Tarih: 20/01/2023
Süre: 75 dakika.

ADI SOYADI:

ÖĞRENCİ NO:

METALURJİ VE MALZEME MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ YILSONU SINAVI

<u>İşlem yapılmadan verilen cevaplar dikkate alınmayacaktır. Başarılar Dileriz.</u>

1. $y'+\frac{2}{x}y=\frac{y^3}{x^3}$ **Bernoulli denkleminin genel çözümünü bulunuz.**

y^3 ile bölünürse $\quad y^{-3}y'+\frac{2}{x}y^{-2}=\frac{1}{x^3}$

$y^{-2}=z \Rightarrow \quad -2y^{-3}y'=z'$ ile

$z'-\frac{4}{x}z=-\frac{2}{x^3}$ lineer denk. elde edilir.

$\lambda=e^{\int -\frac{4}{x}dx}=e^{-4\ln x}=x^{-4}$

$(x^{-4}z)'=-\frac{2}{x^3}x^{-4} \Rightarrow x^{-4}z=-2\int\frac{dx}{x^{+7}}+c$

$\Rightarrow \quad z=\frac{1}{3}x^{-2}+cx^{-4}$

$\Rightarrow \quad \boxed{y^{-2}=\frac{x^{-2}}{3}+cx^{4}}$

2. $y''+4y=\cos ec2x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$r^2+4=0 \qquad r=\mp 2i$

$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

$y_p = c_1(x)\cos 2x + c_2(x)\sin 2x$

$c_1' \cos 2x + c_2' \sin 2x = 0$

$c_1'(-2\sin 2x) + c_2'(2\cos 2x) = \cos ec 2x$

$c_1' = -\frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}x$

$c_2' = \frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{\sin 2x} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{4}\ln \sin 2x$

$y_p = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \ln \sin 2x$

$$\boxed{y_g = c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \ln \sin 2x}$$

3. $y''+xy'+y=0$ denkleminin çözümünü $x=0$ noktası komşuluğunda kuvvet serileri yardımıyla bulunuz.

$x=0$ adi noktadır.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

ile

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$2a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+1)(n+2)a_{n+2} + (n+1)a_n \right\} x^n = 0$$

$$2a_2 + a_0 = 0 \qquad a_{n+2} = -\frac{1}{n+2} a_n \quad n \geq 1$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_0 \qquad a_3 = -\frac{1}{3}a_1$$

$$a_5 = -\frac{1}{5}a_3 = \frac{1}{15}a_1$$

$$a_4 = -\frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{8}a_0$$

$$a_6 = -\frac{1}{6}a_4 = -\frac{1}{48}a_0$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$$= a_0 + a_1 x - \frac{1}{2}a_0 x^2 - \frac{1}{3}a_1 x^3 + \frac{1}{8}a_0 x^4 + \frac{1}{15}a_1 x^5 - \frac{1}{48}a_0 x^6 + \cdots$$

$$= a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{48}x^6 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 + \cdots\right)$$

4. $y''+16y=5\sin x$; $y(0)=0, y'(0)=0$ probleminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz. $L\left\{y^{(n)}\right\}=s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-\ldots-y^{(n-1)}(0)$

$$L\{y''+16y\}=L\{5\sin x\}$$

$$s^2Y(s)-s\cancel{y(0)}-\cancel{y'(0)}+16Y(s)=\frac{5}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(s)=\frac{5}{(s^2+1)(s^2+16)}}$$

$$y(x)=L^{-1}\left\{\frac{5}{(s^2+1)(s^2+16)}\right\}$$

$$\frac{5}{(s^2+1)(s^2+16)}=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{s^2+16}$$

$A=C=0$

$B=\frac{1}{3}$ $D=-\frac{1}{3}$

$$y(x)=L^{-1}\left\{\frac{1/3}{s^2+1}-\frac{1/3}{s^2+16}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x)=\frac{1}{3}\sin x-\frac{1}{3}\sin 4x}$$