^{r-1} + 4 . x^r = 0$

$\cancel{x^3} . r(r-1)(r-2)\, x^r . \cancel{x^{-3}} - 2 \cancel{x} r \, x^r . \cancel{x^{-1}} + 4 x^r = 0$

$r(r-1)(r-2) x^r - 2 r x^r + 4 x^r = 0$

$x^r \left[r(r-1)(r-2) - 2r + 4 \right] = 0 \qquad x^r \neq 0 \Rightarrow$

$r(r-1)(r-2) - 2r + 4 = 0 \qquad r(r^2 - 3r + 2) - 2r + 4 = 0 \qquad r^3 - 3r^2 + 2r - 2r + 4 = 0$

$r^3 - 3r^2 + 4 = 0 \quad (r-2)(r-2)(r+1) = 0 \rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 2,\ r_3 = -1$ ise $y = C_1 x^2 + C_2 \ln x \, x^2 + C_3 x^{-1}$

köklerden 2 tanesi birbirine eşit old. için $\ln x$ genel formülden geldi

Segonder homojen olmayan Euler dif denklemler

Ör: $x^2y'' - 4xy' + 4y = x^2$ dif. denklemini çözün.

Sağ taraf $f(x) \neq 0 \Rightarrow$ homojen değildir. $\Rightarrow$ Çözüm $y = y_h + y_p$ dir.

Önce homojen çözüm yapılır. $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$

$$\left.\begin{aligned} y &= x^r \\ y' &= r x^{r-1} \\ y'' &= r(r-1) x^{r-2} \end{aligned}\right\} \text{yerine koy} \quad x^2 r(r-1)x^{r-2} - 4x r \cdot x^{r-1} + 4 \cdot x^r = 0 \quad \left\{\begin{aligned} r_1 &= 4 \\ r_2 &= 1 \end{aligned}\right\} y_h = C_1 x^4 + C_2 x^1$$

şöyle de gösterilebilir $y_h = c_1 x^{x} + c_2 x^{4x}$

Şimdi özel çözüm aranılır. Özel çözüm için en çok kullanılan parametrelerin değişimi yöntemi kullanılır.

$y_1 = x^{r_1}$ $\quad y_2 = x^{r_2}$ olmak kaydıyla (KURAL)

$$y_1 = x^4 \quad y_2 = x \Rightarrow W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^4 & x \\ 4x^3 & 1 \end{vmatrix} = x^4 \cdot 1 - x \cdot 4x^3 = -3x^4$$

$\underline{y_p = U_1 y_1 + U_2 y_2}$ (KURAL) $\qquad U_1 = -\int \frac{y_2 f(x)}{W \cdot a} dx \quad U_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{W \cdot a} dx$ (KURAL)

$a = x^2$ dir
↳ y'' nün önündeki terimdir

$f(x) = x^2$
↳ Denklemin sağındaki terimdir.

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= -\int \frac{y_2 f(x)}{W \cdot a}\,dx = -\int \frac{x \cdot x^2}{-3x^4 \cdot x^2}\,dx = -\frac{1}{6}x^{-2} && \text{(c katsayısı eklenmez)} \\ u_2 &= \int \frac{y_1 f(x)}{W \cdot a}\,dx = \int \frac{x^4 \cdot x^2}{-3x^4 \cdot x^2}\,dx = -\frac{1}{3}x && (\text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃}) \end{aligned}\right\} \text{ise}$$

$$y_p = -\frac{1}{6}x^{-2} \cdot x^4 - \frac{1}{3}x \cdot x = -\frac{x^2}{6} - \underset{(2)}{\frac{x^2}{3}} = \frac{-x^2 - 2x^2}{6} = -\frac{x^2}{2}$$ Genel çözüm de

$y = y_h + y_p \rightarrow y = \underbrace{c_1 x^4 + c_2 x}_{y_h} \underbrace{- \frac{x^2}{2}}_{y_p}$ bulunur.

Karışık Örnekler

Ör: $\underbrace{(4x^3y^3-2xy)}_{M}\,dx+\underbrace{(3x^4y^2-x^2)}_{N}\,dy=0$ dif. denk. çöz.

Çöz: $\dfrac{\partial M}{\partial y}\overset{?}{=}\dfrac{\partial N}{\partial x}$ $\qquad \left.\begin{aligned}\dfrac{\partial M}{\partial y}&=12x^3y^2-2x\\ \dfrac{\partial N}{\partial x}&=12x^3y^2-2x\end{aligned}\right\}\Rightarrow$ Tam dif.tir

$g(x,y)=\int M\,dx=\int(4x^3y^3-2xy)\,dx=x^4y^3-x^2y+h(y)$ sonra bu ifadenin y'ye göre türevi alınıp N'ye eşitlenir.

$$\frac{\partial\left(x^4y^3-x^2y+h(y)\right)}{\partial y}=N \qquad \cancel{3x^4y^2}-\cancel{x^2}+h(y)'=\cancel{3x^4y^2}-\cancel{x^2}$$

$$h(y)'=0$$

$$\int h(y)'=\int 0$$

$h(y)=0+C$ bulunur.

Ör: $x^2y''+3xy'+y=2x^2$ dif denklemini çözünüz.

Segonder Euler homojen olmayan dif.tir. $y=y_h+y_p$

$x^2y'' + 3xy' + y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} y = x^r \\ y' = r\,x^{r-1} \\ y'' = r.(r-1)\,x^{r-2} \end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{yerine}\\ \text{koyulacak.}\end{array} \longrightarrow r^2+2r+1=0 \begin{array}{l} \nearrow r_1=-1 \\ \searrow r_2=-1 \end{array}\Big\} \Rightarrow y_h = c_1x^{-1} + c_2\ln x\, x^{-1}$$

Parametrelerin değişimi ile özel çözüm.

Kural $y_1 = x^{r_1}$ $y_2 = x^{r_2}$ ve $\Delta = 0 \Rightarrow y_1 = x^r$ $y_2 = \ln x . x^r \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y_1 = x^{-1} \\ y_2 = \ln x\, x^{-1}\end{array}}$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{\ln x}{x} \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{\frac{1}{x}.x - 1.\ln x}{x^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{\ln x}{x} \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1-\ln x}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2} - \frac{\ln x}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1-\ln x}{x^3} + \frac{\ln x}{x^3} = \frac{1}{x^3}$$

$$\boxed{U_1 = -\int \frac{y_2 f(x)}{W.a}\,dx \quad \text{KURAL} \quad U_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{W.a}\,dx}$$

$f(x) = 2x^2$

$a = x^2$

$y_1 = \frac{1}{x}$

$y_2 = \frac{\ln x}{x}$

$$U_1 = -\int \frac{\frac{\ln x}{x}\,2x^2}{\frac{1}{x^3}.x^2} = -\int \frac{2\ln(x).x}{\frac{1}{x}} = -\int 2\ln(x).x.x = -\int \underbrace{\ln(x)}_{u}.\underbrace{2x^2\,dx}_{dV}$$

$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$ $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $\boxed{du = \frac{dx}{x}}$

$dV = 2x^2\,dx \quad \int dV = \int 2x^2 dx \quad V = 2\frac{x^3}{3}$

$U.V - \int V.du = \ln x . \frac{2}{3}x^3 - \int \frac{2}{3}\cancel{x^3}^{2}.\frac{dx}{\cancel{x}} = \frac{2}{3}x^3 \ln x - \frac{2}{3}\frac{x^3}{3} = \frac{2}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right)$ demek ki

$U_1 = -\frac{2}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right)$ olur.

$U_2 = \int \frac{y_1 . f(x)}{W.a}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}.2x^2}{\frac{1}{x^3}\,x^2}\,dx = \int \frac{2x}{\frac{1}{x}}\,dx = \int 2x.x\,dx = \int 2x^2 dx = 2\frac{x^3}{3}$ olur.

$y = y_h + y_p = C_1 . x^{-1} + C_2 . \ln x\, x^{-1} - \frac{2}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right).\frac{1}{x} + \frac{2}{3}x^3 . \frac{\ln x}{x}$ genel çözümü bulunmuş olur

Kural $\Delta = 0$ için $y = y_h + y_p = c_1 x^r + c_2 \ln x\, x^r + U_1 . y_1 + U_2 . y_2$

Ör: $y'' + y' - 2y = x + e^{-2x}$ 2. mertebeden lineer homojen olmayan dif. denk.

$y = y_h + y_p$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \left.\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y_h = c_1 e^{x} + c_2 . e^{-2x}$

y_p özel çözüm için y_{p_1} ve y_{p_2} yani $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$

$y_{p_2} \to$ üslü taraf

$y_{p_1} \to$ Polinom tarafı.

$$\left.\begin{aligned} y_{p_1} &= A_1 x + A_0 \\ y'_{p_1} &= A_1 \\ y''_{p_1} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &0 + A_1 - 2(A_1 x + A_0) = x \\ &A_1 - 2A_1 x - 2A_0 = x \\ &-2A_1 = 1 \to A_1 = -\tfrac{1}{2} \\ &\text{ve } A_0 = -\tfrac{1}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_{p_1} = A_1 x + A_0 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \text{ olur}$$

$y_{p_2} = A_2 x e^{-2x}$ → Öz denklemin köklerinden biri $\lambda_2 = -2$ old. için ve üslü tarafın üssünde -2 olduğu için geldi.

$$y'_{p_2} = A_2 \cdot e^{-2x} + (-2e^{-2x} \cdot A_2 x) = A_2 e^{-2x} - 2A_2 x e^{-2x}$$

$$y''_{p_2} = -2A_2 e^{-2x} - \left[2A_2 \cdot e^{-2x} + (-2e^{-2x} \cdot 2A_2 x)\right] = -2A_2 e^{-2x} - 2A_2 e^{-2x} + 4A_2 x e^{-2x}$$

$$= -4A_2 e^{-2x} + 4A_2 x e^{-2x}$$

Bu değerler yerine yazılır.

$$-4A_2 e^{-2x} + \cancel{4A_2 x e^{-2x}} + A_2 e^{-2x} - \cancel{2A_2 x e^{-2x}} - \cancel{2(A_2 x e^{-2x})} = e^{-2x}$$

$-3A_2 e^{-2x} = e^{-2x} \Rightarrow -3A_2 = 1 \rightarrow A_2 = -\frac{1}{3}$ bulunur. Buna göre

$y_{p_2} = -\frac{1}{3} x . e^{-2x}$ bulunur. Genel çözüm ise

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = \underbrace{C_1 . e^{x} + C_2 . e^{-2x}}_{y_h} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)}_{y_{p_1}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3} x e^{-2x}\right)}_{y_{p_2}}$$

olarak genel çözüm bulunur.

Ör: $y''' - 5y'' - y' + 5y = 10t - 63 . e^{-2t} + 29 . \sin 2t$ dif. denk. çöz.

Lineer 3. mertebe homojen olmayan dif. denklemidir.

$y = y_h + y_p$ genel çözümüdür.

homojen çözüm için $r_1 = 5$ $r_2 = 1$ $r_3 = -1 \Rightarrow y_h = C_1 e^{5t} + C_2 . e^{t} + C_3 . e^{-t}$

y_p belirsiz katsayılar yöntemi ile belirlenir (Parametrik)

$$y_p = \underbrace{A_1 t + A_0}_{\substack{\text{Polinom} \\ y_{p_1}}} + \underbrace{A_2 . e^{-2t}}_{\substack{\text{üstel} \\ y_{p_2}}} + \underbrace{A_3 . \sin 2t + A_4 . \cos 2t}_{\substack{\text{Trigonometrik} \\ y_{p_3}}}$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$$

$$y_p' = A_1 - 2A_2 . e^{-2t} + A_3\, 2.\cos 2t + A_4(-2.\sin 2t)$$

$$y_p' = A_1 - 2A_2 e^{-2t} + 2A_3 \cos 2t - 2A_4 \sin 2t$$

$$y_p'' = 0 + 4A_2 e^{-2t} + 2A_3(-2\sin 2t) - 2A_4\, 2.\cos 2t$$

$$y_p'' = 4A_2 e^{-2t} - 4A_3 . \sin 2t - 4 . A_4 . \cos 2t$$

$$y_p''' = -8A_2 e^{-2t} - 4A_3 . 2.\cos 2t - 4A_4(-2.\sin 2t)$$

$$y_p''' = -8A_2 e^{-2t} - 8A_3 \cos 2t + 8A_4 \sin 2t$$ olarak bulunur.

yerine yazılır

$$-8A_2 e^{-2t} - 8A_3 \cos 2t + 8A_4 \sin 2t - 5(4A_2 e^{-2t} - 4A_3 \sin 2t - 4A_4 \cos 2t) - (A_1 - 2A_2 e^{-2t} + \rightarrow$$

$$\rightarrow 2A_3 \cos 2t - 2A_4 \sin 2t) + 5.(A_1 t + A_0 + A_2 e^{-2t} + A_3 \sin 2t + A_4 \cos 2t) = 10t - 63e^{-2t} + 29\sin 2t$$

$$-8A_2e^{-2t}-8A_3\cos 2t+8A_4\sin 2t-20A_2e^{-2t}+20A_3\sin 2t+20A_4\cos 2t-A_1+2A_2e^{-2t}+2A_3\cos 2t-2A_4\sin 2t \rightarrow$$
$$+5A_1t+5A_0+5A_2e^{-2t}+5A_3\sin 2t+5A_4\cos 2t=10t-63e^{-2t}+29\sin 2t$$

$$5A_1=10 \rightarrow \boxed{A_1=2}$$
$$-21A_2=-63 \rightarrow \boxed{A_2=3}$$
$$5A_0-A_1=0 \quad \boxed{A_0=\frac{2}{5}}$$

$$-8A_3+20A_4-2A_3+5A_4=0 \rightarrow -10A_3+25A_4=0 \rightarrow A_3=1$$
$$8A_4+20A_3+2A_4+5A_3=0 \rightarrow 10A_4+25A_3=0 \rightarrow A_4=\frac{2}{5}$$

$$y_p=2t+\frac{2}{5}+3\cdot e^{-2t}+\sin 2t+\frac{2}{5}\cos 2t \quad \text{bulun}$$