1. Mertebe Dif. Denklemleri Uygulamaları

Artma ve Azalma Problemleri

① $\frac{dN}{dt} - kN = 0$ $\frac{dN}{dt}$ = miktarın değişim hızı   k; Orantı Sabiti

① denklemi $\frac{dN}{dt} = k.N \longrightarrow \frac{dN}{N} = k.dt$ şeklinde ise ayrılabilir dif denklemi olup her iki tarafın integrali alınırsa;

$\int \frac{dN}{N} = \int k.dt \rightarrow \ln N = kt + C$ C: Sabit olup keyfi yazılabilir. burada $\ln C$ seçilmiştir.

$\downarrow$

$e^{\ln N} = e^{kt + \ln C}$

$e^{\ln N} = N$ ise $N = e^{kt} . e^{\ln C}$

$e^{\ln C} = C \Rightarrow \boxed{N = C.e^{kt}}$ genel çözüm olarak bulunur.

Ör: 1990 yılında nüfusu 60 milyon olan bir ülkenin orantı sabiti $= k = 0{,}028$ ise 2000 yılında nüfusu ne olur?

Çöz: Genel formül $N = C.e^{kt}$

$t=0$ da (1990 da) $N = 60$ milyon ise $N = C.e^{kt}$ $\quad 60\,000\,000 = C.e^{0{,}028.0} \to C = 60\,000\,000$

$t = 2000-1990 = 10$ yıl $\Rightarrow N_{2000} = C.e^{kt} = 60\,000\,000.e^{0{,}028.10} = 79.380.000$ kişi olur.

k'yı belirlemek zordur. Birçok metodu vardır. En basit $k = \dfrac{\text{ölenlerin sayısı}}{\text{Doğanların Sayısı}}$

Ör: Nüfusu 2 yıl sonra iki katına çıkan ve üç yıl sonra nüfusu 20 000 olan bir yerleşim bölgesinin başlangıçtaki nüfusunu bulunuz.

Çöz: $N = C.e^{kt}$ (1)

$t=0$ da $N = N_0 \rightarrow$ $N_0 = C.e^{k.0} \rightarrow N_0 = C$ olur. Bu değer (1) de yerine yazılırsa;

$N = N_0.e^{kt}$ bulunur (2)

$t=2$ de $N=2N_0$ (problem verilmiş) ise bu değer ② de yerine yazılır.

$$2N_0 = N_0 . e^{k.2} \rightarrow 2 = e^{2k} \quad \ln 2 = \ln e^{2k} \rightarrow \ln 2 = 2k\underbrace{\ln e}_{1}$$

$\ln 2 = 2k \rightarrow k = \frac{\ln 2}{2} = 0,347$ bulunur. ② denkleminde yerine yazılırsa;

ve $t=3$ de ve $N=20000$ (problemde verilmiş) ise ② denklemi

$$20000 = N_0 \cdot e^{0,347 \cdot 3} \rightarrow N_0 \cong 7062 \text{ kişi bulunur.}$$

Sıcaklık Problemleri

Bir cismin sıcaklığının zamanla değişim hızı $\frac{dT}{dt}$, Ortam sıcaklığı T_m ile cismin sıcaklığı T arasındaki farkın k gibi orantı sabitinin çarpımına eşittir.

yani $\frac{dT}{dt} + k(T - T_m) = 0$ ① Bu dif. denklemi $y' + p(x)y = q(x)$ formatında old. için 1. Mertebe lineer dif. denklemidir. Çözümü için $I(x) = e^{\int p(x)dx}$ integrasyon çarpanı bulunur.

$p(x)$ burada $p(t)$ anlamındadır ve $P(t) = k$

$q(x)$ // $q(t)$ // ve $q(t) = 0$

Bu durumda $I(x) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int k dt} = e^{kt}$ bulunur. (1) denklemindeki her terim $I(x)$ ile çarpılırsa

$$e^{kt} \cdot \frac{dT}{dt} + k \cdot e^{kt} \cdot T = T_m \cdot k \cdot e^{kt}$$

veya $\frac{d}{dt}\left(T \cdot e^{kt}\right) = T_m \cdot k \cdot e^{kt}$ $\qquad T_m$: Ortam sıcaklığı olup sabittir.

Her iki tarafın int. alınırsa

$$\int \frac{d}{dt}\left(T \cdot e^{kt}\right) dt = \int T_m \cdot k \cdot e^{kt} \cdot dt$$

$$T \cdot e^{kt} = T_m \cdot \cancel{k} \cdot \frac{e^{kt}}{\cancel{k}} + C \rightarrow \boxed{T = C \cdot e^{-kt} + T_m}$$

Ör: 100 °C da metal bir çubuk 0 °C sıcaklıktaki bir odaya konuluyor. 20 dakika sonra çubuğun sıcaklığı 50 °C ise

a) Çubuğun 25 °C düşmesi için gerekli süre

b) 10 dakika sonra çubuğun sıcaklığını bulunuz

Çöz:

$t = 0$ da $T = 100\,°C$ $\qquad T = C \cdot e^{-kt}$ $\qquad 100 = C \cdot e^{-k \cdot 0} \rightarrow C = 100$ bulunur.

$t=20$ dakika sonra $T=50\,°C$ ise (problemde verilmiş)

$$T=C.e^{-kt} \qquad 50=100.e^{-k.20} \rightarrow k=0{,}035 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda

a.) $T=C.e^{-kt} \qquad 25=100.e^{-0{,}035.t} \rightarrow t=39{,}6$ dakika

b) $t=10$ dak. sonra $T=C.e^{-kt} \rightarrow T=100.e^{-0{,}035.10}=70{,}5\,°C$ bulunur.

Ör: $50\,°C$ sıcaklıkta bir cisim $100\,°C$ sıcaklığındaki bir ortama koyuluyor. 5 dak. sonra cismin sıcaklığı $60\,°C$ durşi;

a) Cismin sıcaklığının $75\,°C$ olması için geçen süre

b) 20 dak. sonra cismin sıcaklığı ne olur?

Çö2:

$$\underbrace{T}_{\text{Cismin sıcaklığı}}=C.e^{-kt}+\underbrace{T_m}_{\text{Ortam sıcaklığı}}$$

$t=0$ da $T=50\,°C \Rightarrow 50=C.e^{-k.0}+100 \rightarrow C=-50$ bulunuyor.

$t=5$ dak $T=60\,°C$ ve $C=-50$ ise $60=-50.e^{-k.5} \rightarrow k=0{,}044$

a) $T=75\,°C \rightarrow t=?$ $\quad 75=100-50.e^{-0{,}044.t} \rightarrow t=15{,}75$ dak b-) $t=20$ dakikan $T=?$ $T=100-50.e^{-0{,}044.20} \rightarrow T=79{,}26$ °C bulun

Ör: Başlan 50 °C olan börek daha sonra 375 °C olan fırının içinde demlenmeye bırakılıyor. Fırının içindeki börek fırına konulduktan 75 dak sonra ısısı 125 °C yükseliyor. Böreğin ısısı ne zaman 100 °C düşer.

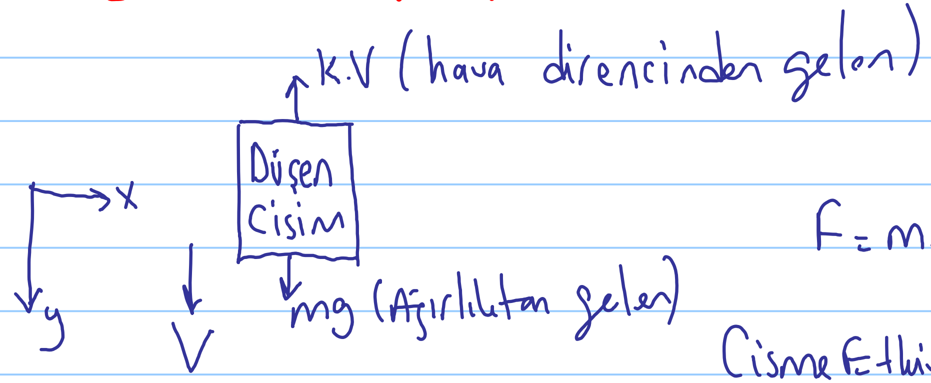
Çöz: $T=C.e^{-kt}+T_m$

$t=0$ dak $T=50$ °C $\Rightarrow$ $50=C.e^{-k.0}+375 \rightarrow C=-325$

$t=75$ dak. $T=125$ °C $\Rightarrow$ $125=-325.e^{-k.75}+375 \rightarrow k=0{,}0038$

$t=?$ dk $T=100$ °C $\Rightarrow$ $100=-325.e^{-0{,}0038.t}+375 \rightarrow t=44$ dakikan bulun

Serbest Düşü Problemleri



$F=m.a$ $a=\dfrac{dV}{dt} \Rightarrow F=m.\dfrac{dV}{dt}$

Cisme Etkiyen kuvvet $=F=mg-kV \Rightarrow$

$\rightarrow m.\frac{dV}{dt} = mg - kV \rightarrow \frac{dV}{dt} + \frac{k}{m}.V = g$. k: hava direnç katsayısı

İdeal ortamda $k=0$ ise $\frac{dV}{dt} = g$ yani $a = g$ olur.

$k>0 \Rightarrow$ Limit hız $V_L = \frac{mg}{k}$ olur. Öte yandan;

$\frac{dV}{dt} + \frac{k}{m}V = g$ denklemi $y' + p(x)y = q(x)$ formatında

old. için 1. mertebe lineer dif. denklemidir. Çözüm için $I(x) = e^{\int p(x)dx}$ integral çarpanı aranılır.

$I(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{k}{m}.dt} = e^{\frac{k.t}{m}}$ bulunur.

Sonra $\frac{d}{dt}\left(V.e^{\frac{k}{m}t}\right) = g.e^{\frac{k}{m}t} \rightarrow \int \frac{d}{dt}\left(V.e^{\frac{k}{m}.t}\right)dt = \int g\,e^{\frac{k}{m}t} \rightarrow$

$\rightarrow V.e^{\frac{k}{m}t} = g\frac{e^{\frac{k}{m}t}}{\frac{k}{m}} + C \rightarrow V.e^{\frac{k}{m}t} = \frac{g.m}{k}e^{\frac{k}{m}t} + C \rightarrow \boxed{V = \frac{gm}{k} + C.e^{-\frac{kt}{m}}}$ bulunur.

Ör: m kütleli bir cisim belli bir yükseklikten sıfır ilk hızla bırakılıyor. k (hava direnci) olmadığı kabul edilerek;

a) Herhangi bir t anında cismin hızı =?

b) 〃 〃 〃 〃 〃 konumunu belirleyiniz.

Çöz: a) Hareketin denklemi $\downarrow y \; \rightarrow x$ koordinatında $\downarrow F = m.\frac{dv}{dt}$ $\downarrow F_1 = mg$

$\uparrow F_2 = kV$ ise

$m.\frac{dv}{dt} = m.g \quad \frac{dv}{dt} = g$ yani $a = g$ olur.

Burada $\frac{dv}{dt} = g$ bu ayrılabilir bir dif. denklemidir. Çözümü her iki tarafın

int. alarak bulunur. $\int dV = \int g.dt \rightarrow V = gt + C$

b) $t = 0$ iken $V = 0 \Rightarrow 0 = g.0 + C \rightarrow C = 0$ olur.

Bu durumda $V = gt + C \rightarrow V = gt$

Öte yandan $V = \frac{dx}{dt}$ ise

$\frac{dx}{dt} = g.t \quad \int t\,dt = \int \frac{1}{g}\,dx$

$\frac{t^2}{2} = \frac{1}{g}x + C_1$ bulunur.

Buradan $yol = x = \frac{1}{2} g t^2 - g \cdot C_1$ elde edilir.

$x=0$ ve $t=0$ da $\quad 0 = \frac{1}{2} g \cdot 0^2 - g \cdot C_1 \Rightarrow g \cdot C_1 = 0$ $\quad g = 9{,}81\ m/sn^2$ ile $C_1 = 0$ olmalıdır.

Bu durumda alınan $yol = x = \frac{1}{2} g t^2$ bulunur.

Ör: $W = 981$ nt ağırlığındaki bir cisim 383 m yükseklikten şekildeki gibi sıfır ilk hızıyla bırakılıyor. k (hava direnci) katsayısı 9,81 varsayılarak; hava direnci kV alınacaktır.

a-) Hareketin dif. denklemini yaz?
b) Herhangi bir t anında cismin hızı?
c) " " " " " konumu
d) 383 m yolu ne kadar zamanda alır.

Not: $W = m \cdot g$ (W: Ağırlık, m: kütle, g: yerçekimi ivmesi)

Çöz: a.) $\rightarrow x$, $\downarrow y$ koordinatlarında hareketin denklemi $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \cdot V = g$ Bu 1. mertebe lineer dif. denk.

b) $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} V = g$ I. mert. lineer dif. denk $\Rightarrow$ $I(x) = e^{\int p(x)\,dx}$ aranılır.

$I(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int p(v)\,dt} = e^{\int \frac{k}{m} \cdot dt} = e^{\frac{k}{m} \cdot t}$ Her terim $I(x)$ ile çarpılır.

$$\frac{d}{dt}\left(V.e^{\frac{k}{m}t}\right) = g.e^{\frac{k}{m}t} \rightarrow \boxed{\int \frac{d}{dt}\left(V.e^{\frac{k}{m}.t}\right)}.dt = \int g.e^{\frac{k}{m}.t}\,dt$$

$$V.e^{\frac{k}{m}t} = g\frac{e^{\frac{k}{m}t}}{\frac{k}{m}} + C \xrightarrow{\text{Sadeleştirme}} V = \frac{g.m}{k} + C.e^{-\frac{k}{m}t} \text{ bulunur}$$

$X=0$, $t=0$ $V=V_0=0$ ve $W=mg \Rightarrow m=100$ kg.

Bu durumda $V=\frac{g.m}{k}+100.e^{-\frac{k}{m}t}$ bulunur.

c.)

$$V=\frac{g}{k}m+100.e^{-\frac{k}{m}t} \qquad V=\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{g}{k}m+100.e^{-\frac{k}{m}t}$$

Bu ayrılabilir bir dif. denklemidir ve her tarafın int alınarak çözülür.

$$\int dx = \int\left(\frac{g}{k}m+100.e^{-\frac{k}{m}t}\right)dt$$

$$x=\frac{g}{k}m.t+100.\frac{e^{-\frac{k}{m}t}}{-\frac{k}{m}}+C_1$$

$X=0$, $t=0$ da $\quad 0=\frac{9{,}81}{9{,}81}.\frac{981}{9{,}81}.0+100.\frac{e^{-\frac{9{,}81}{981/9{,}81}.0}}{-\frac{9{,}81}{981/9{,}81}}+C_1 \xrightarrow{\text{sadeleştirme}} C_1=1019$

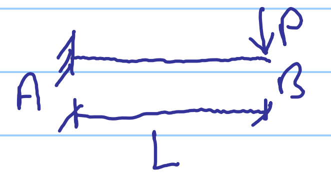
Bu durumda herhangi bir t anında cismin konumu

$$X = \frac{g}{k} m t + 100 \cdot \frac{e^{-\frac{k}{m}t}}{-\frac{k}{m}} + 1019 \text{ bulunur}$$

d) $X = 383$ m yolu ne kadar zamanda alır.

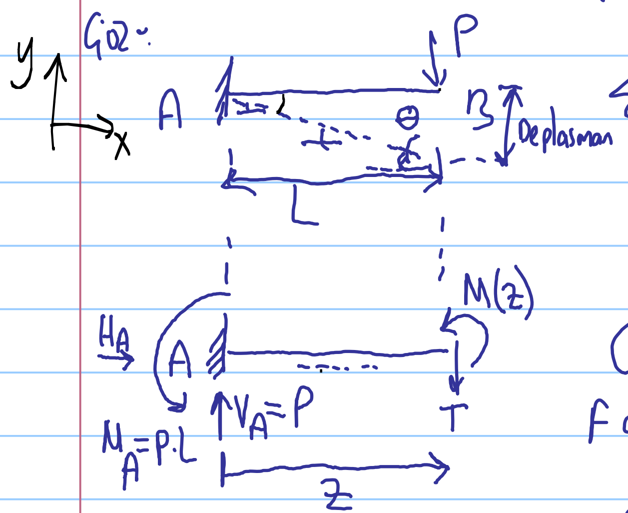
$$383 = \frac{9{,}81}{9{,}81} \cdot \frac{981}{9{,}81} \cdot t + 100 \frac{e^{-\frac{9{,}81}{981/9{,}81} \cdot t}}{-\frac{9{,}81}{981/9{,}81}} + 1019$$ Tatonmanla $t = 2$ sn bulunur.

Ör:



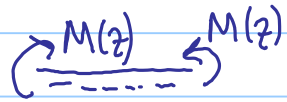
Şekildeki konsol kirişin B noktasındaki deplasmanı (çökmeyi) ve dönmeyi dif. denklem yöntemi ile, P, L, EI fonks. cinsinden bulun.

Çöz:



$\sum y = 0 \Rightarrow V_A = P$ $\quad \sum x = 0 \Rightarrow H_A = 0$ $\quad \sum M_A = 0$ $\quad -M_A + P.L = 0$ $\quad M_A = PL$

$\sum M(z) = 0 \quad M(z) + M_A - P.z = 0 \rightarrow -M(z) = P.L - P.z$

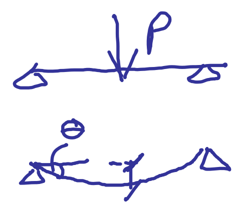


Fonk. olarak $EIV''(z) = -M(z)$ dir. Buna göre;

$$EIV''(z) = P.L - P.z$$

$$\int EIV''(z)\,dz = \int (P.L - P.z)\,dz$$

Mesnetteki dönme için $EIV'(z) = P.L.z - P.\frac{z^2}{2} + C_1$



$$\int EIV'(z)\,dz = \int \left(PLz - \frac{P}{2}z^2 + C_1\right) dz$$

Mesnetteki deplasman için $EIV(z) = \frac{P.L.z^2}{2} - \frac{P}{2}.\frac{z^3}{3} + C_1 z + C_2$

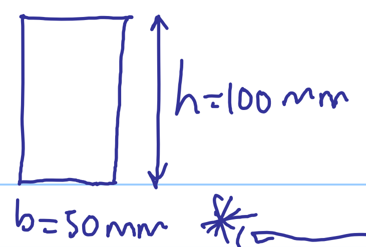
$z=0$ da $V(z)=0$ mesnetten dolayı çökme olmaz $\Rightarrow C_2 = 0$ dır.
$z=0$ da $V'(z)=0$ 〃 〃 dönme olmaz $\Rightarrow C_1 = 0$ olur.

Bu durumda $EIV(z) = \frac{PLz^2}{2} - \frac{P.z^3}{6}$

$z=L$ de çökme max. dır. $V(L) = V_{max} = \frac{1}{EI}\left(\frac{PL^3}{2} - \frac{PL^3}{6}\right) = \frac{PL^3}{3EI}$ //

$z=L$ de dönme max dır. $\theta_{max} = V'(L) = \frac{1}{EI}\left(PL^2 - \frac{PL^2}{2}\right) = \frac{PL^2}{2EI}$ // bulunur

Ö: Bir önceki soruyu $L=2m$ $b=50\,mm$ $h=100\,mm$ $E=15\,GPa$ olarak deplasmanın $5\,mm$ olması için $P=?$ ve konsol ucundaki (B) dönmeyi radyan olarak bulunuz.



$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{50.(100)^3}{12} = 4166667\ mm^4$$

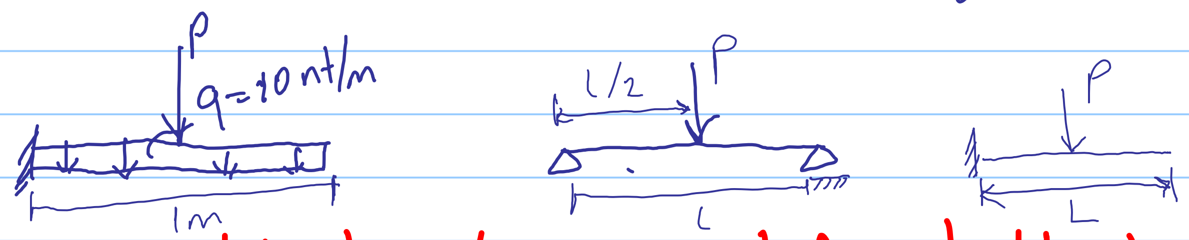
$$V_{max} = \frac{PL^3}{3EI} \Rightarrow 5 = \frac{P.(2000)^3}{3.15.10^3.4166667} \longrightarrow P = 117{,}18\ nt$$

$*$ NOT: $1\ GPa = 1\ \frac{knt}{mm^2} = 1000\ \frac{nt}{mm^2}$ dir.

$$\Theta_{max} = \Theta_B = V'(L) = \frac{PL^2}{2EI} = \frac{117{,}18\,(2000)^2}{2.15.10^3.4166667} = 3{,}75.10^{-3}\ \text{Radyan}$$

bulunur.

Ör:



n. mertebeden lineer dif denklemleri ve çözümleri

$b_n(x)\,y^{n} + b_{n-1}(x)\,y^{n-1} + \dots + b_2(x)\,y'' + b_1(x)\,y' + b_0(x)\,y = g(x)$ gibi denklemler olup

$b_j(x)$ $j = 0,1,2,\dots n$ katsayısı ve $g(x)$ sadece $f(x)$ yani x'e bağlı

Eğer $g(x)=0 \Rightarrow$ homojen

$b_j(x)$ ler sabit ise sabit katsayılı n. mertebeden lineer dif denklemidir. Bu katsayılardan bir tanesi dahi sabit değil ise denklem değişken katsayılıdır.

Ör: Aşağıdaki dif denklemlerinin mertebesini, lineerliğini ve homojenliğini belirleyiniz.

	mertebe	Lineer	Homojen
a.) $2xy'' + x^2y' - (\sin x)y = 2$	2	✓	×
b.) $yy''' + xy' + y = x^2$	3	×	×
c.) $y'' - y = 0$	2	✓	✓
d.) $3y' + xy = e^{-x^2}$	1	✓	×
e.) $2e^x y''' + e^x y'' = 1$	3	✓	×
f.) $\frac{d^4y}{dx^4} + (y')^4 = 0$	4	×	✓
g.) $y'' + \sqrt{y'} + y = x^2$	2	×	×
h.) $y' + 2y + 3 = 0$	1	✓	×

Açıklama

a.) $2xy'' + \dots$ $y'' \Rightarrow$ 2. mertebe y lerin katsayıları sadece x'e bağlı ve denklemin sağ tarafı g(x) old. için lineer, denklemin sağ tarafı sıfır olmadığı için homojen değil

b) $yy''' + \dots$ $y''' \Rightarrow$ 3. mertebe katsayıları x'e bağlı olmadığı için lineer değil. Denklem sıfıra eşit olmadığı için homojen değil

c.) $y'' \Rightarrow$ 2. Mertebe katsayılar x'e bağlı old. için lineer, eşitliğin sağı sıfıra eşit $\Rightarrow$ homojen

d.) $3y' \dots$ 1 mertebe katsayılar x'e bağlı old. için lineer, eşitliğin sağı sıfır değil homojen değil)

e.) $2e^x y''' + \dots$ $y''' \Rightarrow$ 3. mertebe katsayılar f(x) $\Rightarrow$ lineer, eşitliğin sağı sıfır değil ise homojen değil)

f.) $\frac{d^4y}{dx^4} = y'''' \Rightarrow$ 4. mertebe ve $(y')^4$ teriminin olması yani üslü olması lineer olmadığı anlamına geliyor. Denklemin sağ tarafı sıfır ise homojendir. Ancak lineer dif olmadığı için homojenliğine bakılmayabilir.

g.) $y'' \rightarrow$ 2. Mertebe $\sqrt{y'} = (y')^{1/2}$ old. için (üslü ifade) lineer değil) eşitliğin sağı sıfır olmadığı için homojen değil)

h.) $y' \rightarrow$ 1. mertebe katsayılar x'e bağlı yani f(x) Lineer dir. Eşitliğin sağ tarafı her ne kadar sıfır ise sol tarafta +3 var sağa −3 olarak geçer bu yüzden homojen değil

Lineer Bağımlılık