Lineer Bağımlılık

Bir $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ fonksiyon kümesi eğer $a \leq x \leq b$ üzerinde hepsi sıfır olmayan öyle bir $C_1, C_2, \dots, C_n$ için

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y(n) x = 0$$ şartını sağlıyorsa

Lineer bağımlıdır.

$C_1 = C_2 = C_n = 0$ olduğunda lineer bağımsızdır.

WRONSKIAN

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ fonksiyon kümesinin $a \leq x \leq b$ aralığı üzerindeki Wronskian'ı, her bir fonksiyonun bu aralıkta $(n-1)$. mertebe türeve sahip olması şartı ile aşağıda verilen determinanta eşittir.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_3^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad W(y_1, y_2, \dots, y_n$$

Wronskianı sıfır olursa Lineer bağımlı

" " olmazsa " bağımsızdır.

Ör: $\{e^x, e^{-x}\}$ kümesinin Wronskianını bulunuz.

Çöz:

$$W(e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ \frac{de^x}{dx} & \frac{de^{-x}}{dx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ \frac{e^x}{1} & \frac{e^{-x}}{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = \left[e^x.(-e^{-x})\right] - e^{-x}.e^x =$$

$$= -e^x.e^{-x} - e^x.e^{-x} = -\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} - \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} = -1-1 = -2$$

Ör: $\{\sin 3x, \cos 3x\}$ kümesinin Wronskianını bulunuz.

Çöz:

$$W(\sin 3x, \cos 3x) = \begin{vmatrix} \sin 3x & \cos 3x \\ \frac{d(\sin 3x)}{dx} & \frac{d.\cos 3x}{dx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin 3x & \cos 3x \\ 3\cos 3x & -3\sin 3x \end{vmatrix} = \left[\sin 3x(-3.\sin 3x)\right] - \cos 3x(3.\cos 3x)$$

$$= -3.\sin^2 3x - 3.\cos^2 3x = -3(\sin^2 3x + \cos^2 3x) = -3 \text{ bulunur.}$$

Hatırlatma $\sin^2 3x + \cos^2 3x = 1$ dir.

Ör: $\{x, x^2, x^3\}$ kümesinin Wronskianını bulunuz.

Çöz:

$$W(x,x^2,x^3) = \begin{vmatrix} x^{a} & x^{2\,b} & x^{3\,c} \\ 1^{d} & 2x^{e} & 3x^{2\,f} \\ 0^{g} & 2^{L} & 6x^{m} \end{vmatrix} = [aem - ceg] + [bfg - bdm] + [cdL - afL]$$

$$= [x.2x.6x - x^3.2x.0] + [x^2.3x^2.0 - x^2.1.6x] + [x^3.1.2 - x.3x^2.2] = 2x^3$$ bulunur.

Ör: $\{(1-x), (1+x), (1-3x)\}$ kümesinin Wronskianını bulun.

Çöz

$$W\{(1-x),(1+x),(1-3x)\} = \begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 1-3x \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

* NOT: Eğer bir matrisin satır veya sütunundan biri sıfır ise matrisin sonucu sıfırdır.

Ör: $\{e^x, e^{-x}\}$ kümesinin lineer bağımsız olup olmadığı konusunda yorum yapınız.

1. Yol Wronskianına bakılır. Daha önce $W=-2$ bulunmuştu $-2\neq 0 \Rightarrow$ Lineer Bağımsız.

2. Yol $c_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-x} = 0$ Kaç tane C, Çözüm kümesindeki terim sayısı kadar.

$\frac{1}{e^x} \cdot C_1 \cdot e^x = -C_2 \cdot \frac{1}{e^x} \cdot e^{-x} \rightarrow C_1 = -C_2 \cdot e^{-x} \cdot e^{-x} \rightarrow C_1 = -C_2 \cdot e^{-2x}$ denkleminin

sol tarafı sabit sağ taraf ise sabit değildir. Dolayısı ile bu eşitlik geçerli değildir. Geçerli olması ancak $C_1 = C_2 = 0$ olması ile mümkündür.

$$C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow \text{Lineer bağımsızdır.}$$

Çalışılacak Sorular.

Aşağıda verilen kümelerin Wronskianını bularak lineer bağımlı olup olmadığını belirleyin.

1.) $\{3x, 4x\} \rightarrow W=?$ 2.) $\{x^2, x\} \rightarrow W$ 3.) $\{x^3, x^3\} \rightarrow W$ 4.) $\{e^{2x}, e^{-2x}\} \rightarrow V$

5.) $\{x^2, -x^2\} \rightarrow W$ 6.) $\{x^2, 5\} \rightarrow W$ 7.) $\{3e^{2x}, 5e^{2x}\} \rightarrow W$ 8.) $\{x, 1, (2x-7)\} \rightarrow W$

Ör: $\{x, x^2, x^3\}$ kümesinin lineerliğini iki yolla inceleyiniz.

1. Yol $W(x, x^2, x^3) = 2x^3$ Daha önce bulunmuştu. $2x^3 \neq 0 \Rightarrow$ lineer bağımsız

2. Yol $C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 \overset{?}{=} 0$ denklemi ancak $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ olması ile mümkün ise " "

Ör: $\{(1-x), (1+x), (1-3x)\}$ kümesi $(-\infty, +\infty)$ üzerinde lineer bağımlımıdır.?

1. Yol. $W[(1-x),(1+x),(1-3x)] = \begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 1-3x \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ lineer bağımlı

2. Yol $(1-x)C_1 + (1+x)C_2 + (1-3x)C_3 = 0$

$$C_1 - C_1x + C_2 + C_2x + C_3 - 3C_3x = 0$$

$x(C_1 + C_2 - 3C_3) + C_1 + C_2 + C_3 = 0$ eşitliğinin gerçek olabilmesi için

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2 - 3C_3 = 0 \\ C_1 + C_2 + C_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = -2,\ C_2 = 1,\ C_3 = 1 \text{ bulunur.}$$

$C_1 = C_2 = C_3 = 0$ olmadığı için lineer bağımlıdır.

Ör:

$y'' + 9y = 0$ dif denkleminin $y_1(x) = \sin 3x$ ve $y_2(x) = \cos 3x$ çözümü müdür?

$W(\sin 3x, \cos 3x) = -3 \neq 0 \Rightarrow$ lineer bağımsız olduğu için

Çözümüdür. Ve genel çözüm $y(x) = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 2x$ dir.

Ör: $y'' - y = 0$ denkleminin iki çözümü $y_1(x) = e^x$ ve $y_2(x) = e^{-x}$ olarak verilmiştir. Genel çözümü bulun

Çöz: $W(e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ lineer bağımsız

Genel Çözümü $y(x) = c_1 e^x + c_2 . e^{-x}$

Ör: $y''' = 0$ dif denklemin çözümü x^2, x ve 1 dir.

$y_1 = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$ genel çözümü müdür?

$W(x^2, x, 1) = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ lineer bağımlı

Homojen Olmayan Lineer Dif. Denklemler