

Tarih: 19/01/2024
Saat : 11.00 – 12.15

ADI SOYADI:

ÖĞRENCİ NO:

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ YILSONU SINAVI

SORU 1	SORU 2	SORU 3	SORU 4	TOPLAM

AÇIKLAMA: Sınav süresi 75 dakikadır. Sorular eşit puanlıdır. İşlem yapılmadan verilen cevaplar dikkate alınmayacaktır. İstenilen sayıdan fazla çözüm yapılan grupta çözüm sırası dikkate alınacaktır. Başarılar dileriz.

AŞAĞIDAKİ GRUPTAN SADECE İSTEDİĞİNİZ 2 (İKİ) SORUYU CEVAPLAYINIZ.

1. $y = c_1 e^x + c_2 x$ eğri ailesini çözüm kabul eden en düşük basamaktan diferensiyel denklemi elde ediniz.
2. $(2x^3 y^4 - 5y)dx + (x^4 y^3 - 7x)dy = 0$ denklemi için $x^m y^n$ şeklinde bir integral çarpanı araştırınız.
3. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
4. $y = xp - e^p$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ASAĞIDAKİ GRUPTAN SADECE İSTEDİĞİNİZ 2 (İKİ) SORUYU CEVAPLAYINIZ.

5. $y'' + y = \tan x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
6. $y'' + xy' = 0$ denkleminin genel çözümünü $x = 0$ noktası komşuluğunda kuvvet serileri yardımıyla elde ediniz.
7. $4x^2 y'' - 4xy' + 3y = 0$ Cauchy- Euler denkleminin genel çözümünü bulunuz.
8. $y' + 4y = e^{-4x}$ $y(0) = 2$ probleminin genel çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$$L\{y^{(n)}\} = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$$

$$1) y = c_1 e^x + c_2 x \quad (1)$$

$$y' = c_1 e^x + c_2 \quad (2)$$

$$y'' = c_1 e^x \quad (3)$$

$$c_1 e^x = y''$$

$$(2) \text{ den } c_2 = y' - y''$$

$$(1) \text{ den } y = y'' + x(y' - y'') \Rightarrow y = y'' + xy' - xy''$$

$$\Rightarrow (1-x)y'' + xy' - y = 0$$

$$2) (2x^3y^4 - 5y)dx + (x^4y^3 - 7x)dy = 0 \quad \text{denklemini } x^m y^n \text{ ile çarpalım.}$$

$$\underbrace{(2x^{m+3}y^{n+4} - 5x^m y^{n+1})}_{P} dx + \underbrace{(x^{m+4}y^{n+3} - 7x^{m+1}y^n)}_{Q} dy = 0$$

$$P_y = Q_x \quad 2(n+4)x^{m+3}y^{n+3} - 5(n+1)x^m y^n = (m+4)x^{m+3}y^{n+3} - 7(m+1)x^{m+1}y^n$$

$$\left. \begin{array}{l} 2n+8 = m+4 \\ -5n-5 = -7m-7 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} m = -\frac{8}{3} \\ n = -\frac{10}{3} \end{array}$$

$$\lambda = x^{-\frac{8}{3}} y^{-\frac{10}{3}}$$

$$3) y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}$$

$$r^2 + 3r - 4 = 0$$

$$(r+4)(r-1) = 0 \quad r_1 = -4, r_2 = 1$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-4x}$$

$$y_p = A x e^{-4x}$$

$$y_p' = A e^{-4x} - 4 A x e^{-4x}$$

$$y_p'' = -8 A e^{-4x} + 16 A x e^{-4x}$$

$$e^{-4x} [16 A x - 8 A + 3 A - 12 A x - 4 A x] = e^{-4x}$$

$$-5 A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{5}$$

$$y_p = -\frac{1}{5} x e^{-4x}$$

$$y_g = y_h + y_p \Rightarrow y_g = c_1 e^x + c_2 e^{-4x} - \frac{1}{5} x e^{-4x}$$

$$4) y = x p - e^p$$

Clairant denk x 'e göre türev alalım

$$p = p - x \frac{dp}{dx} - e^p \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} (x - e^p) = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

$$\Rightarrow p = c \Rightarrow$$

$$y = cx - e^c$$

Genel Çözüm

$$x - e^p = 0$$

$$y = x p - e^p$$

$$p = \ln x$$

$$y = x \ln x - x$$

Aykırı Çözüm

$$3) y'' + y = \tan x$$

$$r^2 + 1 = 0 \quad r = \pm i$$

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$y_p = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$$

$$C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0$$

$$C_2' = \sin x \quad C_2 = -\cos x$$

$$-C_1' \sin x + C_2' \cos x = \tan x$$

$$C_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = -\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}$$

$$C_1 = -\ln|\sec x + \tan x| + \sin x$$

$$y_p = \cos x \sin x - \cos x \ln|\sec x + \tan x| - \cos x \sin x$$

$$\Rightarrow y_p = -\cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

$$y_g = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

$$6) y'' + xy = 0 \quad x=0 \text{ adi}$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots$$

$$(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots) + (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots) = 0$$

$$2a_2 + (6a_3 + a_0)x + (12a_4 + a_1)x^2 + (20a_5 + a_2)x^3 + \dots = 0$$

$$a_2 = 0 \quad a_3 = -\frac{1}{6}a_0 \quad a_4 = -\frac{1}{12}a_1 \quad a_5 = 0$$

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{1}{6}a_0 x^3 - \frac{1}{12}a_1 x^4 + \dots$$

$$y = a_0 \left(1 - \frac{1}{6}x^3 + \dots\right) + a_1 \left(x - \frac{1}{12}x^4 + \dots\right)$$

$$7) \quad 4x^2 y'' - 4xy' + 3y = 0 \quad x = e^t$$

$$y' = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \quad y'' = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \quad \text{ile}$$

$$4 \frac{d^2 y}{dt^2} - 8 \frac{dy}{dt} + 3y = 0 \quad \text{denklemin elde edilir.}$$

$$4r^2 - 8r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{3}{2}, \quad r_2 = \frac{1}{2}$$

$$y = C_1 e^{\frac{3}{2}t} + C_2 e^{\frac{1}{2}t}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = C_1 x^{\frac{3}{2}} + C_2 x^{\frac{1}{2}}}$$

$$8) \quad y' + 4y = e^{-4x} \quad y(0) = 2$$

$$L\{y' + 4y\} = L\{e^{-4x}\} \Rightarrow sY(s) - y(0) + 4Y(s) = \frac{1}{s+4}$$

$$(s+4)Y(s) = \frac{1}{s+4} + 2 = \frac{2s+9}{s+4} \Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{2s+9}{(s+4)^2}}$$

$$y(x) = L^{-1} \left\{ \frac{2s+9}{(s+4)^2} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+4)^2} + \frac{2}{s+4} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = x e^{-4x} + 2e^{-4x}}$$