1. Mertebe Lineer dif. denklemler

Bu denklemin standart gösterimi $y' = f(x,y)$ şeklinde olup $y' = \frac{dy}{dx}$ terimini ifade eder.

$f(x,y)$ fonksiyonunda $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ şeklinde kısımlara ayrılırsa;

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$ şeklini alır.

Örnekler: Şıklarda verilen denklemleri standart halde yazınız.

a) $xy' + y^2 = 0$

$$\frac{xy'}{x} + \frac{y^2}{x} = 0 \rightarrow y' = -\frac{y^2}{x} \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x}$$ veya $-\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x}$ bulunur.

b) $e^x y' - x = y' \rightarrow e^x y' - y' = x \quad y'(e^x - 1) = x \quad y' = \frac{x}{e^x - 1}$ bulunur.

c-) $(y'+y)^5 = \sin\left(\frac{y'}{x}\right)$ Bu denklem y' için cebirsel olarak çözülemez ve standart biçimde bu yüzden yazılamaz.

d-) $(y')^3 + y^2 + y = \sin x$

$$y' = \sqrt[3]{\sin x - y^2 - y}$$

e.) $(x-y)\,dx + y^2\,dy = 0$

$$(x-y)\,dx = -y^2\,dy \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x-y}{y^2} \rightarrow y' = \frac{-x+y}{y^2}$$ olur

f-) $\frac{x+y}{x-y}\,dx - dy = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \rightarrow y' = \frac{x+y}{x-y}$ bulunur.

g-) $dx + \frac{x+y}{x-y}\,dy = 0 \rightarrow \frac{x+y}{x-y}\,dy = -dx \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(x-y)}{(x+y)} \rightarrow y' = -\frac{(x-y)}{(x+y)}$ olur.

1. Mertebe Lineer dif. denklemlerin Sınıflandırılması

1-) Lineer Denklemler: Genel hali $y' + P(x)y = q(x)$ gibi olan diferansiyel denklemler Lineer dif. denklemleri olarak bilinir.

2-) Bernouilli Dif. Denklemleri

$$y' + P(x)y = q(x)y^n$$ biçimindeki dif. denklemleri Bernouilli dif. denklemi olarak bilinir. $n \geq 0, 1, \ldots\ldots$ dir. Ancak $n=0$ ve $n=1$ için Bernouilli dif. denklemi Lineerdir. $n \geq 2$ için Bernouilli dif. denklemidir.

3-) Homojen Dif Denklemler

Homojen kelimesi 1. mertebe dif. denklemlerinde $f(tx, ty) = f(x,y)$ şartını sağlıyorsa; bu dif. denklemi homojendir denir. t : reel bir sayıdır.

4-) Ayrılabilir Dif. Denklemler

$M(x,y) = A(x)$ yani sadece x'in fonksiyonu

$N(x,y) = B(y)$ 〃 〃 y'nin 〃 ise bu dif. denklemi ayrılabilir veya değişkenlerine ayrılmış dif. denklemidir.

5-) Tam Dif Denklemler

Δ $$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$ şartını sağlayan dif. denklemler

∂

tam dif. denklem olarak bilinir.

NOT: Genelde dx tarafı M, dy tarafı N ile gösterilir.

Aşağıdaki örneklerde dif. denklemleri LİNEER midir?

Ör: $y' = x \cdot \sin y + e^x$

Şart: $y' + P(x)y = q(x)$ genel görünümünde ise lineerdir.

$P(x)y$ terimi $x.\sin y$ ifadesinde $\sin y$ den dolayı lineer değildir. Her ne kadar $q(x) = e^x$ şartı sağlanıyorsa da $P(x)y$ şartı sağlanmıyor. Eğer $x \sin y$ değilde $y \cdot \sin x$ olsaydı $P(x)y$ şartı sağlanmış olurdu. O zaman lineer olurdu.

Ör: $y' = 5 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 5 \rightarrow dy = 5\,dx$

Şart: $y' + p(x)y = q(x)$ ise burada $p(x) = 0$ $q(x) = 5$ olduğu için linerdir.

Ör: $y' = y^2 + x$

Şart: $y' + p(x)y = q(x)$ ise y^2 terimi $p(x)y$ formunda olmadığı için lineer değildir. Her ne kadar $q(x) = x$ sağlanıyorsa diğer şart sağlanmıyor.

Ör: $y' + x y^5 = 0$ $q(x) = 0$ old. için $q(x)$ şartı sağlanıyor. Ancak y^5 olduğu için $p(x)y$ şartı sağlanmıyor. Bu durumda lineer değil

Ör: $y' = (\sin x)y + e^x$

Şart $y' + p(x)y = q(x)$ görünümünde olmalı. Burada $p(x)y = (\sin x)y$ ve $q(x) = e^x$ olduğu için şart sağlanıyor ve lineerdir.

Ör: $xy' + y = \sqrt{y}$

$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}y^{1/2} \Rightarrow q(x)$ tarafında y var. Şart sağlanmıyor (lineer değil)

Ör: $y' + xy = e^x y$

$y' + xy - e^x y = 0 \quad y' + (x - e^x)y = 0 \quad p(x)y = (x - e^x)y$ ve $q(x) = 0 \Rightarrow$ lineerdir

Ör: $y' + \frac{x}{y} = 0 \rightarrow p(x)y$ şartı sağlanmıyor lineer değil.

Ör: $y' + x^2 y = y^2 \rightarrow p(x)y$ şartı sağlanmıyor (lineer değil)

Ör: $y' = xy$ lineerdir.

Örneklerde verilen dif. denklemleri Bernoulli dif. denklemi midir?

Ör: $y' = (\sin x)y + e^x$

Bern. dif. denk. genel görünüşü (şartı) $\rightarrow \underline{y' + p(x)y = q(x)y^n}$ ve $n \neq 0, 1, \ldots$

$y' - (\sin x) y = e^x$ $\quad p(x) = -\sin x$ $\quad q(x) = e^x$ ise Bernoullidir.

Ancak $n=0$ veya 1 olursa burada olduğu gibi lineerdir.

Ör: $y' = 5$

Şart $y' + p(x)y = q(x)y^n$ $\quad n \geq 0, 1, \ldots \Rightarrow$ $y' = 5$ dif. denkleminde $p(x)y = 0$, $q(x)y^n = 5$ ve $n=0$ dır. O halde Bern. dif. şartını sağlıyor.

Ör: $xy' + y = \sqrt{5} \rightarrow y' + \frac{y}{x} - \frac{y^{1/2}}{x} = 0$ $\quad y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x} y^{1/2}$

$p(x)y = \frac{1}{x}$ $\quad q(x)y = \frac{1}{x}$ ve $n = \frac{1}{2}$ ise

Bern. şartını sağlıyor.

Ör:

$y' + xy^5 = 0$ $\quad$ Şart $y' + p(x)y = q(x)y^n$

$y' + xy^5 = 0 \rightarrow y' = -xy^5$ de $p(x)y = 0$ $\quad q(x)y^n = -xy^5$ ve $n=5$ ile

Bern. dif. şartı sağlanıyor.

Örneklerdeki dif. denklemleri homojen midir?

Ör: $y' = \dfrac{y+x}{x}$

Şart $f(tx,ty) = f(x,y)$ olmalı

$$f(tx,ty) = \frac{ty+tx}{tx} = \frac{\cancel{t}(y+x)}{\cancel{t}x} = \frac{y+x}{x} = f(x,y)$$ şart sağlandı. O zaman homojendir.

Ör: $y' = \dfrac{y^2}{x}$ $\quad f(tx,ty) = \dfrac{t^2y^2}{tx} = \dfrac{ty^2}{x} \neq f(x,y) \Rightarrow$ homojen değil.

Ör: $y' = \dfrac{2xy \cdot e^{\frac{x}{y}}}{x^2+y^2 \cdot \sin\frac{x}{y}}$ homojen midir?

Şart $f(tx,ty) = f(x,y)$ olmalı

$$f(tx,ty) = \frac{2(tx)(ty) \cdot e^{\frac{tx}{ty}}}{(tx)^2+(ty)^2 \cdot \sin\frac{tx}{ty}} = \frac{t^2\, 2xy \cdot e^{\frac{x}{y}}}{t^2x^2+t^2y^2 \cdot \sin\frac{x}{y}} = \frac{\cancel{t^2}(2xy\, e^{\frac{x}{y}})}{t^2(x^2+y^2 \cdot \sin\frac{x}{y})}$$

$$= \frac{2xye^{\frac{x}{y}}}{x^2+y^2 \cdot \sin\frac{x}{y}} = f(x,y) \Rightarrow \text{homojen}$$

Ör: $y' = \dfrac{x^2+y}{x^3}$ homojen değil

Ör: $y' = \dfrac{xy+y}{x^2}$ $\quad f(tx,ty) = \dfrac{tx \cdot ty + ty}{(tx)^2} = \dfrac{t^2xy+ty}{t^2x^2} = \dfrac{\cancel{t}(txy+y)}{t^{\cancel{2}}x^2}$

$= \dfrac{txy+y}{tx} \neq f(x,y) \Rightarrow$ homojen değildir.

Ör: $y' = \dfrac{xy+y^2}{x^2}$ homojendir.

Örneklerdeki dif. denklemleri Ayrılabilir mi?

Ör: $\sin x\, dx + y^2\, dy = 0$

Ayrılabilirlik şartı $\quad M(x,y) = A(x)$ sadece x'in fonksiyonu
$\qquad\qquad\qquad\qquad N(x,y) = B(y)$ " y'nin " olmalı

$M(x,y) = A(x) = \sin x$ görüldüğü gibi sadece x in fonksiyonu.
$N(x,y) = B(y) = y^2$ " " " y nin "

$\Rightarrow$ Bu dif. denklemi Ayrılabilir dif denklemidir.

Ör: $(1+xy)\,dx + y\,dy = 0$

$M(x,y) = A(x) = 1 + xy$ göründüğü gibi sadece x'in fonksiyonu değildir.
$N(x,y) = B(y) = y$ 〃 〃 〃 y'nin fonksiyonudur.

Ancak 1. şart sağlanmadığı için ayrılabilir dif. denk. değildir.

Örneklerdeki dif. denklemleri Tam dif denklemi midir?

Not: dx tarafı M ile dy tarafı N ile gösterilir.

Ör:

$$\underbrace{3x^2y}_{M}\,dx + \underbrace{(y+x^3)}_{N}\,dy = 0$$

Tam dif. denk. şartı $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ olmalı. Δ, ∂ $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ $\dfrac{dy}{dx}$

$M(x,y) = 3x^2y$ $\quad N(x,y) = y + x^3$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 3x^2$ $\quad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ old. için bu dif. denklemi tam diferansiyel denklemdir.

Ör: $x^2 y\,dx - x^2 y^2 dy = 0 \longrightarrow$ Tam dif. değil

Ör: $y' = \frac{y}{x}$

$y' = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \rightarrow \underbrace{\frac{1}{y}}_{N} dy - \underbrace{\frac{1}{x}}_{M} dx = 0$ Tam dif şartı $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ Tam diftir.

Ancak şöyle çözersek; $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad dy = \frac{y}{x} dx \quad \underbrace{\frac{y}{x}}_{M} dx \underbrace{- dy}_{N} = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \quad \frac{1}{x} \neq 0 \Rightarrow$ Tam dif. değildir. Çünkü tamlık standart biçimde değil sadece diferansiyel denklemler için tanımlanır.

Ör: $x y\,dx + y^2 dy = 0$ Tam dif değil

Karışık Örnekler (Lineer, Bern, Ayrılabil, tam dif)

Lineerlik Şartı $y' + p(x)y = q(x)$

Bern. 〃 $y' + p(x)y = q(x)y^n$ $n > 0, 1, \ldots$ Eğer

$n=0$ ve $n=1 \Rightarrow$ denklem aynı zamanda lineer dir.

Homojenlik Şartı: $f(tx, ty) = f(x,y)$

Ayrılabilir 〃 $M(x,y) = A(x)$ Sadece $f(x)$.
$N(x,y) = B(y)$ 〃 $f(y)$

Tam dif 〃 $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

Ör: $x\,dx - \frac{1}{y}\,dy = 0$

$M(x,y) = A(x) = f(x)$ $N(x,y) = B(y) = -\frac{1}{y}$ $f(y)$ old.

için ayrılabilir.

Ör: $y' = -\frac{2y}{x}$ lineer, Bern, homojen, Ayrılabilir, Tam dif.

Ör: $2xy\,dx + x^2\,dy = 0$

1. Mertebeden Ayrılabilir ve Homojen Dif. Denklemler.