SAYISAL ANALİZ DERS NOTLARI

Book · June 2020

2 authors:

Mehmet Tektas
Bandırma Onyedi Eylül University

Necla Tektas
Bandırma Onyedi Eylül University

SAYISAL ANALİZ
DERS NOTLARI

DR.MEHMET TEKTAŞ

DR.NECLA TEKTAŞ

EYLÜL , 2003
İSTANBUL

ÖNSÖZ

Sayısal analiz içeriği itibarı ile disiplinler arası bir matematik dalıdır.İçeriğinde mühendislikten sosyal bilimlere,teknik bilimlerden fen bilimlerine kadar çok sayıda dalı barındıran sayısal analiz konusu içine giren belli başlı konular; mevcut verilere göre en uygun eğrinin uydurulması ve buna bağlı olarak gelecek yıllardaki satış, ithalat, ihracat ve bunun gibi tahminlerin yapılması, bu verilere göre uydurulan eğride maksimum, ortalama ve etkin hatanın belirlenmesi, bir matrisin özdeğer ve özvektörlerinin bulunması, integrali alınamayan fonksiyonlar için o eğri altında kalan alan hesabı, bu alanın bir eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan hacim hesabında kullanılması ve diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmasıdır.

Özellikle hata hesabında adı duyulmaya başlayan sayısal analiz konusu, bilgisayar teknolojisindeki gelişmelere paralel olarak tek başına bir ders konusu olup diğer matematik konularıyla bire bir bağlantısı itibarı ile disiplinler arası bir ders olarak da ele alınabilir.

Bu nedenle, çalışmamızın ikinci bölümünde denklemlerin yaklaşık çözüm yöntemleri, üçüncü bölümde matrisler,determinantlar ve lineer denklem sistemlerinin çözüm yöntemleri, dördüncü bölümde interpolasyon polinomları, beşinci bölümde Taylor ve Maclaurent serileri, altıncı bölümde eğri uydurma, yedinci bölümde sonlu farklar, sekizinci bölümde sayısal integral ve dokuzuncu bölümde matematikte bilinen en önemli yazılımlardan olan MATLAB ile ilgili konular yer almaktadır.

Oğullarımız Ahmet Burak ve Furkan TEKTAŞ İle

Onların Nezdinde İstikbalimiz Olan Gençliğimize İthafen…

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ..I

İÇİNDEKİLER..II

BÖLÜM .1. GİRİŞ...1

BÖLÜM 2 DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ.......................2

2.1. Köklerin Varlığı ve Tekliği…………………………………………..………..........2
2.2. Bir Denklemin Kökünün Yaklaşık Değerinin Hesabı………………..……….............4
2.3. Köklerin Bulunduğu Aralığın Mümkün Olduğu Kadar Daraltılması…..……….........5
2.3.1.Deneme Metodu…………………………………………………………...5
2.3.2.İkiye Bölme Metodu……………………………………………………........5
2.3.3.Kirişler (Değişken Kesen)…Metodu……………………………………….....6
2.3.4.Teğetler(Newton-Raphson)Metodu…………………………………….......8
2.3.5. Teğet-Kiriş Metodu………………………………………………………...10
2.4. Denklemlerin Yaklaşık Çözümlerinde İterasyon Metotları ……………………........14
2.5. Newton'un Karekök Algoritması……………………………………………………..14
2.6. Newton-Raphson Metodu………………………………………………………………..14

BÖLÜM. 3 .MATRİSLER,DETERMİNANTLAR VE LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ...16-48

3.1. Matrisler………………………………………………………………………...........16
3.2.Matrislerin Özellikleri…………………………………………………………........18
3.3.Özel Matrisler …………………………………………………………………….......18
3.3.1.Birim Matris……………………………………………………………...18
3.3.2.Sıfır Matris……………………………………………………………………18
3.3.3.Köşegen Matrisler……………………………………………………………..18
3.3.4.Üçgen Matrisler………………………………………………………………19
3.3.5.İdempotent Matris…………………………………………………………..20
3.3.6.Nilpotent Matris……………………………………………………………20
3.3.7.Simetrik Matris………………………………………………………………..21
3.4.Determinantlar…………………………………………………………………….......21
3.4.1.Sarrus Kuralı……………………………………………………………..22
3.5.Determinantın Özellikleri……………………………………………………….…....22
3.6.Lineer Denklem Sistemleri……………………………………………………………23
3.6.1.Cramer Yöntemi…………………………………………..…......................24
3.6.2.Matris,Determinant ve LDS Örnekleri……………………………………..24
3.6.3.Gauss-Yoketme Yöntemi…………………………………………………..29
3.7.Pivotlama………………………………………………………………………...........32
3.8.Gauss-Jordan Yöntemi …………………………………………………….............34
3.9.Ayrıştırma (Cholesky) Yöntemi………………………..………………………........36
3.10.Gauss-Seidel Yöntemi………..……………………………………..…….................39
3.11.Matris, Determinant ve LDS Örnekleri……………………………………................43

BÖLÜM 4 İNTERPOLASYON POLİNOMLARI..49-59

4.1.Fonksiyonların Tablolarının Düzenlenmesi……………………………….............49
4.2.Lineer İnterpolasyon………………………………………………….................49
4.3.Lineer İnterpolasyon Hataları……………………………………………….........53
4.4.İnterpolasyon Polinomlar ……………………………………...……………......54
4.4.1.İnterpolasyon Polinomun Problemi……………………………………………54
4.4.2.Lagrange İnterpolasyon Polinomu……………………………………………55
4.4.3.Lagrange İnterpolasyon Polinom Hatası……………………………………....55
4.5.Newton İnterpolasyon Polinomlar…………………………………………………..56

BÖLÜM 5 TAYLOR VE MCLAURENT SERİLERİ...60-66

5.1.Taylor ve Mclaurent Serisi ……………………………………………………..... 60
5.2.Kalanlı Taylor Serisi: ………………………………...62
5.3.Binom Teoremi..64
5.4.Bir Seri Yardımıyla Bir Fonksiyonun Tarifi...64

BÖLÜM 6 EĞRİ UYDURMA..67-70

6.1.En Küçük Kareler Doğrusu………………………………………………...........67
6.2.En Küçük Kareler Doğrusunun Bulunması…………………………………........68
6.3.Polinom Uyarlaması..70

BÖLÜM.7. SONLU FARK OPERATÖRLERİ...71-83

7.1.Lineer Operatörler..71
7.1.1.İleri Fark Operatörü……………………………………………………………71
7.1.2.Geri Fark Operatörü…………………………………………………………...71
7.1.3.Merkezi Fark Operatörü………………………………………………………72
7.1.4.Ortalama Değer(Averaj) Operatörü……………………………………………72
7.1.5.Öteleme(Kaydırma) Operatörü…………………...…………………………72
7.1.6.Türev Operatörü………………………………………………………………72
7.1.7.İntegral Operatörü…………………………………………………..………73
7.2.Lineer Operatörler Arasındaki Bağıntılar…...73
7.3.Sonlu Fark Tablolarının Yazılışı...74
7.3.1.İleri Fark Tablosu……………………………………………………..……74
7.3.2.Geri Fark Tablosu……………………………………………………….……75
7.3.3. Merkezi Fark Tablosu……………………………………...……........75
7.3.4. İleri Farklarda Fonksiyon Tablolarının kontrolü…………………...………76

BÖLÜM. 8. SAYISAL İNTEGRAL...84-93

8.1. Ortalama Ordinat Metodu..84
8.2. Yamuk Metodu……..85
8.3. Dikdörtgen Metodu...88
8.4. Parabolik Alan Formülü………………………………...89
8.5. Simpson Metodu....... ……………………………………………………...............91

BÖLÜM 9. MATEMATİKTE MATLAB İLE İŞLEMLER……………………94-114

9.1. MATLAB’da Kompleks Sayılar ve Kompleks Sayı İşlemleri………………………..95
9.2. MATLAB’da Trigonometrik Fonksiyonlar……………………………………......95
9.3. MATLAB’da Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar…………………………………..97
9.4. MATLAB’da Dizi ve Matrislere Ait İşlem Ve Fonksiyonlar………………...……....97
9.4.1. Basit Matrislerin Girilmesi…………………………………………………...97
9.4.2. Bir Matrisin Transpozesi…………………………………………….……99
9.4.3.Bir Matrisin Tersi (İnversi)…………………………………………….…100
9.4.4. Bir Matrisin Determinantı……………………………………………..100
9.4.5. Bir Matrisin Rankı………………………………………………...........101
9.4.6. Matrislerde Dört İşlem……………………………………………..….101
9.4.6.1.Matrislerde Toplama ve Çıkarma İşlemi…………………………..….101
9.4.6.2.Matrislerde Çarpma İşlemi……………………………………………102
9.4.6.3.Matrislerde Bölme İşlemi..102
9.4.7. Bir Matrisin n. Kuvveti……………………………………………..…103
9.4.8. Bir Matrisin Özdeğeri……………………………………………….....103
9.4.9. Dizi ve Matrisler İçin Tanımlı Bazı Fonksiyonlar………………………...105
9.5. MATLAB’da Polinomlar…………………………………………………………106
9.5.1. Polinomların Girilmesi………………………………………………………106
9.5.2. Polinom Köklerinin Bulunması……………………………………………...107
9.5.3. Bir Polinomun Türevi………………………………………………………..109
9.5.4. Polinomlarda Çarpma ve Rasyonel Polinomlar…………………………….111
9.6. MATLAB’da Lineer Denklem Sistemleri……………………………………...111
9.6.1. Katsayılar Matrisinin Tersi Yardımıyla Çözüm……………………………..112
9.6.2 Genişletilmiş Matris Yöntemi İle Çözüm (Gauss Eliminasyon Yöntemi)…...112
9.6.3.Cramer Yöntemiyle Çözüm…………………………………………………..114
KAYNAKLAR..115
Ek.1. Örnek Program Kodları..116
Ek.2.Çözümlü Sorular…………………………………………………………………126
Ek.2.Çözümlü Örnekler……..…………………………………………………………139

Sentetik Bölme ve Bairstow Metodu

Nümerik analizin bütün alanlarında kullanılan polinomlara fen ve matematikte de başvurulur. n. Dereceden x'in üslerini içeren P(x) polinomunun gösterilişi;

(1) $$P(x)= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

bu şekildedir. ($a_n \neq 0$ ve a_k = sabit) Bu bölümün amacı P(x) polinomunu değerlendirmek için etkin bir metot geliştirmektir. Algoritma Horner Metodu olarak bilinir ve $P'(x)$, $P''(x)$, …., $P^{(n)}(x)$ şeklinde de genişletilebilir. Fiziksel uygulamalarda polinomların kökleri sıklıkla artar. Örneğin; bazen derecesi 5 ten büyük olan polinomların kompleks köklerinden birinin reel kısmı, elektriksel ya da mekanik sistemlerin stabilitesi ile ilişkilidir. Eğer n=2 ise, P(x) polinomunun kökü quadratik formül kullanılarak bulunabilir ve 3. ile 4. dereceler için formüller vardır. Fakat derecesi $n \geq 5$ olan polinomlar için belirgin formüller yoktur. Eğer hesaplamalarda kompleks değişkenler ve kompleks aritmetikler uygulanıyorsa, kökler Newton-Raphson metodu kullanılarak bulunabilir.Eğer kompleks değişkenler bilgisayarda mevcutsa, bu değişiklikler kolayca yapılır. Buna rağmen. mühendislik ve bilimdeki çoğu problemler reel sabitli polinomlar içerir ve gerekli hesaplamalar reel aritmetik kullanılarak yapılabilir. Bu durumlar için kullanılan metoda Newton-Bairstow veya Bairstow metodu denir ve quadratik sentetik bölmeye dayalıdır.

Teoremlerin ispatı kompleks değişkenlere dayanmaktadır.

Teorem 1.1 [*Cebirin temel teoremi*] P(x), (1) de verildiği gibi derecesi $n \geq 1$, reel veya kompleks sayıları $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ve $a_n \neq 0$ olan bir polinom olsun. P(x) i sıfır yapan en azından bir tane kompleks z sayısı vardır.

Sonuç 1.1 [*P(x) polinomunun sıfıra eşitlenerek , çarpanlara ayırma yöntemi ile köklerinin bulunması*] n. dereceden P(x)polinomunun $x_0, x_1, \ldots, x_n$ gibi n tane kompleks kökü vardır. Eğer tüm kökler $(x-x_j)$ şeklinde yazılırsa, P(x) aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

(2) $$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Teorem 1.2 [reel sabitlerin a_i olma durumu] n. derecedeki P(x) polinomunun bütün reel sabitleri a_i ise ve bu polinomun kökü a+bi ise, a-bi kompleks sayısı da P(x) polinomunun bir köküdür. Buradan karmaşık kök çifti oluşur ve bu iki kök quadratik çarpanla ilişkilidir.

(3) $$x^2 - rx - s = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = (x - a - bi)(x - a + bi).$$

P(x) j lineer çarpanlarının ve k quadratik çarpanlarının ürünü olarak açıklanabilir, n=j+2k olan durumlarda, $\{x_i\}_{i=1}^{i=j}$, $\{r_i, s_i\}_{i=1}^{i=k}$ reel sayı olduğunda;

(4) $$P(x) = a_n(x - x_1) \ldots (x - x_j)(x^2 - r_1x - s_1) \ldots (x^2 - r_kx - s_k),$$

Örnek 1.1: Aşağıdaki polinomları çarpanlarına ayırınız.

$$P_4(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$$

$$P_5(x) = x^5 - x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 16x - 10$$

Çözüm: İlk polinomun reel kökleri x_1= -1, x_2=2, x_3=2 ve x_4=3 tür.

$$P_4(x) = (x + 1)(x - 2)^2(x - 3)$$

İkinci polinomun 4 kompleks kökü ve bir reel kökü vardır. Bunlar; x_1= -1+2i, x_2=-1-2i, x_3=1+i , x_4=1-i ve x_5=1 dir. Quadratik çarpanlar (x^2+2x+5) ve (x^2-2x+2) dır. Bu çarpanlardan sırasıyla x_1,x_2 ve x_3 , x_4 kök çiftleri bulunur. Böylece $P_5(x)$ aşağıdaki gibi çarpanlarına ayrılır:

$$P_5(x) = (x - 1)(x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x + 2)$$

Bir Polinomun Çözümlenmesi

P(x) n. dereceden bir polinom olsun;

(5) $\boldsymbol{P(x)= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$

Bir polinomun çözümlenmesi için Horner metodu ve ya sentetik bölme olarak bilinen algoritma yazılırsa;
$P_5(x)$ aşağıdaki gibi yazılabilir;

$\boldsymbol{P_5(x)= ((((a_5x+a_4)x+a_3)x+ a_2)x+ a_1)+a_0}$

z'nin sabit olduğu varsayılan durumlarda P(z) yi çözümlemek için, P(x) polinomu (x-z) ye bölünür. Sonuç şu şekilde yazılır.

(6) $\boldsymbol{P(x)=(x-z)Q_0(x)+ R_0}$

$Q_0(x)$, (n-1). dereceden bir polinom ve R_0 da sabittir.
$Q_0(x)$ şu şekilde seçilirse;

(7) $\boldsymbol{Q(x)=b_nx^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} +\ldots..+b_3x^2 + b_2x +b_1}$ olur.

$R_0=b_0$ kabul edilirse eşitlik şu şekilde yazılır.

(8) $\boldsymbol{P(x)=(x-z)(b_nx^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} +\ldots\ldots+ b_3x^2 +b_2x + b_1) +b_0}$

Yukarıdaki denklem x'in kuvvetleri şeklinde yazıldığında

(9) $\boldsymbol{P(x)= b_nx^n + (b_{n-1} - zb_n) x^{n-1} +\ldots..+ (b_2 - zb_3) x^2 + (b_1 - zb_2)x + b_0 - zb_1}$

b_k sayıları (5) ve (9) nolu denklemlerdeki x^k sabitleri ile karşılaştırarak bulunur. Bu durum Tablo 1.1 de gösterilmiştir.

Tablo 1.1: Horner metodu için b_k sabitleri

x^k	(5) ve (9) nolu denklemlerin karşılaştırılması	b_k nın çözümü
x^n	$a_n=b_n$	$b_n=a_n$
x^{n-1}	$a_{n-1}=b_{n-1}- zb_n$	$b_{n-1}=a_{n-1}+ zb_n$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
x^k	$a_k=b_k - zb_{k+1}$	$b_k=a_k +zb_{k+1}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
x^0	$a_0=b_0 - zb_1$	$b_0=a_0 + zb_1$

P(z) nin değeri b_0 olduğu (6.) nolu denklemde görülebilir ve $R_0= b_0$ olduğundan dolayı denklem şu şekilde yazılabilir.

(10) $\boldsymbol{P(z)= (z- z)Q(z) + R_0 = 0Q_0(z) + b_0 = b_0}$

b_k için yinelenen formül kısaca aşağıdaki gibidir.

(11) $\boldsymbol{b_n=a_n}$ ve $\boldsymbol{b_k=a_k +zb_{k+1}}$ (k=n-1,…..,2,1,0 için)

Yukarıdaki denklemlerde z değişkeni tanımlanmıştır; böylece (x-z) dönüşümü kullanıldı. 11 nolu formüldeki z, x ile yer değiştirilirse; P(x)= b_0 olacaktır. Bu durum tablo 1.2 de gösterilmiştir.

Tablo 1.2: Sentetik bölme işlemleri için Horner tablosu

$$
\begin{array}{c|cccccccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_k & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\
x & & xb_n & xb_{n-1} & \ldots & xb_{k+1} & \ldots & xb_3 & xb_2 & xb_1 \\
\hline
 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_k & \ldots & b_2 & b_1 & b_0 = P(x)
\end{array}
$$

Örnek 1.2: Aşağıda verilen polinomu x=3 için çözümleyiniz.

$$P(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x - 40.$$

Çözüm: a_5=1, a_4=-6, a_3=8, a_2=8, a_1=4 ve a_0=40 sabitleri ve x=3 değeri Tablo 1.2 de yerine konulursa;

Tablo1.3:

	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
	1	-6	8	8	4	-40
$x = 3$		3	-9	-3	15	57
	1	-3	-1	5	19	$17 = P(3) = b_0$
	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	

Buradan P(3)=17 bulunur.

Türevin Hesaplanması:

n. dereceden P(x) polinomu (5)nolu denklemdeki gibi alındığında, (6) nolu denklemin her iki tarafına da türev uygulanırsa sonuç aşağıdaki gibi olur.

(12) $\boldsymbol{P^{I}(x)= Q_0(x) + (x-z)Q^{I}(x)}$

Buradan $P^{I}(z)$ hesaplanırsa;

(13) $\boldsymbol{P^{I}(z)= Q_0(z)+ (z-z)\, Q^{I}(z) =Q_0(z)}$ olur.

Q_0 (z) yi hesaplamak için sentetik bölmeden faydalanılabilir. Önceki yaklaşım kullanılarak Q_0 (x), (x-z) ye bölünürse;

(14) $\boldsymbol{Q_0(x)= (x-z)Q_1(x) + R_1}$ elde edilir.

Q_1(x),

(15) $\boldsymbol{Q_1(x) = c_n x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-3} +\ldots+ c_3 x + c_2}$ olarak

ve $R_1 = c_1$ alındığında eşitlik şu şekilde yazılabilir.

(16) $\boldsymbol{Q_0(x) = (x-z)(c_n x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-3} +\ldots..+ c_3 x + c_2) + c_1}$

16 nolu eşitliğin açılımı yapılarak ve (7) nolu eşitlikte verilen x^k sabitleri ile karşılaştırılarak c_k sayıları bulunur. $Q_1(z)$ sabitlerini hesaplamak için kullanılan yinelemeli formüller aşağıdaki gibidir:

(17) $c_n=b_n$ ve $\boldsymbol{c_k=b_k+zc_{k+1}}$ (k=n-1, …., 2,1 için)

(13) ve (14) nolu denklemlerde görüldüğü gibi $P^{I}(z)$ nin değeri c_1 dir. $R_1=c_1$ olduğundan, aşağıdaki denklem yazılabilir.

(18) $\boldsymbol{P^{I}(z) = Q_0(z) = (z-z)Q_1(z) + R_1 = 0 + R_1 = c_1}$

z değişkeni tanımlandığında (x-z) çarpanı kullanılabilir. (17) nolu denklemdeki z, x ile yer değiştirilirse sonuç $P^{I}(x)=c_1$ olacaktır. Bu durum aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo1.4: P(x) ve $P^{I}(x)$ i bulmak için Horner tablosu

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_k	$\ldots$	a_2	a_1	a_0
x		xb_n	xb_{n-1}	$\ldots$	xb_{k+1}	$\ldots$	xb_3	xb_2	xb_1
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\ldots$	b_k	$\ldots$	b_2	b_1	$b_0 = P(x)$
		xc_n	xc_{n-1}	$\ldots$	xc_{k+1}	$\ldots$	xc_3	xc_2	
	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	$\ldots$	c_k	$\ldots$	c_2	$c_1 = P'(x)$	

Örnek 1.3: Aşağıdaki polinom için $P^{I}(3)$ ü hesaplayınız.

$$P(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x - 40$$

Çözüm: $b_5=1$, $b_4=-3$, $b_3=-1$, $b_2=5$, $b_1=19$ ve $b_0=17$ sabitleri örnek 1.2 de bulunmuştur. Tabloda x=3 yerine konulduğunda c_k sabitleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

	1	−6	8	8	4	−40
$x = 3$		3	−9	−3	15	57
	1	−3	−1	5	19	$17 = P(3) = b_0$
		3	0	−3	6	
	1	0	−1	2	$25 = P'(3) = c_1$	

Buradan $P^{I}(3) = 25$ olarak bulunur.

Not: Horner metodu yüksek mertebeli türevleri bulmak için de kullanılabilir. Burada öncelikli amaç polinomun reel köklerini bulabilmek için Newton metodu ile Horner metodunu birleştirmektir. Polinomda x yerine p_0 yerleştirildiğinde, $b_0=P(p_0)$ ve $c_1= P^{I}(p_0)$ hesaplamak için (11) ve (17) nolu eşitlikler kullanılır. Bir sonraki adım için, $p_1= p_0-b_0/c_1$ "Newton-Raphson formülü" kullanılır.

Örnek 1.4: $p_0=3$ için aşağıdaki polinomun reel köklerini bulunuz

$$P(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x - 40.$$

Newton metodu ile Horner metodu kullanılır ve p_1 ve p_2 değerleri için hesaplanır.

Çözüm:1.2 ve 1.3 nolu örnekleri kullanarak,
p_1 için;

$$p_1=3-\frac{P(3)}{P^{I}(3)} = 3- (17/25)= 2,32$$

P(2,32) ve P^{I}(2,32) değerlerini hesaplamak için x= 2,32 değeri tabloya yerleştirilirse;

	1	−6.00	8.0000	8.0000	4.0000	−40.0000
2.32		2.32	−8.5376	−1.2472	15.6664	45.6261
	1	−3.68	−0.5376	6.7528	19.6664	$5.6261 = P(2.32)$
		2.32	−3.1552	−8.5673	−4.2096	
	1	−1.36	−3.6928	−1.8145	$15.4568 = P'(2.32)$	

P_2 için;

$$P_2=2,32-\frac{P(2,32)}{P^{I}(2,32)} = 2,32-(5,6261/15,45682)=1,9560 \text{ olarak}$$

bulunur.

Deflated Polinomlar

Örnek 1.4 de p_1, p_2, …. şeklinde tekrarlandığında, z=2 değeri için sıfıra yakınsamaktadır. Sentetik bölme P(x) in çarpanı olarak kullanılabilmekte ve P(x)=(x-2)Q(x) şeklinde yazılabilmektedir.

	1	−6	8	8	4	−40
$x = 2$		2	−8	0	16	40
	1	−4	0	8	20	$0 = P(2)$

Eğer P(x) in diğer kökleri bulunursa, bunlar Q(x)= x^4-4$x^3$0x^2+8x+20 polinomunun da kökleri olmalıdır. Burada Q(x) polinomuna **deflated polinomu** denir, çünkü bu polinomun derecesi P(x) polinomundan bir eksiktir. 1.4 nolu örnekte Q(x) polinomunu Q(x)= (x^2+2x+2)(x^2-6x+10) şeklinde iki çarpan halinde yazmak mümkündür. Böylece P(x) polinomu şu şekilde yazılabilir:

$$P(x) = (x-2)(x^2+2x+2)(x^2-6x+10),$$

Bu polinomun 5 kökü ise 2, -1±i, 3±i şeklindedir.

Kökleri Bulmak İçin Tuzaklar

Yüksek derecedeki polinomlar küçük değişimlere karşı büyük farklılıklar göstermekte yani küçük değişimlere çok hassas olabilmektedirler. Aynı zamanda katlı köklerde yuvarlamadan dolayı rakam kaybına neden olabilmektedir. **Bu nedenlerden dolayı Newton metodundaki P(x_k) fonksiyon değeri ile düzeltme terimi olan P(x_k) / P'(x_k), en yakın kökü elde etmek için x_k, x_{k+1} den daha başarısız olabilmektedir.**

Örnek 1.5:

$$P(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 9x + 4 = (x+1)(x-1)^3(x-4)$$

polinomu için x=1 e yakın olan kökleri bulunuz.

Çözüm: x_0= 1,005 tahmini yapılırsa,5 ondalık kısım alınıp x_1 şu şekilde hesaplanır.

1.00000	−6.00000	8.00000	2.00000	−9.00000	4.00000
	1.00500	−5.01998	2.99492	5.01989	−4.00001
1.00000	−4.99500	2.98002	4.99492	−3.98011	$-0.00001 = P(x_0)$
	1.00500	−4.00995	−1.03508	3.97964	
1.00000	−3.99000	−1.02993	3.95984	$-0.00047 = P'(x_0)$	

Buradan x_1 şu şekilde bulunur:

$$x_1 = 1.005 - \frac{-0.00001}{-0.00047} = 0.98372.$$

Yapılan kabuldeki hatalar ise şu şekildedir:

$$e_0 = 1.00500 - 1.00000 = 0.00500 \quad \text{and} \quad e_1 = 0.98372 - 1.00000 = -0.01628$$

Böylece Newton metodunda uygulanan bu düzeltme adımı başarısız olmuştur. Bu bir yuvarlama hatasıdır. Eğer P(x) in çarpanı kullanılırsa, P(1,005)=-0,0000007506218 olur. Bu başarısız olmuş bir sentetik bölme işlemidir. Çünkü burada virgülden sonra sadece 5 ondalık basamak alınmış ve 0,000001 e yuvarlanmıştır. Bu nedenden dolayı da P(1,005) ın değeri -0,00001 olarak hesaplanmıştır.

Algoritma:[Bir Polinomun Reel Köklerini Bulma]

$$P(x) = a_N x^N + a_{N-1}x^{N-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Polinomu için P(x) ve $P^I(x)$ değerlerini hesaplamak için sentetik bölme kullanılır. Newton metodu reel kökleri bulmak için kullanılmaktadır. Eğer bir kök olan z bulunursa, polinom P(x)=Q(x)(x-z) şeklinde yazılır ve diğer kökleri bulmak için de Q(x) polinomu çözümlenir. Buna **Deflatation** denir.

Quadratik Sentetik Bölme

n. dereceden P(x) polinomu (5)nolu denklemdeki gibi ve quadratik terim ise x^2-rx-s şeklinde alındığında, P(x) polinomu şu şekilde yazılır:

$$P(x) = (x^2 - rx - s)Q(x) + u(x - r) + v$$

Burada P(x), x^2-rx-s terimine bölünürse kalan u(x-r)+v dır. Q(x) polinomunun derecesi n-2 dir ve polinom şu şekildedir;

$$Q(x) = b_n x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-3} + \ldots + b_4 x^2 + b_3 x + b_2.$$

Eğer b_1=u ve b_0=v alınırsa, denklem şu şekilde yazılır:

$$P(x) = (x^2 - rx - s)(b_n x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-3} + \ldots + b_3 x + b_2) + b_1(x - r) + b_0.$$

İfade genişletilip P(x),x in kuvvetleri şeklinde yazıldığında ;

$$P(x) = b_n x^n + (b_{n-1} - rb_n)x^{n-1} + (b_{n-2} - rb_{n-1} - sb_n)x^{n-2}$$
$$+ \ldots + (b_k - rb_{k+1} - sb_{k+2})x^k + \ldots + (b_1 - rb_2 - sb_3)x$$
$$+ b_0 - rb_1 - sb_2.$$

b_k sayıları, yukarıdaki denklem ile (5) nolu denklemdeki x^k sabitleri ile karşılaştırılarak bulunmaktadır.

Q(z) nin b_k değerlerini hesaplamak için gerekli formüller ise
$k = n-2, n-3, \ldots, 1, 0.$
için şu şekildedir:

$$b_n = a_n, \quad b_{n-1} = a_{n-1} + rb_n$$
$$b_k = a_k + rb_{k+1} + sb_{k+2}$$

Hesaplamalar yapılırken, a_k değerleri satırlara yazılır ve
$b_k = a_k + rb_{k+1} + sb_{k+2}$
Toplamı hesaplanır. Her b_k s ve r değerleri ile çarpılır ve bir sonraki iki kolona yazılır.

Tablo 1.5: Quadratik Sentetik Bölme

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\ldots$	a_k	$\ldots$	a_2	a_1	a_0
s			sb_n	sb_{n-1}	$\ldots$	sb_{k+2}	$\ldots$	sb_4	sb_3	sb_2
r		rb_n	rb_{n-1}	rb_{n-2}	$\ldots$	rb_{k+1}	$\ldots$	rb_3	rb_2	rb_1
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\ldots$	b_k	$\ldots$	b_2	b_1	b_0

Örnek 1.6: $P(x)= x^5+ 6x^4-20x^2+20x+8$ polinomunun (x^2+2x-3) ile nasıl bölüneceğini göstermek için quadratik sentetik bölmeyi kullanınız.

Çözüm: Burada Tablo 1.5 e göre r=-2 ve s=3 olarak alınır.

	1	6	0	−20	22	8
$s = 3$			3	12	−15	6
$r = -2$		−2	−8	10	−4	−6
	1	4	−5	2	3	8
					b_1	b_0

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki alıştırmalarda Horner Metodunu kullanarak

a. z_0 ın P(x) in bir kökü olduğunu gösteriniz. $Q_0(x)$ polinomunu bularak $P(x) = (x - z_0)Q_0(x)$ şeklinde yazınız.

b. $Q_0(z_1) = 0$ eşitliğini gösteriniz. $Q_1(x)$ i bularak $Q_0(x) = (x - z_1)Q_1(x)$ denklemini yazınız.

c. a ve b den $P(x) = (x - z_0)(x - z_1)Q_1(x)$ i denklemini oluşturunuz.

d. p_0 ve Newton metodundan faydalanarak p_1 ve p_2 yi bulunuz.

1. $P(x) = x^4 + x^3 - 13x^2 - x + 12.$

(a) $z_0=3$; (b) $z_1= -1$; (c) kalan kökleri bulunuz. (d) $p_0= 1,1$

2. $P(x) = x^4 + x^3 - 21x^2 - x + 20.$

(a) $z_0=4$; (b) $z_1= -1$; (c) kalan kökleri bulunuz. (d) $p_0= 1,1$

3. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12.$

(a) z_0=3 ; (b) z_1= 2; (c) kalan kökleri bulunuz. (d) p_0= 2,1

4. $P(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8.$

(a) z_0=-2; (b) z_1= 4 ; (c) kalan kökleri bulunuz. (d) p_0= 1,1

5. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12.$

(a) z_0=2 ; (b) z_1= -1 ; (c) kalan kökleri bulunuz. (d) p_0= 2,1

6. $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8.$

(a) z_0=-1; (b) z_1= 2 ; (c) kalan kökleri bulunuz. (d) p_0= 2,1

7. P(x) n.dereceden bir polinom olsun. z sabit bir Reel sayı. Sentetik bölmenin $P^{(k)}(z)/ k!$ hesaplamak için kullanılabileceğini gösteriniz. İpucu: aşağıdakileri gösteriniz.

$$P(x) = Q_0(x)(x - z) + R_0, \qquad R_0 = \frac{P(z)}{0!},$$

$$Q_0(x) = Q_1(x)(x - z) + R_1, \qquad R_1 = \frac{P'(z)}{1!},$$

$$Q_1(x) = Q_2(x)(x - z) + R_2, \qquad R_2 = \frac{P''(z)}{2!},$$

$$\vdots$$

$$Q_{n-2}(x) = Q_{n-1}(x)(x - z) + R_{n-1}, \qquad R_{n-1} = \frac{P^{(n-1)}(z)}{(n-1)!},$$

$$Q_{n-1}(x) = Q_n(x)(x - z) + R_n, \qquad R_n = \frac{P^{(n)}(z)}{n!}.$$

Alıştırma 8-11 de; 7 deki sentetik bölme metodunu kullanarak P(2), $P^{I}(2)$, $P^{II}(2)$, $P^{(3)}$ ve $P^{(4)}$ ü bulunuz.

8. $P(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8$

9. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

10. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$

11. $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$

BÖLÜM 2

2.Denklemlerin Yaklaşık Çözüm Yöntemleri

2.1. Köklerin Varlığı ve Tekliği:

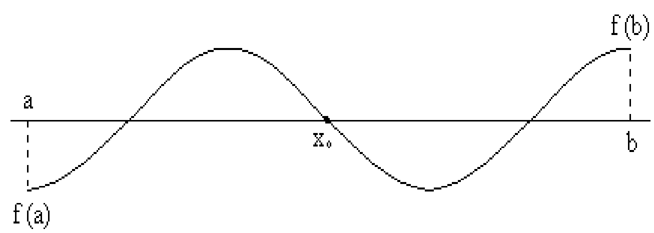
Bu bölümde bir bilinmeyenli denklemlerin yaklaşık çözüm metotları verilecektir. Bu metotlara geçmeden önce yapılması gereken şey köklerin varlığı, bulundukları aralıkların tespiti ve bu aralıkların mümkün olduğu kadar daraltılmasıdır. f (x) cebirsel veya transandant fonksiyon olmak üzere bir bilinmeyenli bir denklem her zaman;

$$f(x) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

şeklinde yazılır. Böyle bir denklemi çözmek için şu iki hususa dikkat edilmelidir.

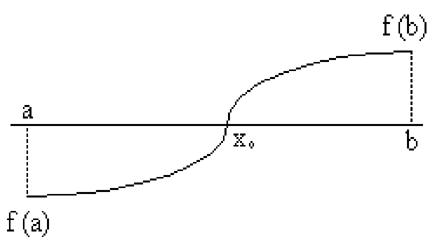
i) (1) denkleminin köklerinin varlığını, tekliğini ve bu köklerin bulundukları aralıkları belirlemek için bir kritere ihtiyaç vardır. f(x) fonksiyonu [a, b] aralığında sürekli ve $f(a) \cdot f(b) < 0$ ise $f(x) = 0$ denkleminin [a, b]'ye ait en az bir kökü vardır.

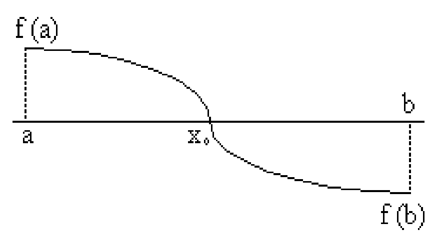
Geometrik Anlamı : Sürekli bir fonksiyonun grafiğinin bir parçasına ait uç noktaları Ox-eksenini en az bir noktada keser.



Şekil.2.1

ii) Fazla olarak f(x) fonksiyonu [a, b]'de monoton ise, [a, b]'de f(x) = 0'ın tek kökü vardır.





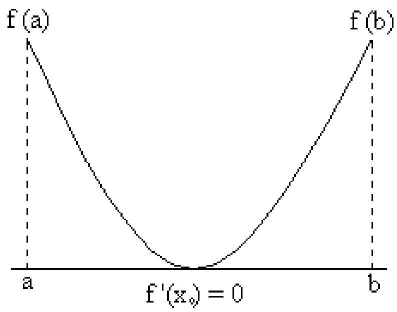
Şekil.2.2.a Şekil.2.2.b

$f(a) \cdot f(b) < 0$, f sürekli ve f monoton ise $x_o \in [a, b]$ tektir.

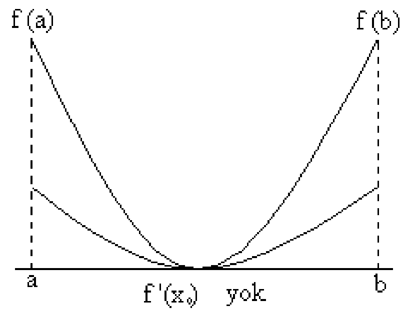
Buna göre, (1) denkleminin reel köklerinin tespiti için f(x)'in monoton olduğu aralıkları tespit etmek yeterlidir.

Örneğin **;** x_1 ve x_2 $(x_1 < x_2)$ için $f'(x) = 0$ olsun. Böylece, tespit edilen $(-\infty, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, +\infty)$ aralıklarında f(x) sürekli ve bu aralıkların uç noktalarında f(x) zıt işaretli değer alıyorsa (1) denkleminin göz önüne alınan aralıklarda reel kökleri mevcuttur. Şayet, f(x) fonksiyonu [a, b] aralığı boyunca sürekli, monoton fakat bu aralığın uçlarında aynı işarete sahip ise (1) denkleminin [a, b]'de hiçbir reel kökü mevcut değildir.

Daha önceden de bilindiği gibi göz önüne alınan bir [a, b] aralığında $f'(x) > 0$ ise f(x) monoton artan, $f'(x) < 0$ ise f(x) monoton azalandır. Ayrıca şu hususu da ihmal etmemek gerekir. f(x)'in [a, b] aralığı boyunca işaret değiştirmediğini fakat bu aralığın belli bir $x_o$noktasında $f'(x_o) = 0$ olduğunu farz edelim.



Şekil.2.3.a



Şekil.2.3.b

Aşikardır ki böyle bir durumda $f'(x_o)$ mevcut değildir.Bazen, $f'(x) = 0$ denklemi $f(x) = 0$ denkleminden daha basit olur ve kökleri ayırma problemiyle daha basit çözülebilir. Eğer (1) denklemi cebirsel ise $f'(x)$'de cebirseldir ama derecesi bir azalır.(Şekil.3.a.b)

Örnek.2.1: $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin köklerinin bulundukları aralıkları ayırınız

Çözüm.2.1: $f(x) = x^3 - x - 1$ ise $f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow$ süreklidir. Şimdide monoton aralıkları bulalım.

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
f '(x)		+ + +		- - -		+ + +	
f (x)		Monoton Artan	$f(-\frac{1}{\sqrt{3}})$	Monoton Azalan	$f(\frac{1}{\sqrt{3}})$	Monoton Artan	

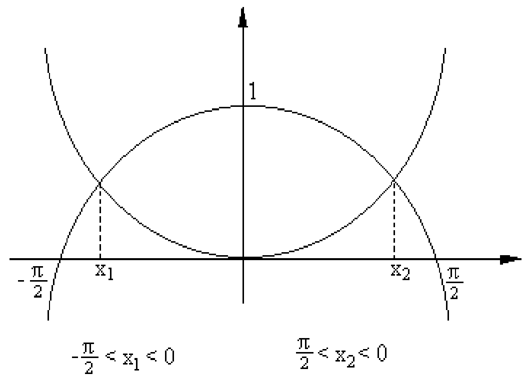
$\Rightarrow$ $[\sqrt{3}/3, \infty)$ arasında bir tek kök vardır.

$f(1) = -1 < 0$ ve $f(2) = 5 > 0$ Tek reel kök [1, 2] aralığındadır.

$y = f(x)$ fonksiyonunun kolayca çizilebildiği hallerde $f(x) = 0$ denkleminin kökleri eğrinin Ox-eksenini kestiği noktalar bulunarak elde edilir.

Örnek.2.2: Cos x – x^2 = 0 denkleminin köklerinin bulunduğu aralıkları bulalım.

Çözüm.2.2: y=Cos x ve y= x^2 fonksiyonlarının grafiği çizildiğinde bu iki eğrinin kesiştiği x_1 ve x_2 noktaları ki bu noktalar denklemin kökleri olup aşağıda verilen aralıkta bulunurlar(Şekil.4).



Şekil.2.4

2.2. Bir Denklemin Kökünün Yaklaşık Değerinin Hesabı:

f (x) = 0 denkleminin [a, b] aralığında x_o gibi bir kökünün olduğunu kabul edelim. x_o kökü yerine [a, b] aralığında bulunan herhangi bir c değerini yaklaşık kök alabiliriz. Mühim olan, neticedeki x_o– c hatasının göz önüne alınan problem için müsaade edilen hatayı aşmamasıdır.x_o kökünün değeri bilinmediğinden x_o– c hatası da hesaplanamaz.

Bu nedenle, hatanın mutlak değeri için bir üst sınır belirleyeceğiz. Yani kökün verilen yaklaşık bir değerinin, mutlak hatasını inceleyeceğiz.

$$\Delta (c) > | x_o - c | \qquad (2)$$

x_o, [a, b] aralığında olacağından ;$a < x_o < b$ yazılır. (3)

Buna göre, (2) ve (3) ‘den c, [a, b]’nin neresinde olursa olsun;

$$\Delta (c) = b - a \qquad (4)$$

alabiliriz.Eğer, a veya b, c’nin yaklaşık değeri olarak alınırsa (bir alt tahmin) $x_o \approx b$ [b - a] olur. Şayet, c [a, b] aralığının bir noktası olarak alınırsa x_o kökünün altında mı, üstünde mi olduğunu anlamak mümkün değildir.Bu nedenle;

$$c = \frac{a+b}{2} \qquad (5)$$

orta nokta olarak alınırsa (3) gereğince; $\Delta(c) = \frac{(b-a)}{2}$ (6) dır.

2.3: Köklerin Bulunduğu Aralığın Mümkün Olduğu Kadar Daraltılması

Bu kısımda, bir denklemin yaklaşık kökünün daha iyi bir değerini bulmaya çalışacağız.

Δ (c) = b – a formülü gösteriyor ki [a, b] aralığında bulunan x_o kökü için c değerinin seçilmesinden meydana gelen hata [Δ (c) = b - a], b - a uzunluğu küçülürken azalır.

Eğer [a, b] aralığı x_o kökünü ihtiva ediyorsa, bu aralık içinde bulunan ve x_o'ı ihtiva eden daha küçük bir [a_1, b_1]'de bulunabilir.

$$(a \le a_1 < x_o < b_1 \le b \;; \quad b_1 - a_1 < b - a)$$

Bu şekilde, [a_1, b_1] aralığı kök için daha iyi bir yaklaşım belirtir.c $\neq x_o$ olmak üzere [a, b] aralığında alınan bir c noktası ile, x_o kökünü ihtiva eden [a, c] veya [c, b] aralıklarından biri [a_1, b_1] olarak alınır. c noktasının seçimi için çeşitli metotlar kullanılır. Bu metotlar şunlardır.

2.3.1. Deneme Metodu :

Bu metotta, [a, b] aralığında gelişigüzel bir c noktası seçilir. f (x) fonksiyonu [a, b] ve [c, b] aralıklarında hangisinin uç noktalarında ters işarete sahip olursa, o aralık [a_1, b_1] olarak alınır. Metodun başarısı c noktasının seçimindeki isabete bağlıdır.

2.3.2. İkiye bölme Metodu :

Bu metodun değişik bir şekli aralığın ikiye ayrılmasıdır. Burada c, [a, b] aralığının orta noktası $c = \frac{(a+b)}{2}$ olarak alınır.

Örnek.2.3 : İkiye bölme metodunu uygulayarak $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin [1, 2] aralığı içindeki kökünü geliştiriniz.

Çözüm.2.3: $f(x) = x^3 - x - 1$, a = 1 , b = 2 , $c = \frac{(1+2)}{2} = 1{,}5$

$$f(1) = -1 < 0, \; f(1{,}5) = 0{,}875 > 0 \;, \; f(2) = 5 > 0 \; \text{dır.}$$

f (x) fonksiyonu [1, 1,5] aralığında işaret değiştirdiğinden bu aralık [a_1, b_1] aralığı olarak alınır.($a_1 = a = 1$; $b_1 = c = 1{,}5$)

Örnek.2.4 : İkiye bölme metodunu uygulayarak x sin x-1=0 denkleminin kökünü [0,2]’ de %o,o 1 hata ile hesaplayınız.

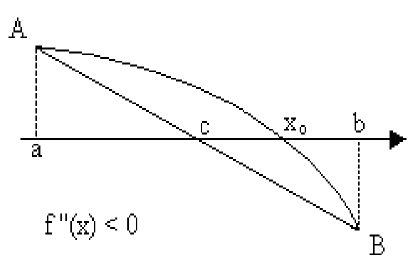
Çözüm.2.4:

	a_k	b_k	c_k	$F(c_k)$	İşaretleri		
					$f(c_k)$	$f(a_k)$	$f(b_k)$
0	0	2	1	-0,15852901	-	-	+
1	1	2	1,5	0,496242479	+	-	+
2	1	1,5	1,25	0,186230774	+	-	+
3	1	1,25	1,125	0,015051043	+	-	+
4	1	1,125	1,0625	-0,07182663	-	-	+
5	1,0625	1,125	1,09375	-0,02836172	-	-	+
6	1,09375	1,125	1,109375	0,00664277486	-	-	+
7	1,109375	1,125	1,1171875	0,004208034	+	-	+
8	1,109375	1,1171875	1,11328125	-0,00121649	-	-	+
9	1,11328125	1,1171875	1,115234375	0,001496	+	-	+
10	1,11328125	1,115234375	1,114257813	0,0001398	+	-	+

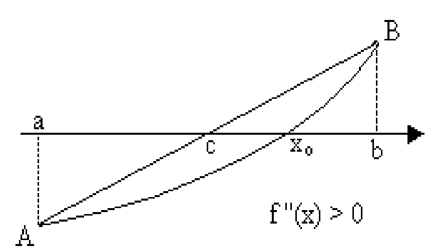
Deneme metodunda c noktası f (x) fonksiyonunun özelliklerinden bağımsız olarak seçilmektedir. Şayet f (x) fonksiyonunun özellikleri göz önüne alınacak olursa yaklaşım daha sıhhatli olur.

2.3.3. Kirişler (Değişken Kesen)Metodu:

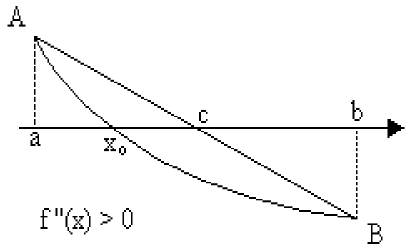
c noktasının seçimi olarak şekil.2.5.a.b.c.d’ de görüldüğü gibi y = f (x) eğrisinin [a, b] aralığında kalan parçasına ait girişin Ox- eksenini kestiği nokta alınabilir.



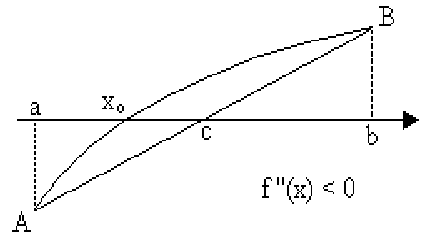
Şekil.2.5.a



Şekil.2.5.b



Şekil.5.c



Şekil.5.d

A [a, f(a)] ve B[b, f(b)] noktasındaki geçen doğrunun denklemi;

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

şeklinde olup bunun Ox- eksenini kestiği nokta;

$$c = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \quad f(a) = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(8)$$

Buna göre ,   c, [a, b]'nin içindedir. Bir eğrinin eğriliği;

$$(k = \frac{|\, f''(x)\,|}{[1 - f(x)^2\,]^{\frac{3}{2}}})$$

ne kadar küçük ise, eğri parçasının uçlarını birleştiren kirişin Ox- eksenini kestiği nokta esas köke o nispette yakın olur. Yani , [a, b] aralığında f ′(x)'in değeri büyük ve f ″(x) değeri küçük ise c yaklaşık değeri x_o köküne yakın olur.f (x) ve f ″(x) farklı işaretli ise c noktası [a, b] aralığının bitim notasına daha yakın, f (x) ile f ″(x)   aynı işaretli ise c noktası [a, b] aralığına baş tarafına daha yakındır.

Örnek.2.5 : Kirişler metodunu kullanarak $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin [1, 2] aralığı içindeki kökünü geliştiriniz.

Çözüm.2.5: $f(x) = x^3 - x - 1$, $f'(x) = 3x^2 - 1$, $f''(x) = 6x$ $\Rightarrow$ (2)' de

$f'(x) > 0$, $f(1) < 0$, $f(2) > 0$ buna göre c noktası $[a_1, b_1]$ aralığının solundadır.

$(c < x_o < b\ ,\ a_1 = c\ ,\ b_1 = b)$

$$c = 1 + \frac{2 - 1}{5 + 1} = \frac{7}{6} \approx 1.1$$

Bu nedenle, c yaklaşık değeri bir alt tahmindir. Böylece $[a_1, b_1] = [1, 1.2\ ]$ olarak alınabilir.

Örnek.2.6 : Değişken Kesen: $a_0=0$, $b_0=2$, f(0)=-1 , f(2)=0,81859485

$$c_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = \frac{0f(2) - 2f(0)}{f(2) - f(0)} = \frac{2}{1{,}81859485} = 1{,}09975017$$

Çözüm.2.6: $f(c_0) = -0{,}02001921$

$[a_1, b_1] = [1.09975017{,}2] \Rightarrow c_1=1.12124074 \Rightarrow f(c_1)=0.00983461$

$[a_2, b_2] = [1.09975017.1.12124074] \Rightarrow c_2=1.11416120 \Rightarrow f(c_2)=0.00000563$

$[a_3, b_3] = [1.09975017.1.11416120] \Rightarrow c_3=1.11415714 \Rightarrow f(3)=0{,}0000000$

k	a_k	c_k	b_k	$f(c_k)$	İşaretleri		
					$f(c_k)$	$f(a_k)$	$f(b_k)$
0	0	1.09975017	2	-0,02001921	-	-	+
1	1.09975017	1.12124074	2	0,00983461	+	-	+
2	1.09975017	1.11416120	1.12124074	0,00000563	+	-	+
3	1.09975017	1.11415714	1.11416120	0000000	+	-	+

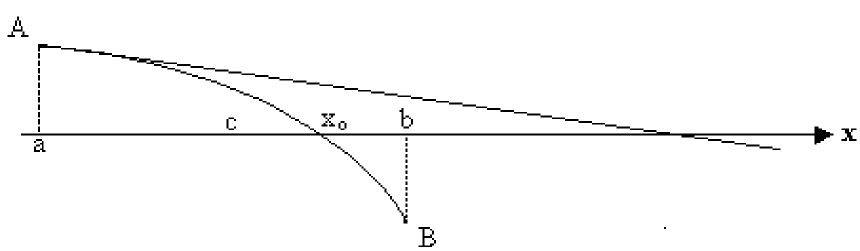
2.3.4. Teğetler (Newton-Raphson) Metodu :[a, b] aralığının uçlarından birini z ile gösterelim. [z, f (z)] koordinatlı noktadan geçen doğrular demetinin denklemi;

y – f (z) = k (x-z) olur.

k = f ′(z) ise y = f (x) eğrisinin [z, f (z)] noktasındaki teğeti elde edilir. Teğetin Ox- eksenini kestiği noktanın apsisi;

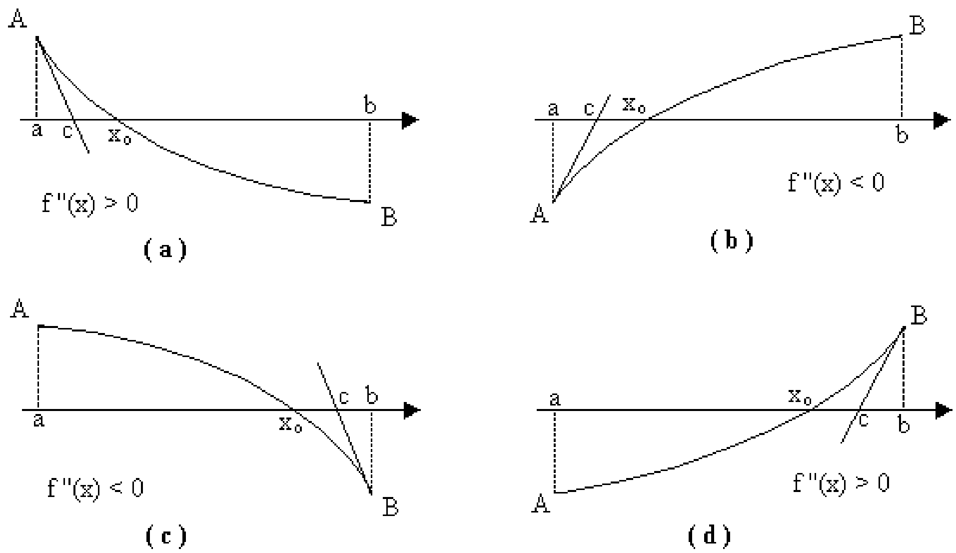
$$c = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \quad \text{...}(9)$$

[a, b] fonksiyonunun eğriliği küçükse c noktası x_o köküne o ölçüde yakındır. z = a ve z = b olmasına göre (9) denklemi değişik c değerleri verir. c noktası [a, b] aralığının dışında bulunabilir. (Şekil.2.6)



Şekil.2.6

Halbuki teğet B den çizilmiş olsaydı c noktası [a, b] aralığında bulunurdu. Burada önemli olan c'nin [a, b] aralığı içine düşmesidir. İkinci olarak, aralığın uçlarından hangisinin alınacağı hakkında aşağıdaki şekiller fikir verir. (Şekil.2.7.(a)(b)(c)(d)).



Şekil.2.7.(a)(b)(c)(d).

f (z) ve $f''(z)$ işaretinin aynı olduğu noktadan çizilen teğetin Ox- eksenini kestiği c noktası [a, b] aralığının içinde bulunur. Aynı zamanda c noktası x_o ile z arasındadır.

Örnek.2.7: Newton-Raphson metoduyla $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin [1, 2] aralığı içindeki kökünü geliştiriniz.

Çözüm.2.7: $f(x) = x^3 - x - 1$ ise $f'(x) = 3x^2 - 1$ ve $f''(x) = 6x$ olur.

Buna göre, [1, 2] aralığında;

$$f'(x) > 0 \quad , \quad f(2) > 0 \quad , \quad f''(2) > 0$$

olduğundan teğet aralığı bitim noktasından çizilmelidir.

x = z = 2 olarak $f'(2) = 11$ ve (1 - 7)' den

$$c = 2 - \frac{5}{11} \approx 1.6 \qquad \text{bulunur.}$$

$c > x_o$ dır. O halde, yeni aralık [1, 1.6] alınır.

Eğer köke iki uçtan birden yaklaşılırsa daha çabuk ve sıhhatli çözüme gidilir. Bu da her iki metodun birden uygulanması ile olur.

Örnek.2.8: Newton-Raphson metoduyla f(x)=x.sinx-1 denkleminin [0, 2] aralığı içindeki kökünü geliştiriniz.

Çözüm.2.8: f(0)<0 $\quad f''(1) > 0$

f(2)>0 $\quad f''(2) < 0$

z=1 seçelim. $\quad f'(x) = \sin x + \cos x$

$f''(x) = 2\cos x - x\sin x$

$$c_0 = Z_0 = \frac{f(Z_0)}{f'(Z_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 + \frac{0,15852901}{0,84147098450.540302305}$$

$$c_0 = 1 + \frac{0,15852901}{1,381773209} = 1.114728675$$

$f(c_1)$=-0,007937328 $\quad$ f(1)<0 , f(2)>0

c_2=-0,07937328 $\quad \underbrace{[1,114728675}_{Z_1},-2]$

$$c_1 = Z_1 - \frac{f(Z_1)}{f'(Z_1)} = 1,114728675 - \frac{f(1,114728675)}{f'(1,14728675)}$$

$$= 1,114728675 + \frac{0,007937328}{1,388741345}$$

$$= 1,114728675 + 0,005715483325$$

$$c_1 = 1.120444158$$

$f(c_1)$=0,008729>0 $\quad f(a_1)<0 \quad x_0 \cong 1,114728675$[‰8]

$\underbrace{[1,114728675;1}_{Z_2}.120444158]$

2.3.5. Teğet – Kiriş Metodu

Farklı iki metodun birden uygulanması özelliğidir. Bu metot verilen denklemin sol tarafının ikinci türevinin aynı kalması halinde uygulanır. Bu durumda her iki yandan da köke yaklaşıldığı garanti edilebilir. Teğet, Ox- eksenini y = f (x) eğrisinin konveks tarafında keserken, kiriş konkav tarafında keser.

Örnek.2.9 : Teğet - Kiriş metoduyla $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin [1, 2] aralığı içindeki kökünü geliştiriniz.

Çözüm.2.9: $f(x) = x^3 - x - 1$, $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 5 > 0$

$f'(x) = 3x^2 - 1$, $f''(x) = 6x$, $f''(x) > 0$ dır.

Daha önceki hesaplamalarla $[a_1, b_1] = [1.1 , 1.6]$ bulunur.

Örnek.2.10 : f(x)=lnx-5+x denkleminin kökünü teğetler, kirişler ve ikiye bölme metoduyla çözünüz?

Çözüm.2.10:

i) İkiye bölme metodu;

f(x)= lnx-5+x

k	a_k	b_k	C_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(c_k)$
1.	3	4	3,5	-0,90138	0,38629	-0,24723
2.	3,5	4	3,75	-0,24723	0,38629	0,07175
3.	3,5	3,75	3,625	-0,24723	0,07175	-0,08714
4.	3,625	3,75	3,6875	-0,08714	0,07175	-0,00755
5.	3,6875	3,75	3,71875	-0,00755	0,07175	0,03213
6.	3,6875	3,71875	3,703125	-0,00755	0,03213	0,01230
7.	3,6875	3,703125	3,6953125	-0,00755	0,01230	0,00237
8.	3,6875	3,6953125	3,69140625	-0,00755	0,00237	-0,00258
9.	3,69140625	3,6953125	3,693359375	-0,00237	0,00237	-0,0001

9. adımda onbinde 1 hatayla yani %0,01 hatayla bulundu, kök 3,693359375 dir.

ii) Teğetler metodu;

f(x)= lnx-5+x

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad x_0 = 3 \quad \text{alalım.} \qquad f'(x) = \frac{1}{x} + 1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{-0{,}90138}{1{,}33333} = 3{,}67603$$

$$x_2 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 3{,}67603 - \frac{-0{,}02213}{1{,}27203} = 3{,}69342$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 3{,}69342 - \frac{-0{,}00002}{1{,}27075} = 3{,}69343$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 3{,}69343 - \frac{-0{,}00001}{1{,}27075} = 3{,}69343$$

x_3 köktür yüzbinde bir (% 0,001) hata ile bulunmuştur. x_3=3,69343

iii) Kirişler yöntemi; f(x)= lnx-5+x

k	a_k	b_k	c_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(c_k)$
1.	3	4	3,70000	-0,90138	0,38629	0,00833
2.	3	3,7	3,69358	-0,90138	0,00833	0,00017
3.	3	3,69358	3,69343	-0,90138	0,00017	-0,00001

3. adımda yüzbinde bir (%0,001) hatayla kçk bulunmuştur. Kök= 3,69343

Örnek.2.11 : $f(x)=e^x-2-x$ denkleminin kökünü teğetler, kirişler ve ikiye bölme metoduyla çözünüz?

Çözüm.2.11:

i) İkiye bölme metodu;

$f(x)= e^x-2-x$

k	a_k	b_k	c_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(c_k)$
1.	1	2	1,5	-0,28171	3,38905	0,98168
2.	1	1,5	1,25	-0,28171	0,98168	0,24034
3.	1	1,25	1,125	-0,28171	0,24034	-0,04478
4.	1,125	1,25	1,1875	-0,04478	0,24034	0,09137
5.	1,125	1,1875	1,15625	-0,04478	0,09137	0,02174
6.	1,125	1,15625	1,140625	-0,4478	0,02174	-0,01199
7.	1,140625	1,15625	1,1484375	-0,01190	0,02174	0,00482
8.	1,140625	1,1484375	1,14453125	-0,01190	0,00482	-0,00356
9.	1,14453125	1,1484375	1,146484375	-0,00356	0,00482	0,00062
10.	1,14453125	1,146484375	1,14551875	-0,00356	0,00062	-0,00144
11.	1,14551875	1,146484375	1,146001563	-0,00144	0,00062	-0,00041
12.	1,146001563	1,146484375	1,146242969	-0,00041	0,00062	0,0001

12. adımda köke sağdan onbinde 1 (%0,001) hassasiyetle yaklaşıldı.

Buna göre, kök 1,146242969 dur.

ii) Teğetler metodu;

f(x)= e^x-2-x

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad x_0 = 1 \quad \text{alalım.} \quad f'(x) = e^x - 1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-0,28171}{1,71828} = 1,16394$$

$$x_2 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,16394 - \frac{0,03858}{2,20252} = 1,14642$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,14642 - \frac{0,00048}{2,14690} = 1,14619$$

$f(x_3)$=-0,000006

x_3 köktür % 0,0006 hassasiyetle hesaplandı.

iii) Kirişler yöntemi;

f(x)=e^x-2-x

k	a_k	b_k	c_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(c_k)$
1.	1	2	1,07674	-0,28171	0,38905	-0,14164
2.	1,07674	2	1,11377	-0,14164	0,38905	-0,06795
3.	1,11377	2	1,13118	-0,06795	0,38905	-0,03186
4.	1,13118	2	1,13926	-0,03186	0,38905	-0,01480
5.	1,13926	2	1,14299	-0,01480	0,38905	-0,00685
6.	1,14299	2	1,14549	-0,00685	0,38905	-0,00150
7.	1,14549	2	1,14586	-0,00150	0,38905	-0,00071
8.	1,14603	2	1,14603	-0,00071	0,38905	-0,00035
9.	1,14611	2	1,14611	-0,00035	0,38905	-0,00017

9. adımda onbinde bir (%0,01) hassasiyetle köke yaklaşılmıştır. Kök= 1,14611

2.4. Denklemlerin Yaklaşık Çözümlerinde İterasyon Metotları

Bir denklemin kökü köklerin geliştirilmesi metotları ile belirlendikten sonra kökün belirli bir hassatiyetle yaklaşık değeri bulunmuş olur. $[a_o, b_o]$ ilk aralık iken köklerin geliştirilmesi metotlarından birini kullanarak daha küçük $[a_1, b_1]$ belirlenir. En son $[a_k, b_k]$ (k=0, 1, ...) bulunur.

$$a_0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots\ldots \le a_k \le \ldots\ldots \le x_o \le \ldots\ldots \le b_k$$

Bu aralığın ($[a_k, b_k]$) uçları x_o kökünün yaklaşık birer çözümleri olur. (Burada $x_o \approx a_k$ değeri x_o 'ın bir alt yaklaşımı $x_o \approx b_k$ değeri de x_o 'ın bir üst yaklaşımıdır.Bu köklere yaklaşım istenilen hassasiyete gelene kadar devam edilir. Bu tür metotlara iteratif (ardışık) metot denir.

$a_k \to x_o$ veya $b_k \to x_o$ ise iteratif metot yakınsaktır denir.

2.5.Newton'un Karekök Algoritması: $f(x)=x^N - A=0$ denkleminin kökleri;

$$P_k = \frac{(N-1).P_{k-1} + A/P_{k-1}^{N-1}}{N} \qquad (k=1,2,....)$$

A'nın n. kökünü verir. P_0 öğrenci tarafından seçilir.

Örnek.2.12: $x^2-5=0$ denkleminin yaklaşık çözümü nedir?

Çözüm.2.12: N=2 ; A=5

$P_0=2$ alalım.

$$P_1 = \frac{2+5/2}{2} = 2{,}25$$

$$P_2 = \frac{2{,}25+5/2{,}25}{2} = 2{,}23611111$$

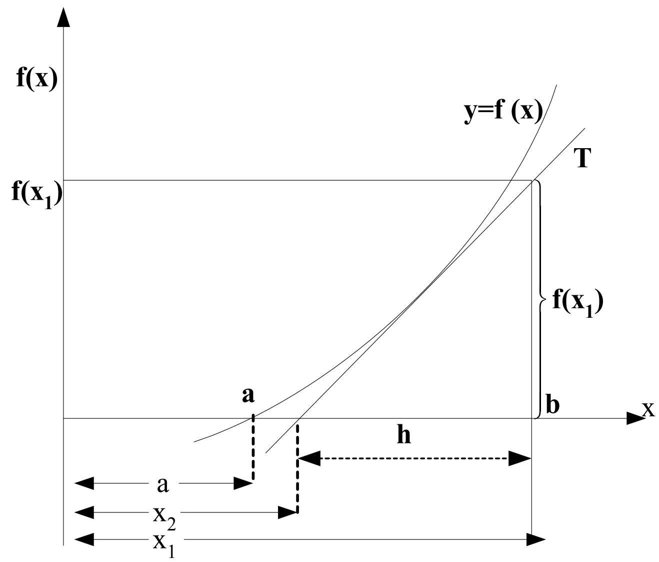
$$P_3 = \frac{2{,}23611111+5/2{,}23611111}{2} = 2{,}236037978$$

$$P_4 = \frac{2{,}236067978+5/2{,}236067978}{2} = 2{,}236067978$$

2.6.Newton-Raphson Metodu: Aşağıdaki şekli göz önüne alırsak;

$m = f'(x_1) = \dfrac{f(x_1)}{h}$ olur. $\quad h = \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ ve $x_2=x_1-h$ ise;

$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ olur ve buradan; $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_1)}$ (n=0,1,2…) formülü elde edilir(Şekil.2.8).



Şekil.2.8. Newton-Raphson Metodunun grafik gösterimi

Örnek.2.13: x^5-300=0 denkleminin kökünü milyarda bir hassasiyetle çözünüz.

Çözüm.2.13:A=300; P_0=3 ; N=5 ; N-1=4

$$P_1 = \frac{4.P_0 + \frac{300}{(P_0)^{n-1}}}{N} = \frac{4.3 + \frac{300}{34}}{5} = 3{,}14074074$$

$$P_2 = \frac{4.P_1 + \frac{A}{P_1^4}}{5} = \frac{12.56296296 + \frac{300}{(3{,}14074074)^4}}{5} = 3{,}129220106$$

$$P_3 = \frac{4.P_2 + \frac{A}{P_2^4}}{5} = \frac{12{,}51688042 + \frac{300}{(3{,}129220106)^4}}{5} = 3{,}129134648$$

$$P_4 = \frac{4.P_3 + \frac{A}{P_3^4}}{5} = \frac{12{,}51653859 + \frac{300}{(P_3)^4}}{5} = 3{,}129134644$$

$$P_5 = \frac{4.P_4 + \frac{A}{P_4^4}}{5} = \frac{12{,}51653858 + \frac{300}{(P_4)^4}}{5} = 3{,}129134646$$

$$P_6 = \frac{4.P_5 + \frac{A}{P_5^4}}{5} = \frac{12{,}51653858 + \frac{300}{(P_5)^4}}{5} = 3{,}129134644$$

$$P_7 = \frac{12{,}51653858 + \frac{300}{(P_6)^4}}{5} = 3{,}129134646$$

$F(P_7) = 300.0000007 \Rightarrow F(P_6) = 299.9999997 \Rightarrow P = 3{,}129134645$ bulunur.

3. BÖLÜM
MATRİSLER, DETERMİNANTLAR ve LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

3.1. Matrisler

Tanım 3.1 : n satır ve m sütundan oluşan sayıların dikdörtgen şeklinde;

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2m} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

yazılışına **n x m** tipinde matris denir. Matrisler genellikle **A, B, C, D, ...** gibi büyük harflerle elemanları ise **a,b,c,d,....**gibi küçük harflerle gösterilir ve **[ ]** veya **( )** şeklinde sembolize edilirler. Bir başka gösterimle;

$\mathbf{A = (a_{ij})} \quad \mathbf{(1 \le i \le n)} \quad \mathbf{(1 \le j \le m)}$ olarak ifade edilirler.

Burada satır ve sütun bilindiğinde sadece $A = (a_{ij})$ gösterimi yeterlidir.

Örneğin; $\mathbf{a_{i1}}$ **,............,** $\mathbf{a_{in}}$ elemanları **A'nın i. satırını** $\mathbf{a_{1j}}$ **,............,** $\mathbf{a_{mj}}$ elemanları **A'nın j. sütununu** ifade eder.

Teorem 3.1: $\mathbf{A = (a_{ij})}$ **ve** $\mathbf{B = (b_{ij})}$**, m x n** tipinde iki matris olsun. **A=B** olması için gerek ve yeter koşul;

$\mathbf{a_{ij} = b_{ij}}$ (i=1, 2, ..., m) (j = 1, 2, ..., n) olmasıdır.

Tanım 3.2: $\mathbf{A = (a_{ij})}$, $\mathbf{B = (b_{ij})}$, **m x n** tipinde iki matris olsun.Buna göre, $\mathbf{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$ ifadesine A ve B matrislerinin toplamı denir ve **C = A + B** ile gösterilir.

Tanım 3.3 : $\mathbf{A = (a_{ij})}$, **m x n** tipinde bir matris ve r bir skaler olmak üzere; $\mathbf{c_{ij} = r \cdot a_{ij}}$ ifadesine **A** matrisinin **r** skaleri ile skaler çarpımı denir ve **C = r . A** şeklinde gösterilir.

Tanım 3.4: m x n tipinde $A = (a_{ij})$ ve n x p tipinde $B = (b_{ij})$ matrisleri verilsin.

$$\mathbf{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}} \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, m \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots, p$$

ifadesine A ve B matrislerinin çarpımı denir ve **C=A . B** şeklinde gösterilir.Bu matris **mxp** tipindedir.

Sonuç olarak; iki matrisin çarpılabilmesi için gerek ve yeter şart birinci matrisin sütun sayısı ile ikinci matrisin satır sayısı eşit olmalıdır.

$\mathbf{A \cdot B \neq B \cdot A}$ olup matrislerin çarpımının değişme özelliği yoktur.

Örnek 3.1:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ verilsin. Buna göre; A + B , -3A, 2B, $-1.A + \frac{1}{2}B$ ifadelerini bulalım.

Çözüm 3.1:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1-2 & -2+2 & 3-3 \\ 4+0 & 0+1 & 5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$-3 \,.\, A = -3 \,.\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -9 \\ -12 & 0 & -15 \end{bmatrix} \text{ ve } -1.A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$2.B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{ve } \frac{1}{2}B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$-1.\,A + \frac{1}{2}B = \begin{bmatrix} -1-1 & 2+1 & -3-\frac{3}{2} \\ -4+0 & 0+ & -5-\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -\frac{9}{2} \\ -4 & \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

Örnek. 3.2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1x3}$ ve $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}_{3x1}$ matrisleri için A.B ve B.A nedir.

Çözüm 3.2: $A \,.\, B = [\,1 \,.\, 4 + 2 \,.\, 5 + 3 \,.\, 6\,] = [32]_{1\,x\,1}$ ve $B \,.\, A = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$B \,.\, A = \begin{bmatrix} 4.1 & 4.2 & 4.3 \\ 5.1 & 5.2 & 5.3 \\ 6.1 & 6.2 & 6.3 \end{bmatrix}_{3x3} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}_{3x3}$$

(1 x 3) . (3 x 1) = (1 x 1)   (A . B)

(3 x 1) . (1 x 3) = (3 x 3)   (B . A)

Görüldüğü gibi A . B $\neq$ B . A ’ dır.

Tanım 3.5: Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matrise kare matris denir. A bir kare matris olmak üzere;

$$A^n = \underbrace{A \,.\, A \,.\, \ldots\ldots\ldots\ldots .A}_{n \text{ tane}}$$

n tane A matrisinin çarpımıdır.

3.2. Matrislerin Özellikleri

A, B ve C aynı tipte kare matrisler ve **r,s** skaler olsun.

1-) A + B = B + A

2-) A + (B + C) = (A + B) + C

3-) r . (A + B) = r . A + r . B

4-) (r + s) . A = r . A + s . A

5-) 0 . A = 0

6-) A + (-1) . A = 0

7-) A + 0 = A

8-) (A + B) . C = A . C + B . C

9-) C . (A + B) = C : A + C . B

10-) 0 . A = 0 = A . 0

11-) A . (B . C) = (A . B) . C

3.3. Özel Matrisler

3.3.1. Birim Matris : n x n tipindeki ;

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0..............0 \\ 0 & 1..............0 \\ 0 & 0 \;\; 1..........0 \\ ....1.......0 \\ 0 & 0..........0...1 \end{bmatrix}_{nxn}$$ matrisine n. mertebeden birim matris denir.

$$I_1 = [1]_{1x1} \; ; \; I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2} \; ; \; I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3} \; ; \; I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4x4}$$

3.3.2. Sıfır Matris : Bütün elemanları 0 olan matrise sıfır matris denir ve **0 = (0_{ij})** ile gösterilir.

3.3.3. Köşegen Matrisler: n. Mertebeden herhangi bir A = (a_{ij}) kare matrisinin $\mathbf{a_{11}, a_{22}, \ldots ,}$ $\mathbf{a_{nn}}$ elemanlarına A matrisinin **köşegen elemanları** denir.

Örneğin; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin köşegen elemanları 1, 3, 5 'tir

Böylece,sıfırdan farklı elemanları köşegen üzerinde bulunan matrise köşegen matris denir.
Yani; **A = (a_{ij})** matrisinin köşegen matris olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{i \neq j}$ **için** $\mathbf{a_{ij} = 0}$ olmasıdır.

Örnek 3.3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ matrisleri köşegen matrislerdir.

Özellik. 3.1: Genel olarak bir köşegen matris;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn} \text{ şeklindedir. } A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} b_{11} & & & & 0 \\ & b_{22} & & & \\ & & b_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & b_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}$$

İki köşegen matris olmak üzere; $A.B = \begin{bmatrix} a_{11}\ b_{11} & & & & 0 \\ & a_{22}\ b_{22} & & & \\ & & a_{33}\ b_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_{nn}\ b_{nn} \end{bmatrix}_{nxn} = B.A$ olur.

3.3.4. Üçgen Matrisler :a) Bir **A = (a_{ij})** kare matrisinde her **j > i için** $\mathbf{a_{ij} = 0}$ koşulu sağlanıyorsa **A'ya alt üçgensel matris** denir.

Örneğin; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ Matrisi alt üçgenseldir.

b) i = j olmak üzere yani köşegen elemanları da 0 olan matrise tam üçgen matris denir.

Örneğin; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ tam üçgenseldir.

c) Bir $\mathbf{A = (a_{ij})}$ kare matrisinde her $\mathbf{i > j}$ **için** $\mathbf{a_{ij} = 0}$ koşulu sağlanıyorsa **A matrisine üst üçgensel matris** denir.

Örneğin, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ Matrisi üst üçgenseldir.

Örneğin, $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ Matrisi üst üçgenseldir

Örneğin, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ Matrisleri alt üçgenseldir.

Örneğin, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Matrisleri tam üçgenseldir.

3.3.5. Idempotent Matris : A kare matrisi $\mathbf{A^2 = A}$ özelliğine sahipse A matrisine **idempotent** matris denir.

Örneğin; $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ bunlardandır.

3.3.6. Nilpotent Matris : Bir **A** kare matrisi için $\mathbf{A^q = 0}$ olacak şekilde bir **q** tamsayısı bulunabiliyorsa A matrisine **Nilpotent Matris** denir.

Tanım 3.6: A, n x n tipinde bir kare matris olsun. A matrisinin i. satır ve j. Sütununun atılmasıyla elde edilen kare A matrisinin a_{ij} elemanınınminörü denir ve M_{ij} ile gösterilir.

Örnek 3.4: $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin M_{12}, M_{23}, M_{32} minörlerini bulalım.

Çözüm 3.4:

$M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \qquad M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \qquad M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

3.3.7. Simetrik Matris: $A = (a_{ij})$ kare matrisinde eğer $\mathbf{a_{ij} = a_{ji}}$ ise (i, j = 1, 2, ..., n) ise **simetrik matris** $\mathbf{a_{ij} = - a_{ji}}$ (i, j = 1, 2, ..., n) ise **ters simetrik matris** denir.

Örneğin; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ matrisleri simetrik matris iken;

$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri ters simetrik matristir.

3.4. Determinantlar

Tanım 3.7: A, **n x n'**lik bir kare matris olsun. A matrisinin determinantı **det A** veya |**A**| ile gösterilir. 1. Satıra göre A matrisinin determinant açılımı

$$\det A = (-1)^{1+1}.a_{11}\det M_{11} + (-1)^{1+2}.a_{12}.\det M_{12} + ... + (-1)^{1+n}.a_{1n}.\det M_{1n}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}.a_{1j}\det M_{1j}$$

şeklinde tanımlanır.

3.4.1. Sarrus kuralı

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3x3}$$ Matrisinin determinantını hesaplamak için pratik bir yol da sarrus kuralıdır.Buna göre;

$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$

veya

$|A| = a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

Tanım 3.8: A = (a_{ij}) bir matris iken **A matrisinin transpozesi (devriği) A^t** ile gösterilir ve A matrisinin satırlarının sütunları ile yer değiştirilmesi ile elde edilir. Yani;

A = (a_{ij}) iken A^t = (a_{ji})'dir.

Örneğin;

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1x3} \Rightarrow A^t=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2x3} \Rightarrow A^t=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3x2}$$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \end{bmatrix}_{2x4} \Rightarrow A^t=\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \\ 6 & 9 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

3.5. Determinantın Özellikleri : A bir kare matris olsun.Buna göre;

1-) A'nın bir satırı 0 ise **detA = 0**

2-) A'nın herhangi iki satırı eşit ise **detA = 0**

3-) A'nın herhangi iki satırının kendi aralarında yer değiştirmesiyle elde edilen matris B ise;

detB = - detA

4-) A'nın herhangi bir satırının katının diğer bir satırına ilave edilmesiyle elde edilen matris B ise; **detB = detA**

5-) A'nın herhangi bir satırının k sayısı ile çarpılmasıyla elde edilen matris B ise;

detB = k . detA

6-)det A^t =detA. Yani bir matrisin determinantı ile transpozesinin determinantı aynıdır. Bir başka deyişle şimdiye kadar satırlar için söylenen özellikler sütunlar için de geçerlidir.

7-) A matrisi üst üçgen matris ise, A'nın determinantı köşegen üzerindeki elemanların çarpımına eşittir.

8-) det (A . B) = detA . detB. olup burada A ve B aynı mertebeden iki kare matristir.

Teorem 3.2: A, **n x n** tipinde bir matris olsun. A matrisinin tersinin olabilmesi için gerek ve yeter şart **detA ≠ 0** olmasıdır.

Tanım 3.9: $A_{ij} = (-1)^{i+j}$. $detM_{ij}$ (i, j = 1, 2, ..., n) şeklindeki sayıları tanımlayalım. **A_{ij}** sayısına a_{ij} elemanının **kofaktörü (eşçarpanı – işaretli minörü)** denir.

$$\det A = \sum_j a_{ij} A_{ij} \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

A matrisinin kofaktörü A^{cof} ile gösterilir. **$A^{cof} = (A_{ij})^t = A_{ji}$**'dir.Yani,A matrisinin eşçarpan matrisi A'nın eşçarpanlarından oluşan matrisinin transpozesine eşittir.

Tanım 3.10:Ters Matris: A, bir **n x n** matris olsun. A matrisinin tersi;

$$A^{cof} = \begin{bmatrix} A_{11}A_{12}A_{13} \\ A_{21}A_{22}A_{23} \\ A_{31}A_{32}A_{33} \end{bmatrix}^t \qquad \text{iken} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} . A^{cof}$$

olup A matrisinin tersi olan A^{-1} matrisi A^{cof} ile $\dfrac{1}{\det A}$ çarpımına eşittir.

3.6.Lineer Denklem Sistemleri: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$ (i=1,2,....,n)

ifadesi **n-** bilinmeyenli **n-** denklemden oluşan bir lineer denklem sistemidir.Açıkça yazmak gerekirse;

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...................+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...................+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+..................+a_{nn}x_n=b_n \end{array}$$

Matrisel formda gösterecek olursak bir Lineer denklem sistemi;

AX=B şeklinde gösterilir.Buradan;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \;\; a_{12} .... a_{1n} \\ a_{21} \;\; a_{22} .... a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1} \;\; a_{n2} ...... a_{nn} \end{pmatrix}_{nxn} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}_{nx\,1} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}_{nx1}$$

nxn'lik bir kare matris. bilinmeyenler vektörüdür. sabitler vektörüdür.

Teorem.3.3:AX=B lineer denklem sisteminin çözümünün olması için gerek ve yeter koşul A^{-1}'in mevcut olmasıdır.

AX=B ifadesinin her iki yanını A^{-1} ile çarparsak;

$$\underbrace{A^{-1}.A}.X=B.A^{-1} \Rightarrow \quad \mathbf{X=B.A^{-1}} \text{ çözüm vektörüdür.}$$

3.6.1.Cramer Kuralı::

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+....................+a_{1n}x_n=b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+....................+a_{2n}x_n=b_2$

.

.

$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...................+a_{nn}x_n=b_n$

denklem sistemini çözmek için;

$x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$ olarak hesaplanır. (i=1,2,.....,n)

Burada, **A_i matrisi A matrisinin i. sütununun B matrisiyle yer değiştirilmesiyle elde edilir.**

3.6.2. Matris, Determinant ve LDS Örnekleri

1) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin; a) detA=? b) A^{-1} = ? c) A^{cof} = ?

Çözüm : a) A, 3x3'lük bir kare matris olup istediğimiz bir satır (3 tane satır var) veya istediğimiz bir sütuna (3 tane sütun var) göre veya sarrus satır ilave veya sarrus sütun ilave pratik kurallarına göre 8 farklı yoldan determinant hesaplayabiliriz.

$$|A| = (-1)^{1+1}.(-3).\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.(2).\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}.(5).\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 15$$

$$|A| = (-3).(-1+18) + (-2).(4-12) + 5.(12-2) = -51+16+50 = 15$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & -6 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 15$$

$|A| = (-3).(-1).$ 1+4 .3.5.+(-2).2.(-6)-(-2).(-1).5-(-3).3.(-6)-4.2.1=15

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 5 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & -6 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 5.4.3 + 2(-6).(-2) + (-3).(-1).1 - (-2).(-1).5.3.(-6).(-3) - 1.4.2 = 15$$

b) A^{cof}=?

$A_{ij}=(-1)^{i+j}.\left|M_{ij}\right|$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\left|M_{11}\right|=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & -6\\ 3 & 1\end{vmatrix}=8$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\left|M_{12}\right|=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & -6\\ -2 & 1\end{vmatrix}=8$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\left|M_{13}\right|=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=10$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\left|M_{21}\right|=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 1\end{vmatrix}=13$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\left|M_{22}\right|=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-3 & 5\\ -2 & 1\end{vmatrix}=7$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\left|M_{23}\right|,=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=5$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\left|M_{31}\right|=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & -6\\ -3 & 5\end{vmatrix}=-7$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\left|M_{32}\right|=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 4 & -6\end{vmatrix}=2$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\left|M_{33}\right|=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-5$$

$$A^{cof}=\begin{pmatrix}A_{11}A_{12}A_{13}\\ A_{21}A_{22}A_{23}\\ A_{31}\ A_{32}A_{33}\end{pmatrix}^{t}=\begin{pmatrix}17 & 8 & 10\\ 13 & 7 & 5\\ -7 & 2 & -5\end{pmatrix}^{t}=\begin{pmatrix}17 & 13 & -7\\ 8 & 7 & 2\\ 10 & 5 & -5\end{pmatrix}$$

c) $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^{cof}$ olduğunu biliyoruz. Buradan A^{-1} ;

$$A^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}17 & 13 & -7\\ 8 & 7 & 2\\ 10 & 5 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{17}{15} & \frac{13}{15} & \frac{-7}{15}\\ \frac{8}{15} & \frac{7}{15} & \frac{2}{15}\\ \frac{10}{15} & \frac{5}{15} & \frac{-5}{15}\end{pmatrix}$$ olarak hesaplanır.

2) $-3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -8$

$4x_1 - x_2 - 6x_3 = 13$

$-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$

lineer denklem sistemini AX=B matris formu ile ve Gauss-Yoketme yöntemiyle ayrı ayrı çözünüz.

Çözüm: AX=B Matris formu

Lineer denklem sistemini önce matris biçiminde yazalım**.**

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & -6 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \quad \Rightarrow \quad I.X = A^{-1}.B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}.B$$

eşitliğinden X ‘i hesaplayalım.

$$X = A^{-1}.B \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{15} & \frac{13}{15} & \frac{-7}{15} \\ \frac{8}{15} & \frac{7}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{10}{15} & \frac{5}{15} & \frac{-5}{15} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{15}.(-8) + \frac{13}{15}.(13) + \frac{-7}{15}.9 \\ \frac{8}{15}.(-8) + \frac{7}{15}.(13) + \frac{2}{15}.9 \\ \frac{10}{15}.(-8) + \frac{5}{15}.(13) + \frac{-5}{15}.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-30}{15} \\ \frac{45}{15} \\ \frac{-60}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -2$, $x_2 = 3$ ve $x_3 = -4$ olarak bulunur.

2) $-3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -8$ LDS’sini Gauss - Yoketme

$4x_1 - x_2 - 6x_3 = 13$ ile çözünüz.

$-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$

Çözüm : Gauss Yoketme ile Çözüm :

D_1.......... $-3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -8$ } Önce x_1 }

D_2.......... $4x_1 - x_2 - 6x_3 = 13$ Önce x_2 Yok edilebilir.

D_3.......... $-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$ Önce x_3

1.Yaklaşım : 3 denklemi 2'şer kullanarak x_1 'i yokedelim.

$$D_2 + 2 \,.\, D_3 \;\Rightarrow \qquad 4x_1 - x_2 - 6x_3 = 13$$

$$-4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 18$$

$$+\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$D_4 \,.........\; 5x_2 - 4x_3 = 31$$

$$4 \,.\, D_1 + 3 \,.\, D_2 \;\Rightarrow\; -12x_1 + 8x_2 + 20x_3 = -32$$

$$12x_1 - 3x_2 - 18x_3 = 39$$

$$+\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$D_5 \,.........\; 5x_2 + 2x_3 = 7$$

$$D_4 \,.........\; 5x_2 - 4x_3 = 31$$

$$D_5 \,.........\; 5x_2 + 2x_3 = 7$$

$$D_4 + (-1) \,.\, D_5 \;\Rightarrow \qquad 5x_2 - 4x_3 = 31$$

$$-5x_2 - 2x_3 = -7$$

$$+\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$-6x_3 = 24 \quad \text{ise} \quad x_3 = -4$$

Bu değer D_4 veya D_5 'te yerine yazılırsa;

$$5x_2 - 4(-4) = 31 \;\Rightarrow\; x_2 = 3$$

$$5x_2 + 2(-4) = 7 \;\Rightarrow\; x_2 = 3 \quad \text{bulunur.}$$

Şimdi de $x_2 = 3$ ve $x_3 = -4$ değerleri D_1, D_2 veya D_3 'ten birine yazılırsa;

$$D_1 \Rightarrow \qquad -3x_1 + 2(3) + 5(-4) = -8$$

$$-3x_1 = 6 \;\Rightarrow\; x_1 = -2 \quad \text{bulunur.}$$

Böylece; $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -4$ olur.

3) $2x - y + 3z = -6$ LDS'sini Gauss - Yoketme

$-3x + 4y - 2z = 4$ ve Cramer kuralı ile çözünüz.

$5x - 2y + z = 5$

Çözüm : Cramer kuralı;

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -1 & 3 & -6 & -1 \\ 4 & 4 & -2 & 4 & 4 \\ 5 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -2 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{5.4.3 + 5(-2).(-1) + 1.4.(-6) - 5.4.3 - (-2).(-2).(-6).(-3) - 1.4.(-1)}{3.(-3).(-2) + (-1).(-2).5 + 2.4.1 - 5.4.3 - (-2).(-2).2.(-3) - 1.(-3).(-1)} = \frac{-70}{-35} = 2$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -6 & 3 & 2 & -6 \\ -3 & 4 & -2 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix}}{-35}$$

$$y = \frac{5.(-3).3 + 5(-2).(-6) + 1.4.2 - 5.4.3 - 5.(-2).2 - 1.(-3).(-6)}{-35} = \frac{-35}{-35} = 1$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 4 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 5 & 5 & -2 \end{vmatrix}}{-35}$$

$$z = \frac{(-6).(-3).(-2) + (-1).4.5 + 2.4.5 - 5.4.(-6)3 - (-2).4.2 - 5.(-3).(-1)}{-35} = \frac{105}{-35} = -3$$

b) Gauss – Yoketme ; önce x'i veya y'yi veya z'yi yokedebiliriz.Önce z'yi yokedelim.

$D_1 \Rightarrow$ $2x - y + 3z = -6$

$D_2 \Rightarrow$ $-3x + 4y - 2z = 4$

$D_3 \Rightarrow$ $5x - 2y + z = 5$

$D_2 + 2 . D_3 \Rightarrow$

$$\begin{array}{rl} & -3x + 4y - 2z = 4 \\ + & 10x - 4y + 2z = 10 \\ \hline & 7x = 14 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \end{array}$$

Bu değer istenilen iki denklemde yerine yazılarak y ve z ‘ye bağlı iki bilinmeyenli iki denklem elde edilir. D_1 ve D_2 ‘de x=2 yazalım.

$$-y + 3z = -10 \Rightarrow D_4$$

$$4y - 2z = 10 \Rightarrow D_5$$

$4D_4 + D_5 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} -4y + 12z &= -40 \\ 4y - 2z &= -10 \\ \hline 10z &= -30 \\ z &= -3 \end{aligned}$$

$4y - 2 \cdot (-3) = 10$ ise $y = 1$ ve çözüm : x=2 , y= 1, z= – 3

3.6.3.Gauss-Yoketme Yöntemi

Bu yöntem ana düşünce olarak bilinmeyenlerin katsayılarını birer birer sıfıra indirgenmesi esasına dayanmaktadır. Bu yöntemde katsayılar matrisinin bazı elemanları sıfırlanarak matris alt üçgen veya üst üçgen matris şekline getirilir. Daha geriye doğru gidilerek bilinmeyenler sırayla elde edilirler.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Katsayılar matrisinin bazı elemanları sıfırlanırken eşitlik vektörü de bu işlemlere dahil edilerek işlemler yürütülür. Denklemlerde ;

a) Denklemlerden herhangi birisinin her iki tarafını bir sayı ile çarpmak ve bölmek denklemi bozmaz.
b) Denklemlerin birbirleriyle toplanması veya çıkarılmalarından bağımsız olmayan bir başka denklem elde edilebilir. Bu işlemler uygulanarak yoketme (eliminasyon) gerçekleştirilir.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Adım 1. Birinci satır (eşitlik vektörü dahil) a_{11} ile bölünür.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} = \alpha_{1,2} & \frac{a_{1,3}}{a_{1,2}} = \alpha_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{1,1}} = \beta_{1,2} \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Adım 2. Birinci satır a_{21} ile çarpılıp sonra ikinci satırdan çıkarılır. Böylece a_{21} sıfırlanmış olur. Aynı şekilde birinci satır a_{31} ile çarpılıp sonra üçüncü satırdan çıkarılır. Böylece a_{31} sıfırlanmış olur.

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ a_{2,1} - a_{2,1}.1 & a_{2,2} - a_{2,1}.\alpha_{1,2} & a_{2,3} - a_{2,1}.\alpha_{1,3} \\ a_{3,1} - a_{3,1}.1 & a_{3,2} - a_{3,1}.\alpha_{1,2} & a_{3,3} - a_{3,1}.\alpha_{1,3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1,2} \\ b_2 - a_{2,1}.\beta_1 \\ b_3 - a_{3,1}.\beta_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ 0 & a^*_{2,2} & a^*_{2,3} \\ 0 & a^*_{3,2} & a^*_{3,3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1,2} \\ b^*_2 \\ b^*_3 \end{bmatrix}$$

Şimdi aynı işlemlere yukarıdaki matrise koyu olarak gösterilen ve boyutları önceki matrise göre bir küçülmüş olan matrise devam edilir.

Adım 1. a_{22}'nin bulunduğu satır (eşitlik vektörü dahil) a^*_{22} ile bölünür.

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ 0 & a^*_{2,2} & \frac{a^*_{2,3}}{a^*_{2,2}} = \alpha_{2,3} \\ 0 & a^*_{3,2} & a^*_{3,3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1,2} \\ \frac{b^*_2}{a^*_{2,2}} = \beta_2 \\ b^*_3 \end{bmatrix}$$

Adım 2. Üçüncü satır a_{22} ile çarpılıp sonra üçüncü satırdan çıkarılır. Böylece a_{32} sıfırlanmış olur.

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ 0 & 1 & \alpha_{2,3} \\ 0 & a^*_{3,2} - 1.a^*_{3,2} & a^*_{3,3} - \alpha^*_{3,2}.a_{3,2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1,2} \\ \beta_2 \\ b^*_3 - \beta_2.a_{3,2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ 0 & 1 & \alpha_{2,3} \\ 0 & 0 & a^{**}_{3,3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1,2} \\ \beta_2 \\ b^{**}_3 \end{bmatrix}$$

Son elde edilen matrisin üçüncü satırını $a_{3,3}^{**}$ ile böldüğümüzde köşegen üzerindeki elemanlar bir ve köşegen altındaki elemanlar ise sıfır olmuş oldu. Bir diğer deyişle üst üçgen matris elde edilmiş oldu.

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ 0 & 1 & \alpha_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Yoketme (eliminasyon) sonunda ulaşılan üst üçgen matriste en alttaki satırdan başlayarak yukarıya doğru bilinmeyenleri sırayla bulabiliriz.

$x_3=b_3$

$x_2=b_2-a_{23}.x_3$

$x_3=b_1-a_{12}.x_2-a_{13}.x_3$

Denklem sayısı arttığında bulunan bu son değerleri bulmak zorlaşacaktır. Ancak bu yöntemler bilgisayar ortamları için elverişli olduklarından geriye doğru bilinmeyenleri elde etmek için aşağıdaki genel terimi verilen ifade hesaplanarak elde edilebilir.

$$x_n = \beta_n$$

$$x_i\left[i = n-1,1,-1\right] = \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{i,j}.x_j$$

Gauss-Eliminasyon yönteminde kullanılan yoketme işlemi ve bilinmeyenlerin geriye doğru eldesinde izlenecek taslak program parçası aşağıdaki adımlarla gösterilebilir.

```
do k=1 , n-1
        do i=k+1,n
        f=a(i,k)/a(k,k)
        do j=k+1,n
        a(i,j)=a(i,j)-f*a(k,j)
        enddo
        c(i)=c(i)-f*c(k)
        enddo
enddo
x(n)=b(n)
do i=n-1,n,-1
t=0
        do j=i+1,n
```

```
            t=t-a(i,j)*x(j)
            enddo
      x(i)=(c(i)-t)
      enddo
```

3.7.Pivotlama

Gauss eliminasyonun uygulanması esnasında köşegen üzerinde sıfır değerli eleman bulunması problem oluşturacaktır. Bu durumda sıfıra bölme söz konusu olacağından sonuca gidilemeyecektir. Bu problemi önlemek için pivot elemanın en büyük olacak şekilde eşitlikler arasında değişikliğe gidilir. Hem köşegen üzerindeki sıfır elemanlar varsa o giderilir hem de yuvarlatma hataları aza indirilmiş olur. Sadece pivot elemanın büyük yapılması durumunda kısmi pivotlama , bütün satırlar dikkate alınarak büyük elemanlar seçilmesi durumuna ise tam pivotlama denilir.Örnek olarak aşağıdaki eşitliği iki farklı şekilde çözmeye çalışalım.

$0.0003x_1+3.0000x_2=2.0001$

$1.0000x_1+1.0000x_2=1.0000$

Burada pivot element a_{11}=0.0003 sıfır değerine çok yakındır. Eşitliklerin gerçek çözümü x_1=1 /3 ve x_2=2/3 ‘dür. Birinci eşitliği (1/0.0003) ile çarpalım ve ikinci denklemi çıkaralım.

$x_1+10,0000x_2=6667$

$1.0000x_1+1.0000x_2=1.0000$

Buradan;$-999x_2=-6666 \Rightarrow x_2=2/3$

$$x_1 = \frac{2.0001 - 3(2/3)}{0.0003}$$

elde edilir. Ancak x_2 değerini farklı hassasiyetlerde alarak x_1 değerini farklı değerlerde bulabiliriz. Aşağıdaki tablo bunu açık bir şekilde göstermektedir.

Kısmi pivotlamanın

Sayı Hassasiyeti	x2	x1	Bağıl Hata% $\varepsilon = \frac{(x_1 - 1/3)}{1/3}$
3	0.667	-0.33	1099
4	0.6667	0.0000	100
5	0.66667	0.30000	10
6	0.666667	0.330000	1
7	0.6666667	0.3330000	0.1

Aynı eşitliği başka pivot elemanı büyük seçecek olursak sonuçlar aşağıdaki şekildce bulunabilir.

$1.0000x_1+1.0000x_2=1.0000$

$0.0003x_1+3.0000x_2=2.0001$

$x_2 = \frac{2}{3} \qquad x_1 = \frac{1-(2/3)}{1}$

Tam pivotlama

Sayı Hassasiyeti	x_2	x_1	Bağıl Hata% $\varepsilon = \frac{(x_1 - 1/3)}{1/3}$
3	0.667	0.333	0.1
4	0.6667	0.3333	0.01
5	0.66667	0.33333	0.001
6	0.666667	0.333333	0.0001
7	0.6666667	0.3333333	0.00001

Pivotlamanın program algoritması özetle aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

```
pivot=k
big=|A_{k,k}|
dofor i=k+1 to n
    dummy=|A_{i,k}|
    if (dummy > big)
    big=dummy
    pivot=i
enddo
if (pivot ≠ k)
    dofor j=k to n
        dummy=A_{pivot,j}
        A_{pivot}=A_{k,j}
    enddo
    dummy=c_{pivot}
    c_{pivot}=c_k
    c_k=dummy
endif
```

Örnek.3.5: Aşağıdaki denklem takımını Gauss-Eliminasyon yöntemiyle çözünüz.

$2x_1-3x_2+2x_3=-11$

$x_1+x_2+2x_3=8$

$3x_1-2x_2-x_3=-1$

Çözüm..3.5: Eşitlikleri matris formunda aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 2.5 & -3 \\ 0 & 2.5 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 \\ 13.5 \\ 15.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 2.5 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 \\ 5.4 \\ 15.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 \\ 5.4 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 \\ 5.4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$x_3=-2$

$x_2=5.4-x_3(1.2)=5.4-(-2)(-1.2)=3$

$x_1=-5.5-(-1.5)(3)-1(-2)=1$

3.8.Gauss-Jordan Yöntemi

Bu yöntem Gauss eliminasyon yöntemi ile aynı esasa dayanmaktadır. Ancak Gauss eliminasyon yönteminde katsayılar matrisi üst üçgen matris haline getiriliyordu. Bu yöntemde ise katsayılar matrisi birim matris haline getirerek çözüme gidiyoruz. Çözümün birinci aşaması olan üst üçgen matris elde etme işlemi Gauss-eliminasyon yöntemi ile aynı olduğundan işleme bu adımdan sonra devam edebiliriz. Yani birim matris haline getirilecek olan üst üçgen matristen başlayabiliriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ 0 & 1 & \alpha_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Yukarıda gösterilen Gauss-eliminasyon yöntemi ile elde edilmiş üst üçgen matrisi elemanlarını sıfırlamaya bu defasında en alt satırdan başlayarak gauss-eliminasyondaki adımları uygulayalım.

Adım 1.a_{23} ile a_{13} elemanlarını sıfırlamak için birinci ve ikinci satırı a_{33} ile çarparak birinci ve ikinci satırlardan çıkaralım.

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ 0 & 1 & \alpha_{2,3} - 1.\alpha_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 - \beta_3.\alpha_{2,3} \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & -1.\alpha_{1,3} = 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 - \alpha_{1,3}.\beta_1 = \beta_1^* \\ \lambda_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Adım 2.a_{12} ile a_{22} çarpılır ve üçüncü satırdan çıkarılarak a_{12} sıfırlanır.

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1,2} - 1\alpha_{1,2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^*{}_1 - \alpha_{1,2}.\gamma_2 = \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Buradan $x_1=\gamma_1$, $x_2=\gamma_2$, $x_3=\gamma_3$ bulunur.

Gauss-Jordan yönteminin taslak program algoritması aşağıda verilmiştir.

```
do k=1,n
d=a(k,k)
    do j=1,n+1
    a(k,j)=a(k,j)/d
    enddo
    do i=1 ,n
    if (işk)
    d=a(i,k)
    do j=1,n+1
    a(i,j)=a(i,j)-d*a(i,j)
    enddo
    endif
    enddo
enddo
```

Örnek.3.6: Gauss-eliminasyon yönteminde üst üçgen haline getirilmiş katsayılar matrisini ve eşitlik vektörünü alarak Gauss-jordan yöntemini uygulayınız.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 \\ 5.4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Çözüm.3.6:

Adım 1.a_{23} ve a_{23} elemanlarını sıfırlamak için bunları a_{33} ile çarparak kendilerinden çıkaralım.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1-1(1)=0 \\ 0 & 1 & -1.2-1(-1.2)=0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5-(-2).(1) \\ 5.4-(-2).(-1.2) \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Adım 2.a_{12} ile ikinci satırı çarparak üçüncü satırdan çıkaralım.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5-1(1.5) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$x_1=1;x_2=3$;$x_3=-2$ olarak aynı sonuç bulunur.

3.9.Ayrıştırma (cholesky) yöntemi

Bu yöntem her kare matris biri alt üçgen diğeri üst üçgen iki matrisin çarpımından oluşur. Böylece bu yöntemde bu işlemin tersine giderek elimizdeki katsayılar matrisini ayrıştırarak bir alt ve bir üst üçgen matris şekline getireceğiz.

$$[A].[X]=[B]$$

$$[L].[U].[X]=[B]$$
$$[U].[X]=[Y]$$
$$[L].[Y]=[B]$$

Bu tanımlamalardan sonra eşitlik (3.33) ‘den $[Y]$ çözülür. Daha sonra da eşitlik (3.32)’den $[X]$ çözülür.

$[A].[L]=[U]$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1,1} & 0 & 0 \\ L_{2,1} & L_{2,2} & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & L_{3,3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & U_{1,2} & U_{1,3} \\ 0 & 1 & U_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[L].[U]$ çarpımı yapılırsa,

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1,1} & L_{1,1}.U_{1,2} & L_{1,1}.U_{1,3} \\ L_{2,1} & L_{2,2}+L_{2,1}.U_{1,2} & L_{2,1}.U_{1,3}+L_{2,2}.U_{2,3} \\ L_{3,1} & L_{3,2}+L_{3,1}.U_{1,2} & L_{3,3}+L_{3,1}.U_{1,3}+L_{3,2}.U_{2,3} \end{bmatrix}.$$

elde edilir. Şimdi yukarıdaki eşitlikte karşılıklı olarak birbirlerine eşit olduklarından aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

Birinci satırdan,

$L_{11}=a_{11}$

$L_{11}.U_{12}=a_{12}$ $\quad$ $U_{12}=a_{12}/L_{11}$

$L_{11}.U_{13}=a_{13}$ $\quad$ $U_{13}=a_{13}/L_{11}$

İkinci satırdan,

$L_{21}=a_{21}$

$L_{21}.U_{12}+L_{22}=a_{22}$

$L_{22}=a_{22}-L_{21}.U_{12}$

$L_{21}.U_{13}+L_{12}.U_{23}=a_{23}$

$U_{23}=(a_{23}-L_{21}.U_{13})/L_{22}$

Üçüncü satırdan,

$L_{31}=a_{31}$

$L_{31}.U_{12}+L_{32}=a_{32}$

$L_{32}=a_{32}-L_{31}.U_{12}$

$L_{31}.U_{13}+L_{32}.U_{23}+L_{33}=a_{33}$

$L_{33}=a_{33}-L_{31}.U_{13}-L_{32}.U_{23}$

U ve L matrisinin elemanları bulunduğuna göre daha önceki tanımlamalardan dolayı;

$[L].[Y]=[B]$, eşitliğinden $[Y]$ çözülür. Daha sonra da,

$[U].[X]=[Y]$,eşitliğinden de $[X]$ çözülerek sonuca gidilir.

Örnek.3.7: Aşağıdaki denklem takımını ayrıştırma(cholesky) yöntemiyle çözünüz.

$x_1+2x_2+3x_3=14$

$2x_1+5x_2+2x_3=18$

$3x_1+x_2+5x_3=20$

Çözüm.3.7:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 2\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_{1,1} & 0 & 0\\ L_{2,1} & L_{2,2} & 0\\ L_{3,1} & L_{3,2} & L_{3,3}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & U_{1,2} & U_{1,3}\\ 0 & 1 & U_{2,3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$[A]=[L].[U]$ teşkil etmek için $[L]$ ve $[U]$ matrislerinin elemanlarını bulalım.

$L_{11}=a_{11}=1$

$U_{12}=a_{12}/L_{11}=2/1=2$

$U_{13}=a_{13}/L_{11}=3/1=3$

$L_{21}=a_{21}=2$

$L_{22}=a_{22}-L_{21}.U_{12}=5-2(2)=1$

$U_{23}=(a_{23}-L_{21}.U_{13})/L_{22}=[2-2(3)]/1=-4$

$L_{31}=a_{31}=3$

$L_{32}=a_{32}-L_{31}.U_{12}=1-3(2)=-5$

$L_{33}=a_{33}-L_{31}.U_{13}-L_{32}.U_{23}=5-3(3)-(-5)(-4)=-24$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 2\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -5 & -24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$[L]=[Y].[B]$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -5 & -24\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\ 18\\ 20\end{bmatrix}$$

$y_1=14 \Rightarrow y_2=18-2(14)=-10 \Rightarrow y_3=[20-3(14)-(-5)(-10)]/24=3$

$[U].[X]=[Y]$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\ -10\\ 3\end{bmatrix}$$

$x_3=1 \Rightarrow x_2=-10-(-4)(3)=2 \Rightarrow x_1=14-3(1)-(2)(2)=1$ bulunur.

3.10.Gauss-seidel yöntemi

Bu yöntem bir iterasyonla bilinmeyenleri bulma yöntemidir. Katsayılar matrisi yazıldıktan sonra pivotlama yapılarak işleme başlanır. Bu işlemi yaptıktan sonra birinci eşitlikten x_1,ikinci eşitlikten x_2 ve üçüncü eşitlikten x_3 v.s. çekilerek yazılır. Daha sonra bilinmeyenlerin tamamına birer başlangıç değeri ve iterasyonu durdurmak için bir durdurma hata sınırı(ε) verilerek iterasyona başlanır.

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{1,2}.x_2 - a_{1,3}.x_3 - ... - a_{1,n}.x_n}{a_{1,1}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{2,1}.x_1 - a_{2,3}.x_3 - ... - a_{2,n}.x_n}{a_{2,2}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{3,1}.x_1 - a_{3,2}.x_2 - ... - a_{3,n}.x_n}{a_{3,3}}$$

$$x_n = \frac{b_n - a_{n,1}.x_1 - a_{n,2}.x_2 - ... - a_{n,n-1}.x_{n-1}}{a_{n,n}}$$

Bilinmeyenlerle bir başlangıç değeri (hepsi sıfır olarak alınabilir) verilerek ilk eşitlikten iterasyona başlanır. Ancak dikkat edilmesi gereken önemli nokta , her bilinmeyeni çözerken bir önceki iterasyonda bulunan en yeni bilinmeyenler eşitliğe konularak iterasyona devam edilecektir.

Başlangıç değerleri, x_1^0, x_2^0, x_3^0 olsun. Bu durumda ilk eşitliği hesaplarken bilinmeyenlerin yerine hepsi başlangıç değeri alınarak hesaplanacaktır.

$$x_1^1 = \frac{b_1 - a_{1,2}.x_2^0 - a_{1,3}.x_3^0 - ... - a_{1,n}.x_n^0}{a_{1,1}}$$

$$x_2^1 = \frac{b_2 - a_{2,1}.x_1^0 - a_{2,3}.x_3^0 - ... - a_{2,n}.x_n^0}{a_{2,2}}$$

$$x_3^1 = \frac{b_3 - a_{3,1}.x_1^1 - a_{3,2}.x_2^1 - ... - a_{3,n}.x_n^0}{a_{3,3}}$$

Bu şekilde ardışık olarak bilinmeyenler hesaplanır. Her iterasyon sonunda,

$\left|x_i^{it+1} - x_i^{it}\right| \langle \varepsilon (i = 1, n)$ kontrol edilerek bütün kökler için bu hata sınırının altına inilmişse işlem durdurulur.

Gauss-seidel yöntemi için taslak program algoritması aşağıdaki şekilde düzenlenebilir.

```
          do i=1,n
          d=a(i,j)
          do j=1,n
          a(i,j)=a(i,j)/d
          enddo
          c(i)=c(i)/d
     enddo
     sw=0
     iter=0
     do while (iter〈 maxit)
     (sw=0)
          sw=1
          iter=iter+1
     do i=1,n
          old=x(i)
          t=c(i)
          do j=1,n
          if işj
               t=t-a(i,j)*x(j)
          endif
          enddo
          x(i)=l*t+(1-l)old
          if sw=1) and x(i)ş0)
          ea=ABS[(x(i)-old)/x(i)]*100
          if ea〉 es) then sw=0
          endif
     enddo
     wend
```

Program. Ayrıştırma(LU) yönteminin bilgisayar programı (PASCAL)

```
     Var  ii:integer;
          pivot,idum,dum:integer;
          big,dummy:real;
          begin
```

```
        pivot:=j;
big:=abs(a(o[j]),j)/s[o(j)];
for ii:=j+1 to n do
        begin
        dummy:=abs(a[o[ii],j]/s[o(ii)]);
if (dummy〉big) then begin
                big:=dummy; pivot:=ii;
                end;
        end;
        idum:=o[pivot];
        o[j]:=idum;
        end;
procedure decmp(s:vektor; var a:matrix; var o:row; n:integer);
var r,i,j,k:integer;
sum,dummy:real;
begin
        j:=1;
        pivot(s,a,o,j,n);
        for j:=2 to n do
        begin
        a[o[1],j]:=a[o[1],j]/a[o[1],1];
        end;
        for j:=2 to n-1 do
        begin
        for i:=j to n do
        begin
        sum:=0.0;
        for k:=1 to j-1 do
        begin
        sum:=sum+a[o[i],k]*a[o[k],j];
        end;
        a[o[i],j]:=a[o[i],j]-sum;
        end;
```

```
pivot(s,a,o,j,n);
        for k:=j+1 to n do
        begin
        sum:=0.0;
        for i:=1 to j-1 do
        begin
        sum:=sum+a[o[j],i]*a[o[i],k];
        end;
        a[o[j],k]:=(a[o[j],k]-sum)/a[o[j],j];
        end;
end;
sum:=0.0;
for k:=1 to n-1 do
        begin
        sum:=a[o[n],k]*a[o[k],n]+sum;
end;
a[o[n],n]:=a[o[n],n]-sum;
end;
procedure solve(a:matrix; c:vektor; var x:vektor; o:row; n:integer);
var
        sum:real;
        i,j:integer;
begin
        x[1]:=c[o[1]]/a[o[1],1];
for i:=2 to n do
        begin
        sum:=0.0;
for j:=1 to i-1 do
        begin
        sum:=sum+a[o[i],j]*x[j];
        end;
x[i]:=(c[o[i]]-sum)/a[o[i],j];
end;
```

```
for i:=n-1 downto 1 do
        begin
        sum:=0.0;
        for j:=i+1 to n do
        begin
        sum:=sum+a[o[i],j]*x[j];
        end;
x[i]:=x[i]-sum;
        end;
end;
begin
order(s,a,o,n);
decmp(s,a,o,n);
solve(a,c,x,o,n);
end;
```

3.11. Özdeğer ve Özvektörler

$(A)_{nxn}$ 'lik bir kare matris ve X, n- boyutlu bir vektör olsun. Y=AX, N boyutlu uzaydan kendi içine bir lineer dönüşüm olarak göz önüne alınabilir. Biz; **AX=λX** şartını sağlayan X vektörleri kompleks sayılardan ibarettir.Yani;

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ olmak üzere, **AX=λX** denklemini sağlayan **λ** sayılarına A **matrisinin öz değeri veya karakteristik değeri** denir.

Tanım.3.11:A bir kare matris olmak üzere;**AX=λX** özelliğindeki sıfır olmayan **X** vektörüne A'nın öz vektörü, λ değerlerine de A'nın öz değerleri denir.**(A-λI)X=0 olsun.**Bu denklemin aşikar çözümden başka çözümlerinin olması için gerek ve yeter şart det (A-λI)≠0 olmasıdır.

Özdeğer problemlerini çözmek için yukarıdaki determinanttan λ öz değerinin bulunarak her bir özdeğere karşı gelen özvektörleri belirlemektir.Bu nedenle yukarıdaki determinant açıldığında n. dereceden bir polinom elde edilir ki bu polinoma **karakteristik polinom** denir. Bundan dolayı A matrisinin en çok n tane özdeğeri olur.

AX=λX denkleminden , (AX-λX)=0 ise (A-λI)X=0

denklemi elde edilir.Bu denklem bize bir lineer homojen denklem sistemini verir.Bu sistemin sıfırdan farklı çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır.Yani;

$$\left|A-\lambda I\right|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

olmalıdır. $\left|A-\lambda I\right|$ ifadesi λ ya göre n. dereceden bir polinom olup bu polinoma A matrisinin **karakteristik polinomu** denir. $\left|A-\lambda I\right|=0$ denklemine de A matrisinin **karakteristik denklemi** denir.Karakteristik polinom,

$$P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_n$$

Şeklinde bir polinomdur.Bu polinomun n tane gerçel ya da karmaşık kökü vardır.P(x) polinomunda $a_1=-izA \ \ ve \ \ a_n=(-1)^n\left|A\right|$ dır.

Örnek 3.8: $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz?

Çözüm 3.8: det(A- λI)=0 ifadesinden;

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+8\lambda^2-19\lambda+12=-(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-4)=0$$

denklemi elde edilir ve buradan özdeğerler;λ=1 , λ=0 , λ=4 olarak bulunur.

Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise;

$\Rightarrow$ λ=1 için; $2x_1 - x_2=0$

$-x_1+x_2-x_3=0$

$-x_2+2x_3=0$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1&=x_2 \\ 2x_3&=x_2 \end{aligned}\right\} x_2=a \qquad x^{(1)}=(2a,a,2a)^t=a(2,1,2)^t$$

$\Rightarrow$ λ=3 için; $x^{(2)}=(b,0,-b)^t=b(1,0,-1)^t$

$\Rightarrow$ λ=4 için; $x^{(3)}=c(1,-1,1)^t$

$\det[V_1,V_2,V_3]=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 0 & -c \\ a & -b & c \end{vmatrix} = -6abc$

Örnek.3.9: $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

Çözüm.3.9: $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A-I\lambda) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$(3-\lambda).((2-\lambda)(3-\lambda)-(-1)(-1)) +1((-1)(3-\lambda)-0.(-1))=0 \quad (3-\lambda)(6-5\lambda+\lambda^2-1)+\lambda-3=0$

$18-6\lambda-15\lambda+5\lambda^2+3\lambda^2-\lambda^3-3+\lambda+\lambda-3\lambda=0$

$-\lambda^3+8\lambda^2-19\lambda+12=0$ ise $\lambda_1=1,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=4$

$(3-\lambda)x_1 + (-1)x_2 =0$ **λ_1=1 için,**

$-x_1 + (2-\lambda)x_2 - x_3=0$ $2x_1-x_2=0, \quad -x_1+x_2-x_3=0, \quad -x_2+2x_3=0, \quad x_1=x_3,\ x_2=2x_1$

$-x_2 + (3-\lambda)x_3 =0$ $V^{(1)} = (x_1\ \ 2x_1\ \ x_1) = a\,(1\ \ 2\ \ 1)$

λ_2=3 için,

$-x_2=0, \quad -x_1-x_2-x_3=0, \quad -x_2=0,\ x_3= -x_1$

$V^{(2)} = (x_1\ \ 0\ \ -x_1) = b\,(1\ \ 0\ \ -1)$

λ_3=4 için,

$-x_1-x_2=0, \quad -x_1-2x_2-x_3=0, \quad -x_2-x_3=0, \quad x_3=-x_2,\ x_1=-x_2$

$V^{(3)} = (-x_2\ \ x_2\ \ -x_2) = c\,(-1\ \ 1\ \ -1)$

Örnek.3.10: $A=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -12 & -20 & 24 \\ -6 & -12 & 16 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

Çözüm.3.10: $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \det\begin{pmatrix} 7-\lambda & 6 & -3 \\ -12 & -20-\lambda & 24 \\ -6 & -12 & 16-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$(7-\lambda)[(-20-\lambda)(16-\lambda)+24.12] -6[(-12)(16-\lambda)+24.6] -3[144-(20+\lambda).6]=0$

$(7-\lambda)(-320-16\lambda+\lambda^2+20\lambda+288) -6(12\lambda-192+144) -3(144-120-6\lambda) =0$

$(7-\lambda)(\lambda^2+4\lambda-32) -6(12\lambda-48) -3(24-6\lambda)=0$

$7\lambda^2-\lambda^3+28\lambda-4\lambda^2+21\lambda-224-72\lambda+288-72+18\lambda=0,$

$-\lambda^3+3\lambda^2+6\lambda-8=0 \Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=4, \lambda_3=-2$ bulunur.

$(7-\lambda)x_1+6x_2-3x_3=0$, $-12x_1-(20+\lambda)x_2+24x_3=0$, $-6x_1-12x_2+(16-\lambda)x_3=0$

λ=1 için	**λ=4 için**	**λ=-2 için**
$6x_1+6x_2-3x_3=0$	$3x_1+6x_2-3x_3=0$	$9x_1+6x_2-3x_3=0$
$-12x_1-21x_2+24x_3=0$	$-12x_1-24x_2+24x_3=0$	$-12x_1-18x_2+24x_3=0$
$-6x_1-12x_2+15x_3=0$	$-6x_1-12x_2+12x_3=0$	$-6x_1-12x_2+18x_3=0$
$x_1=\frac{3}{2}x_3$ $x_2=2x_3$	$x_3=0$, $x_1=-2x_2$	$x_2=-2x_1$ $x_3=-x_1$
$V^{(1)}=(\frac{3}{2}x_3\ \ 2x_3\ \ x_3)$	$V^{(2)}=(-2x_2\ \ x_2\ \ 0)$	$V^{(3)}=(x_1\ \ -2x_1\ \ -x_1)$
$V^{(1)}=a(\frac{3}{2}\ \ 2\ \ 1)$	$V^{(2)}=b(-2\ \ 1\ \ 0)$	$V^{(3)}=c(1\ \ -2\ \ -1)$

Örnek.3.11: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & -4 & -3 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ matrisine karşılık gelen öz değerleri ve karakteristik denklemi bulunuz?

Çözüm.3.11:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 5 \\ -2 & -4-\lambda & -3 \\ 3 & 6 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(-4-\lambda)(-\lambda)-(-18)]+5(-12)-[(3)(-4-\lambda)]=0$$

den $=(2-\lambda)(\lambda^2+5\lambda+9)=0$

$\lambda_1=\dfrac{-5-i\sqrt{11}}{2}$ $\lambda_2=\dfrac{-5+i\sqrt{11}}{2}$ $\lambda_3=2$ olarak bulunur.

Ayrıca A matrisinin karakteristik denklemi

$(2-\lambda)(\lambda^2+5\lambda+9)=0$ dan $-\lambda^3-3\lambda^2+\lambda+18=0$ olarak elde edilir.

Örnek.3.12: A=$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin öz değerlerini ve bunlara karşılık gelen öz vektörlerini bulunuz?

Çözüm.3.12: A matrisinin karakteristik denklemi

$|A-\lambda I|$=$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix}$=(3-$\lambda$)(-2-$\lambda$)-6=$\lambda^2-\lambda-12=0$ bulunur.

Buradan , $\lambda_1=-3, \lambda_2=4$ öz değeri elde edilir.

$\lambda_1=-3$ için ,

A-λ_1I=$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dir. X=$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ için (A-λ_1I)X=0

dan bir homojen denklem sistemi elde edilir.

$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ifadesinden ,

$\left.\begin{matrix} 6x_1+2x_2=0 \\ 3x_1+x_2=0 \end{matrix}\right\}$ $x_2=-3x_1$ bulunur.Keyfi değişken olarak $x_1=1$ *seçersek*, x_2-3 bulunur.

$\lambda_1=-3$ öz değerine karşılık gelen öz vektör $X_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ olur.

$\lambda_2=4$ için

$A-\lambda_2 I=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$ dir. X=$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ için $(A-\lambda_2 I)=0$ dan bir homojen denklem sistemi elde edilir.

$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ifadesinden,

$$\left.\begin{aligned} -x_1+2x_2&=0\\ 3x_1-6x_2&=0\end{aligned}\right\}\quad x_1=2x_2$$ bulunur.Keyfi değişken olarak x_2=1 seçersek , x_1=2 bulunur.

x_2=4 özdeğerine karşılık gelen öz vektör $X_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ olur.

Örnek3.13: $\begin{bmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{bmatrix}$ matrisinin öz değerlerini ve öz vektörlerini hesaplayınız?

Çözüm3.13:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}-3-\lambda & 1 & -1\\ -7 & 5-\lambda & -1\\ -6 & 6 & -2-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}4-\lambda & \lambda-4 & 0\\ -7 & 5-\lambda & -1\\ 1 & \lambda+1 & -1-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}4-\lambda & \lambda-4 & 0\\ -7 & 4-\lambda & -1\\ 1 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix} \text{ ise}$$

$$=(\lambda-4)\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ -7 & 4-\lambda & -1\\ 1 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix} = (\lambda-4)\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ -3-\lambda & 4-\lambda & -1\\ 1 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix} = -(\lambda-4)\begin{vmatrix}-3-\lambda & -1\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-4)\begin{vmatrix}-2-\lambda & -2-\lambda\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix} = -(\lambda-4)(-\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix} = -(\lambda-4)(-\lambda-2)(-\lambda-2)=0$$

Böylece $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_3=4$ öz değerleri bulunur.

$\lambda_1=\lambda_2=-2$ için ,

(A+2I)=$\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -7 & 7 & -1\\ -6 & 6 & 0\end{bmatrix}$, X=$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ alarak (A+2I)X=0 denkleminden ,

$$\begin{aligned} -x_1+x_2-x_3&=0\\ -7x_1+7x_2-x_3&=0\\ -6x_1+6x_2&=0\end{aligned}$$

lineer homojen denklem sistemi elde edilir.Bu sistem çözülürse ,

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -7 & 7 & -1\\ -6 & 6 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$H_{21}(-7), H_{31}(-6)$ $H_{32}(-1), H_1(-1)$ $H_2(\frac{1}{6})$ $H_{12}(-1)$

r=2 , n=3 , n-r=1(keyfi değişken) olmak üzere

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ dan $x_1 = x_2, x_3 = 0$ olur. $x_1 = a \quad ise \quad x_2 = a \quad olur.\ x_3 = 0$ olur.

Böylece ; $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ öz değerine karşılık gelen öz vektör;

$$X_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ 0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{olur.}$$

Burada birbirine eşit iki öz değere karşılık bir öz vektör bulunmuştur.Ancak bazı durumlarda birbirine eşit iki öz değere karşılık lineer bağımsız iki öz vektör bulunabilir.

$\lambda_3 = 4$ için ;

$$(A-4I)=\begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{bmatrix}, \qquad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$ alarak $(A-4I)X=0$ denkleminden

$$\begin{aligned} -7x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -7x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -6x_1 + x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lineer homojen denklem sistemi elde edilir.Bu sistem çözülürse ,

$$\begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 36 & -36 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$H_{21}(-1), H_{31}(-1) \qquad H_{13}(7) \qquad H_1(1/36), H_{23} \qquad H_{13} \qquad H_{12}(-5)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

r=2 , n=3 , n-r=1 (keyfi değişken) olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ dan x_1=0 $\quad x_2 = x_3 \quad burada \quad x_2 = b \quad dersek \quad x_3 = b \quad olur.$

$\lambda_3 = 4$ öz değerine karşılık gelen öz vektör

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ b \end{bmatrix} \quad ise \quad X_2 = b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{alınabilir.}$$

Örnek.3.14: **A=**$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin öz değerlerini ve öz vektörlerini bulunuz?

Çözüm3.14:

$|A - \lambda I| = 0 \ \ ise$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12$$

$-(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0$ denkleminden

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$ bulunur.

$\lambda_1 = 1$ için

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminden

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$ elde edilir.

Burada $x_1 = a$ $dersek$ $x_2 = 2a$, $x_3 = a$ olur.

Buradan $X_1 = \begin{bmatrix} a \\ 2a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ öz vektörü bulunur.

$\lambda_2 = 3$ için,

$$\left.\begin{aligned} -x_2 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminden $x_2 = 0$ $x_1 = -x_3$ elde edilir.

Burada $x_1 = b$ $dersek$ $x_3 = -b$ olur.Buradan,

$$X_2 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ -b \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$ öz vektörü bulunur.

$\lambda_3 = 4$ için,

$$\left.\begin{aligned} -x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{denklem sisteminden} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{bulunur.}$$

Burada , $x_1 = c$ *dersek* $x_2 = -c$, $x_3 = c$ olur.Buradan,

$$X_3 = \begin{bmatrix} c \\ -c \\ c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ öz vektörü bulunur.

Örnek3.15: A , 2×2 mertebeden bir matris olsun.Eğer iz(A)=8 ve $|A|$=12 ise A matrisinin öz değerlerini bulunuz?

Çözüm.3.15:

A=$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ olsun.

$$iz(A) = a_{11} + a_{12} = 8 \quad ve$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 12 \quad dir.$$

Şimdi A matrisine karşı gelen öz değerleri bulalım.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12} = 0$$

$$a_{11}a_{22} - \lambda(a_{11} + a_{22}) + \lambda^2 - a_{21}a_{12} = 0$$

$$\underbrace{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}_{\mathbf{12}} - \lambda\underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\mathbf{8}} + \lambda^2 = 0$$

$\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$ denklemi elde edilir.Bu denklemin çözümleri $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$ dır.

Buradaki $\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$ denklemi doğrudan

$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n$, $a_1 = -izA$ *ve* $a_n = (-1)^n |A|$ eşitliklerinde verilenler yazılarak da elde edilebilirdi.

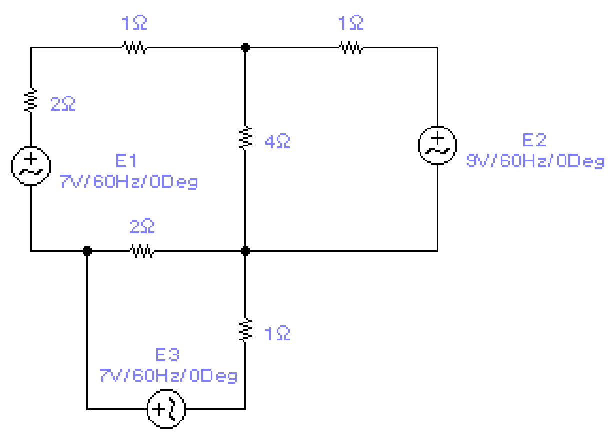
ALIŞTIRMALAR

1) Aşağıdaki lineer denklem sistemlerini çözünüz.

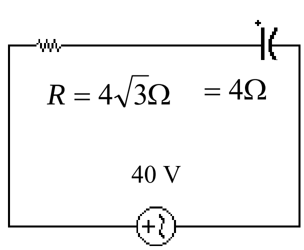
$2x-3y-z=-5$ $3x-4y+2z=-3$ $5x+2y-3z=6$	$-6u-v-2w=-9$ $-4u+5v+3w=4$ $-2u+4v-5w=-3$	$x+6y+z=0$ $2x-3y+4z=2$ $-3x+2y-3z=0$
$5x-2y+3z=18$ $-4z-2x+3y=-9$ $3x-2z+y=6$	$4x-2y+3z=26$ $-3x+7y-2z=-24$ $-2x+y-3z=-19$	$3u-2v+w=18$ $-4u+4v-2w=-26$ $5u-6v+4w=41$
$3x-y+4z=5$ $-2x+3y-z=3$ $5x-4y+3z=0$	$2x-3y-4z=-3$ $-x+2y-3z=-9$ $-5x+y+6z=6$	$u-3v+4w=9$ $-4u+5v-2w=-1$ $2u-7v+8w=15$
$4x-2y+3z=0$ $-3x+7y-2z=-5$ $-2x+y-3z=-3$	$2x-3y+z=-1$ $-3x+2y-3z=-8$ $x-6y+5z=4$	$3x-2y+z=4$ $-x+4y-5z=-6$ $6x-3y-8z=-2$
$-2x+3y-z=-4$ $-3x+4y+z=1$ $4x-3y+2z=11$	$-2u-v+4w=1$ $4u+3v-w=6$ $-u-6v-2w=-9$	$x+y+z=2$ $2x-y+z=5$ $x+z=-4$
$x+2y+2z=1$ $3x+2y-2z=-1$ $x-2z=0$	$x+y+z=4$ $2x-5y-2z=3$ $x+7y-7z=5$	$-x+y-z=0$ $2x-y-z=2$ $x+y=-1$
$x+y-z=3$ $x+z=-2$ $2y-z=3$	$x+y+z+t=0$ $x+y+z-t=3$ $x+y-z+t=-4$ $x-y+z+t=2$	$x+y+2z=1$ $2x+y-z=-2$ $3x+y+z=5$
$x-2y-z=1$ $-2x-3z=1$ $3y+z=2$	$2x+y-z=0$ $-x+2y+z=-9$ $-x+2y+z=-9$	$3x-y+2z=7$ $x-5y-4z=-7$ $2x+2y=-2$

$x+y+z=6$ $-x-y+z=0$ $3x+y-2z=-1$	$x+y-z=2$ $-2x+y+z=3$ $x+y+z=6$	$-x+2y-z=0$ $-x+y-2z=0$ $2x+y-z=0$
$x+y-z=0$ $x-3y+z=0$ $3x-y-z=0$	$2x-y+z=0$ $3x+2y+3z=0$ $x+3y+2z=0$	$-x-y-5z=0$ $x-y-z=0$ $2x+4z=0$
$x+2y+3z=0$ $2x+y-3z=0$ $3x+2y+z=0$	$10x+8y+2z=0$ $5x+4y+z=0$ $14x+12y+3z=0$	$x-y-2z=0$ $7x-3y-z=0$ $x+3y+4z=0$
$2x-y+3z=0$ $3x+2y+z=0$ $x-4y+5z=0$	$2x+3y+5z=0$ $x+y+z=0$ $3x+5y-z=0$	-4x+5y-z =0 2x-4y =-2 -7y-3z =-10

2) Şekildeki üç gözlü kapalı devreyi AX=B lineer denklem sistemi haline çevirip I_1, I_2, I_3 akımlarını bulunuz.



3) Şekle göre ;



i)Z'nin vektör diyagramını çiziniz.

ii) $\theta = ?$ $|Z| = ?$

iii)V=40 V $\Rightarrow$ I = ?

4) Aşağıdaki matris işlemlerini hesaplayınız.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a)A+B b)3A-2B c) $A^T + B^T$ d) $(A+B)^T$

e) $(A-B)^T$ f) $A + A^T$ d) $B - B^T$

5) Aşağıdaki matris işlemlerini hesaplayınız.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a)A.B b) $A^2.B$ c) $A + A^T$ d) $B - B^T$

e) $A^{-1}.B$ f) $(A.B)^{-1}$ g) $(B-A)^{-1}$ h) $(A+B)^{-1}$

6) Aşağıdaki denklem sistemlerinde a ve b değerlerini hesaplayınız.

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix}$$

7) Aşağıdaki matrislerin çarpımlarını bulunuz.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

8) Aşağıdaki matrislerin ters matrislerini bulunuz.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

9)Aşağıdaki matrislerin öz değerlerini ve bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörleri bulunuz?

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

10) A= $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin öz değer ve bunlara karşılık gelen öz vektörleri bulunuz?

11) A , $n \times n$ mertebeden bir matris ve bir k skaleri için **B=A-kI** olsun. A ve B matrislerin öz değerlerini karşılaştırınız?

12) A , 2×2 mertebesinden bir matris olsun.Eğer **iz(A)=4 ,** $|A|$**=6** ise A'nın öz değerlerini bulunuz?

BÖLÜM 4

4.İNTERPOLASYON POLİNOMLARI

4.1.Fonksiyonların Tablolarının Düzenlenmesi

Fonksiyon tablonun $x_0,x_1,x_2,....,x_n$ bağımsız değişkenlerine karşılık fonksiyonun $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1),....,y_n=f(x_n)$ değerleri vardır.

Genel olarak, tabloda x'in değerlerinden biri diğeri ile eşit aralık teşkil edecek şekilde seçilmiştir.x' in ardışık değerleri arasındaki fark, tablonun aralığı olarak isimlendirilir ve h harfi ile gösterilir.Yani;$\mathbf{h=x_1-x_0=x_2-x_1=x_3-x_2=.....=x_{k+1}-x_k}$ olarak tanımlanır.Buradan;

$$x_1=x_0+h$$

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 \\ 0,2 & 0,3 \end{bmatrix}$$

$$h=0,3-0,2=0,1$$

$$x_1=x_0+h \quad \Rightarrow \quad x_1=0,2+0,1=0,3$$

$$x_2-x_1=h \quad \Rightarrow \quad x_2=x_1+h$$

$$x_2=x_0+2h$$

$$\mathbf{x_n=x_0+n.h}$$

Tabloda verilen fonksiyonun ardışık değerleri arasındaki farkı bilmek önemlidir. Fonksiyonun ardışık değerleri arasındaki farka ileri fark denir ve $\mathbf{\Delta y_k}$ ile gösterilir.

Böylece;$\mathbf{\Delta y_k=y_{k+1}-y_k}$ ifadesinden;

$$\Delta y_0=y_1-y_0$$

$$\Delta y_1=y_2-y_1$$

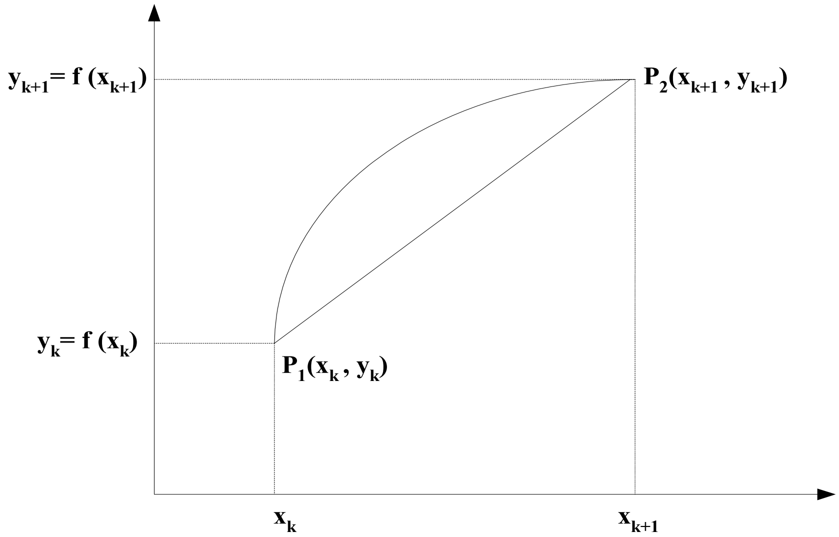
$$\vdots$$

$$\mathbf{\Delta y_n= y_{n+1}-y_n}$$

bulunur.

4.2.Lineer İnterpolasyon

Herhangi bir x fonksiyon değerine karşılık gelen fonksiyonun değeri tabloda yoksa bu fonksiyonun değerini yaklaşık değerine ve bundaki hatayı bulmak lineer interpolasyonun amacıdır.Tabloda ardışık iki x değeri x_k ve x_{k+1} olsun .Aranılan x değeri de $x_k<x<x_{k+1}$ bulunsun.x_k ve x_{k+1} değerlerine karşılık gelen $y_k=f(x_k)$ ve $y_{k+1}=f(x_{k+1})$ $[x_k,x_{k+1}]$ aralığında fonksiyonu lineer fonksiyon olarak kabul edelim.Yani fonksiyonun tarif ettiği eğriyi, 2 noktayı birleştiren kiriş olarak alabiliriz(Şekil.4.1).



Şekil.4.1. Lineer interpolasyonun grafik gösterimi

Böyle yer değiştirmeye lineer interpolasyon denir.

$P_1(x_k,y_k)$; $P_2(x_{k+1},y_{k+1})$ doğrularından geçen doğrunun denklemi:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{y-y_k}{y_{k+1}-y_k}=\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$$

Kirişin denklemi

$$\frac{y-y_k}{\underbrace{y_{k+1}-y_k}_{\Delta y_k}}=\frac{x-x_k}{\underbrace{x_{k+1}-x_k}_{h}}$$

$$*\ \frac{y-y_k}{\Delta y_k}=\frac{x-x_k}{h}$$

$$*\ y \cong y_k+\Delta y_k \cdot \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$$

y=f(x) fonksiyonun arzu edilen değerini bulmak için y_k nın tablodaki değerine ifadesini eklemektir. Lineer interpolasyonun oranını teşkil eden şudur; h uzunluğundaki (x_k,x_{k+1}) aralığı üzerinde göz önüne aldığımız fonksiyonun $y-y_k$ artımı ile argümanın $x-x_k$ artımı yaklaşık olarak doğrudan doğruya orantılıdır.Bu orantı sayısı $\frac{\Delta y_k}{h}$ dır.

Örnek.4.1: x sinx-1=0 denkleminin kökünü [0,2] aralığında lineer İnterpolasyon Yöntemi ile yüz binde beş hata ile hesaplayınız.

Çözüm.4.1:x_1=0 , x_2=2

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot (x_2 - x_1)$$

$$x_3 = 2 - \frac{f(2)}{f(2) - f(0)}.(2 - 0)$$

$$x_3 = 2 - \frac{(0{,}818594853).2}{1{,}818594853}$$

$$x_3 = 1{,}09975017$$

k	x_k	f (x_k)
1	0	-1
2	2	0,818594853
3	1,0997517	-0,02001921
4	1,12124073	0,0098346026
5	1,11416189	0,0000056235

$$x_4 = 2 - \frac{f(2)}{f(2) - f(1{,}09975017)}(2 - 1{,}09975017)$$

$$x_4 = 2 - \frac{0{,}736939877}{0{,}818594853 + 0{,}02001921}$$

$$x_4 = 2 - \frac{0{,}736939877}{0{,}83861406} = 1{,}12124073$$

$$x_5 = 1{,}2124073 - \frac{f(1{,}12124073)}{f(1{,}12124073) - f(1{,}09975017)}(1{,}12124073 - 1{,}09975017)$$

$$x_5 = 1{,}12124073 - \frac{0{,}0098346026}{0{,}0098346026 + 0{,}02001921}(1{,}12124073 - 1{,}09975017)$$

$$x_5 = 1{,}12124073 - \frac{0{,}0098346026}{0{,}029853812}(0{,}02146056)$$

$$x_5 = 1{,}12124073 - 0{,}007079534913$$

$$x_5 = 1{,}11416119$$

f(x_5)=0,0000056235 olup milyonda beş hata ile x sinx-1=0 denkleminin kökü **1.11416119**'dır.

Örnek.4.2: [1,2] aralığında $x^3+x^2-3x-3x=0$ denkleminin kökünü lineer interpolasyon yöntemi ile yaklaşık olarak çözünüz.

Çözüm.4.2: $x_1=1$, $x_2=2$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2)-f(x_1)} \cdot (x_2 - x_1)$$

$$x_3 = 2 - \frac{f(2)}{f(2)-f(1)}.(2-1)$$

$$x_3 = 2 - \frac{3}{7} \Rightarrow x_3 = 1{,}57142$$

$$x_4 = 2 - \frac{f(2)}{f(2)-f(1{,}57142)}(2-1{,}57142)$$

$$x_4 = 2 - \frac{3}{3-1{,}36449} \Rightarrow x_4 = 1{,}70540$$

k	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{f(x_k)}$
1	1	-4
2	2	3
3	1,57142	-1,36449
4	1,70540	-0,2478442
5	1,7278811	-0,0393553
6	1,7314047	-0,006104
7	1,731950	-0,0009532
8	1,7320353	-0,000147
9	1,73204885	-0,0000219

$$x_5 = 2 - \frac{f(2)}{f(2)-f(1{,}7054)}(2-1{,}7054)$$

$$x_5 = 2 - \frac{3}{3+0{,}2478442}(0{,}2946)$$

$$x_5 = 2 - \frac{0{,}8838}{3{,}2478442} = 2 - 0{,}2721189$$

$$x_5 = 1{,}7278811$$

$$x_6 = 2 - \frac{3}{3 - f(1,7278811)}(2 - 1,7278811)$$

$$x_6 = 2 - \frac{0,816356}{3 + 0,393553} \Rightarrow x_6 = 1,7314047$$

$$x_7 = 2 - \frac{3}{3,006104}(2 - 1,7314047)$$

$$x_7 = 2 - \frac{0,8057855}{3,006104} \Rightarrow x_7 = 1,731950$$

$$x_8 = 2 - \frac{3}{3,0009532}$$

$$x_8 = 2 - \frac{0,8041497}{3,0009532} \Rightarrow x_8 = 1,7320353$$

$$x_9 = 2 - 0,8038941$$

$$x_9 = 1,7320485$$

f(x_9)=0,0000219 olup milyonda iki hata ile [1,2] aralığında $x^3+x^2-3x-3x=0$ denkleminin kökü **1.7320485**'dir.

4.3.Lineer İnterpolasyon Hataları

Bir fonksiyonun hesaplanmasında lineer interpolasyonun kullanılması sonucu yapılan hata yine interpolasyon hataları ile bulunur.

F(x) fonksiyonunun tam değeri ile yaklaşık değeri arasındaki fark f(x) olsun.

$Y(x)=f(x)-y_k-\Delta y_k.\frac{x - x_k}{h}$ olur.x' in [x_k , x_{k+1}] arasındaki değeri için f(x) değerinin hesaplanması ile probleme yaklaşılır.F''(x) ikinci türevi göz önüne alınır.

$* f''(x)$ sürekli ise $* \left|f''(x)\right| \le M_2$

Eğer, $\left|f''(x)\right| \le M_2 \Rightarrow Y''(x) \le M_2$ x_k ve x_{k+1} yaklaşık değeri ile aynı ise;

$Y(x_k)=Y(x_{k+1})$ dir.[x_k,x_{k+1}] aralığında bazı noktalar için (bu noktalara -a- denir) Y(x) fonksiyonu maksimum modüle erişir.

Şimdi, Y(x) fonksiyonun (x-a) nın kuvvetleri cinsinden Taylor açılımı;

$$Y(x) = Y(a) + Y'(a).(x - a) + \frac{Y''(\xi).(x - a)}{2}$$

$$Y'(a) = 0$$

$$Y(x) = Y(a) + \frac{Y''(\xi)}{2}.(x - a)^2$$

ξ değeri x ve a değerleri arasındadır.

x_k ve x_{k+1} noktalarının a ya daha yakın noktasına $\bar{x}$ diyelim;

$Y(\bar{x})=0$ ve $Y(a) = -\dfrac{Y''(\xi).(\bar{x}-a)^2}{2}$ olur.

$[x_k,x_{k+1}]$ aralığının a'ya yakın noktası $\bar{x}$ olsun.

$$|\bar{x}-a| \le \frac{h}{2}$$

$$|Y(a)| \le \frac{Y''(\xi)}{2} \cdot \frac{h^2}{4}$$

$$|Y(a)| \le \frac{Y'(\xi) \cdot h^2}{8}$$

$$Y''(x) \le M_2$$

$$|Y(a)| \le \frac{Y'(\xi) \cdot h^2}{8} \le \frac{M_2 \cdot h^2}{8}$$

Sonuç olarak, $[x_k,x_{k+1}]$ aralığında $|Y(x)| \le |Y(a)|$ eşitsizliği hatırda tutularak;

$$|Y(x)|=|f(x)-y_k-\Delta y_k.\frac{x-x_k}{h}| \le Y(a)$$

$|Y(x)|=|f(x)-y_k-\Delta y_k.\dfrac{x-x_k}{h}| \le \dfrac{M_2 \cdot h^2}{8}$ bulunur.Böylece;

$|Y(x)| \le \dfrac{M_2 \cdot h^2}{8}$ olup bir fonksiyonda yapılan lineer interpolasyon hatası;

$\Delta_{inter} = \dfrac{M_2 \cdot h^2}{8}$ şeklinde tanımlanır.

4.4.İnterpolasyon Polinomları

4.4.1.İnterpolasyon Polinomun Problemi

y=f(x) fonksiyonu verildiğinde $x=x_0,x_1,x_2......,x_n$ değişkenleri için $y_0, y_1, y_2,..., y_n$ fonksiyon değerlerinin olduğunu kabul edelim.

$$y_0 = f(x_0)$$
$$y_1 = f(x_1)$$
$$\vdots$$
$$y_n = f(x_n)$$

Genel interpolasyon problemi;

$$P_n(x_0)=f(x_0)=y_0$$
$$P_n(x_1)=f(x_1)=y_1$$
$$\vdots$$
$$P_n(x_n)=f(x_n)=y_n$$

şartını sağlayan (Verilen noktalarda f(x) fonksiyonu değerleri ile aynı olan) n'inci dereceden $P_n(x)$ polinomunun bulunmasından ibarettir.$x=x_0,x_1,x_2......,x_n$ değişkenleri interpolasyon düğümü diye isimlendirilir.

4.4.2.Lagrange İnterpolasyon Polinomu

$\Delta_{n+1}(x)=(x-x_0).(x-x_1).....(x-x_n)$ ifadesini göz önüne alalım.

$\dfrac{P_n(x)}{A_{n+1}(x)}$ ifadesini;

$\dfrac{P_n(x)}{A_{n+1}(x)}=\sum\limits_{m=0}^{n}\dfrac{R_m}{x-x_m}$ gibi basit kesirleri toplamı şeklinde yazabiliriz.

$$R_m=\frac{P_n(x_m)}{A'_{n+1}(x_m)} \quad m=0,1,2,....,n$$

$$A'_{n+1}(x_m)=(x_m-x_0)....(x_m-x_{m-1}).(x_m-x_{m+1})....(x_m-x_n)$$

$$\frac{P_n(x_m)}{A_{n+1}(x_m)}=\sum_{m=0}^{n}\frac{P_n(x_m)}{A'_{n+1}(x_m)(x-x_m)}$$

$$P_n(x)=\sum_{m=0}^{n}f(x_m).\frac{(x-x_0).(x-x_1)...(x-x_{m-1}).(x-x_{m+1})....(x-x_n)}{(x_m-x_0).(x_m-x_1)...(x_m-x_{m-1}).(x_m-x_{m+1})....(x_m-x_n)}$$

4.4.3.Lagrange İnterpolasyon Polinom Hatası

$f(x)-P_n(x)=R_n(x)$

$$|R_n(x)|\le M_{n+1}(\alpha;\beta)\frac{|A_{n+1}(x)|}{(n+1)!}$$

$$M_{n+1}(\alpha;\beta)=\max\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

α ve β sırasıyla x_m ve x gibi (n+2) tane noktalanır büyüğü ve küçüğüdür.

Örnek.4.3:x'in 2,3 ve 4 değerlerine karşılık f(x)=lnx fonksiyonunun;

a) Lagrange interpolasyon polinomunu
b) x=2,5 için interpolasyon hatasını bulunuz.

Çözüm.4.3:a) $P_2(x)= a_0+a_1x+a_2x^2$

$$P_2(x)=0,6931.\frac{(x-3).(x-4)}{(2-3).(2-4)}+1,0986.\frac{(x-2).(x-4)}{(3-2).(3-4)}+1,3863.\frac{(x-2).(x-3)}{(4-2).(4-3)}$$

b) $R_2(2,5)$=?

$$|R_2(2,5)|\le M_{2+1}(2;4)\frac{|A_3(2,5)|}{3!}$$

α ve β düğümler için(x değerleri) en küçük ve en büyük değer olup α=2 ve β=5 alınarak;

$$|R_2(2,5)|\le M_3(2;4)\frac{|A_3(2,5)|}{3!}$$ yazılır ve;

$$A_{n+1}x=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).........(x-x_3)$$
$$A_3(2,5)=|(2,5-2)(2,5-3)(2,5-4)|=0,375$$ ile $$|R_2(2,5)|\le\frac{1}{4}\cdot\frac{0,375}{3!}=0,0156$$

bulunur.

4.5.Newton İnterpolasyon Polinomlar

$x_0,x_1,x_2,......,x_n$ gibi eşit aralıklı noktalarına karşın $y_0=f(x_0),.....,y_n=f(x_n)$ değerlerinin bilindiğini varsayalım.Bu (n+1) nokta n-dereceden bir polinom belirtir.

$P_n(x)=a_0+a_1.(x-x_0)+......+ a_n.(x-x_0).(x-x_1)......(x-x_{n-1})$ ifade etmeye çalışacağız.

Öyle ki bu polinomda;

$P_n(x_0)=y_0$; $P_n(x_1)=y_1$;.......; $P_n(x_n)=y_n$ 'dir.

Bu değerler $P_n(x)=a_0+a_1.(x-x_0)+......+ a_n.(x-x_0).(x-x_1)......(x-x_{n-1})$ eşitliğinde yerine yazılırsa bilinmeyen $a_0,a_1,.....,a_n$ katsayıları hesaplanabilir.

$P_n(x_0)=a_0 \Rightarrow a_0=y_0$

$P_n(x_1)=a_0+a_1(x-x_0)$

Newton interpolasyon polinomu sadece eşit aralıklı x'ler olduğu zaman kullanılabilir.

Buna göre;

$x_1-x_0=x_2-x_1=.......=x_n-x_{n-1}=h$ dersek;

$P_n(x_1)=a_0+a_1\underbrace{(x-x_0)}_{h} \Rightarrow y_1=y_0+a_1.h$

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = a_1$$
$$y_1 - y_0 = \Delta y_0$$
$$a_0 = y_0$$
$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} \quad (h = 0,1,2,...)$$

olarak hesaplanır.Herhangi bir x değerine interpolasyon hatası;

$$\left|R_n(x)\right| \le M_{n+1}(\alpha;\beta)\frac{\left|A_{n+1}(x)\right|}{(n+1)!} \quad (\alpha \le x \le \beta)$$
$$M_{n+1}(\alpha;\beta) = \max\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

formülü ile hesaplanır.**(Hata=Gerçek Değer-Hesaplanan Değer)**

Örnek.4.4: x'in 2,3,4,5 değerlerine karşılık fonksiyonun f(x)=lnx değeri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

a) Newton interpolasyon polinomu bulunuz.

b) x=3,5 için interpolasyon polinom hatasını bulunuz.

Çözüm.4.4:

a)

x	**y**	**Δy**	**Δ^2y**	**Δ^3y**
2	**0.6931**			
		0.4055		
3	1.0986		**-0.1178**	
		0.2867		**0.05321**
4	1.3863		-0.0646	
		0.2231		
5	1.6094			

Bu tabloda a_n değerleri altı çizili farklar olup;

$P_3(x)=a_0+a_1.(x-x_0) + a_2.(x-x_0).(x-x_1) + a_3.(x-x_0).(x-x_1)(x-x_2)$

$a_0=y_0=0{,}6931$ ve h=1 ise;

$$a_1=\frac{\Delta y_0}{h}=\frac{0{,}4055}{1}=0{,}4055 \Rightarrow a_1=\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}=\frac{-0{,}1178}{2!}$$

$$a_2=\frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}=\frac{-0{,}0932}{3!}$$

$$P_3(x)=0{,}6931+0{,}4055(x-2)-\frac{0{,}1178}{2}(x-2)(x-3)+\frac{0{,}0532}{6}(x-2)(x-3)(x-4) \text{ bulunur.}$$

b) $$|R_n(x)|\le M_{n+1}(\alpha;\beta)\frac{|A_{n+1}(x)|}{(n+1)!}\Rightarrow|R_3(3{,}5)|\le M_4(2;5)\frac{|A_4(3{,}5)|}{(4)!}$$

$$\Rightarrow M_4(2;5)=\max|f'''(x)|\Rightarrow(\ln x)'''=\frac{3}{x^4}=\frac{3}{8}\Rightarrow|R_3(3{,}5)|\le\frac{3}{8}\cdot\frac{0{,}5625}{(4)!}=0{,}0088$$

$A_4(3{,}5)=((3{,}5-2).....(3{,}5-6))00{,}5625$ olup;

Hata=ln3,5-$P_3(3{,}5)$=-0,0024 Hata bulunan interpolasyon hatasından daha küçüktür.

Örnek.4.5: x'in 3,4,5,6 değerlerine karşılık f(x)=lnx fonksiyonunun;

a) Lagrange ve Newton interpolasyon polinomu bulunuz.

b) x=4,5 için interpolasyon polinom hatasını bulunuz ve gerçek hatayla karşılaştırın.

Çözüm.4.5:a)

x	3	4	5	6
$y=\ln x$	1,0986	1,3862	1,6094	1,7917

$\Delta x=1$

Lagrange İnterpolasyon Polinomu:

$$P_3(x)=1{,}0986.\frac{(x-4)(x-5)(x-6)}{(3-4)(3-5)(3-6)}+1{,}3862.\frac{(x-3)(x-5)(x-6)}{(4-3)(4-5)(4-6)}+1{,}6094.\frac{(x-3)(x-4)(x-6)}{(5-3)(5-4)(5-6)}$$
$$+1{,}7917.\frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(6-3)(6-4)(6-5)}$$

Newton İnterpolasyon Polinomu:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
3	1,0986			
		0,2876		
4	1,3862		-0,0624	
		0,2232		0,0235
5	1,6094		-0,0409	
		0,1823		
6	1,7917			

$$P_3(x)=1{,}0986+\frac{0{,}2876}{1^1.1!}.(x-3)-\frac{0{,}0644}{1^2.2!}.(x-3)(x-4)$$
$$+\frac{0{,}0235}{1^3.3!}.(x-3)(x-4)(x-5)$$

İnterpolasyon Hatası:

$$|R_3(x)|\le\left|M_4(3;6).\frac{A_4(x)}{4!}\right|$$

Gerçek Hata = |Gerçek Değer - Hesaplanan Değer|

Gerçek Değer = ln(4,5) = 1,5040

b)

$$f(x)=\ln x \qquad f^{I}(x)=\frac{1}{x} \qquad f^{II}(x)=\frac{-1}{x^2} \qquad f^{IV}(x)=\left|\frac{-6}{x^4}\right|=\frac{6}{x^4} \qquad M_4(3;6)=\frac{6}{3^4}=\frac{6}{81}$$

$$A_4(4{,}5)=\left|(4{,}5-3).(4{,}5-4).(4{,}5-5).(4{,}5-6)\right|=0{,}5625 \qquad \left|R_3(4{,}5)\right|\le\left|\frac{6}{81}.\frac{0{,}5625}{24}\right|=0{,}0017$$

Lagrange İnterpolasyon Polinomu için Gerçek Hata:

$$P_3(4{,}5)=1{,}0986.\frac{0{,}5.(-0{,}5).(-1{,}5)}{-6}+1{,}3862.\frac{1{,}5.(-0{,}5).(-1{,}5)}{2}+1{,}6094.\frac{1{,}5.0{,}5.(-1{,}5)}{-2}+1{,}7917.\frac{1{,}5.0{,}5.(-0{,}5)}{6}$$

$$P_3(4{,}5)=-0{,}0686+0{,}7797+0{,}9052-0{,}1119=1{,}6849-0{,}1815=1{,}5044$$

Gerçek Hata $=\left|1{,}5040-1{,}5044\right|=0{,}0004$

Newton İnterpolasyon Polinomu için Gerçek Hata:

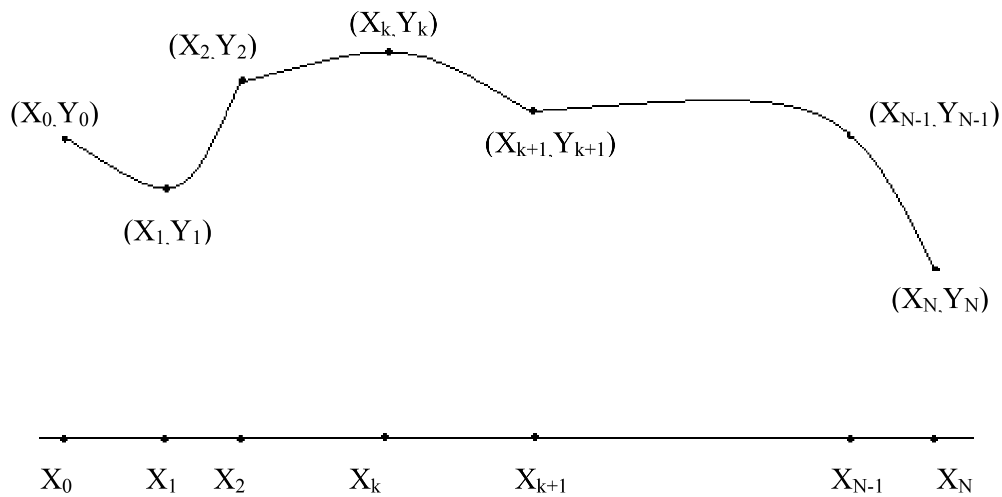
$$P_3(4{,}5)=1{,}0986+0{,}2876.(4{,}5-3)-\frac{0{,}0644}{2}.(4{,}5-3)(4{,}5-4)+\frac{0{,}0235}{6}.(4{,}5-3).(4{,}5-4).(4{,}5-5)$$

$$P_3(4{,}5)=1{,}0986+0{,}4314-0{,}0241-0{,}0014=1{,}5045$$

Gerçek Hata $=\left|1{,}5040-1{,}5045\right|=0{,}0005$

4.6.Splıne İnterpolasyon Fonksiyon

N+1 Tane (x_k,y_k) noktası için kurulan polinom interpolasyon fonsiyonu genellikle yeterli değidir.n'in polinom derecesi N-1'e göre maksimum veya minimum olabilir ve grafik bu noktalardan geçmek için kıvrılabilir.Başka bir metod ise S(x) polinomlarının en alt dereceli grafiği ardışık (x_k,y_k) ve (x_{k+1},y_{k+1}) dğüm arlığının arasına interpolate olan "piece together" (bir arda parça) dır.Sırasıyla $[x_k,x_{k+1}]$ ve $[x_{k+1},x_{k+2}]$ aralıklarının üstünden uzanan sk ve S_{k+1} eğrilerinin kesiştiği kısım düğüm olan (x_{k+1},y_{k+1}) noktasıdır.Grafiğin bu iki parçası (x_{k+1},y_{k+1}) düğümünde "tried together"(bir arada bağlı)dır.$S_k(x)$ polinomu parça parça polinom eğri şeklinde (piecewise polynomial curve) dir.Bu polinom S(x) ile gösterilir .

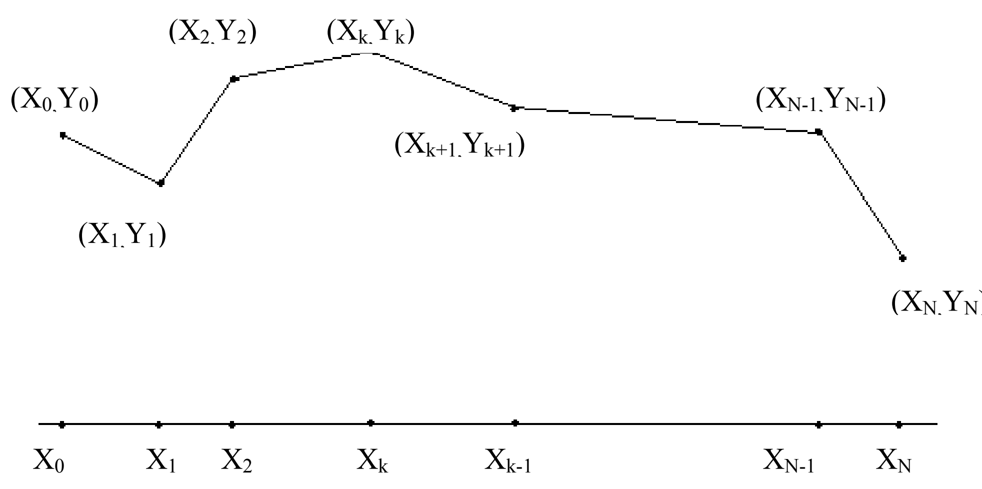


4.6.1. Parça Parça Lineer İnterpolasyon (Piecewise Linear İnterpolation)

Noktalardan geçen çizgi parçalarını içeren,poligonal yol üreten 1. derceli polinonm en basit polimomdur.Lagrane Polinom'u parça parça olumuş lineer eğrileri gösterir.

$$S_k(X) = y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \qquad (x_k \le x \le x_{k+1}) \qquad (1)$$

Sonuçta çıkan eğri kırık çizgilere benzer



Eğim formülünü kullandığımız zaman her bir çizgi çin aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$S_k(x) = y_k + d_k(x - x_k)$ burada $d_k = (y_{k+1}-y_k)/(x_{k+1}-x_k)$

Bu fonksiyon lineer spline fonksiyon şeklinde de yazılabilir:

$$S(x) = \begin{cases} y_0 + d_0(x - x_0) & ; x \in [x_0,x_1] \\ y_1 + d_1(x - x_1) & ; x \in [x_1,x_2] \\ . & . \\ y_k + d_k(x - x_k) & ; x \in [x_k,x_{k+1}] \\ . & . \\ . & \\ y_{N-1} + d_{N-1}(x - x_{N-1}) & ; x \in [x_{N-1},x_N] \end{cases} \quad (2)$$

S(x)'i bulmmak için 2. denklem şekli 1. sinden daha basittir ve daha kolaydır.Apsis noktaları $x_0<x_1<$.........................$x_{N-1}<x_N$ şeklinde sıralanır.

Sabit bir x noktasını içeren $[x_k,x_{k+1}]$ aralığı,$x-x_{k+1}<0$ olacak şekilde k+1 en küçük sayı olduğu zamana kadar $x-x_1$,..............,$x-x_k$,$x-x_{k+1}$ değerleri hesaplanır. $x_k<x<x_{k+1}$ şeklinde k'yı elde ettikten sonra.Spline fonksiyon S(x) ile gösterilir.

$x_0,x_1,$...................x_{2M} düğümlerinden tek sayılar size verildiğinde (k=0,1,………..M-1) olduğunda her bir $[x_{2k},x_{2k-2}]$ aralığında piecewise(parça parça) kuadratik polinom elde edilir.Sonuçta çıkan kuadratik spline'in hatası çift sayılı düğümlerde eğimin aşırı keskin şekilde değişmesidir ki buda grafikte bükümlere sebeb olur.kuadratik spline'in ikinci türevi çift sayılarda süreksizdir.Eğer piecewise (parça parça) kübik plinomları kullanırsak1. ve 2. türevleri sürekli olur.

4.6.2.Piecewise (parça parça) Kübik Spline

Bir takım noktalara uygun olan polinom eğrileri bilgisayar ve çizim alanlarında kullanıma sahiptir.Çizen hatalı olmayan noktalardan düzgün bir çizgi çizmek ister.Uygun olan Fransız eğrisi ve ilk bakıldığında düzgün bir eğriye benzeyen bir eğri kullanmaktır.Matematiksel olarak her $[x_k,x_{k+1}]$ aralığında $S_k(x)$ kübik fonksiyon elde etmek mümkündür ki sonuçta çıkan y = S(x) piiecewise eğrisi ile 1. ve 2. türevleri $[x_0,x_n]$ aralığındasürekli olsun.$S^{I}(x)$'in sürekliliği y = S(x) grafiğinin sivri köşeleri olmadığı anlamına gelir.$S^{II}(x)$'in sürekli olması eğrinin "radius of curvature"her noktada belirlenmiş olması anlamındadır.

N+1 (x_k,y_k) noktaları ve $x_0<x_1<$…………….$<x_N$ şeklinde verilsin.

S(x) kübik fonksiyon şekilleri :

I. $S(x) = S_k(x) = s_{k,0} + s_{k,1}(x-x_k) + s_{k,2}(x-x_k)^2 + s_{k,3}(x-x_k)^3$ için $x\varepsilon[x_k,x_{k+1}]$ ve k = 0,1……,N-1

II. $S(x_k) = y_k$ k = 0,1,……………N.

Spline her noktadan geçer

III. $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$ k = 0,1,…………….N-2

Spline sürekli fonksiyon şeklindedir.

IV. $s_k^I(x_{k+1}) = s_{k+1}^I(x_{k+1})$ k = 0,1,…………….N-2

Spline düzgün fonksiyon şeklindedir.

V. $s_k^{II}(x_{k+1}) = s_{k+1}^{II}(x_{k+1})$ k = 0,1,…… ……N-2

İkinci türevi süreklidir.

i)Kübik Spline'in Elde Edilmesi

I ve V deki şartları sağlayan kübik spline'in elde etmenin yollarını araştıralım.Her kübik polinomun 4 tane bilinmeyen noktası olduğundan o 4 noktanın bilinmesi gerekir.Noktalar N+1 şartını içerir ve III,IV ve V den her bireri N-1 şartınını içerir.Böyle olunca N+1+3(N-1) = 4N-2 belirlenir.Bu iki tane toplamada son noktanın sınırları diye söylenir. Bu iki toplam x_0 ve x_N arasında $S^I(x)$ $S^{II}(x)$'i içerir.

S(x) piecewise(parça parça) kübik ise $S^{II}(x)$ $[x_0,x_N]$ aralığında picewise(parça parça) lineerdir.Lagrange interpolasyon formülü şu şekilde gösterilir.

$$S^{II}(x) = S_k^{II}(x)$$

$$S_k^{II}(x) = S^{II}(x_k)\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} + S^{II}(x_{k+1})\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \tag{4}$$

$$m_k = S^{II}(x_k), m_{k+1} = S^{II}(x_{k+1}) ve\, h_k = x_{k+1}-x_k$$

4'de yerine koyduğumuzda

$$S_k^{II}(x) = \frac{m_k}{h_k}(x_{k+1}-x) + \frac{m_{k+1}}{h_k}(x-x_k) \tag{5}$$

5’in 2. dereceden integralini alırsak

$$S_k(x) = \frac{m_k}{6h_k}(x_{k+1} - x)^3 + \frac{m_{k+1}}{6h_k}(x - x_k)^3 + p_k(x_{k+1} - x) + q_k(x - x_k) \quad (6)$$

6’da x_k ve x_{k+1} yerine koyarak $y = S_k(x_k)$ ve $y = S_{k+1}(x_{k+1})$ kullanırsak

$$y_k = \frac{m_k}{6}h_k^2 + p_k h_k \; ve \; y_{k+1} = \frac{m_{k+1}}{6}h_k^2 + q_k h_k \quad (7)$$

p_k ve q_k için çözüp 6 da yerine koyduğumuzda

$$\mathbf{S_k(x) = \frac{m_k}{6h_k}(x_{k+1} - x)^3 + \frac{m_{k+1}}{6h_k}(x - x_k)^3 + \left(\frac{y_k}{h_k} - \frac{m_k h_k}{6}\right)(x_{k+1} - x) + \left(\frac{y_{k+1}}{h_k} - \frac{m_{k+1} h_k}{6}\right)(x - x_k)} \quad (8)$$

8’in türevini alırsak bilinmeyen sadece m_k kalır

$$S_k^I(x) = \frac{m_k}{2h_k}(x_{k+1} - x)^2 + \frac{m_{k+1}}{2h_k}(x - x_k)^2 + \left(\frac{y_k}{h_k} - \frac{m_k h_k}{6}\right) + \frac{y_{k+1}}{h_k} - \frac{m_{k+1} h_k}{6}) \quad (9)$$

X_k’yı kullanarak 10’u elde ederiz

$$S_k^I(x_k) = -\frac{m_k}{3}h_k - \frac{m_{k+1}}{6_k}h_k + d_k \; burada \; d_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} \quad (10)$$

10’da k’nın yerine 9’da ki k-1’i koyarsak ve $S_{k-1}^I(x)$ ’ de x_k’yı ıkoyarsak

$$S_{k-1}^I(x_k) = -\frac{m_k}{3}h_{k-1} - \frac{m_{k-1}}{6_k}h_{k-1} + d_{k-1} \quad (11)$$

10 ve 11 deki denklemler kullanarak m_{k-1}, m_{k+1} ve m_k arasındaki ilişki bulunur

$$h_{k-1}m_{k-1} + 2\,(h_{k-1} + h_k)m_k + h_k m_{k+1} = u_{k+1} \quad (12)$$

burada $u_k = 6(d_k - d_{k-1})$ k = 1,2,…………….N-1

ii)Kübik Spline’in Oluşturulması

12 de istenen bilinmeyen m_k değeridir.Diğer noktalar ise (x_k,y_k) noktalarıyla basit matematiksel işlemlerle bulunur.Onlar 12 deki denklemden 1 için m_0’ı ve N-1 için m_n’i atmak için kullanılır.Strateji Tablosunda V’e bak m_0 verildiği zaman h_0m_0 bulunur.k = 1 olduğu zaman 1. denklem elde edilir.

$$2(h_0+h_1)m_1+h_1m_2=u_1-h_0m_0 \qquad (13)$$

Aynı şekilde m_N verilirse $h_{N-1}m_N$ bulunur.k = N-1 olduğu zaman son denklem elde edilir.

$$h_{N21}m_{N-2}+2\,(h_{N-2}+h_{N-1})m_{N-1}=u_{N-1}-h_{N-1}m_N \qquad (14)$$

m_1,m_2,…………,m_{N-1} katsayılarını içeren N-1 denklemleri şekli için denklem13 ve denklem14 k = 2,3,…………,N-2 değerleri için denklem 12 ile beraber kullanılır.

STRATEJİNİ TANIMI	m_0 ve m_n'i içeren denklem
(i) Clamped Kübik Spline $S^I(x_0)$ ve $S^{II}(x_N)$ eğer biliniyorsa	$m_0=\frac{3}{h_0}[d_0-S'(x_0)]-\frac{m_1}{2}$ $m_N=\frac{3}{h_{N-1}}[S'(x_N)-d_{n-1}]-\frac{m_{N-1}}{2}$
(ii) Doğal Kübik Spline	$m_0=0, m_N=0$
(iii) Ekstramum Noktalarda $S^{II}(x)$ Ekstrapolasyon	$m_0=m_1-\frac{h_0(m_2-m_1)}{h_1}$ $m_N=m_{N-1}+\frac{h_{N-1}(m_{N-1}-m_{N-2})}{h_{N-2}}$
$S^{II}(x)$ Ekstremum noktaların çevresinde sabittir	$m_0=m_1, m_N=m_{N-1}$
Her ekstremum noktası için $S^{II}(x)$'i bul	$m_0=S''(x_0), m_N=S''(x_N)$

Yukarıdaki stratejilerden hangisini kllanırsan kullan Denklem 1 ve Denklem N-1'i 12 de yerine yazarak m_1,m_2,………..,m_{N-1}'i içeren HM = V şeklindeki trigonometrik lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{pmatrix} b_1c_1 & & & & & \\ a_1b_1c_1 & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{N-3}b_{N-2}c_{N-1} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{N-2}b_{N-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ . \\ . \\ . \\ m_{N-2} \\ m_{N-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \end{pmatrix} \qquad (15)$$

15 deki Lineer Sistem'in bir tek çözümü vardır.m_k değerlerini bulduktan sonra $S_k(x)$'in $\{S_k\}$değerleri aşağıdaki bağıntılarla hesaplanır.

$$s_{k,0}=y_k \qquad s_{k,1}=d_k-\frac{h_k(2m_k+m_{k+1})}{6}$$

$$s_{k,2}=\frac{m_k}{2} \qquad s_{k,3}=\frac{m_{k+1}+m_k}{6h_k}$$

Daha iyi hesaplamak için her $S_k(x)$ kübik polinom beraber şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir

$$S_k(x)=[(s_{k,3}w+s_{k,2})w+s_{k,1}]w+y_k \qquad , \qquad w=x-x_k \text{ ve } x_k<x<x_{k+1}$$

Teorem.4.1. [Kübik Spline'in Tanımı]

N+1 tane (x_0,y_0), ……………………..,(x_N,y_N) noktaları kübik spline oluştursun.Denklem 12 seçilen bir strateji ile 15 deki lineer sistemi elde etmek için kullanılır.Trigonometrik sistem m_1,m_2,………..m_{N-1}katsayıları ile çözülür . m_0 ile m_n'i belirlemek için statejilerdeki formüller kullanılır.16'da ki denklem spline katsayıları bulmak için kullanılır.Aşağıdaki lineer sistem stratejilerdeki durumları bulmak iin kullanılır.

Durum(i) : Sıkıştırılmış Kübik Spline $S^{I}(x_0)$ ve $S^{II}(x_N)$ değerlerini bul.

$$(\frac{3}{2}h_0+2h_1)m_1+h_1m_2=u_1-3[d_0-S^{I}(x_0)]$$

$$h_{k-1}m_{k-1}+2(h_{k-1}+h_k)m_k+h_km_{k+1}=u_k \qquad k=2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots N-2$$

$$h_{N-2}m_{N-2}+(2h_{N-2}+\frac{3}{2}h_{N-1})m_{N-1}=u_{N-1}-3[S^{I}(x_N)-d_{N-1}]$$

Durum(ii) : Doğal Spline $S^{II}(x_0)=0$, $S^{II}(x_n)=0$

$$2(h_0+h_1)m_1+h_1m_2=u_1$$

$$h_{k-1}m_{k-1}+2(h_{k-1}+h_k)m_k+h_km_{k+1}=u_k \qquad k=2,3,\ldots\ldots\ldots,N-2$$

$$h_{N-2}m_{N-2}+2(h_{N-2}+h_{N-1})m_{N-1}=u_{N-1}$$

Durum(iii) ekstramum noktalarda $S^{II}(x)$'i bul

$$(3h_0+2h_1+\frac{h_0^2}{h_1})m_1+(h_1-\frac{h_0^2}{h_1})m_2=u_1$$

$$h_{k-1}m_{k-1}+2(h_{k-1}+h_k)m_k+h_km_{k+1}=u_k \qquad k=2,3\ldots\ldots\ldots\ldots N-2$$

$$(h_{N-2}-\frac{h_{N-1}^2}{h_{N-2}})m_{N-2}+(2h_{N-2}+3h_{N-1}+\frac{h_{N-1}^2}{h_{N-2}})m_{N-1}=u_{N-1}$$

Durum(iv) : Ekstramum noktaların çevresinde $S^{II}(x)$ olduğunu düşünelim

$$(3h_0+2h_1)m_1+h_1m_2=u_1$$

$$h_{k-1}m_{k-1}+2(h_{k-1}+h_k)m_k+h_k m_{k+1}=u_k \qquad k = 2,3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots N\text{-}2$$

$$h_{N-2}m_{N-2}+(2h_{N-2}+3h_{N-1})m_{N-1}=u_{N-1}$$

Durum(v) $S^{II}(x_0)$ ve $S^{II}(x_N)$'i bul

$$2(h_0+h_1)m_1+h_1m_2=u_1-h_0S^{II}(x_0)$$

$$h_{k-1}m_{k-1}+2(h_{k-1}+h_k)m_k+h_k m_{k+1}=u_k \qquad k = 2,3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots N\text{-}2$$

$$h_{N-2}m_{N-2}+2(h_{N-2}+h_{N-1})m_{N-1}=u_{N-1}-h_{N-1}S^{II}(x_N)$$

Strateji(i) Eğimi içerir .Spline noktalardan geçmeye zorlanmış elastiğin şekline benzetilir.

Strateji(ii) Elastik barı noktalardan geçmeye zorlayarak elde edilen eğridir fakat uç noktalardaki eğimin spline titreşim hareketini azaltacak bir pozisyona yerleştirmek için uç npktalardaki eğimi serbest bırakmak.

Strateji(iii) $[x_0,x_2]$ aralığında tek kübik ve $[x_{n-2},x_N]$ aralığında diğer bir tek kübik spline formları olan komşu kübiklerin genişletilmiş bir son kübine eşdeğerdir.

Strateji(iv) Kübiklerin kuadratiklere değişimine eşdeğerdir.

Strateji(v) İstenen ikinci türevin her noktada olduğunu zorlama.

Örnek.4.7:(0,0),(1,0.5),(2,2) ve (3,1.5) noktaları için 5 farklı kübik spline bulunuz.Sıkıştırılmış(clamped) spline bulmak için 5.duruma göre $S^I(0) = 0,2$ ve $S^I(3) = -1$'i kullanın.$S^{II}(0) = -0,3$ ve $S^{II}(3) = 3,3$ dür.

Çözüm.4.7 :

Durum(i) $h_0 = 1$, $h_1 = 1$, $h_2 = 1$, $d_0 = 0,5$, $d_1 = 1,5$, $d_2 = -1,5$ $u_1 = 6(d_2-d_1)$'i kullanarak iki denklem buluruz :

$$(\frac{3}{2}+2)m_1+m_2=6(1,5-0,5)-3(0,5-0,2)$$

$$m_1+(2+\frac{3}{2})m_2=6(-0,5-1,5)-3(-1,0+0,5)$$

$m_1 = 2,52$ $\qquad$ $m_2 = -3,72$ bulunur.

m_0 ve m_3 hesaplamak için strateji(i)'yi kullan

$$,m_0=3(0,5-0,2)-\frac{2,52}{2}=-0,36$$

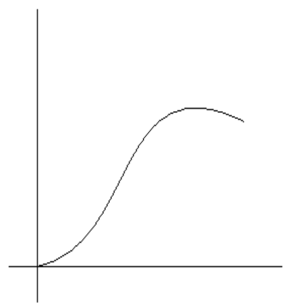
$$m_3=3(-1,0+0,5)+\frac{3,72}{2}=0,36$$

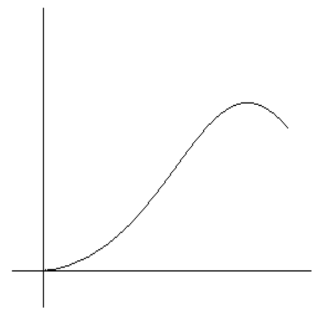
Daha sonra $m_0 = -0.36$,$m_1 = 2.52$,$m_2 = -3.72$ ve $m_3 = 0.36$ değerlerini denklem 16 da yerine koyarak spline'in katsayılarını bul.

$S_0(x) = 0.48x^3-0,18x^2+0,2x \qquad 0 \leq x \leq 1$

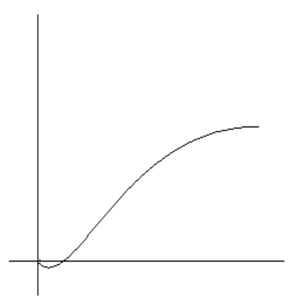
$S_1(x) = -1,04(x-1)^3+1,26(x-1)^2+1,28(x-1)+0,5 \qquad 1 \leq x \leq 2$

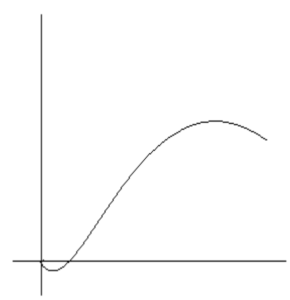
$S_2(x) = 0,68(x-2)^3-1,86(x-2)^2+0,68(x-2)+2 \qquad 2 \leq x \leq 3$



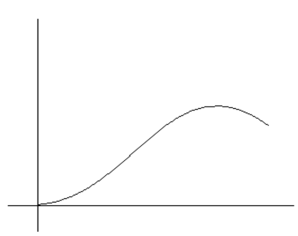


Sıkıştırılmış(clamped) kübik spline doğal kübik spline





Ekstranun noktaların çevresindeExtrapolate $S''(x)$ parabolik



$S''(x) = -0,3$ ve $S''(3) = 3,3$

Aynı değerleri kullanarak durum 1 deki denklemi elde ederiz.

$2(1+1)m_1+m_2 = 6(1,5-0,5)$

$m_1+2(1+1)m_2 = 6(-0,5-1,5)$

$m_1 =2,4 \qquad m_2 = -3,6$

spline katsayılarını bulmak için.

$S_0(x) = 0,4x^3+0,1x^2-x \qquad 0 \le x \le 1$

$S_1(x) = -(x-1)^3+1,2(x-1)^2+1,3(x-1)+0,5 \qquad 1 \le x \le 2$

$S_2(x) = 0,6(x-2)^3-1,8(x-2)^2+0,7(x-2)+2,0 \qquad 2 \le x \le 3$

m_0 ve m_3'ün bulunması için lineer sistem

$$\begin{pmatrix} 6,0 & 0,0 \\ 0,0 & 6,0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,0 \\ -12,0 \end{pmatrix}$$

$m_1 = 1,0 \qquad m_2 = -2,0$ bulunur. m_0 ve m_3 bulmak için stratejideki 3. denklemi kullan.

$m_o =1,0-(-2,0-1,0)=4,0$

$m_1 =-2,0+(-2,0-1,0)=-5,0$

spline katsayılarını hesaplamak için

$S_0(x) = -0,5x^3+2,0x^2-x \qquad 0 \le x \le 1$

$S_1(x) = -0,5(x-1)^3+0,5(x-1)^2+1,5(x-1)+0,5 \qquad 1 \le x \le 2$

$S_2(x) = -0,5(x-2)^3-(x-2)^2+(x-2)+2,0 \qquad 2 \le x \le 3$

İkinci türev uç noktalarda sabittir

$$\begin{pmatrix} 5,0 & 1,0 \\ 1,0 & 5,0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,0 \\ -12,0 \end{pmatrix}$$ ise $m_1 = 1,75$ ve $m_2 = -2,75$ bulunur.

Çözüm ikinci türev uç noktaların çevresinde sabit olduğu için $m_0 = 1,75$ ve $m_3 = -2,75$ seçeriz ve spline şudur:

$S_0(x) = 0,875x^2-0,375x \qquad 0 \le x \le 1$

$S_1(x) = -0,75(x-1)^3+0,875(x-1)^2+1,375(x-1)+0,5 \qquad 1 \le x \le 2$

$S_2(x) = -1,375(x-2)^2+0,875(x-2)^1+2,0 \qquad 2 \le x \le 3$

Durum(v) $m_0 = S^{11}(x_0)$ ve $m_3 = S^{11}(x_3)$ lineer sistem :

$$\begin{pmatrix} 4,0 & 1,0 \\ 1,0 & 1,0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,0 \\ -15,3 \end{pmatrix}$$

Çözüm $m_1 = 2,7 \quad m_2 = -4,5$

$S_0(x) = -0,5x^3-0,15x^2+0,15x \qquad 0 \le x \le 1$

$S_1(x) = -1,2(x-1)^3+1,35(x-1)^2+1,35(x-1)+0,5 \qquad 1 \le x \le 2$

$S_2(x) = 1,3(x-2)^3-2,25(x-2)^2+0,45(x-2)+2,0 \qquad 2 \le x \le 3$

4.4.Ekstrapolasyon Teknikleri

Bir eşit aralıklı değerler tablosundan alınan türemiş değerlerin doğruluğunu geliştirmek için başka bir yol vardır.Bu teknik açık bir şekilde formülü bulmadan yüksek dereceli polinomial merkezli formuller kullanmaya denktir.Bu metod en iyi bir örnekle açıklanır.

Örnek 4.6:

Eşit olarak adlandırılmış x' ler için Tablo 4.3'den $f^{I}(2.4)$ ve $f^{II}(2.4)$ değerini bulun.

Tablo 4.3

i	x_i	f_i
0	2.0	0.123060
1	2.1	0.105706
2	2.2	0.089584
3	2.3	0.074764
4	2.4	0.061277
5	2.5	0.049126
6	2.6	0.038288
7	2.7	0.028722
8	2.8	0.020371
9	2.9	0.013164
10	3.0	0.007026

İkilisinde $O(h^2)$ hatası olan eşitlik (4.9) ve (4.18) (merkezi fark formülleri) kullanacağız.

Eşitlik (4.9) da verilen $f^{I}(2.4)$'nin hesabıyla başlayalım;

$$f'(2.4) = \frac{f(2.5) - f(2.3)}{2(0.1)} = \frac{0.0491256 - 0.074764}{0.2}, \qquad (4.19)$$

$$f'(2.4)[Tam] = -0.12819 + C_1(0.2)^2,$$

Tahmin artı hatayı tam değer olarak gösteriyoruz.(h^2 ile orantılı bir nicelik)(C_1 oran sabitidir) Bu kez h=0.2 kullanarak hesaplamayı devam ettirdiğimizi varsayalım.(Sadece bir tane değerler tablosu kullanarak küçültme yapamayız.Yer kaybediyormuşuz gibi görünebilir ama sabırlı olun)

Bu hesaplama:

$$f'(2.4) = \frac{f(2.6) - f(2.2)}{2(0.2)} = \frac{0.038288 - 0.089584}{0.4}, \qquad (4.20)$$

$$f'(2.4)\left[Tam\right] = -0.12824 + C_2(0.2)^2$$

Eşitlik (4.19) ve (4.20) de C_1 ve C_2 değerleri genellikle aynı değil.Fakat aynı oldukları varsayılacaktır.ξ' ların aynı olmadığı fakat fazla fark etmediği yerlerde C' lerin her biri gerçekten $f^{(3)}(\xi)$ değerini içerir.İki değeri eşit alarak $O(h^4)$ hatası meydana getiriyoruz.C' lerin eşit olduğu varsayımından yola çıkarak C' leri yok etmek için iki eşitliği çözebiliriz.

$$f'(2.5)[Tam] = -0.12819 + \frac{1}{(0.2/0.1)^2 - 1}[-0.12819 - (-0.12824)]$$

$$= -0.12817 + O(h^4)$$

Hesaplama genel bir kurala örnek teşkil eder:O(h) hatasına sahip,h'ların oranının 2' ye 1 olduğu bir değerin iki tahmini verilmiş, tam değerin tahminini aşağıdaki gibi daha uygun bir şekilde ekstrapole edebiliriz.

Daha iyi bir tahmin=daha doğru

$$+\frac{1}{2^n - 1} \quad \text{(daha doğru-az doğru)} \; (4.21)$$

(Daha doğru olan değer h' ın daha küçük değeriyle hesaplanandır.)

Aynı düzeni h'ın 0.2 ve 0.4 değerlerini kullanaraktekrar edebiliriz.Tablo 4.4 '1. sıra eksrapolasyon 'olarak sonuçları gösteriyor.Birinci sıra eksrapolasyon $O(h^4)$ hatasına sahip, böylece 2.sıra eksrapolasyon;

$$f'(2.4)[Tam] = -0.12817 + \frac{1}{2^4 - 1}[-0.12817 - (-0.12820)]$$
$$= -0.12817 + O(h^6)' \quad dan\ gelir.$$

Tablo 4.4

h	İlk Tahmin	Birinci-sıra eksrapolasyon	İkinci-sıra eksrapolasyon
0.1	-0.12819		
		-0.12817	
0.2	-0.12824		-0.12817
		-0.12820	
0.4	-0.12836		

İlk eksrapolasyondan 5. ondalık kısımda değişiklik olmadığı için,geliştirilmiş tahminin bu birçok yere uygun olduğunu söyleyebiliriz.Asıl verideki yuvarlamaların neticemizi geçersiz kılması ve sonuçları etkileyebilmesi dışında bu sonuç doğrudur. [Veriler $f(x)=e^{-x}\sin(x)$ den elde edilmiştir, ve $f'(2.4)= -0.128171$ dir.]

İkinci Türev Hesaplamaları

$f''(2.4)$ ‘ ün geliştirilmiş tahminini elde etmek için aynı şekilde devam ediyoruz.İlk tahminler aşağıdaki gibidir;

h=0.1 için

$$f''(2.4) = \frac{0.049126 - 2(0.061277) + 0.074764}{(0.1)^2} = 0.13360$$

h=0.2 için

$$f''(2.4) = \frac{0.038288 - 2(0.061277) + 0.089584}{(0.2)^2} = 0.13295$$

h=0.4 için

$$f''(2.4) = \frac{0.020371 - 2(0.061277) + 0.123060}{(0.4)^2} = 0.13048$$

Tablo 4.5 bu değerleri ilk tahminler sütununda göstermektedir.Birinci ve ikinci sıra eksrapolasyonlar Tablo 4.4 ‘deki birinci türev hesaplamalarında olduğu şekilde bu ilk tahminlerden elde edilir.

Tablo 4.5

h	İlk Tahmin	Birinci-sıra eksrapolasyon	İkinci-sıra eksrapolasyon
0.1	0.13360		
		0.13382	
0.2	0.13295		0.13382
		0.13377	
0.4	0.13048		

$f''(2.4)$’ün 5 ondalık kısımda 0.13382’ ye eşit olduğunu yine söyleyebiliriz, fakat bu örnekte yuvarlama hataları sonucu doğru çıkartmadı.($f''(2.4)$’ün gerçek değeri 0.13379)

Ek eksrapolasyonlar yapılabilir.İkinci sıra eksrapolasyonun hatasınınO(h^6) oldugunu gerçeğini kullanarak.Fakat yuvarlama etkilerinden dolayı bu kadar ileri gidilmesi önerilmiyor.

Richardson Eksrapolasyonu

Bilinen bir fonksiyonu sayısal olarak değiştirmek istediğimizde bu aynı tekniğe başvurabiliriz. Richardson’un eksrapolasyonu olarak bilinen uygulamada, fonksiyonun sadece tablo olarak bilindiği durumlarda h değerlerini büyük almak yerine daha küçük alabiliriz. h’ın seçilmiş bazı ara değerlerinde başlarız ve $f'(x)$’i

$$f' = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$ dan buluruz.

Genişlik olaral h’ ın yarısı alınarak daha sonra $f'(x)$ için 2. bir değer hesaplarız.Bu iki değerden (4.21) eşitliğini kullanarak ekstrapole edebiliriz.Bu geliştirilmiş değer O(h^4)

hatasına sahiptir.Normal olarak, her adımda h'yi yarılayarak ve daha yüksek sıra ekstrapolasyona devam ederek bir tablo oluşturulabilir

Örnek 4.7:

$f'(1)$ değerini bulmak için $f(x)=x^2\cos(x)$ için bir Richardson tablosu oluştur. h=0.1'le başla ve $f'(2)$ için tekrarla..

Tablo 4.6 ve 4.7 sonuçları göstermektedir.Tam cevaplar $f'(1)=0.2391336$ ve $f'(2)=-5.3017770$ dir. Richardson tekniği aynı sırada birbirini takip eden iki değer aynı olduğu zaman konverjansı gösterir.

Tablo 4.6 x=1' deki türev için h=0.1 ile başlayan Richardson tablosu

0.226736			
0.236031	0.239129		
0.238358	0.239133	0.239134	
0.238938	0.239132	0.239132	0.239132

Tablo 4.7 x=2' deki türev için h=0.1 ile başlayan Richardson tablosu

-5.296478			
-5.300449	-5.301773		
-5.301454	-5.301789	-5.301790	
-5.301719	-5.301807	-5.301808	-5.301808

Türev Hesaplama Formülleri

1.Dereceden Türev İçin Formüller

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h)$$

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2) \qquad \text{Merkezi Fark}$$

$$f'(x_0) = \frac{-f_2 + 4f_1 - 3f_0}{2h} + O(h^2)$$

$$f'(x_0) = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h} + O(h^4) \qquad \text{Merkezi Fark}$$

2.Dereceden Türev İçin Formüller

$$f''(x_0) = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + O(h)$$

$$f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2) \qquad \text{Merkezi Fark}$$

$$f''(x_0) = \frac{-f_3 + 4f_2 - 5f_1 + 2f_0}{h^2} + O(h^2)$$

$$f''(x_0) = \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} + O(h^4) \qquad \text{Merkezi Fark}$$

3.Dereceden Türev İçin Formüller

$$f'''(x_0) = \frac{f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0}{h^3} + O(h)$$

$$f'''(x_0) = \frac{f_2 - 2f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3} + O(h^2) \qquad \text{Ortalama Fark}$$

4.Dereceden Türev İçin Formüller

$$f^{IV}(x_0) = \frac{f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0}{h^4} + O(h)$$

$$f^{IV}(x_0) = \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4} + O(h^2) \qquad \text{Merkezi Fark}$$

4.5 Newton-Cotes İntegrasyon Formülleri

Sayısal integrasyona formül üretmek için kullanılan genel yöntem sayısal diferansiyel için benzerdir.Fonksiyon tarafından belirlenmiş noktalardan bir polinomial geçiririz ve sonra bu polinomial'ın fonksiyona yakınlığını hesaplarız (entegre ederiz).

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x_s)dx \qquad (4.22)$$

Eşitlik (4.22) elde ettiğimiz formül doğru olmayacaktır, çünkü polinomial f(x)' le aynı değildir.$P_n(x_s)$ nin hatalı teriminin integralini alarak hata için bir ifade elde ederiz.

$$\text{Hata: } \int_a^b \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)dx$$

Eşitlik (4.22) 'den faydalanabileceğimiz bir çok yol vardır.(a,b) intagrasyon arlığı polinomialın (x_0,x_n) uygun aralığı ile eşleşebilir.Bu durumda Newton-Cotes formüllerini elde ederiz

Eğer polinomial'ın derecesi yüksek ise yuvarlamadan ve kısmi düzensizlikten kaynaklanan hata probleme neden olabilir.Buda bize sadece düşük dereceden Newton-Cotes formüllerinin neden daha sık kullanıldığını açıklar.

Polinomial aralığı ve integrasyon arlığı aynı olmak zorunda değildir.Eğer integrasyon aralığı uygun aralığın dışına çıkarsa, ancak biz ekstrapole edebiliriz ve buda büyük hatalara sebep olur.Eğer sadece bilinen bir fonksiyonun integralini almak istiyorsak normal olarak ekstrapolasyona başvurmayız.Bir sonraki bölümde göreceğimiz gibi, uygun aralığın dışında polinomialın integrasyonunu hesaplamak bizim difaransiyel eşitliklerini çözmek için birkaç önemli metoda başvurmamız gerekecektir.

Şimdi üç önemli Newton-Cotes formülünü ortaya çıkartalım.İntegrasyon sırasında polinomialimizi s'li terimlerle ifade edildiğinden integrasyon değişkenini x' ten s'ye değiştirmemiz gerekecek.dx=hds olduğuna dikkat edin.

n=1 için

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} (f_0 + s\Delta f_0)dx = h\int_{s=0}^{s=1} (f_0 + s\Delta f_0)ds$$

$$\begin{aligned} &= hf_0 s\Big]_0^1 + h\Delta f_0 \frac{s^2}{2}\Big]_0^1 = h\left(f_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0\right) \\ &= \frac{h}{2}\left[2f_0 + (f_1 - f_0)\right] = \frac{h}{2}(f_0 + f_1). \end{aligned} \qquad (4.23)$$

Hata:

$$
\begin{aligned}
&= \int_{x_0}^{x_1} \frac{s(s-1)}{2} h^2 f''(\xi) dx = h^3 f''(\xi_1) \int_0^1 \frac{s^2 - s}{2} ds \\
&= h^3 f''(\xi_1)\left(\frac{s^3}{6} - \frac{s^2}{4}\right)\Bigg]_0^1 = -\frac{1}{12} h^3 f''(\xi_1), \qquad x_0 < \xi_1 < x_1
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Buradaki ve aşağıdaki hatalı terimi elde etmek için gereken detaylar bir sonraki bölümde verilecektir.

n=2 için

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2}\left(f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0\right)dx \\
&= h\int_0^2 \left(f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0\right)ds \\
&= hf_0 s \Big]_0^2 + h\Delta f_0 \frac{s^2}{2}\Bigg]_0^2 + h\Delta^2 f_0\left(\frac{s^3}{6} + \frac{s^2}{4}\right)\Bigg]_0^2 \\
&= h\left(2 f_0 + 2\Delta f_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 f_0\right) = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4 f_1 + 2 f_2\right),
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Hatalı terimle

$$
\text{Hata} = -\frac{1}{90} h^5 f^{iv}(\xi), \qquad x_0 < \xi < x_2 \tag{4.26}
$$

Benzer şekilde n=3 için

$$
\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} P_3(x_5)dx = \frac{3h}{8}\left(f_0 + 3 f_1 + 3 f_2 + f_3\right) \tag{4.27}
$$

$$
\text{Hata} = -\frac{3h}{80} h^5 f^{iv}(\xi), \qquad x_0 < \xi < x_3 \tag{4.28}
$$

Temel olarak Newton-Cotes formülleri aşağıdaki gibidir;

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f_0 + f_1\right) - \frac{1}{12}h^3 f^{II}(\xi)$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right) - \frac{1}{90}h^5 f^{IV}(\xi)$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\right) - \frac{3}{80}h^5 f^{IV}(\xi)$$

Fark edilecek önemli bir nokta şu ki hem n=2 ve n=3 için hatalı terimler $O(h^5)$ dir.Bu demek oluyor ki kuadratik kullanırken oluşan integrasyon hatası küp kullanırken oluşanla aynıdır

4.10. Uyumlu İntegrasyon

Tek bir Δx değeri kullanarak sabit bir [a,b] aralığı üstünde f(x)'in integralini bulmak için sık sık trapezoidal kuralını ve Simpson'ın 1/3 kuralını kullanırız. f(x) fonksiyonu bilindiği zaman, Δx=h aralığı için değer seçebiliriz. Romberg tipi integrasyonu gerekli h'yi bulmak için kullanabiliriz. İki değerle başlarız. $h=h_1=(b-a)/2$ formülüne başvururuz. Sonra $h_2=h_1/2$ alırız ve formülü tekrar kullanırız., bu kez dört değerle ve sonuçları karşılaştırırız. Eğer değer yeteri kadar yakınsa bitiririz ve Richardson ekstrapolasyonu daha sonra hatayı azaltmak için kullanırız. Eğer ikinci sonuç birinciye yeteri kadar yakın değilse,tekrar h'yi ikiye böleriz ve işlemi tekrarlarız.

Bu işlemi bir örnekle açıklayabiliriz

Örnek 4.16:

[0.2,1] aralığı üstünde Simpson'un 1/3 kuralı kullanılarak $f(x)=1/x^2$'nin integralini bulun.

h= Δx'in yarıya bölme işlemini bitirmek için 0.02 hata payını kullanın. Calculus'ten biliyoruz ki, doğru cevap 4.0'dür. şimdi bu bölümde kullanılacak özel bir ifade tanımlayacağız.

$S_n[a,b]$ üzerinde $\Delta x=h_n$'le Simpson'un 1/3 kuralını kullanarak hesaplanmış değerdir.

Eğer bu ifadeyi kullanırsak, bileşik Simpson kuralı aşağıdaki hali alır

$$\mathrm{I(f)} = \mathrm{S_n[a,b]} - \frac{\mathrm{b-a}}{180} h_n^4 f^{IV}(\xi) \qquad a < \xi < b$$

Bunu h_1=(1.0-0.2)/2=0.4'le kullanarak S_1[0.2,1.0]'i hesaplarız. h'yi ikiye bölmeye devam ederiz. $h_{n+1}=h_{n/2}$

S_{n+1}[a,b]'yi hesaplayarak $|S_{n+1}S_n|<0.02$ olana kadar devam ederiz

Aşağıdaki tablo sonuçları göstermketedir.

n	h_n	S_n	$\|S_{n+1}-S_n\|$
1	0.4	4.948148	0.761111
2	0.2	4.187037	0.162756
3	0.1	4.024281	0.022117
4	0.05	4.002164	0.002010
5	0.025	4.000154	

Tablodan anlaşıldığı gibi n=5'te $|S_5-S_4|<0.02$ olduğundan tolerans kriterine ulaşmış oluyoruz. Bir Romberg ekstrapolasyonu şunu verir:

$$RS[a,b] = S_5 + \frac{S_5 - S_4}{15} = 4.00002 .$$

(RS[a,b]'yi Simpson kuralından Romberg ekstrapolasyonunu ifade etmek için kullanırız)

Uyumlu Düzen (The Adaptivbe Scheme)

Bu tekniğin dezavantajı şu ki;f(x)'in durumu böyle benzerlik gerektirmezken, h'ın değerinin tüm integrasyon aralığı üstünde aynı olmasıdır. Şekil 4.4'ü inceleyelim. Açıkça anlaşılıyor ki; [c,b] aralığında h eğrinin daha az düz olduğu [a,c] aralığından daha büyüktür.f(x)'in grafiğini inceledikten sonra tüm [a,b] aralığını istediğimiz aralıklara ayırabiliriz.

Ama biz bunu yapmamayı tercih ederiz

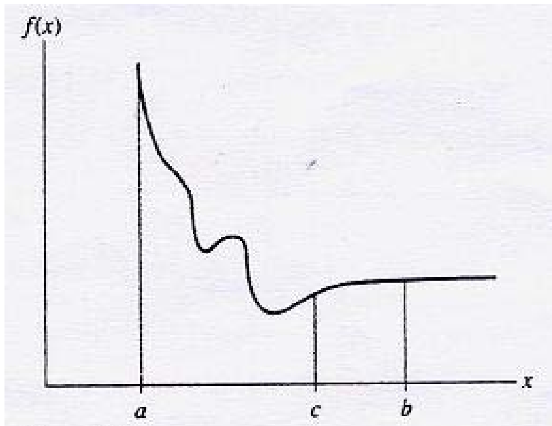


Figure 4.4

Uyumlu integrasyon otomatik olarak belirtilmiş bir değer için yeteri kadar değer seçerek [a,b] aralığının küçük aralıklarında farklı h değerleri olmasını sağlar. h'ın büyüklüğünde değişiklik olduğu yeri belirtmeyiz; bu onun içinde herhangi bir yerde meydana gelebilir. h'ın büyüklüğünü değiştirmemiz gereken noktayı tespit etmek için ikili araştırma denen bir yol kullanırız. Gerçekten, tüm [a,b] aralığı her biri içinde h'ın farklı değerleriyle daha küçük aralıklara ayrılabilir. Bu tolerans değere TOL, ve f(x)'in değerine bağlıdır.

Bu stratejiyi tanımlamak için,

x=0.2 ve x=1 aralığında $f(x)=1/x^2$ integralini bulmak için bir önceki örneği tekrar ediyoruz. 0.02'nin TOL değeri için bir değer seçiyoruz ve yuvarlamanın etkisini en aza indirmek için titiz bir şekilde hesaplamaları yaparız.Önceki gibi [a,b] aralığı iki alt aralık tanımlayarak başlarız.ilk hesaplama h_1=0.4'le [0.2,1] aralığı üzerinde bir Simpson integrasyonudur. S_1[0.2,1] dediğimiz sonuç 4.94814815'dir.

Bir sonraki adım [0.2,1] aralığının her yarısı üzerinde integral almak (h_2=0.2) ve şunları elde ederiz. S_2[0.2,0.6]= 3.51851852 ve S_2[0.6,1]=0.66851852 Şimdi S_1[0.2,1]'in ve S_2[0.2,0.6] ve S_2[0.6,1] 'nin toplamlarının arasındaki farkın TOL'dan daha büyük olup olmadığını görerek ilk hesaplamalarımızın doğruluğunu test ediyoruz.(Aslında bu farkın büyüklüğünü karşılaştırıyoruz)

$S_1[0.2,1]-(S_2[0.2,0.6]+S_2[0.6,1])=0.7611111$

Bu sonuç TOL=0.2'den büyük olduğu için h'ın daha küçük bir değerini kullanmalıyız. Orijinal aralığın bir yarısına stratejiyi uygulayarak devam ediyoruz. Keyfi olarak sağ yarım aralığı seçiyoruz ve $h=h_2=(1-0.6)/2=0.2$ ile $S_2[0.6,1]$ hesaplıyoruz ve $S_3[0.6,0.8]+S_3[0.8,1]$ ile kıyaslayarak aşağıdaki değeri bulup TOL için olan değerin yarısını alıyoruz.

$S_2[0.6,1]-(S_3[0.6,0.8]+S_3[0.8,1])=0.66851852-(0.41678477+0.25002572)$

$=0.66851852-0.66681049$

$=0.001708$ TOL=0.01'e karşılık

Bu istediğimiz sonucu verdiği için elimizdeki mevcut sonuçları kullanıyoruz ve aşağıdaki işlemi yapmak için bir Richardson ekstrapolasyonunu kullanırız;

$RS[0.6,1]=0.66681049+1/15(0.66681049-0.66851852)$

$=0.66669662$

Bitişik aralığı seçiyoruz ve aynı işlemi tekrar ediyoruz.

$S_2[0.2,0.6]=3.51851852$, $h_2=0.2$;

$S_3[0.2,0.4]=2.52314815$; $S_3[0.4,0.6]=0.83425926$;

$S_2[0.2,0.6]-(S_3[0.2,0.4]+S_3[0.4,0.6])=0.161111$ TOL=0.01 'e karşılık

Yukarıdaki hesaplamayı yapıyoruz ama hatalıdır.Bundan dolayı sağ yarım aralıkla başka bir düzeyde devam ederiz

$S_3[0.4,0.6]=0.83425926$, $h_3=0.1$;

$S_4[0.4,0.5]=0.50005144$; $S_4[0.5,0.6]=0.33334864$

$S_3[0.4,0.6]-(S_4[0.4,0.5]+S_4[0.5,0.6])=0.000859$ TOL= 0.005 'e karşılık

ve sonuç doğrudur. $RS[0.4,0.6]=0.8333428$ sonucunu elde ederiz.

Bir sonraki aralık [0.2,0.4] dür.Bunun için TOL=0.005 'i kullanırız.Bunun belirtilen kritere uymadığı görülür.Böylece bir sonraki aşamada [0.3,0.4] aralığını kullanırız.0.0025 TOL seviyesine rastlarız.

$S_4[0.3,0.4]=0.83356954$, $h_4=0.05$;

$S_5[0.3,0.35]=0.47620166$; $S_5[0.35,0.4]=0.35714758$

$S_4[0.3,0.4]-(S_5[0.3,0.35]+ S_5[0.35,0.4])=0.000220$ TOL=0.0025 ‘e karşılık

Bu bizim için uygundur, böylece RS[0.3,0.4]=0.83333492

Son alt aralığımız [0.2,0.3] ‘tür.Tekrar testle karşılaştığımızın farkına varıyoruz ve sadece ekstrapole edilmiş sonucu veririz

RS[0.2,0.3]=1.666686

Tüm RS-değerlerini eklemek son cevabı verir.

[0.2,1] üzerinde integral =4.00005957

4.11 Çok Katlı İntegraller

İlk olarak integrasyon limitlerinin sabit olduğu durumu göz önünde bulundururuz.Calculus’ ta öğrendik ki bir çift integral itare edilmiş integral olarak değerlendirilebilir.Bir başka deyişle şunu yazabiliriz;

$$\iint_A f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \qquad (4.44)$$

Eşitlik (4.44) ‘te dikdörtgensel A bölgesi çizgilerle birleştirilmiştir.

x=a , x=b , y=c , y=d

İtare edilmiş integrali hesaplama esnasında y ‘ye göre integral alırken x ‘ i sabit tutarız.

Daha önce bu bölümde ortaya çıkarılmış sayısal integral formüllerini sadece tek değişken bir integrasyona uyumlu hale getirmek oldukça açıktır.Unutmayın ki integrasyon formüllerinden herhangi birisi bağımsız değişkenin değerlerini değiştirmede değerlendirilmiş fonksiyonun değerlerinin sadece bir lineer kombinasyonudur.

Diğer bir ifadeyle, bir kuadratik formül kesin fonksiyonel değerlerin sadece bir ağırlıklı toplamıdır.

İçteki integral bir değişkenin sabit tutulmasıyla daha sonra fonksiyon değerlerinin bir ağırlıklı toplamı olarak yazılır.Sonra bu toplamların ağırlıklı toplamlarını bir arada toplarız.Eğer fonksiyon sadece bu bölge içindeki dörtgensel düzlemin düğüm noktalarında tanımlı ise , sadece bu değerleri kullanmak zorundayız.Öyle yapılması çoğu zaman uygun olmasına rağmen aynı formülün her yönde kullanılması zorunluluğuna dair bir sebep yoktur.

Örnek 4.17:

Tablo 4.15 deki fonksiyonun integralini x=1.5 , x=3.0 , y=0.2 , y=0.6 noktaları tarafından birleştirilmiş dörtgensel bölge üzerinde bu tekniği kullanarak bulalım.

Burada x-ekseninde trapezoidal kuralını ve y-ekseninde simpson 1/3 kuralını kullanalım.İlk önce hangi integrali göz önünde bulundurmamız gerektiği önemli değil ,o yüzden y sabitiyle başlayalım

$$y = 0.2; \quad \int_{1.5}^{3.0} f(x,y)dx = \int_{1.5}^{3.0} f(x,0.2)dx = \frac{h}{2}\left(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\right)$$
$$= \frac{0.5}{2}[0.990 + 2(1.568) + 2(2.520) + 4.090]$$
$$= 3.3140$$

$$\text{y} = 0.3; \quad \int_{1.5}^{3.0} f(x,0.3)dx = \frac{0.5}{2}[1.524 + 2(2.394) + 2(3.900) + 6.136]$$
$$= 5.0070$$

Benzer şekilde;

y=0.4, I=6.6522

y=0.5, I=8.2368

y=0.6, I=9.7435

Şimdi bunları simpson kuralına göre y- ekseninde topluyoruz.

$$\text{f(x, y)dx} = \frac{0.1}{3}[3.3140 + 4(5.0070) + 2(6.6522) + 4(8.2368) + 9.7435]$$
$$= 2.6446$$

Tablo 4.15 İki Değişkenli Bir Fonksiyon Tablosu, u=f(x,y)

x \ y	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.5	0.165	0.428	0.687	0.942	1.190	1.431
1.0	0.271	0.640	1.003	1.359	1.703	2.035

1.5	0.447	0.990	1.524	2.045	2.549	3.031
2.0	0.738	1.568	2.384	3.177	3.943	4.672
2.5	1.216	2.520	3.800	5.044	6.241	7.379
3.0	2.005	4.090	6.136	8.122	10.030	11.841
3.5	3.306	6.679	9.986	13.196	16.277	19.198

(Bu örnekte cevabımız 2.5944'ün analitik değeri ile uyuşmaz çünkü x-aralıkları geniştir.)

Bir önceki örnek gösteriyor ki sayısal anlamda çift integrasyon ağırlıklı fonksiyon değerlerinin bir çift toplamına kadar iniyor.Az önce yaptığımız hesaplamalar aşağıdaki formda yazılabilir;

$$\begin{aligned}\int f(x,y)dxdy &= \sum_{j=1}^{m} v_j \sum_{i=1}^{n} w_i f_{ij} \\ &= \frac{\Delta y}{3}\frac{\Delta x}{2}\left[\left(f_{1,1}+2f_{2,1}+2f_{3,1}+f_{4,1}\right)\right. \\ &+4\left(f_{1,2}+2f_{2,2}+2f_{3,2}+f_{4,2}\right) \\ &\left.+\ldots..+\left(f_{1,5}+2f_{2,5}+2f_{3,5}+f_{4,5}\right)\right]\end{aligned}$$

Bunu ağırlıklı faktörlerin kullanılan fonksiyonel değerlerin yerini göstermek için kullanılan bir matrisin piktoral operatör formunda yazmak uygundur.

$$\int f(x,y)dxdy = \frac{\Delta y}{3}\frac{\Delta x}{2}\begin{Bmatrix} 1\,4\,2\,4\,1 \\ 2\,8\,4\,8\,2 \\ 2\,8\,4\,8\,2 \\ 1\,4\,2\,4\,1 \end{Bmatrix} f_{i,j} \qquad (4.45)$$

Eşitlik (4.45) deki matriste bulunan sayılardan şunu anlıyoruz;

1,4,2,4 ve 1 değerlerinin, üzerinde integral aldığımız tablo 4.15'in en üst sırasındaki fonksiyon değerler için ağırlık faktörleri olarak kullanırız.(x=1.5 ve y'nin 0.2'den 0.6 ya değiştiği değerler)

Benzer şekilde Eşitlik (4.45)'deki matrisin ikinci sütunu y=0.4 ve x'in 1.5 den 3.0 a kadar değiştiği yerdeki fonksiyon değerlerinin bir sütunundan yararlanıldığı ağırlıklı faktörleri ifade eder.

Eşitlik (4.45)' in piktoral operatöründeki değerlerin Newton-Cotes'un tek değişkenli integrasyon için olan katsayılarda geldiğine dikkat edin.Newton-Cotes formüllerinin diğer kombinasyonları da aynı sonuçları verir.Piktoral integrasyon integrasyon formülünün istenilen herhangi bir birleşimine uyumlu hale getirilebilir.

Bir bilgisayar programına daha kolay çevrilebilen böyle piktoral operatörlerin diğer bir alternatif gösterimi vardır.Onu farklı bir şekilde de elde edebiliriz.

Tek değişken için sayısal integral formülünü göz önüne alalım;

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) \qquad (4.46)$$

Bölüm 4.9'da eğer f(x) belirli bir derecenin bir polinomiali ise böyle formüllerin doğrulandığını gördük.Farz edelim ki Eşitlik (4.46) polinomialleri bir s^* derecesine çıkartsın.

Şimdi çok katlı integral formülünü dikkate alırız;

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y,z)dxdydz \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_i a_j a_k f(x_i, y_j, z_k) \qquad (4.47)$$

Biz Eşitlik (4.47)'nin s derecesine kadar x,y ve z'deki tüm polinomialler için aynı olduğunu göstermek istiyoruz.Böyle bir polinomial toplamları s' ye eşit veya küçük, negatif olmayan α, β ve γ tamsayılarının x^α, y^β ve z^γ formundaki terimlerin bir lineer kombinasyonudur.Eğer Eşitlik (4.47)'nin bir yazılışın genel terimi olduğunu ispatlarsak , o zaman polinomial için geçerli olur.

Bunu yapmak için f(x,y,z)= $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ olduğunu kabul ederiz.

O zaman limitler sabit ve integrant değişken olduğundan,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathrm{x}^\alpha \mathrm{y}^\beta \mathrm{z}^\gamma \, dxdydz \\ &= \left(\int_{-1}^{1} \mathrm{x}^\alpha dx\right)\left(\int_{-1}^{1} \mathrm{y}^\beta dy\right)\left(\int_{-1}^{1} \mathrm{z}^\gamma dz\right) \end{aligned}$$

Her terimi Eşitlik (4.46)' ya göre tekrar yerleştirirsek;

$$I = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^\alpha\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j y_j^\beta\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k z_k^\gamma\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^\alpha \sum_{j=1}^{n} a_j y_j^\beta \sum_{k=1}^{n} a_k z_k^\gamma \qquad (4.48)$$ elde ederiz.

Şimdi toplamları elde etmek için temel bir kurala ihtiyacımız var.

Bunu basit bir durum için gösteriyoruz.

$$\left(\sum_{i=1}^{3} u_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2} v_j\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{2} u_i v_j\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} u_i v_j$$

olduğunu öne sürebiliriz.

Son eşitlik kolay fark edilebilir.Her iki tarafı genişleterek birinciyi ispatlarız.

$$\left(\sum_{i=1}^{3} u_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2} v_j\right) = \sum_{i=1}^{3} u_i \sum_{j=1}^{2} v_j$$
$$= (u_1 + u_2 + u_3)(v_1 + v_2)$$
$$= u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_2 + u_3v_1 + u_3v_2;$$
$$\sum_{i=1}^{3}\ \sum_{j=1}^{2}\ u_i v_j = (u_1v_1 + u_1v_2) + (u_2v_1 + u_2v_2) + (u_3v_1 + u_3v_2).$$

Parantezleri kaldırarak her iki tarafın aynı olduğunu görürüz.Bu prensibi kullanarak Eşitlik (4.48)'i aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$I = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_i a_j a_k x_i^{\alpha} x_j^{\beta} x_k^{\gamma} \qquad (4.49)$$

Bu gösteriyor ki Eşitlik (4.47) geçerlidir.

Yukardaki anlatılanları bir örnekle göeterelim.

Örnek 4.18:

$I = \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_{-1}^1 yze^x dxdydz$ integralinin değerini Gaussian kuadratürle x için üç terimli bir formül ve y ve z için iki terimli formül kullanarak bulun.

Önce y ve z' nin limitlerini (-1,1)'de düzenlemek için değişkenlerde değiştirme yaparız;

$$y=\frac{1}{2}(u-1), \qquad dy=\frac{1}{2}du;$$
$$z=\frac{1}{2}(v+1) \qquad dz=\frac{1}{2}dv.$$

İntegralimiz $\quad I=\frac{1}{16}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(u-1)(v+1)e^{x}dxdudv.$ $\quad$ haline gelir.

Bölüm (4.9)'dan iki ve üç –nokta Guassian formülleri;

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=(1)f(-0.5774)+(1)f(0.5774),$$
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\left(\frac{5}{9}\right)f(-0.7746)+\left(\frac{8}{9}\right)f(0)+\left(\frac{5}{9}\right)f(0.7746)$$

Sonra integral;

$$I=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3}a_i a_j b_k (u_i+1)(v_j-1)e^{x_k}$$
$$a_1=1 \qquad a_2=2$$
$$b_1=\frac{5}{9} \qquad b_2=\frac{8}{9} \qquad b_3=\frac{5}{9}$$

ve x,u,v'nin değerleri yukardaki gibi.

Toplamın birkaç örnek terimleri şunlardır;

$$I=\frac{1}{16}\left[(1)(1)\left(\frac{5}{9}\right)(-0.5774+1)(-0.5774-1)e^{-0.7446}+(1)(1)\left(\frac{8}{9}\right)(-0.5774+1)(-0.5774-1)e^{0}\right.$$
$$\left.+(1)(1)\left(\frac{5}{9}\right)(-0.5774+1)(-0.5774-1)e^{0.7746}+(1)(1)\left(\frac{5}{9}\right)(-0.5774+1)(-0.5774-1)e^{-0.7746}+....\right]$$

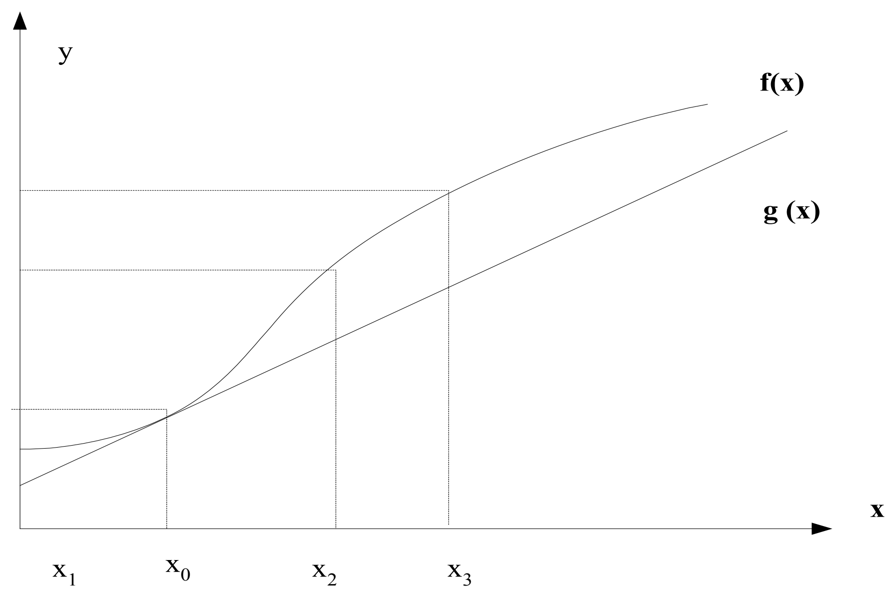
Hesaplamada , I= -0.58758' i elde ederiz.

Analitik değer = $-\frac{1}{4}\left(e-e^{-1}\right)=-0.58760$'dir…

BÖLÜM 5

TAYLOR VE MACLAURENT SERİLERİ

5.1.Taylor ve Mclauren Serisi:f fonksiyon $x_0 \in A \subset IR$ noktasında sürekli ve her mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun.$f:A\subset IR \rightarrow IR$, $x_0 \in A$ olsun.(Şekil.5.1)



Şekil.5.1.$f:A\subset IR \rightarrow IR$ fonksiyonunun grafiği

f(0) bilindiğinde x_1 sıfıra yeteri kadar yakın olduğunda $f(x_1)$'i bulabilir miyiz?

x_1 sıfıra yeteri kadar yakın olduğunda $f(x_1)$ yerine f(0) alınabilir. $f(x_1) \cong f(0)$ Fakat sıfıra x_1'den daha uzak olan x_2'nin f altındaki görüntüsü yerine f(0) almak pek doğru olmaz.Fonksiyonun x_0'daki teğetini düşünüyoruz.$f(x_2)$ yerinde de teğetin fonksiyondaki görüntüsü alınabilir.Bu teğetin denklemi;

$$g(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = f(0) + f'(0)x = y - f(0)$$
$$f(x_2) \cong g(x_2) \cong f(0) + f'(0)x_2$$

x_3 için aynı düşünce pek doğru olmaz.Bunun içinde f'nin grafiğine yakın bir eğri olarak bir doğru yerine bir parabolü düşünmek daha güzel görünür.

$h(x) = a_0 + a_1 + a_2 x^2$ düşünelim. $f(x) \cong h(x)$

$$f(0) = a_0 \;\Rightarrow\; f'(x) = a_1 + 2a_2 x \;\Rightarrow\; f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = 2a_2 \Rightarrow f''(0) = 2a_2$$

$$h(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 \Rightarrow \quad f(x_3) = f(0) + f'(0)x_3 + \frac{1}{2}f''(0)x_3^{\,2}$$

Nokta sıfırdan uzaklaşınca noktanın bu fonksiyon altındaki görüntüsünü bulmak için fonksiyon yetmeyecektir.Bu nedenle bu fonksiyona yakınsayan ve polinomlardan oluşan bir dizi aramak daha doğru görünmektedir.Diğer bir deyişle f fonksiyonu yerine $f(x)=a_0+a_1x+......+a_nx^n+....$ şeklinde bir seri kullanmak daha doğru olacaktır.Böyle bir seri;

i)Yakınsak mıdır?

ii) Yakınsak olduğu halde fonksiyona yakınsarmı?

$f(0), f'(0), ...f^{(n)}(0)$ sürekli,

$$f(x_1) \cong f(0)$$
$$f(x_2) \cong f(0) + f'(0)x_2$$
$$f(x_3) \cong f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Nokta sıfırdan çok uzaksa;

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$
$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + ... + n.a_nx^{n-1}$$
$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)..................2.1.a_n + (n+1)n(n-1)......2x + ...$$
$$f^{(n)}(0) = n!a_n \Rightarrow a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$$

I) $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$

Şeklinde bir seri elde edilir.Bu seriye Maclaurent serisi denir.Fonksiyonun sıfırda türevi olmayabilir.Eğer f fonksiyonu x=0'da n. mertebeden sürekli türeve sahip olmazsa Maclaurent serisi kullanılmaz.Onun yerine x_0 noktasında n. mertebeden sürekli türeve sahip olan bir fonksiyon kullanılır. Bu durumda;

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n$$
$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + ... + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ Buna göre;

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + ...$$

serisi elde edilir.Bu seriye de f fonksiyonunun x_0 civarındaki Taylor serisi denir.Her mertebeden sürekli türeve sahip bir fonksiyon için böyle bir seri her zaman bulunur.

Örnek.5.1: f:IR→IR , f(x)=sinx fonksiyonunu Maclaurent serisine açınız.

Çözüm.5.1:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \\ f''(0)=0 \\ f'''(0)=-1 \end{array}\right\} \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+.......+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$f(x)=\cos x \Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow f(x)=e^x \Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Örnek.5.2: $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ fonksiyonunu Maclaurent serisine açınız.

Çözüm.5.2:

$$f(x)=\frac{1}{1+x} \Rightarrow f(0)=1$$

$$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f'(0)=-1$$

$$f''(x)=\frac{2(x+1)}{(x+1)^3} \Rightarrow f''(0)=2$$

$$f'''(x)=\frac{-2.2(x+1)}{(x+1)^3} \Rightarrow f'''(0)=-4$$

$$f^{IV}(x)=\frac{4.2.(x+1)}{(x+1)^3} \Rightarrow f^{IV}(0)=8$$

$$f^{V}(x)=\frac{-8.2.(x+1)}{(x+1)^3} \Rightarrow f^{V}(0)=-16$$

$$f(x)=f(0)+f'(0).x+f''(0)\cdot\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\cdot\frac{x^3}{3!}+...........+f^n(0)\cdot\frac{x^n}{n!}+..........$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+2\frac{x^2}{2!}+(-4)\frac{x^3}{3!}+8\frac{x^4}{4!}+(-16)\frac{x^5}{5!}+......+$$

- Bir Taylor serisi ancak yakınsaklık aralığındaki noktaların fonksiyon altındaki

görüntülerini bulmak için kullanılır.

5.2.Kalanlı Taylor Serisi:

Bir seride sonsuz terim vardır.Yakınsaklık aralığındaki bir noktanın f fonksiyonu altındaki görüntüsünü seri yardımıyla bulmak istediğimizde sonsuz terimi toplamamız gerekiyor.Bu nedenle serinin ancak sonlu tane terimi yardımıyla bu görüntü bulunur.Tabii ki bu değer gerçek değer değil belli oranda hatalı değerdir.Bu hataya kesme hatası denir.

f fonksiyonunun x_0 civarındaki Taylor serisi;

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots\dots\dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}} + \dots\dots \quad \text{olur.}$$

n-tane terimden sonraki terimler ihmal edildiğinden;

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots\dots\dots\dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \underbrace{R_n}$$

R_n kalan terim ya da atılan terim olarak adlandırılır.

Gerçek f(x) değeri=Hesaplanan değer+R_n

Buna göre R_n bulunursa kesme hatası bulunmuş demektir.

$$R_n = f^{(n)}(\xi)\frac{(x - x_0)^n}{n!} \qquad\qquad \xi \in (x_0, x)$$

$f^{(n)}(\xi) \le M$ olacak şekilde bir M sayısı vardır.

$$|R_n| \le \left| M.\frac{(x - x_0)}{n!} \right|$$

O halde, Taylor serisinde ilk n terimin toplamı f(x) olarak alındığında yapılan maksimum. kesme hatası; $\left| M.\frac{(x - x_0)^n}{n!} \right|$ ile verilir.

Örnek.5.3: $e^x = 1 + x + \dots\dots\dots + \frac{x^n}{n!}$ e=?

Çözüm.5.3:

$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots\dots\dots + \frac{1}{n!}$ ilk n terimi aldığımızda yapılan hata nedir.

$$|R_n| \le \left| M.\frac{1}{n!} \right|$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right\} \quad (0,1) \text{ de } M=3$$

R_n'in milyonda birden küçük kalması için kaçıncı terime kadar işlem yapılması gerekir.

$$|R_n| \le \left| M.\frac{1}{n!} \right| \le 0{,}000001 \Rightarrow \quad \left| 3 \cdot \frac{1}{n!} \right| \le 0{,}000001 \Rightarrow \qquad n! \ge 3.10^6$$

n=10 alabiliriz.Çünkü;10!=3.628.880

O halde, e^x serisinin 10 terimini alarak e'yi milyonda 1 hata ile hesaplarız.

Örnek.5.4: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ serisinde maksimum. hatanın milyonda 5'den küçük kalması için kaçıncı terime kadar işlem yapılmalıdır?

Çözüm.5.4: $|R_n| \le \left|M \cdot \frac{x^n}{n!}\right|$

f(x)=sinx'in maksimum. değeri 1'dir.

$|R_n| \le 0,000005$ kalması için;

$\left|M \cdot \frac{x^n}{n!}\right| \le 5.10^{-6} \Rightarrow M=1 \Rightarrow \left|\frac{x^n}{n!}\right| \le 5.10^{-6}$ yazılır ve x=1,5708 alınır.

n=11 almalıyız.Yani, ilk 11 tane terime kadar açmalıyız.Bu da; $\frac{x^9}{9!}$'de biter.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

5.3.Taylor Polinomu

Taylor polinomu: *f* fonksiyonunun eğrisine a noktasındaki teğet doğrusu ile yaklaşabiliriz.Bunu a yakınında f fonksiyonuna bir doğru ile doğrusal yaklaşım olarak adlandırabiliriz ve

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Olmak üzere $P_1(x)$ e 1. dereceden *a* da *Taylor Polinomu* denir.

Örnek: f (x)=ln x için a=1 de $P_1(x)$ değerini ve bunu kullanarak ln 0.9 ve ln 1.5 değerlerini yaklaşık olarak bulunuz.

Çözüm: f (x)=ln x ise $f'(x)=\frac{1}{x}$ dir.Böylece f (1)=0 ve f ' (1)=1 dir.

$P_1(x)$=0+1 (x-1)= x-1 sonuçta 1 yakınındaki x için

Ln x ≈ x – 1 ve ln 0.9 – 1 = -0.1 ln 1.5 ≈ 1.5 – 1=0.5
ln 0.9 ve ln 1.5 in değerleri – 0.1054 ve 0.4055 dir.Beklendiği gibi bu yaklaşım ln 0.9 için ln 1.5 den çok daha iyidir.Çünkü 0.9,1 e 1.5 den daha yakındır.

n. dereceden Taylor polinomu: Lineer yaklaşım $P_1(x)$, *x* noktası *a* noktasının yakınında olduğu zaman daha iyidir.Fakat *x* noktası *a* ya yakın değilse daha az iyidir.Beklendiği gibi daha yüksek dereceden terimlerin toplamı daha iyi bir yaklaşım verecektir.Böylece quadratik polinom

$$P_2(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2$$

dir. f için Taylor serisinin ilk üç teriminden oluşur. $P_1(x)$ lineer yaklaşımından f için daha iyi yaklaşımdır.Böylece *a* da *n.* dereceden Taylor polinomu:

$$P_n(x)= f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}f^n(a)(x-a)^n \text{ dir.}$$

Örnek: $f(x)=\ln x$ için a=1 de $P_2(x)$ yi bulunuz ve bunu kullanarak ln 0.9 ve ln 1.5 değerlerini yaklaşık olarak bulunuz.

Çözüm: *$f(x)=\ln x$ ise $f'(x)=\frac{1}{x}$ ve $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$ dir.Böylece $f(1)=0$, $f'(1)=1$ ve $f''(x)=-1$ dir.Dolayısıyla*

$$P_2(x)=0+1(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2=(x-1)-\frac{1}{2}(x-a)^2 \quad \text{dir.Neticede 1 e yakın x ler için}$$

$$Ln\, x \approx (x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2 \qquad ve$$

$$Ln\ 0.9 \approx (0,9-1)-\frac{1}{2}(0.9-1)^2 = -0,1050$$

$$Ln\ 1.5 \approx (1.5-1)-\frac{1}{2}(1.5-1)^2=0.3750$$

5.4.Binom Teoremi

$$(a+b)^0= \quad 1$$

$$(a+b)^1= \quad a+b$$

$$(a+b)^2= \quad a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3= \quad a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a+b)^4= \quad a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

……………………………………………………………

$$(a+b)^n = a^n + n.a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!}+\ldots. \qquad (|a|>|b|)$$

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots\ldots\ldots \quad (|x|<1)$$

5.5.Bir Seri Yardımıyla Bir Fonksiyonun Tarifi:

$f(x)=\frac{1}{1+x}$ fonksiyonu seriye açılırsa;

$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\ldots\ldots$ olur.

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+c_nx^n+\ldots\ldots\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \text{ (c=sabit)(x=değişken)}$$

serisine Kuvvet serisi denir.

Farz edelim ki. f(x)

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_{n-1} x^{n-1} + ...\qquad \textbf{(*)}$$

kuvvet serisi yardımıyla ifade edilsin.

x=0 için $f(0)=c_0$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + ...$$
$$f'(0) = c_1$$
$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + ...$$
$$f''(0) = 2c_2$$
$$f'''(x) = 3.(2)c_3 + 4(3)(2)c_4 x + ...$$
$$f'''(0) = 6c_3 = 3.2.c_3$$

bu şekilde devam edilip **c_i** sabitleri f fonksiyonu ve türevleri cinsinden;

$$c_0 = f(0) \Rightarrow c_1 = f'(0) \Rightarrow c_2 = \frac{f''(0)}{2} \Rightarrow c_3 = \frac{f'''(0)}{2.3} \Rightarrow ....\, c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

olarak bulunur ve bu değerler (*) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

serisi elde edilir. İşte bu seriye y=f(x) fonksiyonunun x=0 civarındaki kuvvet serisi yada **Maclaurent serisi denir.** x=0'da tanımlı olmayan veya Maclaurent serisine açılamayan fonksiyonlar (f(x)=lnx gibi), x=a civarında Taylor serisine açılır.Yani, f(x), x'in kuvvetleri yerine (x-a)' nın kuvvetleri cinsinden yazılır.Taylor serisi de yine kuvvet serileri kullanılarak formülüze edilir.Varsayalım ki;

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^n + ...$$

kuvvet serisi yardımıyla ifade edilsin.Buradan;

$f(a)=c_0$ olup devam edilirse;

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + ... f'(a) = c_1$$
$$f''(x) = 2c_2 + 3.2.c_3(x-a) + ... f''(a) = 2c_2$$
$$f'''(x) = 3.2.c_3 + 4.3.2.c_4(x-a) + ... f'''(a) = 3.2.c_3$$

……………………………………………………..

$$f^{(n)}(x) = n!.c_n + ... f^{(n)}(a) = n!.c_n$$

bulunur.Böylece, y=f(x) fonksiyonunun x=a civarındaki kuvvet serisi yada **Taylor serisi** elde edilir. x=0'da tanımlı olmayan veya Maclaurent serisine açılamayan fonksiyonlar (f(x)=lnx gibi), x=a civarında Taylor serisine açılır.Yani, f(x), x'in kuvvetleri yerine (x-a)' nın kuvvetleri cinsinden yazılır.

Taylor Serisi:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + ...$$

olarak tanımlanır.

5.6.Maclaurent Polinomları

n. dereceden Taylor polinomu *a=0* olduğundan *n.* dereceden Maclaurin polinomunu verir.

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + ... + \frac{1}{n!} f^n(0)\, x^n \text{ dir.}$$

Örnek: e^x ve cos x için *n.* dereceden Maclaurin polinomlarını bulunuz. *n=4* kullanarak $e^{0.2}$ ve cos 0.2 değerlerini yaklaşık olarak bulunuz.

Çözüm:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - .....+(-1)^{n/2}\frac{1}{n!}x^n \qquad n=\text{çift}$$

dir.Böylece n=4 kullanarak x=0.2

$$e^{0.2} \approx 1 + 0.2 + \frac{1}{2!}(0.2)^2 + \frac{1}{3!}(0.2)^3 + \frac{1}{4!}(0.2)^4 = 1.2214000$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2!}(0.2)^2 + \frac{1}{4!}(0.2)^4 = 0.9800667 \qquad \text{dir.}$$

5.7.Maclaurin ve Taylor serileri ile Maclaurin ve Taylor formüllerinin karşılaştırılması

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a)+\frac{1}{3!}(x-a)^3 f'''(a)+\mathbf{..................} + \frac{1}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}f^{(n-1)}(a)+\frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(x_1)$$

şeklindeki Taylor formülleri ile;

$$f(x)=f(0)+x f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+..........+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(x_1)$$

şeklinde Maclaurin formülü elde edilmişti.

$F(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}\,f''(a)(x-a)^2+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}f^{n}(a)(x-a)^n+\ldots\ldots\ldots$

Şeklinde Taylor serisi ile

$f(x)=f(0)+x\,f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots\ldots\ldots.+\frac{x^n}{n!}\;f^{(n)}(x_1)+\ldots\ldots\ldots..$ şeklindeki Maclaurin serisi ile karşılaştırırsak bunların ilk *n* terimlerinin birbirinin aynı olduğu ve serilerdeki *n.* terimden sonraki terimlerin yerine , formüllerde birer tamamlayıcı terimin gelmiş olduğu görülür.O halde serilerin *n.* terimden sonraki terimlerin toplamlarının limiti bu tamamlayıcı terime eşit olmalıdır.Bu tamamlayıcı terimler Taylor formülü için

$$R_n=\frac{h^n}{n!}\;f^{(n)}(x_1)=\frac{h^n}{n!}\;f^{(n)}(a+\theta h)\qquad \text{ve}$$

Maclaurin formülü için

$$R_n=\frac{x^n}{n!}\;f^{(n)}(x_1)=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta h)$$

Şeklinde olup bunlara *n* terimden sonraki kalan adı verilir.Bu formüller yardımıyla f (x) in değerinin hesabında ilk *n* terim alınmak sureti ile hesap yapılırsa hata R_n e eşit olacaktır.Bu terimin gerçek değerinin bulunması mümkün olamayacağından hatanın mertebesini belirtmek üzere R_n in kimden küçük kaldığı araştırılır. *a* ile $a+h$ aralığında $f^{(n)}(x)$ i en büyük kılan *x* değeri x' ise Taylor formülü için

$$|R_n| \le \left| f^{(n)}(x')\,\frac{h^n}{n!}\right|$$

ve maclaurin formülü için

$$|R_n| \le \left| f^{(n)}(x')\,\frac{x^n}{n!}\right|$$

dir.Bunlara göre *x* in verilmiş bir değeri için *f (x)* fonksiyonunun değeri istenen bir yaklaşıklıkla hesaplamak mümkündür.

Örnek: *Hata 0.0001 den küçük olmak şartıyla hangi aralıkta sin x yerine x alınabilir?*

$$Sin\,x = x-\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

$$Sin\,x = x+\frac{x^3}{3!}f'''(\theta x)\qquad ve$$

$$f'''(x)=-\cos\,\theta\,;\quad f'''(\theta x)=-\cos\theta x\qquad olarak$$

$$|R|=\left|\frac{x^3}{3!}f'''(\theta x)\right|=\left|\frac{x^3}{3!}\;-\cos\theta x\right|\; dir.$$

Cos θx in en büyük değeri 1 olup

$$|R| < \left| \frac{x^3}{3!} \right| < 0,0001$$

$x^3 < 0,0006$; $x < \sqrt[3]{0,0006}$ *x < 0,0843 radyan veya x <4°50′ bulunur.*

ÖRNEK:

f (x) =arc tg x fonksiyonunun açınımı.

$f(x)=\text{arc tg } x$ $\qquad$ $f(0)=0$

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=(1+x^2)^{-1}$ $\qquad$ $f'(0)=1$

$f''(x)= -2x(1+x^2)^{-2}$ $\qquad$ $f''(0)=0$

$f'''(x)= -2(1+x^2)^{-2}+6x^2(1+x^2)^{-3}$ $\qquad$ $f'''(0)= -2= -2!$

$f^4(x)= -8x(1+x^2)^{-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $f^4(0)=0$

$f^5(x)=24+ (1+x^2)^{3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $f^5(0)=24=4!$

$$\text{arc tg } x= x - \frac{2!}{3!}x^3+\frac{4!}{5!}x^5-\frac{6!}{7!}x^7+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=x - \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\ldots\ldots\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Bulunur.Bu serinin yakınsaklık aralığı için

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+2}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}} \right| = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = x^2 < 1$$

olduğundan sınırları da ayrıca kontrol edilerek , -1 ≤ x ≤ 1 bulunur.

ÖRNEK:

$f(x)=\sqrt{1+x^2}$ *yi seriye açınız.*

$f(x)=\sqrt{1+x^2}$ $=(1+x^2)^{1/2}$ $f(0)=1$

$f'(x)= x(1+x^2)^{1/2}$ $f'(0)=0$

$f''(x)= (1+x^2)^{1/2}$ $- x^2 (1+x^2)^{-3/2}$ $f''(0)=1$

$f'''(x)= - 3x(1+x^2)^{-3/2} +3x^3 (1+x^2)^{-5/2}$ $f'''(0)=0$

$f^4(x)=- 3(1+x^2)^{-3/2} +18x^2 (1+x^2)^{-5/2} - 15x^4 (1+x^2)^{-7/2}$ $f^4(0)= - 3$

………………………………………….…………………………..

$$\sqrt{1+x^2} =1+\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3x^6}{6} - ....$$

bulunur.Bu seride x^2 *yerine* $- x^2$ *koyarsak*

$$\sqrt{1-x^2} =1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3x^6}{6} - ………$$

elde edilir.

$|x| < 1$ *halinde bu serilerdeki* x^4 *lü terimden itibaren olan terimler*

atılarak $\sqrt{1+x^2} \approx 1+\frac{x^2}{2}$ $\sqrt{1-x^2} \approx 1-\frac{x^2}{2}$

$$\sqrt{1{,}01}=\sqrt{1+(0.1)^2} =1 + \frac{(0.1)^2}{2} =1{,}005$$

$$\sqrt{0{,}99}=\sqrt{1-(0{,}1)^2} =1 - \frac{(0.1)^2}{2} =0{,}995$$ *bulunur.*

Örnek.5.5: f(x)=Lnx fonksiyonunu x=1 civarında Taylor serisine açıp Ln2 değerini 7 terim için yaklaşık belirleyiniz.

Çözüm.5.5: f(x)=Lnx ise f(1)=Ln1=0 ve türevlerin değerleri;

$$f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f(1)=1\Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(1)=-1$$
$$f'''(x)=\frac{2}{x^3}\Rightarrow f'''(1)=2\Rightarrow f^{IV}(x)=\frac{-6}{x^4}\Rightarrow f^{IV}(1)=-6$$
$$f^{V}(x)=\frac{24}{x^5}\Rightarrow f^{V}(1)=24\Rightarrow f^{VI}(x)=\frac{-120}{x^6}\Rightarrow f^{VI}(1)=-120$$

şeklinde bulunur.Bu değerler;

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+..........+\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}+.......$$

a=1 alınarak Taylor serisinde yerine yazılırsa;

$$Lnx\cong f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+..........+\frac{f^{(n)}(1)(x-1)^n}{n!}+.......$$

$$Lnx\cong 0+(x-1)-\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{2}{3!}(x-1)^3-\frac{6}{4!}(x-1)^4+\frac{24}{5!}(x-1)^5+...+\frac{f^{(n)}(1)(x-1)^n}{n!}+.......$$

gerekli sadeleştirmeler yapılarak;

$$Lnx\cong (x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}+...+\frac{(x-1)^n}{n}+.......$$

olarak bulunur. Bu son ifadede x=2 yazılırsa ilk 7 terim için Ln2 değeri yaklaşık olarak;

$$Ln2\cong (2-1)-\frac{1}{2}(2-1)^2+\frac{(2-1)^3}{3}-\frac{(2-1)^4}{4}+\frac{(2-1)^5}{5}-\frac{(2-1)^6}{6}\frac{(2-1)^7}{7}$$

$Ln2\cong 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=0.759524$ bulunur ki bu değer Ln2=0.693147 değeri ile karşılaştırıldığında iyi bir yaklaşım olmaz. Daha yaklaşık değerler bulmak için daha fazla terim hesaba katılmalıdır.

ÖRNEK:*f (x) = ln x fonksiyonunun x-a nın kuvvetlerine göre açın ve bulunan formülden faydalanarak ln 0,97 nn değerini hesaplayınız.*

$F(x)=\ln x$ $\qquad f(a)=\ln a$

$F'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$ $\qquad f'(a)=\frac{1}{a}$

$F''(x)=-x^{-2}$ $\qquad f''(a)=-\frac{1}{a^2}$

$F'''(x)=2x^{-3}$ $\qquad f'''(a)=\frac{2}{a^3}$

$F^4(x) = -2.3x^{-4}$ $\qquad$ $f^4(a) = -\frac{2.3}{a^4}$

bulunur.Bu değerler (2) formülünde yerlerine koyulursa :

$$\ln x = \ln a + \frac{1}{a}(x-a) - \frac{1}{a^2}\frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{2}{a^3}\frac{(x-a)^3}{3!} - \frac{2.3}{a^4}\frac{(x-a)^4}{4!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ln a + \frac{1}{a}(x-a) - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \frac{(x-a)^3}{3a^3} - \frac{(x-a)^4}{4a^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Genel terimi $(-1)^{n-1}\frac{(x-a)^n}{na^n}$ dir.Bu serinin yakınsaklık aralığı için

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}} \cdot \frac{na^n}{(x-a)^n}\right| = \frac{1}{a}|x-a| \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{a}|x-a| < 1$$

eşitliğinden $|x-a| < a$ veya $0 < x < 2a$ yakınsaklık aralığı olarak bulunur.
Aralığın sınır değerlerinin aralığa ait olmadığının araştırılması:
X=0 için seri $\ln a - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots)$ olur;bu seri ise ıraksaktır.Gerçekten parantez içi ıraksak olan harmonik seridir.
X=2a için seri $\ln a + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ Olur;bu seri alternatif seri olup yakınsaktır.O halde göz önüne alınan fonksiyonun Taylor serisine açılımı $0 < x \leq 2a$ aralığında geçerlidir.
ln 0,97 yi hesaplarsak :Bunun içinde a=1, x=0,97 konursa

$$\ln 0{,}97 = -0{,}03 - \frac{1}{2}(0{,}03)^2 - \frac{1}{3}(0{,}03)^3 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

elde edilir.Bu seride hangi terime kadar hesap yapılmalı ki ondalık basamağın ilk beş basamağı doğru bulunsun.Bunun için

$\left| -\frac{(0{,}03)^n}{n} \right| < \frac{1}{10^5}$ veya $\frac{3^n}{10^{2n}n} < \frac{1}{10^5}$ olacak şekilde n bulunur. n=3 için bu eşitlik gerçeklenir.O halde

ln 0,97=- 0,03 – 0,00045 – 0,000009= - 0,030459≈ - 0,03046
Bu değeri M=0,434245 ile çarparsak - 0,13223 bulunur;negatif sayıyı tam kısma verecek olursak $\log_{10} 0{,}97 = \bar{1}{,}98677$ elde edilir.

BÖLÜM 6

6.EĞRİ UYDURMA

6.1.En Küçük Kareler Doğrusu

Sayısal yöntemlerin amacı, (x_1,y_1), (x_2,y_2),..., (x_n,y_n) şeklindeki farklı noktalara bağlı bir $y=f(x)$ fonksiyonel bağıntı belirlemektir.Biz bu bölümde; $y=f(x)=Ax+B$ formundaki lineer fonksiyonları vurgulamakla yetineceğiz.Biliyoruz ki;$f(x_k)=y_k+e_k$ idi.
$y=f(x)=Ax+B$ formunda bir yaklaşımı nasıl bulabileceğimizi düşündüğümüzde hataların belirlenmesine ihtiyacımız olduğunu görürüz.Buna göre;

$e_k= f(x_k)-y_k \quad (1 \leq k \leq N)$ iken;

i) Maksimum hata: $E_\infty(f)=\max\limits_{1\leq k\leq N}\{|f(x_k)-y_k|\}$

ii) Avarega hata (Ortalama hata): $E_1(f)=\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}|f(x_k)-y_k|$

iii) Etkin hata(rms:root-mean-square): $E_2(f)=\left[\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}|f(x_k)-y_k|^2\right]^{\frac{1}{2}}$

Noktalar ve fonksiyon değeri verildiğinde bunların nasıl bulunacağını görelim.

Örnek.6.1:(-1,10)(0,9)(1,7)(2,5)(3,4)(4,3)(5,0) ve (6,-1) noktalarına karşılık gelen **$f(x)=8,6-1,6x$** lineer yaklaşımı için $E_1(f)$,$E_2(f)$, $E_\infty(f)$ hatalarını bulunuz.

Çözüm.6.1:

x_k	y_k	$f(x_k)=8,6-1,6x_k$	$\|e_k\|$	$\|e_k^2\|$
-1	10	10,2	0,2	0,04
0	9	8,6	0,4	0,16
1	7	7	0	0,00
2	5	5,4	0,4	0,16
3	4	3,8	0,2	0,04
4	3	2,2	0,8	0,64
5	0	8,6	0,6	0,36
6	-1	-1	0	0
			∑=2,6	**∑=1,4**

$E_\infty(f)$=maksimum$|f(x_k)- y_k|$= maksimum$|e_k|$

$E_\infty(f)$= maksimum {0,2;0,4;0,4;0,2;0,1;6}

$E_\infty(f)$=0,8

$$E_1(f)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left|f(x_k)-y_k\right|=\frac{1}{8}\cdot 2{,}6=0{,}325$$

$$E_2(f)=\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left|f(x_k)-y_k\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}1{,}40\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1{,}4}{8}\right)^{\frac{1}{2}}=0{,}41833$$

Tanım.6.1: (x_1,y_1),....., (x_N,y_N) verilen N tane nokta olsun. Burada; $\{x_k\}$'lar farklıdır. $E_2(f)$ minimum olduğu zaman y=f(x)=Ax+B doğrusu en küçük kareler doğrusudur.

6.2.En Küçük Kareler Doğrusunun Bulunması

Verilen N nokta (x_1,y_1),.....,(x_N,y_N) iken $E_2(f)$ özdeşliğini minimize eden y=f(x)=Ax+B doğrusunun A ve B parametrelerini belirlemek zorundayız.

$E_2(f)$ özdeşliği $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{N}\left|f(x_k)-y_k\right|^2$ minimum olduğu zaman minimum olacaktır. Bu nedenle, aşağıdaki E(A,B) fonksiyonunu minimize etmek yeterli olacaktır.

$$E(A,B)=\sum_{k=1}^{N}\left(Ax_k+B-y_k\right)^2=N\left[E_2(f)\right]^2 \qquad (1)$$

E(A,B) 'nin bir noktadaki minimum değeri A'ya ve B'ye göre kısmi türevlerinin sıfıra eşitlenmesi ile bulunur.(1)'de x_k ve y_k sabit A ve B değişkendir.

$$\frac{\partial E}{\partial A}=2\sum_{k=1}^{N}\left(Ax_k^{\,2}+Bx_k-x_ky_k\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial B}=2\sum_{k=1}^{N}\left(Ax_k+B-y_k\right)$$

Son iki kısmi türev sıfıra eşitlenirse;

$$*\left(\sum_{k=1}^{N}x_k^{\,2}\right)A+\left(\sum_{k=1}^{N}x_k\right)B=\sum_{k=1}^{N}x_ky_k$$

$$*\left(\sum_{k=1}^{N}x_k\right)A+NB=\sum_{k=1}^{N}y_k \qquad (2)$$

elde edilir. (2) ile verilen bu denklemlere en küçük kareler doğrusunu veren karakteristik denklemler denir.Şimdi en küçük kareler doğrusunu bulmak için bu denklemlerin nasıl kullanıldığını örneklerle açıklayalım.

Örnek.6.2:(-1,10) (0,9) (1,7) (2,5) (3,4) (5,0) (4,3) (6,-1) noktaları için en küçük kareler doğrusunu bulunuz.

Çözüm.6.2: x_k ve y_k değerlerine bağlı olarak x_k^2 ile $x_k.y_k$ aynı tabloda hesaplanırsa;

k	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{y_k}$	$\mathbf{x_k^2}$	$\mathbf{x_k.y_k}$
0	-1	10	1	-10
1	0	9	0	0
2	1	7	1	7
3	2	5	4	10
4	3	4	9	12
5	4	3	16	12
6	5	0	25	0
7	6	-1	36	-6
	∑= 20	**∑=37**	**∑=92**	**∑=25**

bulunur.Bu değerlere bağlı en küçük kareler doğrusunu veren karakteristik denklemler;

$$\left(\sum_{k=1}^{8} x_k^{\,2}\right)A + \left(\sum_{k=1}^{8} x_k\right)B = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k$$

$$92A + 20B = 25$$

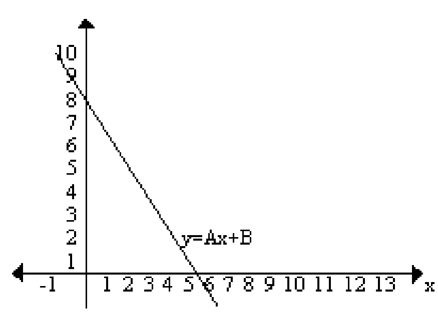
$$\left(\sum_{k=1}^{8} x_4\right)A + NB = \sum_{k=1}^{N} y_k$$

$$20A + 8B = 37$$

olduğuna göre;92A+20B=25

20A+8B=37 denklem sisteminden A=-1.6 ve B=8.6 bulunur.

Böylece;y=f(x)=Ax+B=-1,6x+8,6 istenilen en küçük kareler doğrusudur ve grafiği aşağıdadır.(Şekil.6.1)



Şekil.6.1. y=f(x)=Ax+B=-1,6x+8,6 grafiği

Verilen nokta çiftleri bir doğru değildir. Bulunan y=Ax+B doğrusudur.

6.3.Polinom Uyarlaması

En küçük kareler doğrusu bulunduğu gibi verilen $(x_1,y_1),.....,(x_N,y_N)$ gibi N noktada en küçük kareler parabolüde bulunabilir. $y=f(x)=Ax^2+Bx+C$ olsun.

$E(A,B,C)=\sum_{k=1}^{N}\left(Ax_k^{\ 2}+Bx_k+C-y_k\right)^2$ fonksiyonunun A,B ve C'ye göre kısmi türevleri alınarak;

$$\frac{\partial E}{\partial A}=2\sum_{k=1}^{N}\left(Ax_k^{\ 2}+Bx_k+C-y_k\right)^2\left(x_k^{\ 2}\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial B}=2\sum_{k=1}^{N}\left(Ax_k^{\ 2}+Bx_k+C-y_k\right)\left(x_k\right)$$

$\frac{\partial E}{\partial C}=2\sum_{k=1}^{N}\left(Ax_k^{\ 2}+Bx_k+C-y_k\right)$ bulunur ve bu kısmi türevler sıfıra eşitlenerek;

$$\left(\sum_{k=1}^{N}x_k^{\ 4}\right)A+\left(\sum_{k=1}^{N}x_k^{\ 3}\right)B+\left(\sum_{k=1}^{N}x_k^{\ 2}\right)C=\sum_{k=1}^{N}x_k^{\ 2}y_k$$

$$\left(\sum_{k=1}^{N}x_k^{\ 3}\right)A+\left(\sum_{k=1}^{N}x_k^{\ 2}\right)B+\left(\sum_{k=1}^{N}x_k\right)C=\sum_{k=1}^{N}x_k y_k$$

$$\left(\sum_{k=1}^{N}x_k^{\ 2}\right)A+\left(\sum_{k=1}^{N}x_k\right)B+NC=\sum_{k=1}^{N}y_k \qquad (3)$$

elde edilir. (3) ile verilen bu denklemlere $y=f(x)=Ax^2+Bx+C$ en küçük kareler parabolünü veren karakteristik denklemler denir.

BÖLÜM 7

7.SONLU FARK OPERATÖRLERİ

Bu bölümde sonlu fark operatörlerini, bu operatörler arasındaki münasebetleri, sonlu fark tablolarının nasıl yapıldığını ve bu tablolardan ne şekilde faydalanıldığını göreceğiz.

7.1.Lineer Operatörler

7.1.1.İleri Fark Operatörü: Fonksiyonun ardışık iki değeri arasındaki fark olarak tarif edilir ve $\mathbf{\Delta}$ sembolü ile gösterilir. **h** herhangi bir adımı göstermek üzere bir operatör bir f (x) fonksiyonuna uygulanırsa;

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

x=k , h=1 seçilirse;

$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ şeklinde gösterilir ve 1. mertebeden ileri fark diye okunur.

$k = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \ldots\ldots$ olmak üzere 1. mertebeden ileri farklardan yararlanarak;

$$\Delta y_{-2} = y_{-1} - y_{-2} = f(x_{-1}) - f(x_{-2}) = f(x_{-2} + h) - f(x_{-2})$$

$$\Delta y_{-1} = y_0 - y_{-1} = f(x_0) - f(x_{-1}) = f(x_{-1} + h) - f(x_{-1})$$

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = f(x_3) - f(x_2) = f(x_2 + h) - f(x_2)$$

Birinci mertebeden ardışık iki ileri farkın farkını ikinci mertebeden ileri fark olarak tanımlarız ve Δ^2 sembolleriyle gösteririz.

$$\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)] = f(x+2h) - f(x+h) + f(x)$$

veya;

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$$

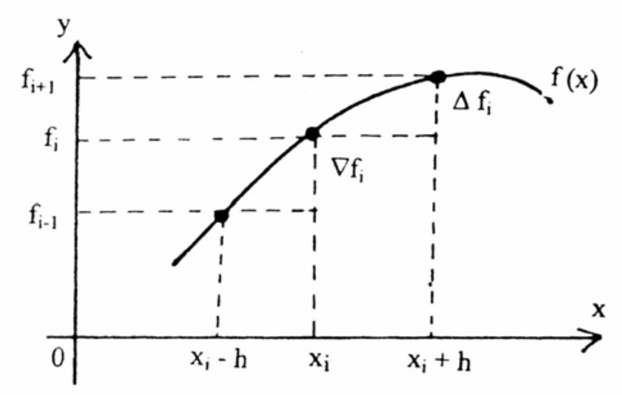
$$\vdots$$

$$\Delta^m y_k = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k \quad (k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$$

7.1.2.Geri Fark Operatörü:

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

$$\nabla y_k = y_k - y_{k-1}$$



$$\nabla^2 y_k = y_k - y_{k-1} \quad (k = 0, \mp 1, \mp 2 ....)$$
$$\vdots$$
$$\nabla^m y_k = \nabla^{m-1} y_k - \nabla^{m-1} y_{k-1}$$

7.1.3.Merkezi Fark Operatörü:

Merkezi fark , bir fonksiyonun herhangi bir bağımsız değişkenin yarım adım ilerisindeki bir fonksiyon değerinden , yarım adım gerisindeki fonksiyon değerinin farkıdır. **δ** ile gösterilir.

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right) \quad (x = k, h = 1)$$

$\delta y_k = y_{k+\frac{1}{2}} - y_{k-\frac{1}{2}}$ 1. mertebeden merkezi fark operatörü.

Son denklemlere göre $\delta^2, ..., \delta^m$ yüksek mertebeden fark operatörleri olacaktır.

7.1.4.Ortalama Değer (Averaj) Operatörü:

Bir fonksiyonda herhangi bir değişkenin yarım adım ilerisindeki fonksiyon değeri ile yarım adım gerisindeki fonksiyon değeri toplamının yarısıdır.

$$Mf(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f\left(x - \frac{h}{2}\right)\right]$$

$My_k = \frac{1}{2}\left[y_{k+\frac{1}{2}} + y_{k-\frac{1}{2}}\right]$ 1. mertebeden merkezi fark

$M^2, M^3, ...$

7.1.5.Öteleme (Kaydırma) Operatörü:

f(x) fonksiyonunu (x+h)'ın görüntüsüne öteleyen bir işlemdir. E ile gösterilir.

$$Ef(x) = f(x + h)$$

$$Ey_k = y_{k+1}$$

$$E^{-2} f(x) = f(x - 2h)$$

$$E^{-1} f(x) = f(x-h)$$

$$E^{0} f(x) = f(x)$$

$$\vdots$$

$$E^{m} f(x) = f(x+mh)$$

7.1.6.Türev Operatörü:

Bilindiği gibi bir f(x) fonksiyonunun türevi

$$D\,f(x) = \frac{d\,f(x)}{d\,x} = \underset{h\to 0}{\mathrm{Lim}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

ile ve birinci mertebeden diferansiyeli de

$d\,f(x) = f'(x)\cdot h = h \cdot D\,f(x)$ ile tanımlanıyordu. Yani kısaca,

$$f'(x) = D\,f(x)$$

$$d\,f(x) = h \cdot Df(x)$$

$\mathbf{\frac{df(x)}{dx} = Df(x)}$ .... $\mathbf{\frac{d^m f(x)}{dx^m} = D^m f(x)}$ yazılabilir. O halde,

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i)Df(x_i) + \frac{1}{2!}(x - x_i)^2 D^2 f(x_i) + \dots$$

Taylor serisinde $x = x_{i+1}$ ve x_{i+1}-x_i = h yazılırsa,

$$f(x_{i+1}) = \left(1 + hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + \dots\right) f(x_i) \qquad (1.22)$$

elde edilir. (1.22)'de parantez içindeki seri e^{hD} ile gösterilirse,

$$f(x_{i+1}) = e^{hD} f(x_i) \qquad (1.23)$$

bulunur. Böylece,

$$E = e^{hD} \qquad (1.24)$$

yazılabilir.

1.1.7. Bölünmüş Farklar

Bir f(x) fonksiyonunun x_0, x_1, x_2, ... , x_n değerlerine karşılık $f(x_0)$, $f(x_1)$, ... , $f(x_n)$ değerlerini aldığını kabul edelim. f(x)'in x_i ve x_j'deki değerleri $f(x_i)$ ve $f(x_j)$ olmak üzere, Bölünmüş Fark;

$$f\left[x_i, x_j\right] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} \tag{1.25}$$

şeklinde tanımlanır. Önemli birçok uygulamada x_i ve x_j ardışık değerler olmaktadır.

Dikkat edilirse,

$$f\left[x_i, x_j\right] = f\left[x_j, x_i\right] \quad \text{dir.}$$

Benzer şekilde,

$$f\left[x_i, x_j, x_k\right] = \frac{f\left[x_j, x_k\right] - f\left[x_i, x_j\right]}{x_k - x_i} \quad \text{ve}$$

$$f\left[x_0, x_1, \ldots, x_k\right] = \frac{f\left[x_1, x_2, \ldots, x_k\right] - f\left[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\right]}{x_k - x_0} \quad \text{tanımlanabilir.}$$

Bölünmüş Farklarla ilgili olarak aşağıdaki özellikleri yazabiliriz:

i) Şayet eşit aralıklı ayrık noktalar söz konusu ise;

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i = (x_{i+1} - x_i) \cdot \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = (x_{i+1} - x_i) \cdot f\left[x_i, x_{i+1}\right] = h \cdot f\left[x_i, x_{i+1}\right]$$

Benzer şekilde

$$\Delta^2 f_i = 2 \cdot h^2 \cdot f\left[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\right]$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

ii) Yine eşit aralıklı ayrık noktalar için,

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} = (x_i - x_{i-1})\frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = h \cdot f[x_{i-1}, x_i]$$

yazılabilir.

iii) $(f+g)\lfloor x_i, x_j \rfloor = f\lfloor x_i, x_j \rfloor + g\lfloor x_i, x_j \rfloor$

iv) $\alpha \in R$ sabit olmak üzere,

$(\alpha \cdot f)\lfloor x_i, x_j \rfloor = \alpha \cdot f\lfloor x_i, x_j \rfloor$ dir.

1.1.8. Faktöriyel Fonksiyonları

Bir Faktöriyel Fonksiyon, $m \in Z^+$ olmak üzere,

$$x^{(m)} = x \cdot (x-h) \cdot (x-2h) \ldots\ldots\ldots [x-(m-1)h]; \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

şeklinde tanımlanır. Daha açık yazarsak,

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x \\ x^{(2)} &= x \,.\, (x-h) \\ x^{(3)} &= x \,.\, (x-h) \,.\, (x-2h) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{(m)} &= x \cdot (x-h)(x-2h) \ldots\ldots\ldots [x-(m-1) \cdot h] \end{aligned} \tag{1.26}$$

şeklindedir. Dikkat edilirse çarpımda m tane çarpan bulunmaktadır.

Benzer şekilde $m > 0$ olmak üzere,

$$x^{(-m)} = \frac{1}{(x+h)(x+2h) \ldots\ldots\ldots (x+mh)} \tag{1.27}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi de **Genelleştirilmiş Faktöriyel Fonksiyon** tanımını verelim:

f(x) gibi bir cebirsel fonksiyonun Genelleştirilmiş Faktöriyel Fonksiyonları; m = 1, 2, 3, ... olmak üzere,

$$[f(x)]^{(m)} = f(x)\cdot f(x-h).........f[x-(m-1)h]$$

$$[f(x)]^{(-m)} = \frac{1}{f(x+h)\,f(x+2h).........f(x+mh)} \tag{1.28}$$

şeklinde tanımlanır.

7.1.7.İntegral Operatörü:

$$j = \int_{x}^{x+h} f(t)dt$$

7.2.Lineer Operatörler Arasındaki Bağıntılar

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = Ef(x) - f(x) = (E-1)f(x)$$
$$\Delta = E - 1 \quad \Rightarrow \quad E = \Delta + 1$$
$$\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)] = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) = E^2 f(x) - 2Ef(x) + f(x)$$
$$\Delta^2 f(x) = (E^2 - 2E + 1)f(x)$$
$$\Delta^2 = E^2 - 2E + 1$$
$$\Delta^3 f(x) = \Delta[\Delta^2 f(x)] = f(x+3h) - 3f(x+h) + f(x) = E^3 f(x) - 3E^2 f(x) - f(x)$$
$$\Delta^3 f(x) = (E^3 - 3E^2 + 3E - 1)f(x)$$
$$\Delta^3 = E^3 - E^2 + 3E - 1$$

$\nabla y_k = y_k - y_{k-1} = \Delta y_{k-1}$ daha yüksek mertebeler içinde;

$$\nabla^2 y_k = \nabla(\nabla y_k) = \nabla(\; y_k - y_{k-1} \;) = y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}$$

$$\nabla^2 y_k = \nabla y_{k-1} - \nabla y_{k-2}$$

$$\nabla^3 y_k = y_k - 3y_{k-1} + 3y_{k-2} - y_{k-3} = \Delta y_{k-1} - 2\Delta y_{k-2} + \Delta y_k$$

$$\nabla^3 y_k = \nabla y_{k-1} - 2\nabla y_{k-2} + \Delta y_{k-3}$$

$$\delta y_k = y_{k+\frac{1}{2}} - y_{k-\frac{1}{2}}$$

$$\delta^2 y_k = \delta(\; y_{k+\frac{1}{2}} - y_{k-\frac{1}{2}} \;) = y_{k+1} - y_k - (y_k - y_{k-1})$$

$$\delta^2 y_k = y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}$$

$\delta^{2m} y_k = \Delta^{2m} y_{k-2m}$ $m = 1,2,3$ olmak üzere;

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \nabla y_{k+1} = \delta y_{k+\frac{1}{2}}$$

$$\Delta^2 y_k = \nabla^2 y_{k+2} = \delta^2 y_{k+1}$$

$\vdots$

$$\Delta^m y_k = \nabla^m y_{k+m} = \delta^m y_{k+\frac{m}{2}}$$

$$\nabla y_k = y_k - y_{k-1} = y_k - E^{-1} y_k = \left(1 - E^{-1}\right) y_k$$

$$\nabla = 1 - E^{-1}$$

$$\delta y_{k+\frac{1}{2}} = y_{k+1} - y_k = E^{\frac{1}{2}} y_{k+\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} y_{k+\frac{1}{2}}$$

$$\delta y_{k+\frac{1}{2}} = \left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} \right) y_{k+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}$$

$$My_k = \frac{1}{2}\left[y_{k+\frac{1}{2}} + y_{k-\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{2}\left[E^{\frac{1}{2}} y_k + E^{-\frac{1}{2}} y_k \right]$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$M.\delta = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} \right)\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}} \right) \Rightarrow M.\delta = \frac{1}{2}\left(E - E^{-1} \right)$$

$$\nabla = 1 - E^{-1}$$

$$\left(1 - \nabla\right)^{-1} = E$$

7.3.Sonlu Fark Tablolarının Yazılışı

7.3.1.İleri Fark Tablosu:

x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$			
		Δy_4				
x_5	y_5					

Şimdiye kadar gördüğümüz tariflere dayanarak daha yüksek mertebeden ileri, geri ve merkezi farkları hesaplayabiliriz. Veriler uygun ise tabloya devam ederek istenilen mertebeye kadar ileri farklar yazılabilir.

7.3.2.Geri Fark Tablosu:

X	f(x)	$\nabla f(x)$	$\nabla^2 f(x)$	$\nabla^3 f(x)$	$\nabla^4 f(x)$	$\nabla^5 f(x)$
x_0	y_0					
		∇y_0				
x_1	y_1		$\nabla^2 y_0$			
		∇y_1		$\nabla^3 y_0$		
x_2	y_2		$\nabla^2 y_1$		$\nabla^4 y_0$	
		∇y_2		$\nabla^3 y_1$		$\nabla^5 y_0$
x_3	y_3		$\nabla^2 y_2$		$\nabla^4 y_1$	
		∇y_3		$\nabla^3 y_2$		
x_4	y_4		$\nabla^2 y_3$			
		∇y_4				
x_5	y_5					

7.3.3.Merkezi Fark Tablosu:

x	y	$\delta f(x)$	$\delta^2 f(x)$	$\delta^3 f(x)$	$\delta^4 f(x)$	$\delta^5 f(x)$
x_0	y_0					
		δy_0				
x_1	y_1		$\delta^2 y_0$			
		δy_1		$\delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\delta^2 y_1$		$\delta^4 y_0$	
		δy_2		$\delta^3 y_1$		$\delta^5 y_0$
x_3	y_3		$\delta^2 y_2$		$\delta^4 y_1$	
		δy_3		$\delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\delta^2 y_3$			
		δy_4				
x_5	y_5					

7.3.4.İleri Farklarda Fonksiyon Tablolarının Kontrolü

Fonksiyon tabloları yapılırken elde olmayan sebeplerden dolayı hata yapılabilir. Fonksiyon değerlerinden birisi kabul edilebilir. Hata sınırını aşan bir durum ihtiva ediyorsa bu hata doğrudan doğruya farkları etkileyecektir.

x	**y**	**Δf(x)**	**Δ^2f(x)**	**Δ^3f(x)**	**Δ^4f(x)**
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0-\alpha$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1+\alpha$		$\Delta^4 y_0-4\alpha$
		$\Delta y_2-\alpha$		$\Delta^3 y_1+3\alpha$	
x_3	$y_3+\alpha$		$\Delta^2 y_2-2\alpha$		$\Delta^4 y_1+6\alpha$
		$\Delta y_3+\alpha$		$\Delta^3 y_2-3\alpha$	
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3+\alpha$		$\Delta^4 y_2-4\alpha$
		Δy_4		$\Delta^3 y_3+\alpha$	
x_5	y_5		$\Delta^2 y_4$		
		Δy_4			
x_6	y_6				

Meydana gelecek hata **e** ile gösterilecek olursa;

e	**Δe**	**Δ^2e**	**Δ^3e**	**Δ^4e**
.				
.	.			
0	.	.		
	0	.	.	
0		0	.	α
	0		$-\alpha$	
0		α		-4α
	$-\alpha$		3α	
α		-2α		6α
	$+\alpha$		-3α	
0		α		-4α
	0		α	
0		0	.	α
	0	.	.	.
0	.	.		

Bu tablolarda dikkat edilecek hususlar;

1) Her bir sütundaki hataların katsayılarının mutlak değerleri Paskal-Hayyam üçgenindeki katsayılarla aynıdır. Alternatif olarak işaret değişir.
2) Tek mertebe hata sütunlarında hata önce (-) ile başlar , çift mertebe sütunlarında hata (+) ile başlar ve alternatif olarak devam eder.
3) Fonksiyon değerleri arasında hatalı terim en büyük hatayı ihtiva eden çift mertebe ileri farkın karşısında bulunur.

Örnek.7.1: Bir deney sonucu aşağıdaki şekilde okunmuştur.

7;10;17;33;63;121;185;287;423;598;817 bu okunuşta hatalı sayı var mıdır? Hata varsa hatayı düzeltiniz.

Çözüm.7.1:

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
7				
	3			
10		4		
	7		5	
17		9		0
	16		5	
33		14		9
	30		14	
63		28		-36
	58		-22	
121		6		54
	64		32	
185		38		-36
	102		-4	
287		34		9
	136		5	
423		39		
	175		5	
598		44		
	219			
817				

Okunuşta bir hata var. Çünkü yükselirken birden düştü. Son sütunda $\alpha=9$ dur. Hata α dır. En büyük değer 54 dür.-54 olsa bile en büyüktür.

Hatalı terim 121 dir.

$y+\alpha=121 \Rightarrow y=121-\alpha \Rightarrow y=121-9 \Rightarrow y=112$

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
7				
	3			
10		4		
	7		5	
17		9		0
	16		5	
33		14		0
	30		5	
63		19		0
	49		5	
112		24		0
	73		5	
185		29		0
	102		5	
287		34		0
	136		5	
423		39		0
	175		5	
598		44		
	219			
817				

ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER

1. $\Delta\left[f(x) \pm g(x)\right] = \Delta f(x) \pm \Delta g(x)$ olduğunu gösterelim:

$$\Delta\left[f(x) \pm g(x)\right] = \left[f(x+h) \pm g(x+h)\right] - \left[f(x) \pm g(x)\right]$$

$$= \left[f(x+h) - f(x)\right] \pm \left[g(x+h) - g(x)\right]$$

$$= \Delta f(x) \pm \Delta g(x) \quad \text{bulunur.}$$

2. $\Delta\left[f(x) \cdot g(x)\right] = f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)$

dir. g(x+h) . f(x) terimini ekleyip çıkaralım.

$$\Delta\left[f(x) \cdot g(x)\right] = f(x+h)g(x+h) - f(x) \cdot g(x) - g(x+h)f(x) + g(x+h)f(x)$$

elde edilir.Böylece,

$$\Delta\left[f(x) \cdot g(x)\right] = f(x)\left[g(x+h) - g(x)\right] + g(x+h)\left[f(x+h) - f(x)\right]$$

$$= f(x) \cdot \Delta g(x) + g(x+h) \cdot \Delta f(x)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\Delta\left[f(x) \cdot g(x)\right] = g(x) \cdot \Delta f(x) + f(x+h) \cdot \Delta g(x) \quad \text{gösterilir.}$$

3. $\Delta\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x) \cdot \Delta f(x) - f(x) \cdot \Delta g(x)}{g(x) \cdot g(x+h)}$ olduğunu gösterelim.

$$\Delta\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\, f(x+h) - f(x)\, g(x+h)}{g(x)\, g(x+h)}$$ dır. İfadenin payından

f(x).g(x) eklenip çıkartılırsa,

$$\Delta\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\left[f(x+h) - f(x)\right] - f(x)\left[g(x+h) - g(x)\right]}{g(x)g(x+h)}$$

$$= \frac{g(x) \cdot \Delta f(x) - f(x) \cdot \Delta g(x)}{g(x) \cdot g(x+h)} \quad \text{elde edilir.}$$

4. İleri Fark tablosunda n = 4 olması halinde hata oluşumunu görelim:

X	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
x_0	f_0				
		Δf_0			
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$		
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$	
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$	
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$		
		Δf_3			
x_4	f_4				

İleri Fark tablosunda x_2 değerinin hatalı ölçüldüğünü varsayalım. Hata ε olsun.

X	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
x_0	f_0				
		Δf_0			
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0+\varepsilon$		
		$\Delta f_1+\varepsilon$		$\Delta^3 f_0-3\varepsilon$	
x_2	$f_2+\varepsilon$		$\Delta^2 f_1-2\varepsilon$		$\Delta^4 f_0+6\varepsilon$
		$\Delta f_2-\varepsilon$		$\Delta^3 f_1+3\varepsilon$	
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2+\varepsilon$		
		Δf_3			
x_4	f_4				

Dikkat edilirse sadece bir değerde yapılan hatanın yüksek mertebeden farklara etkisi büyük olmaktadır.

5. $f(x) = x^2 + 2x - 1$ fonksiyonunun [0,4] aralığında, h = 1 kullanılarak, ileri fark tablosunu yapalım.

X	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	-1				
		3			
1	2		2		
		5		0	
2	7		2		0
		7		0	
3	14		2		
		9			
4	23				

6. $(3\Delta + 2)\left[(2E-1)x^2\right] = ?$ Hesaplayalım:

$$(3\Delta + 2)\left[(2E-1)x^2\right] = (3\Delta + 2)\left[2(x+h)^2 - x^2\right]$$
$$= 6(x+2h)^2 - 6(x+h)^2 - 3(x+h)^2 - 3x^2 + 4(x+h)^2 - 2x^2$$
$$= 2x^2 + 14hx + 19h^2 \quad \text{bulunur.}$$

7. Yedi adet noktada fonksiyon değerlerinin verilmesi halinde hataların nasıl yayıldığını görelim:

x_3 noktasında fonksiyon değerinin hatalı ölçüldüğünü ve hatanın da ε olduğunu varsayalım.

X	**f (x)**	**Δf(x)**	**Δ^2 f(x)**	**Δ^3 f(x)**	**Δ^4 f(x)**	**Δ^5 f(x)**
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0+\varepsilon$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1+\varepsilon$		$\Delta^4 y_0-4\varepsilon$	
		$\Delta y_2+\varepsilon$		$\Delta^3 y_1-3\varepsilon$		$\Delta^5 y_0+10\varepsilon$
x_3	$y_{3+\varepsilon}$		$\Delta^2 y_2-2\varepsilon$		$\Delta^4 y_1+6\varepsilon$	
		$\Delta y_3-\varepsilon$		$\Delta^3 y_2+3\varepsilon$		$\Delta^5 y_1-10\varepsilon$
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3+\varepsilon$		$\Delta^4 y_2-4\varepsilon$	
		Δy_4		$\Delta^3 y_3-\varepsilon$		
x_5	y_5		$\Delta^2 y_4$			
		Δy_5				
x_6	y_6					

Şimdi de hatalarla ilgili tabloyu yapalım:

e	**Δe**	**Δ^2 e**	**Δ^3 e**	**Δ^4 e**	**Δ^5 e**
			ε		
		ε		-4 ε	
	ε		-3 ε		10 ε
ε		-2 ε		6 ε	
	-ε		3 ε		-10 ε
		ε		-4 ε	
			ε		

Tabloya bakıldığında aşağıdaki özellikler göze çarpmaktadır:

i) ε değerlerinin önündeki katsayılar Binom katsayılarıdır.

ii) Herhangi bir sütundaki hataların cebirsel toplamı sıfırdır.

iii) Fonksiyon değerleri arasında, hatalı terim, en büyük hatayı içeren çift mertebe ileri farkın karşısında bulunur.

8. $\Delta\, Df(x) = D\, \Delta f(x)$ olduğunu gösterelim:

$$\Delta\, Df(x) = \Delta\, f'(x) = f'(x+h) - f'(x) = D\big[f(x+h) - f(x)\big] = Df(x)$$

9. $E\,(\Delta + D)f(x) = ?$ Hesaplayalım:

$$\begin{aligned} E\,(\Delta + D)f(x) &= (E\Delta + ED)f(x) = E\,\Delta f(x) + E\,Df(x) \\ &= E\big[f(x+h) - f(x)\big] + E\big[f'(x)\big] \\ &= f(x+2h) - f(x+h) + f'(x+h) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

10. $E^n \cdot E^m \cdot f(x) = E^{m+n} \cdot f(x)$ olduğunu gösterelim:

$E^n \cdot f(x) = f(x+nh);$ $\qquad E^m \cdot f(x) = f(x+mh)$ olduğundan,

$$E^n E^m f(x) = E^n f(x+mh) = f(x+mh+nh) = E^{m+n} f(x) \text{ bulunur.}$$

11. $\mu^2 = 1 + \frac{1}{4}\delta^2$ olduğunu gösterelim.

$\mu = \frac{1}{2}\left(E^{1/2} + E^{-1/2}\right)$ idi. O halde,

$\mu^2 = \frac{1}{4}\left(E + E^{-1/2} + 2\right)$ bulunur. Diğer taraftan;

$\delta^2 = E + E^{-1} - 2$ ’dir.O halde;

$\mu^2 = \frac{1}{4}\left(\delta^2 + 4\right) = 1 + \frac{1}{4}\delta^2$ bulunur.

12. $E^{1/2} = \mu + \frac{1}{2}\delta$ olduğunu gösterelim.

$\mu = \frac{1}{2}\left(E^{1/2} + E^{-1/2}\right)$, $\quad \delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$ idi. O halde

$\frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}E^{1/2} - \frac{1}{2}E^{-1/2}$ yazılabilir. Böylece,

$\mu + \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}E^{1/2} + \frac{1}{2}E^{1/2} = E^{1/2}$ elde edilir.

13. $\mu\delta = \frac{1}{2}\Delta E^{-1} + \frac{1}{2}\Delta$ olduğunu gösterelim:

$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$ olduğundan

$\mu\delta = \mu\left(E^{1/2} - E^{-1/2}\right) = \frac{1}{2}E - \frac{1}{2}E^{-1}$ bulunur. Öte yandan,

$$\frac{1}{2}\Delta E^{-1} + \frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2}\Delta\left(E^{-1} + 1\right) = \frac{1}{2}(E-1)\left(E^{-1} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(E - E^{-1}\right)$$

dir. Böylece,

$\mu\delta = \frac{1}{2}\Delta E^{-1} + \frac{1}{2}\Delta$ olduğu kolayca görülür.

14. $\Delta = \frac{1}{2}\delta^2 + \delta\sqrt{1 + \frac{1}{4}\delta^2}$ olduğunu gösterelim.

$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$ den

$E^{1/2} - \delta - E^{-1/2} = 0$

bulunur. $E^{1/2}$ ile sağdan çarpalım;

$E - \delta E^{1/2} - 1 = 0$

elde edilir. Son denklem ikinci dereceden bir denklem gibi düşünülürse,

$E^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\delta + \sqrt{\delta^2 + 4}\right) = \frac{1}{2}\delta + \sqrt{1 + \frac{1}{4}\delta^2}$ yazılabilir. Böylece;

$$\Delta = E - 1 = \delta E^{1/2} = \frac{1}{2}\delta^2 + \delta\sqrt{1 + \frac{1}{4}\delta^2} \quad \text{elde edilir.}$$

15. $D\,f(x) = \frac{1}{h}\Delta\, f(x) - \frac{1}{2h}\Delta^2 f(x) + ...$ olduğunu gösterelim:

$$E\,f(x) = f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + ...$$

$$= \left(1 + hD + \frac{h^2D^2}{2} + ...\right)f(x) = e^{hD} f\,(x) \quad \text{idi. Yani,}$$

$$E = e^{h\,D}$$

yazılabiliyordu. $E = 1 + \Delta$ konularak;

$$1 + \Delta = e^{h\,D} \quad \text{veya} \quad h\,D = \text{Ln}\,(1+\Delta)$$

elde edilir. Böylece ,

$$D = \frac{1}{h}\text{Ln}\,(1+\Delta) = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + ...\right]$$

yazılabilir. O halde,

$$D\,f(x) = \frac{1}{h}\Delta\, f(x) - \frac{1}{2h}\Delta^2 f(x) + ... \quad \text{olduğu görülür.}$$

16. $\int_a^{a+h} f(x)dx = h\left(1 + \frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta^2}{12} + \frac{\Delta^3}{24} - ...\right)f(a)$ olduğunu gösterelim:

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{1}{D}f(x)\Big|_a^{a+h} = \frac{1}{D}\left[f\,(a+h) - f(a)\right]$$

$$= \frac{1}{D}\Delta f(a) = \frac{1}{\frac{1}{h}\text{Ln}(1+\Delta)} \cdot \Delta f(a)$$

$$= \frac{h \cdot \Delta}{\mathrm{Ln}\,(1+\Delta}\, f(a) = h \cdot \frac{\Delta}{\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \ldots\right)}\, f(a)$$

$$= h \cdot \left(1 + \frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta^2}{12} + \frac{\Delta^3}{24} - \frac{19}{720}\Delta^4 + \ldots\right) f\,(a) \quad \text{elde edilir.}$$

17. $\int_a^{a+2h} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[1 + 4E + E^2\right] f\,(a)$ olduğunu gösterelim:

$$\int_a^{a+h} f\,(x)dx = h \cdot \left(1 + \frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta^2}{12} + \frac{\Delta^3}{24} - \frac{19}{720}\Delta^4 + \ldots\right) f\,(a)$$

olduğunu bir önceki problemde göstermiştik. O halde

$$\int_a^{a+2h} f\,(x)dx = h \cdot \left(2 + 2\Delta + \frac{\Delta^2}{3} + \frac{\Delta^3}{24} - \frac{\Delta^4}{90} + \ldots\right) f\,(a)$$

benzer yolla gösterilebilir. Bazı terimler ihmal edilerek

$$\int_a^{a+2h} f\,(x)dx \cong h\left(2 + 2\Delta + \frac{\Delta^2}{3}\right) f\,(a) = h\left[2 + 2(E-1) + \frac{1}{3}(E-1)^2\right] f\,(a)$$

$$= \frac{h}{3}\left[1 + 4E + E^2\right] f\,(a)$$

elde edilir. Dikkat edilirse bu formül ileriki bölümlerde anlatılacak olan ve yaklaşık hesabında Simpson Formülü'dür.

Örnek.7.2: Doğalgazla çalıştırılan bir motorun devir sayısı-ateşleme avansı aşağıdaki gibidir.

N(dev/dak)	700	900	1100	1300	1500	1700	1900	2100
AA($^\circ$KMA)	16	20	23	26	28	30	31	32

1) Sonlu fark tablosunu hazırlayınız.
2) Newton-Gregory ilerleme polinomunu n_0=1500 alıp 1500-2100 aralığındaki dört noktayı kullanarak hazırlayınız.
3) N=2000(dev/dak) avans değerini bulunuz.

Çözüm.7.2:1)Sonlu fark tablosu;

i	x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
-4	700	16				
			4			
-3	900	20			-1	
			3			1
-2	1100	23			0	
			3			-1
-1	1300	26			-1	
			2			1
0	1500	28			0	
			2			1
1	1700	30			-1	
			1			1
2	1900	31			0	
			1			
3	2100	32				

2)Seçilen nokta sayısı=4 , polinom 4-1=3.dereceden olacaktır.

$i = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{x - 1500}{200}$ olmak üzere;

$$P_3(i) = f_0 + i\Delta f_0 + \frac{i(i-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{i(i-1)(i-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

$$= 28 + i(2) + \frac{i(i-1)}{2}(-1) + \frac{i(i-1)(i-2)}{6}(1)$$

3) x=n=2000 (dev/dak) için

$$i = \frac{x-1500}{200} = \frac{2000-1500}{200} = 2,5$$

$$AA \cong P_3(2,5) = 28 + 2,5(2) + \frac{2,5(1,5)}{2}(-1) + \frac{2,5(1,5)(0,5)}{6}(1)$$

$$= 28 + 5 - 1,875 + 0,3125$$

$$= 31,4(^{\circ}KMA)$$

Not: Eğer, n=1900 ve 2100 seçilse idi. Yani lineer kabul edilseydi. AA=34,5 olacaktı.

Örnek.7.3: Bir taşıtın ZR tipi radyal lastikle elde edilen hız-yuvarlanma direnci katsayıları aşağıdaki gibidir.

a) Sonlu fark tablosunu hazırlayınız.

b) 10-70 [m/s] aralığındaki üç nokta ile v_0=10[m/s] kabul ederek Newton-Gregory ilerleme polinomu ile f=f(v) denklemini bulunuz.

V[m/s]	0	10	30	40	50	70
F	0,012	0,013	0,0145	0,0151	0,0165	0,0190

Çözüm:

a)

i	x	f	Δf	$\Delta^2 f$
0	0	0,012		
			0.001	
1	10	0,013		
	0.0005			
			0.0015	
2	30	0,0145		-
0.0009				
			0.0006	
3	40	0,0151		
	0.0008			
			0.0014	
4	50	0.0165		
	0.0011			
			0.0025	
5	70	0.0190		

b) Seçilen nokta sayısı=3 , polinom=3-1=2.derecedendir.

$$i = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 10}{30} \text{ olmak üzere}$$

$$P_2(i) = f_0 + i\Delta f_0 + \frac{i(i-1)}{2!}\Delta^2 f_0 = 0{,}0130 + i(0{,}021) + \frac{i(i-1)}{2}(0{,}0018)$$

$$P_2(x) = 0{,}0130 + \frac{x-10}{30}0{,}0021 + \frac{1}{2}\frac{(x-10)}{30}(\frac{x-10}{30} - 1)(0{,}0018)$$

$$P_2(x) = 0{,}0130 + 7.10^{-5}(x-10) + \frac{18.10^{-4}}{2.9.10^2}(x-10)(x-40)$$

$$P_2(x) = 0{,}0130 + 7.10^{-5}(x-10) + 10^{-6}(x^2 - 50x + 400)$$

$$P_2(x) = 0{,}0130 - 0{,}0010 + 0{,}00089 + x(10^{-4} - 1{,}111.10^{-4}) + x^2.2{,}22.10^{-6}$$

$$P_2(x) = 0{,}01289 - 1{,}111.10^{-5}x + 2{,}222.10^{-6}$$

$x \to v, P_2(x) \to f$ olduğundan $f_{SR} = 0{,}01289 - 1{,}111.10^{-5}v + 2{,}222.10^{-6}v^2$

Not:

1) $v = 10$ $f = 0{,}0130$ (tam) seçilen nokta

2) $v = 70$ $f = 0{,}0230$ (tam) seçilen nokta

3) $v = 30$ $f = 0{,}0146$ (yaklaşık)

4) $v = 40$ $f = 0{,}0160$ (yaklaşık-tam)

Örnek.7.3: Yeni pnömatik lastik tekerlek ile kuru yolda yapılan ölçmelerde statik sürtünme katsayısı-hız ilişkileri aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

a) Sonlu fark tablosunu hazırlayınız,
b) 14-36[m/s] aralığındaki üç nokta ile v_0=14[m/s] kabulüyle Newton-Gregory ilerleme polinomu ile μ_s=f(v) denklemini bulunuz.

v[m/s]	3	14	25	36
μ_s	0,90	0,85	0,80	0,75

Çözüm7.3:

i	x	f	Δf	$\Delta^2 f$
0	3	0,90		
			-0,05	
1	14	0,85		0
			-0,05	
2	25	0,80		0
			-0,05	
3	36	0,75		

b) Seçilen nokta sayısı=3,polinom=3-1=2.dereceden

$i = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{x - 14}{11}$ olmak üzere;

$$P_2(i) = f_0 + i\Delta f_0 + \frac{i(i-1)}{2!}\Delta^2 f_0 = 0{,}85 + i(-0{,}05) + \frac{i(i-1)}{2}.(0)$$

8.BÖLÜM

8. SAYISAL İNTEGRAL

Şimdiye kadar incelediğimiz fonksiyonların integrali alınmakta ve bu integral bilinen tekniklerden biri yardımıyla belirlenmekteydi. Bazen integrali alınacak fonksiyon denklem formunda değil de basit bir grafik yardımıyla veya nokta çiftleri ile verilebilir. İşte böyle durumlarda yaklaşık integral için bir yöntemi ihtiyacımız vardır.

Bütün bu yöntemler temelde y=f(x) fonksiyonun eğrisi x- ekseni ile verilen limitleri ile sınırlı bir bölgenin alanı olarak yorumlanabilir. Bu nedenle bir eğri altında kalan alanı bulmak için ortalama ordinat yöntemi, yamuk yöntemi, Simpson yöntemi ve parabolik alan yöntemi olmak üzere belli başlı dört yöntem mevcuttur. Şimdi sırasıyla bu yöntemleri inceleyelim.

8.1. Ortalama Ordinat Yöntemi

Bu yöntem daha önce gördüğümüz bir fonksiyonun ortalama değerinden yararlanılarak ortaya çıkmıştır**.[a,b]**'de tanımlı **y=f(x)** fonksiyonun ortalama değeri;

$$Y_{ort} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx..................(1)$$

şeklinde idi. $\int_a^b f(x)dx$ integrali **y=f(x) eğrisi, x- ekseni x=a, x=b doğruları** ile sınırlı bölgenin alanını ifade ettiğine göre;

$$A \cong Y_{ort}(b-a)............(2)$$

formülü ortalama ordinat yöntemini veren formüldür.

Örnek.8.1: (1, 3.51) , (2, 4.23) , (4, 6.29) , (5, 7.81) , (7, 7.96) , (7.5, 8.91) , (9, 9.25) noktalarından geçen eğrinin altındaki alanı bulunuz.

Çözüm.8.1:

x	1	2	4	5	7	7.5	9
y	3.51	4.23	6.29	7.81	7.96	8.91	9.25

yedi ordinatın ortalaması;

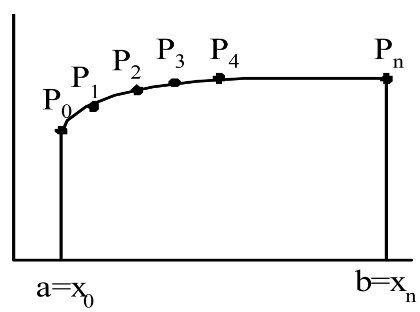
$$\text{Yort} = \frac{3.51+4.23+6.25+7.81+7.96+8.91+9.25}{7} = 6.85$$

olur. Buna göre, verilen noktalardan geçen eğri ile sınırlı alan yaklaşık olarak;

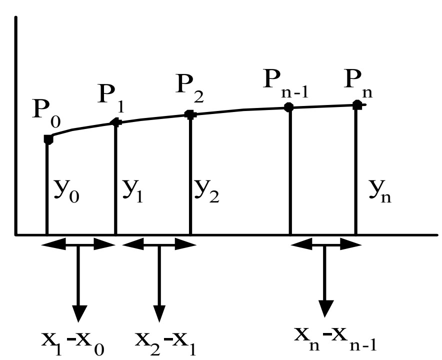
$$A = 6.85(9-1) = 54.8 \quad br^2 \text{ bulunur.}$$

8.2. Yamuk Yöntemi

(x_0,y_0) , (x_1,y_1),..........,(x_n,y_n) nokta çiftlerini aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi birleştirelim ve bu nokta çiftlerine sırasıyla $P_0,P_1,.....,P_n$ diyelim. (Şekil.8.1)



$P_0,P_1,.....,P_n$ noktalarını birleştirdiğimizde elde ettiğimiz grafik **y=f(x)** fonksiyonu temsil etsin. **$P_0,P_1,.....,P_n$** noktalarında düşey doğrular çizerek **y=f(x)** fonksiyonu **x- ekseni; x=a, x=b doğruları** ile sınırlı bölgeyi **n** tane dilime ayıralım. (Şekil.8.2)



Şekilde görüldüğü gibi bu dilimlere yaklaşık olarak birer yamuk gözü ile bakılabilir.

Buna göre;

1.yamuğun alanı $=\frac{1}{2}(x_1 - x_0)(y_1 + y_0)$

2. yamuğun alanı $=\frac{1}{2}.(x_2 - x_1).(y_2 + y_1)$

……………………………………………………….

n. yamuğunun alanı $=\frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})(y_n + y_{n-1})$

olarak bulunur. Bu yamukların alanları toplamı yaklaşık olarak y=f(x) eğrisi x=a,x=b doğruları ve x- ekseni ile sınırlı bölgenin alanını verir. Böylece;

$$A = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_0)(y_1 + y_0) + (x_2 - x_1)(y_2 + y_1) + ... + (x_n - x_{n-1})(y_n + y_{n-1})\right]$$

formülü ardışık x_i noktaları arasındaki uzaklık farklı iken yamuk kuralı için formülü verir. Ardışık $\mathbf{x_i}$ noktaları arasındaki uzaklık eşit olsun ve bunu $\mathbf{\Delta x}$ ile gösterelim.

$\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = ... = x_n - x_{n-1}$ olsun. Buna göre istenilen alan yamuk kuralı yardımıyla şu şekilde bulunur. Sırasıyla her bir yamuğun alanı;

1. yamuğun alanı $\frac{1}{2}\Delta x(y_1 + y_0)$

2. yamuğun alanı $\frac{1}{2}\Delta x(y_2 + y_1)$

3. yamuğun alanı $\frac{1}{2}\Delta x(y_3 + y_2)$

………………………………………….

n. yamuğun alanı $\frac{1}{2}\Delta x(y_n + y_{n-1})$ iken bu alanlar toplamı;

$$A = \int_a^b f(x)dx \cong \Delta x\left[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1}\right]$$

olarak bulunur. Böylece eşit aralıklı nokta çiftleri için yamuk kuralı;

$$A = \int_a^b f(x)dx \cong \Delta x\left[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1}\right]$$ olarak elde edilir.

Örnek.8.2: Aşağıda verilen nokta çiftlerinden oluşan fonksiyonun grafiği altındaki alanı bulunuz.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	4	3	4	7	12	19	28	39	52	67	84

Çözüm.8.2:

$$A = \int_a^b f(x)dx \cong \Delta x\left[\frac{1}{2}\left(y_0 + y_9\right) + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8\right]$$

$$\cong \Delta x\left[\frac{1}{2}\left(4+84\right) + 3+4+7+12+19+28+39+52+67\right] = 275 \text{ br}^2$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 1 - 0 = 1 \text{ olur.}$$

Örnek.8.3: $\int_0^{10}\left(\frac{x^2}{10}+2\right)dx$ integralini $\Delta x = 1$ alarak yamuk kuralı ile yaklaşık olarak belirleyiniz.

Çözüm.8.3: $y = \frac{x^2}{10}+2$ olduğuna göre (x,y) değerlerini belirleyelim.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2	2.1	2.4	2.9	3.6	4.5	5.6	6.9	8.4	11.1	12

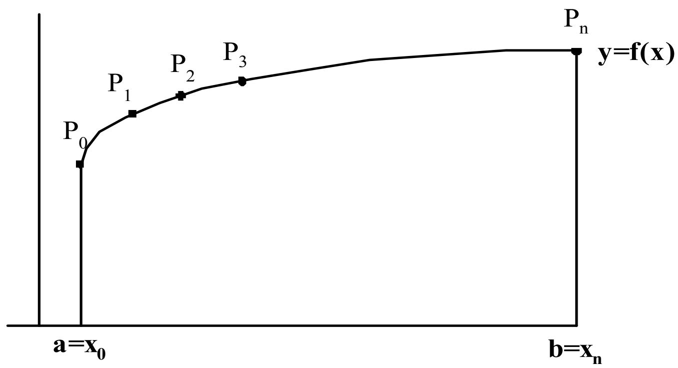
Toplamı=47.5

$$\int_0^{10}\left(\frac{x^2}{10}+2\right)dx \cong 1.\left[\frac{1}{2}(2+12)+47.5\right] \cong 54.5 \text{ iken}$$

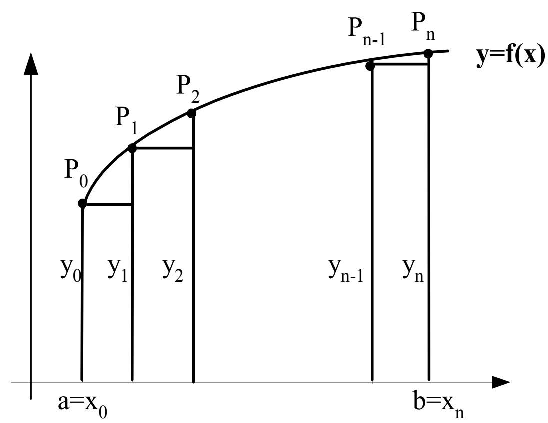
$$\int_0^{10}\left(\frac{x^2}{10}+2\right)dx = \left(\frac{x^3}{30}+2x\right|_0^{10} = \frac{1000}{3}+20 = \frac{160}{3} \text{ bulunur.}$$

8.3. Dikdörtgen Yöntemi

(x_0,y_0), (x_1,y_1),..........................,(x_n,y_n) nokta çiftlerini birleştiren grafik **$y=f(x)$** fonksiyonun grafiği olsun. Bu noktalara yine sırasıyla **$P_0,P_1,P_2,...,P_n$** diyelim. (Şekil.8.3)



$P_0,P_1,P_2,...,P_n$ noktalarında yine düşey doğrular çizelim ve bu doğrular x- eksenini sırasıyla **$x_0,x_1,x_2,.....,x_n$** noktalarında kessin. Yamuk yönteminde olduğu gibi şeklimiz n tane dilimden oluşur. (Şekil.8.4)



Bu dilimlerden her biri birer dikdörtgen olarak göz önüne alınırsa bu dikdörtgensel dilimlerin alanları toplamı yaklaşık olarak y=f(x) eğrisi x=a,x=b doğruları ve x- ekseni ile sınırlı bölgenin alanına eşit olacaktır.

Buna göre;

1. dikdörtgenin alanı **= $(x_1-x_0).y_0$**

2. dikdörtgenin alanı **= $(x_2-x_1).y_1$**

3. dikdörtgenin alanı **= $(x_3-x_2).y_2$**

……………………………………….

n-1. dikdörtgenin alanı **= $(x_{n-1}-x_{n-2}).y_{n-2}$**

n. dikdörtgenin alanı **= $(x_n-x_{n-1}).y_{n-1}$**

olarak elde edilir. Böylece toplam alan dikdörtgen yöntemi yardımıyla yaklaşık olarak;

$$A=\int_a^b f(x)dx \cong (x_1-x_0)y_0+(x_2-x_1)y_1+.................+(x_n-x_{n-1})y_{n-1}$$

şeklinde bulunur. Ardışık x_i noktaları arasındaki uzaklık;

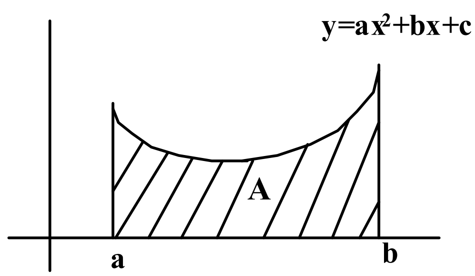
$$\Delta x = x_1-x_0=x_2-x_1=.........................=x_n-x_{n-1}$$

olacak şekilde eşit ise istenilen alan;

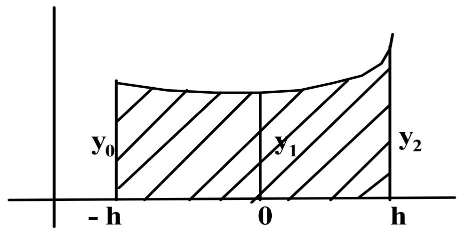
$$A=\int_a^b f(x)dx \cong \Delta x\left[y_0+y_1+......+y_{n-1}\right]$$ olarak bulunur.

8.4. Parabolik Alan Formülü

Parabolik alan formülü parabolik bir eğri altında kalan alanı bulmamızı sağlar. Bunun için ***y=ax²+bx+c*** fonksiyonu, **x- ekseni x=a,x=b doğruları** ile sınırlı bölgenin alanını bulmaya çalışalım. (Şekil.8.5)



Bu alanı aşağıdaki gibi y- eksenine eşit uzaklıkta olacak şekilde seçelim ve alanımızı h genişliğinde iki dilime ayıralım. (Şekil.8.6)



Bu dilimlerin **-h,0,h** noktalarındaki yükseklikleri sırasıyla **y_0,y_1 ve y_2** olsun. Daha önceden bildiğimiz gibi alan;

$$A = \int_{-h}^{h} y dx = \int_{-h}^{h} \left(ax^2 + bx + c\right)dx$$

$$= \left(a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx \right|_{-h}^{h}$$

$$= \frac{2}{3}ah^3 + 2ch = \frac{h}{3}\left(2ah^2 + 6c\right)......................(*)$$

olarak bulunur.**$y=ax^2+bx+c$** fonksiyonunda sırasıyla **-h, 0 ve h** değerlerini yani **y_0,y_1 ve y_2** yüksekliklerini bulalım. Buradan;

$$y_0 = y(-h) = ah^2 - bh + c$$
$$y_1 = y(0) = c$$
$$y_2 = y(h) = ah^2 + bh + c$$

olarak bulunur. y_0 ve y_2 değerlerini toplarsak;

$y_0 + y_2 = 2ah^2 + 2c = 2ah^2 + 2y_1$ olur. Buradan a değerini çekersek;

$a = \dfrac{y_0 + y_2 - 2y_1}{2h^2}$ ve yine aynı eşitlikten **$c=y_1$** değeri bulunur. a ve c'nin bu değerlerini (*) ifadesinde yerine yazarsak;

$$A = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3}\left(2h^2\frac{(y_0 + y_2 - 2y_1)}{2h^2} + 6y_1\right)$$

$$A = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

olur. Böylece **Simpson** yöntemini elde etmemizi sağlayacak Parabolik alan formülü elde edilir.

Örnek.8.4: (1 , 2.05) , (3 , 5.83) ve (5 ,17.9) noktalarından geçen eğri parabol şeklinde ise bu eğri ile x- ekseni, x=1 ve x=5 doğruları arasında kalan sınırlı bölgenin alanını bulunuz?

Çözüm.8.4: $h = \Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = 3 - 1 = 5 - 3 = 2$ olur.

$y_0 = 2.05, y_1 = 5.83, y_2 = 17.9$ olduğuna göre;

$$\mathbf{A} \cong \frac{\mathbf{h}}{3}(\mathbf{y}_0 + 4\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) \cong \frac{2}{3}(2.05 + 4.(5.83) + 17.9) \cong 28.8\mathbf{br}^2$$

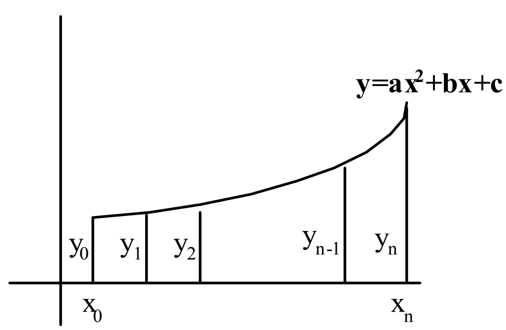
8.5. Simpson Yöntemi

Bir eğri altında kalan yaklaşık alanın hesabı için aldığımız fonksiyonun eğrisi bir parabol olsun. (Şekil.8.7) Parabolik alan formülü eğri üzerindeki üç nokta çifti belli iken yaklaşık alanı veriyordu. Eğer nokta çifti sayısı n ise yaklaşık alan hesabı yine benzer mantıkla geliştirilebilir. Bunun için farklı her üç nokta çiftine Parabolik alan formülü uygulanarak ardışık her iki dilimin alanı bulunabilir. Şöyle ki;

Dilim numarası	Alanı
1. ve 2. dilim	$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$
3. ve 4. dilim	$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$
5. ve 6. dilim	$\frac{h}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6)$
n-1. ve n. dilim	$\frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$

olarak belirlenip alt alta toplanırsa; $A \cong \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 4y_{n-1} + y_n)$

şeklinde Simpson yöntemini oluşturan formül elde edilir.



Şekil.8.7

Şimdiye kadar ele alınan tüm yöntemler için nokta çiftlerine sahip olduğumuz söyledik. Bunun yerine bir denkleme sahip olduğumuzda verilen Δx değerine göre x_k'ler belirlenip $f(x_k)$'lar buna göre hesaplanarak $(x_k, f(x_k))$ (k=1,2,.....,n) nokta çiftleri bir tablo şeklinde oluşturulup hangi yöntemle çözülecekse tablo ona göre kullanılır.

Örnek.8.5: Verilen tablodaki değerlerden geçen eğrinin altındaki alanı Simpson Kuralını kullanarak yaklaşık olarak bulunuz.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	4.02	5.23	5.66	6.05	5.81	5.62	5.53	5.71	6.32	7.55	8.91

Çözüm.8.5: $\mathbf{h = x_i - x_{i-1} = 1}$ olduğuna göre;

$$A \cong \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + 2y_8 + y_9\right]$$

$$A \cong \frac{h}{3}\begin{bmatrix} 4.02 + 4(5.23) + 2(5.66) + 4(6.05) + 2(5.81) + 4(5.62) \\ + 2(5.53) + 4(5.71) + 2(6.32) + 4(7.55) + 8.91 \end{bmatrix}$$

$$A \cong 60{,}1 br^2$$

----

* Simpson yöntemi İngiliz matematikçi **Thomas Simpson** (1710-1761)tarafından geliştirilmiştir.

Örnek.8.6:

$\int_1^7 (\frac{x^2}{10} + x)\,dx$ integralini Δx=1 için bütün yöntemlerle yaklaşık olarak hesaplayınız.

Çözüm.8.6:

x	1	2	3	4	5	6	7
y= $\left(\frac{\mathbf{x}^2}{10} + \mathbf{x}\right)$	$y_0 = 1{,}1$	$y_1 = 2{,}4$	$y_2 03{,}9$	$y_3 = 5{,}6$	$y_4 = 7{,}5$	$y_5 = 9{,}6$	$y_6 = 11{,}9$

a) Dikdörtgen yöntemi:

$A \cong \Delta x.(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) \cong$ 1.(1,1+2,4+3,9+5,6+7,5+9,6) $\cong 30{,}1$

b) Ortalama Ordinat Metodu:

$$A \cong y_{ort}.(b-a)$$

$$A \cong \frac{1{,}1 + 2{,}4 + 3{,}9 + 5{,}6 + 7{,}5 + 9{,}6 + 11{,}9}{7}(7-1) \cong 36$$

c) Yamuk Metodu:

$$A \cong \Delta x.\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right]$$

$$A \cong \mathbf{1.}\left[\frac{1,1 + 11,9}{2} + 2,4 + 3,9 + 5,6 + 7,5 + 9,6\right] = 35,5$$

d) Simpson Metodu:

$$A \cong \Delta x/3.\left\lfloor y_0 + 4\,y_1 + 2\,y_2 + ... + y_n \right\rfloor$$

$$A \cong 1/3\ .\left[1,1 + 4.(2,4 + 5,6 + 9,6) + 2.(3,9 + 7,5) + 11,9\right] = 35,4$$

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki problemleri istediğiniz herhangi bir yöntemu kullanarak çözünüz.

1) $\int_1^3 \frac{1+2x}{x+x^2}\,dx$

3) $\int_1^8 \left(4x^{\frac{1}{3}} + 3\right) dx$

2) $\int_1^{10} \frac{dx}{x}$

4) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$

5)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	24	25.2	25.6	26	25.8	25.6	25.5	25.7	26.3	27.5	28.9

6)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3.02	4.63	4.76	5.08	6.31	6.60	6.23	6.48	7.27	8.93	9.11

9.BÖLÜM

9. MATEMATİKTE MATLAB İLE İŞLEMLER

MATLAB; (**MAT**rix **LAB**oratory); ilk defa 1985'de C.B Moler tarafından matematik ve özellikle de matris esaslı matematik ortamında kullanılmak üzere geliştirilmiş yüksek performanslı bir teknik programlama dilidir.İlk sürümleri FORTRAN diliyle hazırlanmış olmakla beraber son sürümleri (2002 yılı itibariyle 6.5 dir) C dilinde hazırlanmıştır.

MATLAB, sayısal analiz, matris ve dizi işlemleri, sinyal işleme, algoritma geliştirme, C, C++, Java ve İnternet ile ilişik programlama ve grafiksel kullanıcı ara yüzü (Graphical User Interface -GUI) formlu program yazma gibi sayısal işlemleri, kullanımı kolay bir grafik ara yüzü üzerinden, diğer programlama dillerindeki geleneksel kodlamaya karşın matematiksel denklem yazma kolaylığını da sağlamaktadır.

MATLAB farklı sahalardaki kişilerden gelen taleplerle kendini geliştirmiş ve şu an 500.000'nin üzerindeki endüstri, devlet ve akademik kurumlarda kullanılmaktadır.Yurt dışında üniversitelerde lineer cebir, nümerik analiz gibi temel derslerden, devre analizi, otomatik kontrol gibi bölüm derslerine ve araştırma alanlarına kadar yayılmıştır.

İş sahalarında MATLAB programlama dili, araştırma ve mühendislik alanlarında karşılaşılan problemlere pratik ve çabuk sonuçlar sunmaktadır.MATLAB'ı kullanan firmaların başında, Boeing, DaimlerChrysler, Motorola, NASA, Texas Instruments, Toyota, Quantum ve Saab gelmektedir.

Ayrıca MATLAB, "Araç Kutusu" ("Toolbox") olarak nitelendirilen özellikler içerir. Bu özellikler, program yazmaya gerek kalmadan içerdiği hazır fonksiyon dosyalarıyla; dış aygıtlarla gerçek zamanlı çalışma, M-Dosya işleme ve derleme, iletişim kurma ve işleme, veri tabanı oluşturma, denetleme ve besleme, arama-ölçme, dijital sinyal işleme, Excel bağlantısı kurma, finansal zaman serilerini açma, görüntü işleme, aygıt denetleme, rapor oluşturma, güç sistemleri modelleme, lineer olan ve olmayan kontrol sistemleri dizaynı, robot kontrolü, dinamik sistem simülasyonu, sistem tanımlama, yapay sinir ağları modelleme, bulanık mantık ve daha fazlası durumları da inceler ve çözüm üretimi sağlar (M. Uzunoğlu, A. Kızıl, Ö. Çağlar Onar, 2002).

9.1. MATLAB'da Kompleks Sayılar ve Kompleks Sayı İşlemleri

Kompleks sayılarla ilk kez, ikinci veya daha yüksek dereceden tek değişkenli denklemlerin çözümlerinde karşılaşılmıştır. Genel şekli $ax^2 + bx + c = 0$ tipinde olan denklemlerin kökleri diskriminant yöntemi ile bulunur.

Negatif bir sayının kare kökü reel sayılarla tanımlanamaz. Negatif sayıların kare köklerinin bulunabilmesi ve böylece denklem köklerinin hesabına devam edilebilmesi için kompleks sayılar bulunmuştur.

Kompleks sayı operatörü $\sqrt{-1}$, i harfi ile gösterildiği gibi, bilhassa elektrik mühendisliğinde kullanılan akım sembolü ile karışmaması için, j harfi ile de gösterilebilir.

Örnek:

```
>> a= 3+4i
a =
   3.0000 + 4.0000i
```

Kompleks değişkenleri oluşturmanın diğer bir yolu da, "complex" fonksiyonu kullanmaktır.

```
>> a= 3;
>> b=4;
>> c=complex (a,b)
c =
   3.0000 + 4.0000i
```

9.2. MATLAB'da Trigonometrik Fonksiyonlar: Aşağıdaki tabloda MATLAB'da kullanılan belli başlı trigonometrik fonksiyonlara ve işlevlerine yer verilmiştir.(Tablo.9.1)

Tablo 9.1: MATLAB'da kullanılan belli başlı trigonometrik fonksiyonlar

Fonksiyon	**İşlevi**
sin (x)	x açısının sinüsünü verir.
sinh (x)	x açısının sinüs-hiperboliğini verir.
asin(x)	sinüsü x olan açıyı verir.
asinh (x)	sinüs-hiperboliği x olan açıyı verir.
cos (x)	x açısının kosinüsünü verir.
cosh (x)	x açısının kosinüs-hiperboliğini verir.
acos (x)	kosinüsü x olan açıyı verir.
acosh (x)	kosinüs -hiperboliği x olan açıyı verir.
tan (x)	x açısının tanjantını verir.

tanh (x)	x açısının tanjant-hiperboliğini verir.
atan (x)	tanjantı x olan açıyı verir.
atanh (x)	tanjant-hiperboliği x olan açıyı verir.
atan (x,y)	tanjantı x/y olan açının dördüncü bölgedeki eşdeğerini verir.
sec (x)	x açısının sekantını verir. (1/ cos (x))
sech (x)	x açısının sekant-hiperboliğini verir. (1/ cosh (x))
asec (x)	sekantı x olan açıyı verir.
asech (x)	sekant-hiperboliği x olan açıyı verir.
csc (x)	x açısının kosekantını verir. (1/ sin(x))
csch (x)	x açısının kosekant-hiperboliğini verir. (1/ sinh (x))
acsc (x)	kosekantı x olan açıyı verir.
acsch (x)	kosekant-hiperboliği x olan açıyı verir.
cot (x)	x açısının kotanjantını verir.
coth (x)	x açısının kotanjant-hiperboliğini verir.
acot (x)	kotanjantı x olan açıyı verir.
acoth (x)	kotanjant-hiperboliği x olan açıyı verir.

MATLAB'da tanımlı tüm bu fonksiyonlar için girilecek acı değerleri raydan cinsinden olmalıdır.

Örnek: 60^0'nin kosinüsünü hesaplayacak olursak,

```
>> a=cos (pi/3)
a =
        0.5000
```

değeri bulunur.

Derece-radyan dönüşümünü aşağıdaki örnekte olduğu gibi fonksiyonu girerken de yapmak mümkündür.

```
>> a=cos (60*pi/180)
a =

        0.5000
```

9.3. MATLAB’da Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar

Aşağıdaki tabloda, MATLAB’da tanımlanmış üstel ve logaritmik fonksiyonlara yer verilmiştir.

Tablo .9.2: MATLAB’da tanımlanmış üstel ve logaritmik fonksiyonlar

Fonksiyon	**İşlevi**
Exp (x)	Logaritmik e sayısının (2.71828) x. Kuvvetini hesaplar.
Log (x)	x sayısının e tabanındaki doğal logaritmasını hesaplar.
Log10 (x)	x sayısının 10 tabanındaki logaritmasını hesaplar.
Log2 (x)	x sayısının 2 tabanındaki logaritmasını hesaplar.
Sqrt (x)	x sayısının karekökünü alır.
x^y	x sayısının y. Kuvvetini hesaplar.

MATLAB’da logaritmik işlemlerde taban olarak sadece e (doğal logaritma tabanı), 2 ve 10 sayıları kullanılabilir. Farklı bir sayının taban olarak kullanılabilmesi mümkün değildir.Bu tip hesaplamaları yaparken logaritmik dönüşümlerden yararlanılır.

Örnek: $\log_b$ a sayısı, $\frac{\ln(a)}{\ln(b)}$ şeklinde ya da $\frac{\log 10(a)}{\log 10(b)}$ şeklinde ifade edilir.Bu dönüşümleri kullanarak, istenilen sayıyı taban olarak belirlemek mümkündür.

9.4. MATLAB’da Dizi ve Matrislere Ait İşlem Ve Fonksiyonlar

9.4.1. Basit Matrislerin Girilmesi

MATLAB’da matris girişinin en basit yolu, matris elemanlarını tam liste halinde girmektir. Matris elemanları, oluşturulan bir değişken isminden sonra eşittir (=) işareti konularak girilirler. Tüm matris elemanları, köşeli parantezler ([ ]) arasında girilirler. Aynı satırda bulunan elemanlar, aralarına boşluk veya virgül (,) konularak birbirinden ayrılırlar.bir satıra ait elemanların girişi bitip, bir alt satırdaki elemanların girişine başlamak içinse, noktalı virgül (;) kullanılır. Aşağıda geçerli bir matris girişi verilmiştir.

```
>> X=[1 4 7; 2 5 8; 3 6 9]
X =
   1   4   7
   2   5   8
   3   6   9
```

Matris elemanlarını komut penceresinde girerken, bir satır bittikten sonra “enter” tuşuna basılırsa , bir alt satıra ait elemanların girilmesine başlanır.

```
>> A=[1 2 3
       4 5 6
       7 8 9]
A =
    1     2     3
    4     5     6
    7     8     9
```

Burada dikkat edilmesi gereken nokta, en son satıra ait elemanları da girdikten sonra köşeli parantezin kapatılması gerektiğidir.Matris elemanları, herhangi bir üstel, trigonometrik, kompleks MATLAB ifadesinden yararlanılarak yapılan bazı işlemlerin sonuçlarından oluşabilir.

```
>> Z=[log(-5) sqrt(9) exp(sin(pi/6))]
Z =
   1.6094 + 3.1416i   3.0000             1.6487
```

Girilen matrisin elemanları, parantez içine yazılacak konumları ile ifade edilirler.

Örnek: bu matriste Z(2) elemanı 3.0000’dır. Bu yöntemi kullanarak çeşitli değişken atamaları yapılabilir ve bu yolla matrisler genişletilebilir.

```
>> Z(5)=real(Z(1))
Z =
   1.6094 + 3.1416i   3.0000             1.6487                  0             1.6094
```

Yukarıdaki giriş, matrisin beşinci elemanını, birinci elemanının reel kısmı olarak tanımlamıştır. Böylece matris 1×3 boyutundan 1×5 boyutuna otomatik olarak genişletilmiştir. Matrisin dördüncü elemanına ilişkin bir giriş yapılmadığı için, MATLAB bu elemana 0 değerini atamıştır.

Geniş matrisleri iki nokta üst üste (:) kullanarak daraltmak mümkündür. Aşağıdaki **örnekte** önce dört satırlı bir matris tanımlanmış ve bu matrisin ilk üç satırından oluşan diğer bir matris yapılandırılmıştır.

```
>> A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9; 10 11 12]
A =
    1     2     3
    4     5     6
    7     8     9
   10    11    12
```

```
>> A=A(1:3,:)
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
```

Aslında, “:”,matrislerin satır veya sütunlarına erişmek için kullanılır. Yukarıdaki **örnekte** de A matrisinin 1’den 3’e kadar olan sütunları görüntülenmiştir. Aşağıda ise bir matrisin herhangi bir satır ya da sütununa erişim için kullanılan “:” işlemcisine ait örnekler verilmiştir. Herhangi bir satıra ulaşmak için satır numarasının ardından “:” girilir. Bir sütuna ulaşmak içinse, “:” den sonra ilgili sütun numarası girilir.

```
>> a=[1 1 1; 3 5 6; 9 5 6]; a (1,:)
ans =
     1     1     1
>> a(:,3)
ans =
     1
     6
     6
```

9.4.2. Bir Matrisin Transpozesi

Lineer cebir uygulamalarında sıkça kullanılan transpoze **(Devrik)** işlemi, MATLAB’da kesme işareti (') ile (Shift+2) tanımlanmıştır. Transpoze ile matrisin satırları, eleman sıralamaları korunacak şekilde sütunlarına dönüştürülürler. Benzer şekilde satır vektörleri sütun vektörlerine ve sütun vektörleri de satır vektörlerine çevrilirler.

Kompleks elemanları bulunan matrislerin transpozeleri alınırken MATLAB’da bu elemanların eşleniklerini alır.

Örnek:

```
>> a=[2 4 6];
>> b=a'
b =
     2
     4
     6
```

9.4.3.Bir Matrisin Tersi (İnversi)

A, n x n boyutunda bir kare matris ve I birim matris olmak üzere, A*B = B*A= I eşitliğini sağlayan B matrisine A matrisinin tersi denir ve A^{-1} ile gösterilir.Sadece kare matrislerin tersi alınabilir. Tekil matrislerin tersleri yoktur. MATLAB'da bir A matrisinin tersini almak için inv (A) veya A^{-1} komutları işletilir.

Örnek:

```
>> A=[1 3 3;1 4 3;1 3 4];
>> inv (A)
ans =
     7    -3    -3
    -1     1     0
    -1     0     1
```

Matrisin doğruluğunu kontrol amacıyla matris soldan ve sağdan tersi ile çarptırılır. Sonuç birim matris olmalıdır.

```
>> A*A^-1
ans =
  1     0     0
        0     1     0
        0     0     1
>> inv (A)*A
ans =
  1     0     0
        0     1     0
        0     0     1
```

9.4.4. Bir Matrisin Determinantı

MATLAB'da bir A matrisinin determinantını bulmak için, det (A) komutu girilir. Determinantları, matris boyutları arttıkça çözmek zorlaşır.Bu gibi durumlarda MATLAB'da tek bir komut kullanarak bu işlemi yapmak mümkündür.Sadece kare matrislerin tanımlı olduğu unutulmamalıdır.

Örnek:

```
>> A=[1 3 3;1 4 3;1 3 4];
>> det (A)
ans =
    1
```

9.4.5. Bir Matrisin Rankı

Bir matriste, r x r boyutundaki kare minörlerin en az bir tanesi sıfırdan farklı, fakat (r+1) x (r+1) boyutundaki kare minörlerin tamamı sıfır ise bu matrisin rankı r'dir.

MATLAB'da matrislerin ranklarının hesaplanabilmesi için tanımlanmış ve genel kullanımı "rank (matris adı)" şeklinde olan özel bir hazır fonksiyon tanımıdır.

Örnek:

```
>> a=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
>> det (a)
ans =
    0
>> size (a)
ans =
    3     3
>> rank (a)
ans =
    2
```

Rankı bulunmak istenen geniş matrisler, elemanter satır işlemler kullanılarak öncelik satırca indirgenmiş forma getirilirler. MATLAB'da bir matrisi bu forma getirmek için, "rref" fonksiyonu kullanılır.

9.4.6. Matrislerde Dört İşlem

9.4.6.1.Matrislerde Toplama Ve Çıkarma İşlemi

Boyutları eşit iki matris, "+" ve "-" sembollerini kullanarak MATLAB'da toplanabilir veya çıkarılabilir.Boyutları farklı iki matris için bu işlemler yapılamaz.

Örnek:

```
>> a=[1 2 3; 4 5 6];
>> b=[2 4 6; 8 10 12];
>> c=a+b
c =
    3     6     9
   12    15    18
```

9.4.6.2.Matrislerde Çarpma İşlemi

MATLAB’da çarpma işlemi, “*” sembolü ile gösterilir. Lineer cebir kurallarına göre A*B işleminin tanımlı olabilmesi için, A matrisinin sütun sayısının B matrisinin satır sayısına eşit olması gerekir. Bu kurala uymayan matrisler için çarpma işlemi tanımlı değildir.

Örnek:

```
>> A=[1 2;3 4; 8 9];
>> B=[2 3 4; 6 7 8];
>> C=A*B
C =
    14    17    20
    30    37    44
    70    87   104
```

Boyutları aynı iki matrisi A.*B şeklinde de çarpabilmek mümkündür. Bu durumda matrisler eleman elemana çarpılacaktır.

Örnek:

```
>> A=[1 2; 3 4];
>> B=[2 2; 2 2];
>> D=A.*B
D =
     2     4
     6     8
```

9.4.6.3.Matrislerde Bölme İşlemi

MATLAB’da matrislerin bölünmesi için “/” (sağdan bölme) ve “\” (Soldan bölme) işlemcileri kullanılır.

Örnek:

```
>> a=3;  b=6;
>> a/b,b/a
ans =
    0.5000
ans =
     2
```

Eş boyutlu matrisleri eleman elemana bölmek için, bu işlemcileri “./” ve “.\” şeklinde noktalı olarak kullanmak gerekir.

Örnek:

```
>> x=[2 4;6 8];
>> x/2==x./2
ans =
     1     1

     1     1
```

9.4.7. Bir Matrisin n. Kuvveti

Bir A matrisi için yürütülecek A.^n işlemi, n bir skaler olmak üzere, A matrisindeki her bir elemanın tek tek n. Kuvvetini alacaktır. Nokta üs (^) kullanılmadığı takdirde A matrisinin n. kuvveti alınır.Bu durum için A matrisinin kare matris olması gerekir.

MATLAB'da matrisler arası C=A.^B işlemi her iki matris aynı boyutlu olmak şartıyla tanımlıdır.

Örnek:

```
>> A=[1 2 3; 2 5 7; 3 2 1];
>> B=[1 1 1; 2 2 2; 3 3 3];
>> C=A.^B
C =
     1     2     3
     4    25    49

    27     8     1
```

9.4.8. Bir Matrisin Özdeğeri

$x \neq 0$ ve bir sütun vektörü ve A bir kare matris olmak üzere, $Ax=\lambda x$ denklemini sağlayan λ'ya A matrisinin öz değeri ve karakteristik değeri denilir. MATLAB'da bir matrise ait öz değerlerin bulunması için iki farklı yöntem kullanılır.

Herhangi bir A matrisinin öz değerlerini bulmak için, eig (A) komutu işletilir.

Örnek:

```
>> A=[3 2; 3 -2];
>> eig (A)
ans =
     4
    -3
```

Bir matrise ait karakteristik polinomun kökleri de o matrise ait öz değerleri verir.

Örnek:

```
>> a=[3 2; 3 -2];
>> x=poly (a)
x =
     1    -1   -12
>> y=roots (x)
y =
     4
    -3
```

Burada “poly (a)” fonksiyonu, a matrisinin karakteristik denklemini ve “roots(x)” karakteristik denklemin köklerini verirler.A bir kare matris ve λ, A’nın bir öz değeri olmak üzere, Ax=λx eşitliğini sağlayan x vektörüne, λ öz değerine karşılık gelen öz vektör yada karakteristik vektör denir.MATLAB’da öz vektörleri buldurabilmek için “eig” fonksiyonu aşağıdaki örnekte olduğu gibi iki giriş değişkenli olarak kullanılmalıdır. Buradaki y değişkenine, matrise ait öz vektörler atanacaktır.

Örnek:

```
>> [x,y]=eig (a)
x =
    0.8944   -0.3162
    0.4472    0.9487
y =
     4     0
     0    -3
```

9.4.9. Dizi ve Matrisler İçin Tanımlı Bazı Fonksiyonlar

Herhangi bir MATLAB uygulamasının temeli dizilerdir. MATLAB'da dizi ve matrislerle ilgili çok sayıda hazır fonksiyon bulunmaktadır.Bunlar;

Tablo.9.3: MATLAB'da dizi ve matrislerle ilgili fonksiyonlar

Fonksiyon	**İşlevi**
max (x)	x dizisinin en büyük elemanını bulur.
min (x)	x dizisinin en küçük elemanını bulur.
mean (x)	x dizisine ait elemanların ortalamasını bulur.
Median (x)	x dizisinin ortadaki elemanını bulur.
std (x)	x dizisine ait standart sapmasını bulur.
sort (x)	x dizisinin elemanlarını büyükten küçüğe doğru sıralar.
sum (x)	x dizisinin elemanlarının seri toplamını bulur.
prod (x)	x dizisinin elemanlarının seri çarpımını bulur.
Cumsum (x)	x dizisinin elemanlarının kümulatif toplamından oluşan yeni bir dizi yaratır.
diff (x)	x dizisinin elemanlarının farklarından oluşan yeni bir dizi yaratır.

Bu fonksiyonların tümü satır veya sütun vektörlere uygulandıklarında beklenen sonuçları verirler.

Örnek:

```
>> a=[1 3 5 8 6];
>> max (a)
ans =
    8
>> min (a)
ans =
    1
>> mean (a)
ans =
   4.6000
>> median (a)
ans =
    5
>> std (a)
ans =
```

```
   2.7019
>> sort (a)
ans =
     1     3     5     6     8
>> sum (a)
ans =
    23
>> prod (a)
ans =
   720
>> cumsum (a)
ans =
     1     4     9    17    23
>> diff (a)
ans =
     2     2     3    -2
```

9.5. MATLAB'da Polinomlar

9.5.1. Polinomların Girilmesi

MATLAB'da satır vektörleri, üst dereceleri azalan sırada olmak üzere polinom katsayılarını temsil ederler.

Örnek:

$x^5-2x^4+2x^3+3x^2+x+4=0$ denkleminin katsayıları,

```
>> p=[1 -2 2 3 1 4]
p =
     1    -2     2     3     1     4
```

şeklinde girilir.

9.5.2. Polinom Köklerinin Bulunması

Polinomun köklerinin bulunması için “roots” komutu girilir.Bir önceki Örnek köklerini bulacak olursak;

```
>> p=[1 -2 2 3 1 4]
p =
    1   -2    2    3    1    4
>> cozum=roots (p)
cozum =
   1.5336 + 1.4377i
   1.5336 - 1.4377i
  -1.0638
  -0.0017 + 0.9225i
  -0.0017 - 0.9225i
```

Böylece, beşinci dereceden olan bu polinomun kompleks ve reel 5 adet kökü bulunmuş olur. MATLAB’da polinomların köklerini bulmanın diğer bir yolu da “solve” fonksiyonunu kullanmaktır.Bu fonksiyon, sembolik ifadeler veya eşitliklerin karakter dizisi olarak saklandığı değişkenlere ait denklemlerin çözümünde kullanılır.

Örnek: ax^2+bx+c polinomunun köklerinin bulunması için,

```
>> s='a*x^2+b*x+c'
s =
a*x^2+b*x+c
>> solve (s)
ans =
[ 1/2/a*(-b+(b^2-4*a*c)^(1/2))]
[ 1/2/a*(-b-(b^2-4*a*c)^(1/2))]
```

s ifadesinde bulunan herhangi bir değişkenin, diğerleri cinsinden eşit olan ifadeyi benzer bir yöntemle bulmakta mümkündür. Bu tip çözümler için öncelikle sembolik değişkenleri “smys” komutuyla tanımlamak gerekir.

Örnek:

```
>> s='a*x^2+b*x+c';
>> syms a b c x
>> c=solve (s,c)
 c =
 -a*x^2-b*x
```

Aynı zamanda "solve" komutunu kullanarak, çok sayıda denklemden oluşan sistemlerin köklerini de bulmak mümkündür.

Örnek: 3y+4x=12 ve x+y=3 olan iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözümünün bulunması;

```
>> [x,y]=solve ('3*y+4*x=12','x+y=3')
x =
3
y =
0
```

MATLAB'da bir polinomun kökleri bilindiği taktirde, o polinoma ait katsayılar da azalan üst derecelerine göre buluIdurulabilirler.

Örnek: $x_1=2$ ve $x_2=2$ gibi iki katlı kökü bulunan bir polinomun katsayılarının bulunması;

```
>> poly ([2;2])
ans =
    1    -4     4
```

Söz konusu polinom, x^2-4x+4=0'dur.Herhangi bir değişkenin azalan üs katsayıları ile oluşturulmuş bir polinomun, değişkenin herhangi bir değeri için, değerini bulmak için iki giriş değişkenli "polyval(x,y)" fonksiyonu kullanılır.Burada x, söz konusu polinomu, y ise polinom değişkeninin değerini ifade eder.

Örnek: $P=s^3-2s^2+5s$ polinomunun s=5 için değeri;

```
>> P=[1 -2 5 0];
>> polyval (P,5)
ans =
   100
```

9.5.3. Bir Polinomun Türevi

MATLAB'da bir poinomun türevinin azalan üs derecelerine göre sıralanmış katsayılarını buldurmak için "polyder" fonksiyonu kullanılır.

Örnek: $P=s^3-2s^2+5s$ polinomunun türevinin bulunması;

```
>> P=[1 -2 5 0];
>> turev=polyder (P)
turev =
    3   -4    5
```

Söz konusu polinomun türevi; $\frac{dp}{ds} = 3s^2-4s+5$'dir.

9.5.4. Polinomlarda Çarpma ve Rasyonel Polinomlar

İki polinomun çarpımı ile elde edilen bir polinoma ait katsayılar, "conv" fonksiyonu ile bulunur.

Örnek: $f(x)=x^2+2x+3$ ve $g(x)=4x^2+5x+6$ polinomların çarpılması;

```
>> f=[1 2 3]; g=[4 5 6];
>> h=conv (f,g)
h =
    4   13   28   27   18
```

söz konusu polinomun sonucu, $h(x)=4x^4+13x^3+28x^2+27x+18$'dir.

İki polinomun çarpımı sonucunu, ters komvülasyon işlemine tabi tutarak çarpan polinomlarının katsayılarını "deconv" komutu ile bulabiliriz.

Örnek:

```
>> s=deconv (h,f)
s =
    4    5    6
>> p=deconv (h,g)
p =
    1    2    3
```

Transfer fonksiyonlarında kullanılan rasyonel polinomların pay ve paydalarının ayrı ayrı girilmesi gerekir.Rasyonel polinomları basit kesirlere ayırmak için "residue" fonksiyonu kullanılır.m pay, n payda olmak üzere iki giriş değişkenine sahiptir.

Örnek:

```
>> m=[1 -10 100]; n=[1 10 100 0];
>> [x,y,z]=residue (m,n)
x =
   0.0000 + 1.1547i
   0.0000 - 1.1547i
   1.0000
y =
  -5.0000 + 8.6603i
  -5.0000 - 8.6603i
        0
z =
     [ ]
```

Söz konusu polinomun sonucu; $\dfrac{m(x)}{n(x)} = \dfrac{1.1547i}{x+5-8,660i} + \dfrac{-1.1547i}{x+5+8,660i} + \dfrac{1}{x}$ ’dir. Eğer pay, paydadan büyük olsaydı, cevaba z polinomu da eklenecekti.Bir ölçüm sonucu elde edilen verilere ilişkin bir eğri uydurulması isteniyorsa, “polyfit” komutu kullanılarak istenilen derecede bir polinom, söz konusu verilerin bir fonksiyonu olarak hesaplatılabilir.

Örnek:

```
>> x=[1 2 3 4 6 7];
>> y=[1 7 26 124 225 316];
>> c=polyfit (x,y,2)
c =
    6.4286    2.5714  -16.5714
>> polyval (c,4)
ans =
   96.5714
```

9.6. MATLAB'da Lineer Denklem Sistemleri

Lineer denklem sistemlerinde tüm bilinmeyenler birinci derecendendir.Lineer denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan bazı yöntemleri ele alacak olursak;

9.6.1. Katsayılar Matrisinin Tersi Yardımıyla Çözüm

Lineer denklem sistemlerinin çözümünde, bu yolu kullanabilmek için, katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olmalıdır.

Diğer bir şart da, katsayılar matrisinin kare matris olması gerekir. Ax=B şeklinde genel biçimi belirtilen bu denklemin çözümün için, eşitliğin her iki tarafı soldan A^{-1} (inv (A)) ile çarpılır. Sol tarafta bilinmeyenler vektörü yalnız bırakılmış olur, sağ tarafta ise bilinmeyenler vektörüne eşiti olarak A^{-1}*B kalır.Denklemin çözümünü bu ifade verir.

Örnek: Aşağıdaki denklem sisteminin çözümü;

$x_1+3x_2+x_3=2$

$2x_1-x_2+3x_3=1$

$x_1+2x_2-x_3=3$

```
>> A=[1 3 1; 2 -1 3; 1 2 -1]
A =
     1     3     1
     2    -1     3
     1     2    -1
>> B=[2; 1; 3]
B =
     2
     1
     3
>> x=inv (A)*B
x =
    1.6667
    0.3333
   -0.6667
```

Burada x_1 =1,6667, x_2 =0,3333, x_3 =-0,6667'dir.

Bu denklem sistemi için, diğer bir çözüm metodu da A\B komutunu kullanmaktır.

```
>>x= A\B
```

```
x =
    1.6667
    0.3333
   -0.6667
```

Bu denklemin çözümü, x=B/A işlemi ile buldurulamaz. MATLAB, matris boyutlarının uyumsuzluğu ile ilgili bir hata verir.Aşağıdaki hata iletimi ekranda görülür.

```
>> B/A
??? Error using ==> /
Matrix dimensions must agree.
```

9.6.2 Genişletilmiş Matris Yöntemi İle Çözüm (Gauss Eliminasyon Yöntemi)

Bu yöntemi kullanabilmek için, katsayılar matrisinin, kare matris olması şartı yoktur. Genişletilmiş matris yönteminde katsayılar matrisine son sütun olarak eşitliğin sağ tarafındakiler ilave edilir.Genişletilmiş katsayılar matrisinin rankı, katsayılar matrisinin rankına eşit ise sistem çözülebilir.

Örnek:

$x_1+x_2+2x_3=1$

$2x_1+7x_3=4$

$3x_1+3x_2+6x_3=3$

```
>> A=[1 1 2; 2 0 7; 3 3 6];
>> B=[1; 4; 3];
>> C=[A B]
C =
     1     1     2     1
     2     0     7     4
     3     3     6     3
>> y=rref (C)
y =
    1.0000         0    3.5000    2.0000
         0    1.0000   -1.5000   -1.0000
         0         0         0         0
>> x=y (:,end)
```

x =

2

-1

0

Bu örnekte oluşturulan C matrisi, arttırılmış katsayılar matrisidir. Bu matrise “rref” fonksiyonu uygulanarak satırca indirgenmiş formu Gauss-eliminasyon yöntemi ile hesaplatılmıştır.Satırca indirgenmiş formun rankının denklem sayısına eşit olduğu sistemlerde, bir tek çözüm vardır. Aşağıdaki denklem sistemi buna bir **örnektir**.

$x_1+4x_2-x_3=7$

$2x_1+3x_2-2x_3=9$

$x_1+x_2+x_3=4$

$3x_1+12x_2+x_3=21$

```
>> A=[1 4 -1; 2 3 -2; 1 1 1; 3 12 1];
>> B=[7; 9; 4; 21];
>> C=[A B];
>> y=rref (C)
y =
     1     0     0     3
     0     1     0     1
     0     0     1     0
     0     0     0     0
>> x=y (:,end)
x =
     3
     1
     0
     0
```

Bu denklem sisteminde, x_1 =3, x_2 =1, x_3 =0’dır.Sistemin kare matris olmamasından dolayı katsayılar matrisinin inversi yöntemini çözümde kullanamayız. Bu durumda matris inversine alternatif olacak 3x4 boyutunda bir öninvers buldurma yoluna gidilebilir. MATLAB’da bu öninvers “pinv” fonksiyonu ile buldurulur.

Örnek: Yukarıdaki örneğin bu yöntemle çözümü;

```
>> A=[1 4 -1; 2 3 -2; 1 1 1; 3 12 1];
>> B=[7; 9; 4; 21];
>> x=pinv (A)*B
x =
    3.0000
    1.0000
   -0.0000
```

9.6.3.Cramer Yöntemiyle Çözüm

AX=B şeklindeki lineer denklem sistemlerinde katsayılar matrisi A, nxn boyutunda bir kare matris ve bu matrisin determinantı 0'dan farklı ise denklem sisteminin tek bir çözümü vardır ve bu çözüm yöntemi de cramer yöntemidir.

Örnek:

x+2y+z=5

2x+2y+2z=6

x+2y+3z=9

```
>> C=[1; 2; 1]; D=[2; 2; 2]; E=[1; 1; 3];
>> A=[C,D,E];
>> B=[5; 6; 9];
>> x=det ([B,D,E])/det (A)
x =
     1
>> y=det ([C,B,E])/det (A)
y =
     1
>> z=det ([C,D,B])/det (A)
z =
     2
```

KAYNAKLAR

1) Mehmet-Necla TEKTAŞ, Sayısal Analiz Ders Notları, İstanbul, 2002.

2) John H.Mathews , Numerical Methods , Prentice– Hall , İnc , Englewood Cliffs , NJ,1987.

3) Arthur D.Kramer , Fundamentals of Technical Mathematics with Calculus, 2nd. ed, McGraw – Hill , inc , USA , 1989.

4) Paul Calter, Technical Mathematics with Calculus, 2nd. ed, Prentice – Hall , inc. , Englewood Clifss , New Jersey, 1990.

5) Bernard Kolman. Charles G. Denlınger , Applıed Calculus , HBJ , Inc , LA , 1989.

6) Mathematica as a Tool for Teaching Elemantary Numerical Analysis

7) BSc Computing Mathematics BSc Computing Maths with Business Studies

8) Mathematical Techniques – Numerical Methods

9) Cryptography and Network Security, William Stallings, Second Edition , ,

Prentice-Hall,1998.

10) Handbook of Applied Cryptography, A. Menezes, S. Vanstone, First edition, 1996, CRC Press.

11) Aktaş Z., Öncül H., Ural S. Sayısal Çözümleme Cilt I. ODTÜ yayınları, 1981.

12) Danby J. M. A. Computing Applications to Differantial Equations. Reston Publishing Company, 1985.

13) Ascher, Uri., Mattheij, M., Russel, R.D. Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differantial Equations. Prentice Hall, 1988.

14) Kahaner, D., Moler, C., Nash S., Numerical Methods and Software. Prentice-Hall, Englewood Cliffs. NJ, 1989.

15) Ross R.Middlemiss Differantial and İntegral calculus, Mc Graw – Hill, İnc ., New York, London, 1946.

16) F. Akbulut, Ali Çalışkan, Matematik Analiz Alıştırma ve Problemler Derlemesi (çeviri), İzmir, 1987.

17) Altıntaş.Y., Nümerik Analiz, İ.T.Ü. Sakarya Mühendislik Fakültesi Matbaası, 3. Baskı, Adapazarı, 1989.

Ek.1. Örnek Program Kodları

```
        {*********** 1- EN KÜÇÜK KARELER DOĞRUSU********}
uses crt,graph;
var
 x,y,c,d:array [0..10] of integer;
 j,k,a,b,t1,t2,t3,t4:integer;
 s,s1:real;
 hata,gd,gm,i:integer;
begin
  clrscr;
  i:=0;
  write('Ka‡ de§er girilecek..:'); readln(a);
  gotoxy(5,2); writeln('x         y');
  gotoxy(2,3); writeln('-----------------');
  k:=3;
  repeat
    i:=i+1;
    k:=k+1;
    gotoxy(5,k); readln(x[i]);
    gotoxy(15,k); readln(y[i]);
  until (i>=a);
  k:=k+1;
  gotoxy(2,k+1);writeln('   x         y        x*y        x*x');
  gotoxy(2,k+2);
  writeln('-------------------------------------------------------');
  k:=k+2;
  for j:=1 to  i do
    begin
     k:=k+1;
     gotoxy(5,k); writeln(x[j]);
     gotoxy(15,k); writeln(y[j]);
     c[j]:=x[j]*y[j];
     gotoxy(25,k); writeln(c[j]);
     d[j]:=x[j]*x[j];
     gotoxy(35,k); writeln(d[j]);
     t1:=t1+x[j];   t2:=t2+y[j];  t3:=t3+c[j]; t4:=t4+d[j];
    end;
    a:=0; b:=0;
    gotoxy(2,k+1);
    writeln('-------------------------------------------------------');
    gotoxy(5,k+2); writeln(t1);
    gotoxy(15,k+2); writeln(t2);
    gotoxy(25,k+2); writeln(t3);
    gotoxy(35,k+2); writeln(t4);
    gotoxy(20,k+4); writeln(t4,'A+',t1,'B=',t3);
    gotoxy(20,k+5); writeln(t1,'A+',j,'B=',t2);
    a:=t4*(-j); b:=t1*t1;  s:=((-j*t3)+(t1*t2))/(a+b);
    s1:=(t2-(s*t1))/j;
    if s1>0 then    write('Noktaların en küçük kareler doğrusu.......f(x)=',s:4:2,'X+',s1:4:1)
           else    write('Noktaların en küçük kareler doğrusu.......f(x)=',s:4:1,'X',s1:4:1);
```

```
 readln;
  detectgraph(gd,gm);
  initgraph(gd,gm,'');
  hata:=graphresult;
  line(100,280,400,280);
  line(250,150,250,400);
  for i:=0 to 100 do
     putpixel(i+250,250+(round(i*(-s)+s1)),15);
  readln;
  closegraph;
end. {***********  EN KÜÇÜK KARELER DOĞRUSU********}
uses crt,graph;
var
 x,y,c,d:array [0..10] of integer;
 j,k,a,b,t1,t2,t3,t4:integer;
 s,s1:real;
 hata,gd,gm,i:integer;
begin
   clrscr;
   i:=0;
   write('Kaç değer girilecek..:'); readln(a);
   gotoxy(5,2); writeln('x         y');
   gotoxy(2,3); writeln('-----------------');
   k:=3;
   repeat
      i:=i+1;
      k:=k+1;
      gotoxy(5,k); readln(x[i]);
      gotoxy(15,k); readln(y[i]);
   until (i>=a);
   k:=k+1;
   gotoxy(2,k+1);writeln('   x         y        x*y        x*x');
   gotoxy(2,k+2);
   writeln('------------------------------------------------------');
   k:=k+2;
   for j:=1 to  i do
      begin
        k:=k+1;
        gotoxy(5,k); writeln(x[j]);
        gotoxy(15,k); writeln(y[j]);
        c[j]:=x[j]*y[j];
        gotoxy(25,k); writeln(c[j]);
        d[j]:=x[j]*x[j];
        gotoxy(35,k); writeln(d[j]);
        t1:=t1+x[j];   t2:=t2+y[j];  t3:=t3+c[j]; t4:=t4+d[j];
      end;
      a:=0; b:=0;
      gotoxy(2,k+1);
      writeln('------------------------------------------------------');
      gotoxy(5,k+2); writeln(t1);
```

```
      gotoxy(15,k+2); writeln(t2);
      gotoxy(25,k+2); writeln(t3);
      gotoxy(35,k+2); writeln(t4);
      gotoxy(20,k+4); writeln(t4,'A+',t1,'B=',t3);
      gotoxy(20,k+5); writeln(t1,'A+',j,'B=',t2);
      a:=t4*(-j); b:=t1*t1;  s:=((-j*t3)+(t1*t2))/(a+b);
      s1:=(t2-(s*t1))/j;
      if s1>0 then    write('Noktalarin en küçük kareler doğrusu.......f(x)=',s:4:2,'X+',s1:4:1)
              else    write('Noktalarin en küçük kareler doğrusu.......f(x)=',s:4:1,'X',s1:4:1);
 readln;
  detectgraph(gd,gm);
  initgraph(gd,gm,'');
  hata:=graphresult;
  line(100,280,400,280);
  line(250,150,250,400);
  for i:=0 to 100 do
     putpixel(i+250,250+(round(i*(-s)+s1)),15);
  readln;
  closegraph;
end.
          (***********2-NEWTON'UN  KÖK ALGORİTMASI************)
uses crt;
var
  p0,n,p,a:real;
  i:integer;
begin
  clrscr;
  i:=0;
  write('Sayıyı giriniz....:');  readln(a);
  write('Kök sayısı.....:');  readln(n);
  write('P0 de§erini giriniz....:'); readln(p);
  repeat
      i:=i+1;
      p0:=p;
      p:=(p0+a/p0)/n;
      writeln('P',i-1,'=',p0:12:10,'      P',i,'=',p:12:10);
  until (p=p0);
  writeln;
  writeln('Sonu‡=',p:12:10);
  readln;
end.
/******3-NEWTON-RAPHSON  METHODU******/
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
main()
{  float x,x0,son;
   float fi,fnn,ft,fntt;
   int k,n,a,i,h,j;
   int sa[10];
```

```
              /*son de§er*/
  ft=0;   k=5;  fnn=0; fi=0; h=0;  fntt=0; i=0;  /*BaŸlang□‡ de§eri*/
  clrscr();
  printf("x de§eri.....:");  scanf("%f",&x);
  printf("Hata de§eri....:"); scanf("%f",&son);
  printf("Denklem derecesi..:");  scanf("%d",&n);  h=n;
  for (a=n;a>=0;a--)
    {  k+=10;
         gotoxy(k,10); scanf("%d",&sa[i]);
         gotoxy(k+3,10); printf("x%d",a);   i+=1;
    }
    i=0;
  do { i+=1; a=h+1; fnn=0; fntt=0;
         for (j=0;j<=h;j++)
         {      a-=1;  fi=0;
                   fi=(sa[j])*pow(x,a);
                   fnn+=fi;
                   ft=(a*sa[j])*pow(x,a-1);
                   fntt+=ft;    ft=0;
          }
  printf("\nFonksiyon De§eri...:%f",fnn);
  printf("\nT□revi.....:%f\n\n",fntt);
  if ((fnn>0) && (fnn<=0.000001)) {
                           printf("\nf(x)=0 oldu§u i‡in devam edilemiyor.Son de§er=%f",x);
                           break;
                        }
     printf("x=%f-%f/%f \n",x,fnn,fntt);
     x0=x;
     x=x0-fnn/fntt;
   printf("\Sonu‡=%f \n",x);
  }while ((x>=son));
  getch();
}
         /********* 4-İKİYE BÖLME METODU **********/
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
float fonk(int sa[10],float x,int n);
//float turev(int sa1[10],float x1,int n1);
main()
{  float x2,x0,b,c,h,y;
  float  son,sonucx,fa,fb,fc,sonuc;
  int sa2[10];
  int k,i2,n1,a1;
  son=1;          /*son değer*/
  x2=2;           /*Başlangıç değeri*/
  clrscr();
  son=0;
  printf("Başlangıç değeri....(a).:");  scanf("%f",&x2);
  printf("Bitiş değeri........(b).:");  scanf("%f",&y);
```

```
  c=(x2+y)/2;
  printf("c=%f",c);
  printf("\nHata değeri....:"); scanf("%f",&son);
  printf("\nHata değeri....:%f",son);
  k=0; i2=0;
  printf("Denklem derecesi..:");  scanf("%d",&n1);  h=n1;
  for (a1=n1;a1>=0;a1--)
    {  k+=10;
       gotoxy(k,10); scanf("%d",&sa2[i2]);
       gotoxy(k+3,10); printf("x%d",a1);   i2+=1;
    }
       clrscr();    int k1=4;
       gotoxy(2,2);
       printf("   a        b         c        f(a)        f(b)      f(c)");
       gotoxy(2,3);
       printf("-------------------------------------------------------------------");
       do {
          c=(x2+y)/2;
          gotoxy(5,k1); printf("%f",x2);
          gotoxy(15,k1); printf("%f",y);
          gotoxy(25,k1); printf("%f",c);
          fa=fonk(sa2,x2,n1);
          fb=fonk(sa2,y,n1);
          fc=fonk(sa2,c,n1);
          gotoxy(35,k1);  printf("%f",fa);
          gotoxy(45,k1);  printf("%f",fb);
          gotoxy(57,k1); printf("%f",fc);
          if (((fc>0) && (fa<0))||((fc<0) && (fa>0)))
                {  y=c;
                }
           else if (((fc>0) && (fb<0))|| ((fc<0) && (fb>0)))
                {  x2=y;
                      y=c;
                }
            else {
                   printf("\n\nSonuç hesaplanamadı.");
                   break;
                 }
           sonuc=fc;
           if (fc<0)  {
                        sonuc=-1*fc;
                      }
           k1+=1;
       } while (sonuc>=son);
       getch();
}
float fonk(int sa[10],float x,int n)
{  int a;
  int i=0;
  float fi,fnn=0;         a=n+1;
```

```
          for (int j=0;j<=n;j++)
          {      a-=1;  fi=0;
                 fi=(sa[j])*pow(x,a);
                 fnn+=fi;
          }
  return fnn;
}
{*********** 5- ORTALAMA ORDINAT METODU ********}
uses crt;
var
 x,y:array [0..10] of real;
 i,j,k,b:integer;
 s,s1,a,ytop:real;
begin
   clrscr;
   i:=0;
   write('Kaç değer girilecek..:'); readln(a);
   gotoxy(5,2); writeln('x         y');
   gotoxy(2,3); writeln('-----------------');
   k:=3;    ytop:=0;
   repeat
      i:=i+1;
      k:=k+1;
      gotoxy(5,k); readln(x[i]);
      gotoxy(15,k); readln(y[i]);
      ytop:=ytop+y[i];
   until (i>=a);
   k:=k+1;
      a:=0; b:=0;
      s:=ytop/i;
      writeln('Yort=',s:4:2);
      a:=x[i]-x[1];       s1:=s*a;
      writeln('Alan......:',s1:4:2);
 readln;
end.
{***********  6-SIMPSON  METODU  ********}
uses crt;
var
 x,y:array [0..20] of real;
 i,j,k,b,durum:integer;
 s,s1,a,ytop,xfark:real;
begin
   clrscr;
   durum:=1;
   i:=0;
   write('Kaç değer girilecek..:'); readln(a);
   gotoxy(5,2); writeln('x         y');
   gotoxy(2,3); writeln('-----------------');
   k:=3;    ytop:=0;
   repeat
```

```
    i:=i+1;
    k:=k+1;
    gotoxy(5,k); readln(x[i]);
    gotoxy(15,k); readln(y[i]);
  until (i>=a);
  a:=0;
  b:=0;
  a:=x[2]-x[1];
  for b:=2 to i-1 do
    begin
      xfark:=x[b]-x[b-1];
      if xfark<>a then
          durum:=0;
    end;
  ytop:=y[1];
  for b:=2 to i-1 do
    begin
      if (b mod 2=0) then
        begin
          ytop:=ytop+(4*y[b]);
        end
      else
         begin
           ytop:=ytop+(2*y[b]);
         end;
    end;
  if durum=1 then
    begin
      s1:=(a/3)*(ytop+y[i]);
      writeln;
      writeln('Alan......:',s1:4:2);
    end
  else
     begin
        writeln;
        writeln('x değerineait aralıklarla girilmeli...');
        writeln('Alan hesaplanamadı.');
     end;
 readln;
end.
{***********  7-SONLU FARKLAR (ileri Fark)  ********}
uses crt;
var
 x,c,x1:array [0..20] of integer;
 i,j,ii,y,k,a,b,m,d,z,no,durum,buyuk,i1,kucuk:integer;
 s,s1:real;
begin
  clrscr;
  i:=0;
  write('Kaç değer girilecek..:'); readln(a);
```

```
gotoxy(5,2); writeln('y       ');
gotoxy(2,3); writeln('---------');
k:=3;
repeat
   i:=i+1;
   k:=k+1;
   gotoxy(5,k); readln(x[i]); x1[i]:=x[i];
until (i>=a);
i1:=i;
k:=k+1;
clrscr;
gotoxy(2,2);writeln('   x        1        2        3');
gotoxy(2,3);
writeln('-------------------------------------------------------');
m:=0;   j:=0;
k:=4;   durum:=1;
repeat
   j:=j+1;
   gotoxy(5,k); writeln(x[j]);
   k:=k+2;
until  (j=i);
k:=3;   a:=0;  b:=k+2; k:=k+2;
repeat
  a:=a+1;  z:=z+10; i:=i-1;
durum:=1;
for j:=2 to i do
  begin
  if x[j]<>0 then
   begin
    if (x[j] mod x[1]=0) then
       begin
         write('');
       end
   else
       begin
        durum:=0;
       end;
  end;
for j:=1 to i do
  begin
   x[j]:=x[j+1]-x[j];
    gotoxy(5+z,k);
    writeln(x[j]);
    k:=k+2;
  end;
if (durum=1) and ((x[1]=x[i]) and (x[2]=x[i-1])) then break;
end;
 b:=b+1;
 k:=b;
until durum=1;
```

```
  readln;
  clrscr;  kucuk:=10000;
  for j:=1 to i do
    begin
     if abs(x[j])>buyuk then
       begin
         no:=j;
         buyuk:=abs(x[j]);
       end;
     if (x[j]<>0) and (abs(x[j])<kucuk) then
       begin
       {  if (x[j]>0)  then}
         kucuk:=x[j];
       end;
    end;
  if (x[1]=x[2]) or (kucuk=10000) then writeln('Hata bulunamadı...')
  else
  begin
    ii:=((i1-i) div 2);
    writeln('        Hatalı Terim.......:',x1[no+ii]);
    writeln('        Hata...............:',kucuk);
    writeln('        y=',x1[no+ii]-kucuk);
  end;
  readln;
end.
{*********** 8- YAMUK  METODU  ********}
uses crt;
var
 x,y:array [0..20] of real;
 i,j,k,b,durum:integer;
 s,s1,a,ytop,xfark:real;
begin
   clrscr;
   durum:=1;
   i:=0;
   write('Kaç değer girilecek..:'); readln(a);
   gotoxy(5,2); writeln('x         y');
   gotoxy(2,3); writeln('-----------------');
   k:=3;    ytop:=0;
   repeat
      i:=i+1;
      k:=k+1;
      gotoxy(5,k); readln(x[i]);
      gotoxy(15,k); readln(y[i]);
   until (i>=a);
   a:=0;
   b:=0;
   a:=x[2]-x[1];
   ytop:=(1/2)*(y[1]+y[i]);
   for b:=2 to i-1 do
```

```
    begin
      ytop:=ytop+y[b];
      xfark:=x[b]-x[b-1];
      if xfark<>a then
          durum:=0;
    end;
  if durum=1 then
    begin
      s1:=ytop*a;
      writeln;
      writeln('Alan......:',s1:4:2);
    end
  else
     begin
        writeln;
        writeln('x değerineait aralıklarla girilmeli...');
        writeln('Alan hesaplanamadı.');
     end;
 readln;
end.
```

Ek.2. Çözümlü Sorular

1. x^3-x-1=0 denkleminin [1,2] aralığındaki kökünü ikiye bölme, kirişler, teğetler yöntemiyle bulunuz.
2. e^{-x}-x=0 denkleminin kökünü 010001 hassasiyetle bulunuz.
3. e^{-x}-2x=0 denkleminin kökünü 010001 hassasiyetle bulunuz.
4. cosx-x^2=0 denkleminin [0,1] aralığındaki kökünü, 0,0001 hassasiyetle bulunuz.
5. f(x)=lnx-5+x denkleminin kökünü bulunuz.
6. f(x)=e^x-2-x denkleminin kökünü bulunuz.
7. x.sinx-1=0 denkleminin kökünü [0,2] aralığında, 0/0001 hassasiyetle bulunuz.
8. A=$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.¸
9. A=$\begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -12 & -20 & 24 \\ -6 & -12 & 16 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.
10. A=$\begin{pmatrix} -3 & -7 & -2 \\ 12 & 20 & 6 \\ -20 & -31 & -9 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.
11. A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.
12. (-1,10),(0,9),(1,7),(2,5),(3,4),(4,3),(5,0),(6,-1) noktaları için en küçük kareler doğrusunu ve ortalama, mutlak, rms (etkin) hatalarını bulunuz.
13. (-2,1),(0,3),(2,6),(4,8),(6,13) noktaları için en küçük kareler doğrusunu, E_∞, E_1, E_2 ‘yi bulunuz.
14. (-2,1),(-1,2),(0,3),(1,3),(2,4) noktaları için en küçük kareler doğrusunu, E_∞, E_1, E_2 ‘yi bulunuz.
15. (-6,7),(-2,5),(0,3),(2,2),(6,0) noktaları için en küçük kareler doğrusunu, E_∞, E_1, E_2 ‘yi bulunuz.

16. $a_n=4a_{n-1}+3a_{n-2}$; $a_0=3$, $a_1=7$, $n\geq 2$ olan bağıntı nedir?

17. $a_n=6a_{n-1}+11a_{n-2+}6a_{n-3}$; $a_0=2$, $a_1=5$, $a_2=15$, $n\geq 3$ olan bağıntı nedir?

18. $a_n=6a_{n-1}-9an_{-2}$; $a_0=1$, $a_1=6$, $n\geq 2$ olan bağıntı nedir?

19. $a_n=-a_{n-1}+4a_{n-2+}4an_{-3}$; $a_0=6$, $a_1=14$, $a_2=20$ olan bağıntı nedir?

20. $3a_n=2a_{n-1}+12a_{n-2}-8an_{-3}$; $a_0=5$, $a_1=2$, $a_2=28/3$ olan bağıntı nedir?

21. $a_n=5a_{n-1}-8a_{n-2}+4a_{n-3}$; $a_0=3$, $a_1=5$, $a_2=9$ olan bağıntı nedir?

22. (1;3.51),(2;4.23),(4;6.29),(5;7.81),(7;7.96),(7.5;8.91),(9;9.25) noktalarından geçen eğrinin altındaki alanı bulunuz.

23. (0,4),(1,3),(2,4),(3,7),(4,12),(5,19),(6,28),(7,39),(8,52),(9,67),(10,84) noktalarından geçen eğrinin altındaki alanı bulunuz.

24. $\int_0^{\Pi/2}\sqrt{\sin x}.dx$, $\Delta x=\prod/12$ integralini her üç yöntemle yaklaşık olarak çözünüz.

25. $\int_0^{10}(\frac{x}{10}+2).dx$, $\Delta x=1$ integralini her üç yöntemle yaklaşık olarak çözünüz.

26. $\int_0^{10}(\frac{x^2}{10}+4).dx$, $\Delta x=1$ integralini her üç yöntemle yaklaşık olarak çözünüz.

27. Aşağıdaki tabloya göre 3. mertebeden farkları bulunuz.

x_k	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	1	8	27	64	125	216	343	512

28. $y=x^3-3x+1$ polinomu için, h=1 olarak $1\leq x\leq 10$ aralığındaki ileri farkları bulun.

29. 4.mertebeden farkı tablosuz bulun.

k	0	1	2	3	4	5	6
y_k	0	1	16	81	256	625	1296

30. y : 7, 10, 17, 33, 63, 121, 185, 287, 423, 598, 817 terimlerinin içinde hatalı terim varsa bularak hatayı düzeltiniz.

31. x'in 2,3,4 değerlerine karşılık f(x)=ln(x) 'in Lagrance interpolasyon polinomunu bulunuz, 2,5 'taki hatayı ve e'yi hesaplayınız.

32. x'in 2,3,4,5 değerlerine karşılık f(x)=ln(x) 'in Newton interpolasyon polinomunu bulunuz, 3,5 'daki hatayı ve e'yi hesaplayınız.

33. f(x)=sinx 'in 2,3,4,5 değerlerine karşılık gelen Lagrange interpolasyon polinomunu bulunuz. 2,5 'daki hatayı ve e'yi hesaplayınız.

34. 4x-y+z=7; 4x-8y+z=-21; -2x+y+5z=15 denklem sistemlerini Jacobi ve Gauss-Seider iterasyon yöntemleriyle çözünüz.

Çözümler: İlk yedi sorunun çözümü derste yapılacaktır.

8) $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ise $\det(A-I\lambda)=\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}=0$ 'dan

$(3-\lambda).((2-\lambda)(3-\lambda)-(-1)(-1)) +1((-1)(3-\lambda)-0.(-1))=(3-\lambda)(6-5\lambda+\lambda^2-1)+\lambda-3=0$

$18-6\lambda-15\lambda+5\lambda^2+3\lambda^2-\lambda^3-3+\lambda+\lambda-3\lambda=-\lambda^3+8\lambda^2-19\lambda+12=0$ ve bu denklem çözülürse özdeğerler $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=4$ olarak bulunur. Bu özdeğerlere karşı gelen özvektörler;

$(3-\lambda)x_1 + (-1)x_2 = 0$ $\quad\quad$ $\lambda_1=1$ için,

$-x_1 + (2-\lambda)x_2 - x_3 = 0$ $\quad\quad$ $2x_1-x_2=0$, $\quad -x_1+x_2-x_3=0$, $\quad -x_2+2x_3=0$, $\quad x_1=x_3$, $x_2=2x_1$

$-x_2 + (3-\lambda)x_3 = 0$ $\quad\quad$ $V^{(1)} = (x_1 \;\; 2x_1 \;\; x_1) = a\,(1 \;\; 2 \;\; 1)$

$\lambda_2=3$ için,

$-x_2=0$, $\quad -x_1-x_2-x_3=0$, $\quad -x_2=0$, $x_3=-x_1$

$V^{(2)} = (x_1 \;\; 0 \;\; -x_1) = b\,(1 \;\; 0 \;\; -1)$

$\lambda_3=4$ için,

$-x_1-x_2=0$, $\quad -x_1-2x_2-x_3=0$, $\quad -x_2-x_3=0$, $\quad x_3=-x_2$, $x_1=-x_2$

$V^{(3)} = (-x_2 \;\; x_2 \;\; -x_2) = c\,(-1 \;\; 1 \;\; -1)$

9) det $(A-I\lambda)=\det\begin{pmatrix} 7-\lambda & 6 & -3 \\ -12 & -20-\lambda & 24 \\ -6 & -12 & 16-\lambda \end{pmatrix}=0$

$(7-\lambda)[(-20-\lambda)(16-\lambda)+24.12] -6[(-12)(16-\lambda)+24.6] -3[144-(20+\lambda).6]=0$

$(7-\lambda)(-320-16\lambda+\lambda^2+20\lambda+288)$ $-6(12\lambda-192+144)$ $-3(144-120-6\lambda)=0$

$(7-\lambda)(\lambda^2+4\lambda-32)$ $-6(12\lambda-48)$ $-3(24-6\lambda)=0$

$7\lambda^2-\lambda^3+28\lambda-4\lambda^2+21\lambda-224-72\lambda+288-72+18\lambda=0$,

$-\lambda^3+3\lambda^2+6\lambda-8=0$ ve buradan özdeğerler $\lambda_1=1, \lambda_2=4, \lambda_3=-2$ olarak bulunur. Bu özdeğerlere karşı gelen özvektörler;

$(7-\lambda)x_1+6x_2-3x_3=0$, $\quad -12x_1-(20+\lambda)x_2+24x_3=0$, $\quad -6x_1-12x_2+(16-\lambda)x_3=0$

$\lambda=1$ için	$\lambda=4$ için	$\lambda=-2$ için
$6x_1+6x_2-3x_3=0$	$3x_1+6x_2-3x_3=0$	$9x_1+6x_2-3x_3=0$
$-12x_1-21x_2+24x_3=0$	$-12x_1-24x_2+24x_3=0$	$-12x_1-18x_2+24x_3=0$
$-6x_1-12x_2+15x_3=0$	$-6x_1-12x_2+12x_3=0$	$-6x_1-12x_2+18x_3=0$
$x_1=\frac{3}{2}x_3$; $x_2=2x_3$	$x_3=0$; $x_1=-2x_2$	$x_2=-2x_1$; $x_3=-x_1$
$V^{(1)}=(\frac{3}{2}x_3,\ 2x_3,\ x_3)$	$V^{(2)}=(-2x_2,\ x_2,\ 0)$	$V^{(3)}=(x_1,\ -2x_1,\ -x_1)$
$=a(\frac{3}{2},\ 2,\ 1)$	$=b(-2,\ 1,\ 0)$	$=c(1,\ -2,\ -1)$

10) $\det(A-I\lambda)=\det\begin{pmatrix}-3-\lambda & -7 & -2\\ 12 & 20-\lambda & 6\\ -20 & -31 & -9-\lambda\end{pmatrix}=0$

$(-3-\lambda)[(20-\lambda)(-9-\lambda)+31.6]+7[12(-9-\lambda)+20.6]-2[12.(-31)+20(20-\lambda)]=0$

$(-3-\lambda)(-180+9\lambda+\lambda^2-20\lambda+186)+7(-12\lambda-108+120)-2(-372+400-20\lambda)=0$

$(-3-\lambda)(\lambda^2-11\lambda+6)+7(-12\lambda+12)-2(-20\lambda+28)=0$

$-3\lambda^2-\lambda^3-33\lambda+11\lambda^2-18-6\lambda-84\lambda+84+40\lambda-56=0$

$-\lambda^3+8\lambda^2-83\lambda+10=0$, ….

11) $\mathrm{Det}(A-I\lambda)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 1\\ 2 & 3-\lambda & 3\\ 3 & 3 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0$ açılırsa;

$(2-\lambda)[(3-\lambda)(4-\lambda)-9]-1[2(4-\lambda)-9]+1[2.3-(3-\lambda).3]=0$ ve buradan

$\lambda^3-9\lambda^2+15\lambda-7=0$ elde edilir.Bu denklem çözülürse özdeğerler; $\lambda_1=\lambda_2=1$ ve $\lambda_3=7$ olarak bulunur. Bu özdeğerlere karşı gelen özvektörler;

$(2-\lambda)x_1+x_2+x_3=0$, $2x_1+(3-\lambda)x_2+3x_3=0$,

$\lambda=1$ için	$\lambda=7$ için
$x_1+x_2+x_3=0$	$-5x_1+x_2+x_3=0$
$2x_1+2x_2+3x_3=0$	$2x_1-4x_2+3x_3=0$
$3x_1+3x_2+3x_3=0$	$3x_1+3x_2-3x_3=0$
$x_1=-x_2$; $x_3=0$	$x_2=5x_1$; $x_3=0$
$V^{(1)}=(x_1,-x_1,0)$	$V^{(2)}=(x_1,5x_1,0)$
$=a(1,-1,0)$	$=b(1,5,0)$

şeklinde a ve b parametrelerine değerler verilerek bulunur.

12)

x_k	y_k	$x_y y_k$	x_k^2
-1	10	-10	1
0	9	0	0
1	7	7	1
2	5	10	4
3	4	12	9
4	3	12	16
5	0	0	25
6	-1	-6	36

$\sum x_k = 20 \quad \sum x_k y_k = 25$

$\sum y_k = 37 \quad \sum x_k^2 = 92$

4 / A·92 + B·20 = 25

10/A·20 + B·8 = 37

168A = -270 ise $A = \frac{-270}{168} = -1{,}6; B = 8{,}6$

y=Ax + B; **y= -1,6x + 8,6** olur.

f(x)	f(x) $-y_k$	e_k^2
10,2	0,2	0,04
8,6	0,4	0,16
7	0	0
5,4	0,4	0,16
3,8	0,2	0,04
2,2	0,8	0,64
0,6	0,6	0,36
-1	0	0

$E_\infty(f_k)=$ ***0,8***

$$E_1(f_k) = \frac{1}{N}\sum e_k = 0{,}325$$

$$E_2(f_k) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum e_k^2 = 0{,}418}$$

13)

$E_\infty(f)=1,1$

$E_1(f)=0,64$

$E_2(f)=0,7348$

x_k	y_k	$x_k y_k$	x_k^2	F(x)	|f(x)-y(k)|	e_k^2
-2	1	-2	4	0,4	0,6	0,36
0	3	0	0	3,3	0,3	0,09
2	6	12	4	6,2	0,2	0,04
4	8	32	16	9,1	1,1	1,21
6	13	78	36	12	1	1

$\Sigma x_k = 10$, $\Sigma y_k = 31$, $\Sigma x_k y_k = 120$, $\Sigma x_k^2 = 60$,

$A \cdot 60 + B \cdot 10 = 120$; $\;{}^2/A \cdot 10 + B \cdot 5 = 31$

$60A + 10B = 120$, $\quad 20A + 10B = 62$

$40A = 58$, $A=1,45$,$B=3,3$ ise **$y=1,45x + 3,3$**

14)

x_k	y_k	$x_k y_k$	x_k^2	$f(x_k)$	e_k	e_k^2
-2	1	-2	4	1,2	0,2	0,04
-1	2	-2	1	1,9	0,1	0,01
0	3	0	0	2,6	0,4	0,16
1	3	3	1	3,3	0,3	0,09
2	4	8	4	4	0	0

$E_\infty (f)=0,4$

$E_1(f)=0,2$

$E_2(f)=0,2449$

$\Sigma x_k = 0$, $\Sigma y_k = 13$, $\Sigma x_{ky_k} = 7$, $\Sigma x_k^2 = 10$,

$A \cdot 10 + B \cdot 0 = 7$,

$A \cdot 0 + B \cdot 5 = 13$ ise $A=0,7$ ve $B=2,6$ böylece; **$y=0,7x+2,6$**

15)

x_k	y_k	$x_k y_k$	x_k^2	f(x)	e_k	e_k^2
-6	7	-42	36	7	0	0
-2	5	-10	4	4,6	0,4	0,16
0	3	0	0	3,4	0,4	0,16
2	2	4	4	2,2	0,2	0,04
6	0	0	36	-0,2	0,2	0,04

$E_\infty(f)=0,4$

$E_1(f)=0,24$

$E_2(f)=0,282$

$\Sigma x_k = 0$, $\Sigma y_k = 17$, $\Sigma x_{k}y_{k} = -48$, $\Sigma x_k^2 = 80$, $A\cdot 80 + B\cdot 0 = -48$,

$A\cdot 0 + B\cdot 5 = 17 \Rightarrow$ $A=-0,6$ ve $B=3,4 \Rightarrow$ $\mathbf{y=0,6x+3,4}$

16) $a_n = 4a_{n-1} + 3a_{n-2}$; $a_o=3$, $a_1=7$, $r^2= 4r-3$; $r^2-4r + 3 = 0$

$(r-3)(r-1)=0 \Rightarrow r_1=3, r_2=1$ $a_n=\alpha_1\cdot r_1^n$; $a_n= \alpha_1\cdot 3^n + \alpha_2\cdot 1^n$

$n=0 \Rightarrow a_o= \alpha_1 \cdot 3^0 + \alpha_2\cdot 1^0 = 3 \Rightarrow \alpha_1+ \alpha_2 = 3 \}$ $\alpha_1=2$

$n=1 \Rightarrow a_1= \alpha_1 \cdot 3^1 + \alpha_2\cdot 1^1 = 7 \Rightarrow 3\alpha_1+ \alpha_2 = 7 \}$ $\alpha_2=1$ $\boldsymbol{a_n=2.3^n+1}$

17) $a_n=6a_{n-1}-11a_{n-2}+6a_{n-3}$; $a_o=2$, $a_1=5$, $a_2=15$, $r^3=6r^2 - 11r+6$

$r^3-6r^2+11r-6=0$; $r_1=1$, $r_2=2$, $r_3=3$

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	0
2		2	-6	
	1	-3	0	
3		3		
	1	0		

$a_n = \alpha_1\cdot r_1^n + \alpha_2\cdot r_2^n + \alpha_3\cdot r_3^n$

$a_n = \alpha_1\cdot 1^n + \alpha_2\cdot 2^n + \alpha_3\cdot 3^n$

$n=0 \Rightarrow a_o=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2 \}$ $\alpha_1=1, \alpha_2=-1, \alpha_3=2$

$n=1 \Rightarrow a_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=5\}$

$n=2 \Rightarrow a_2=\alpha_1+4\alpha_2+9\alpha_3=15\}$

$a_n=1-2^n+2\cdot 3^n$

18) $a_n=6a_n-1 - 9a_n-2$, $a_o=1$, $a_1=6$

$r^2=6r-9$; $r^2-6r+9=0$

$(r-3)(r-3)=0$ $r_1=3$, $r_2=3$

$a_n= \alpha_1\cdot r_1^n + \alpha_2\cdot n\cdot r_2^n$

$a_o= \alpha_1\cdot 3^{0} + \alpha_2\cdot 0\cdot 3^0 = 1\Rightarrow$ $a_1= \alpha_1\cdot 3^{1} + \alpha_2\cdot 1\cdot 3^1 = 6$

$\alpha_1 = 1$, $3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 6$

$\alpha_2 = 1 \Rightarrow a_n = 3^n + n\cdot 3^n \Rightarrow$ $\mathbf{a_n = 3^n(1+n)}$

19) $a_n=-a_{n-1}-4a_{n-2}+4a_{n-3}$; $a_o=6$, $a_1=14$, $a_2=20$, $r^3=r^2-4r+4$

$r^3-r^2+4r-4=0$; $r_1=2$, $r_2=-2$, $r_3=-1$

	1	1	-4	-4
2		2	6	4
	1	3	2	0
-2		2	2	
	1	1	0	
-1		1		
	1	0		

$a_n = \alpha_{1..}r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n + \alpha_3 \cdot r_3^n$

$a_n = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 \cdot (-2)^n + \alpha_3 \cdot (-1)^n$

$n=0 \Rightarrow a_o=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=6$ $\quad \}\alpha_1= {}^{11}/_2$

$n=1 \Rightarrow a_1=2\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3=14$ $\quad \}\alpha_2= -{}^{-5}/_6$

$n=2 \Rightarrow a_2=4\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3=20$ $\quad \}\alpha_3= {}^{4}/_3$

$$a_n = \frac{11}{2}\cdot 2^n - \frac{5}{6}\cdot(-2)^n + \frac{4}{3}\cdot(-1)^n$$

20) $3a_n=-2a_{n-1}+12a_{n-2}-8a_{n-3}$,

$a_o=5$, $a_1=2$, $a_2={}^{28}/_3$

$3r^3=2r^2+12r-8 \Rightarrow 3r^3-2r^2-12r+8=0$;

	3	2	-12	8
2		6	8	-8
	3	4	-4	0
-2		-6	4	
	3	-2	0	
${}^2/_3$		2		
	3	0		

$r_1=2$, $r_2=-2$, $r_3=-1$

$a_n = \alpha_{1..}r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n + \alpha_3 \cdot r_3^n$

$a_n = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 \cdot (-2)^n + \alpha_3 \cdot ({}^2/_3)^n$

$a_o = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 5$

$a_1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + {}^2/_3\, \alpha 3 = 2$

$a_2 = 4\alpha_1 + 4\alpha_2 + {}^4/_9\, \alpha 3 = {}^{28}/_3$

$\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 1$; $\alpha_3 = 3$

$a_n = 2^n + (-2)^n + 3\cdot({}^2/_3)^n$

21) $a_n=5a_{n-1}-8a_{n-2}+4a_{n-3}$

$a_o=3$, $a_1=5$, $a_2=9$

$r^3=5r^2-8+4$, $\quad r^3-5r^2+8r-4=0$;

$r_1=2$, $r_2=2$, $r_3=2$

$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot n \cdot 2^n$

$a_o = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \cdot 0 = 3$

$a_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha 3 = 5$

$a_2 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha 3 = 9$

	1	-5	8	-4
1		1	-4	4
	1	-4	4	0
2		2	-4	
	1	-2	0	
2		2		
	1	0		

$\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 2$; $\alpha_3 = 0$ ise **$a_n = 1 + 2\cdot 2^n = 1 + 2^{n+1}$** olur.

22)

x	1	2	4	5	7	7,5	9
y	3,51	4,23	6,29	7,81	7,96	8,91	9,25

$$A = y_{ort}(b-a) = \frac{\sum y}{7}(9-1) = 54,81br^2$$

23)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	4	3	4	7	12	19	28	39	52	67	84

$$A = y_{ort}(b-a) = \frac{\Sigma_y}{11}(10-1) = 290br^2$$

$$A = \Delta_x\left[\frac{y_o + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right] = 1\left[\frac{4+84}{2}3 + 4 + 7 + \ldots + 52 + 67\right] = 275br^2$$

$$A = \Delta x[y_o + y_1 + y_2 + \ldots + y_n] = 1[4 + 3 + 4 + 7 + \ldots + 84] = 319br^2$$

$$A = \frac{\Delta x}{3}[y_o + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots 4y_{n-1} + y_n]$$

$$A = \frac{1}{3}[4 + 4.3 + 2.4 + 4.7 + 2.12 + 4.19 + 2.28 + 4.39 + 2.52 + 4.67 + 84] = 273br^2$$

24) $\int^{\Pi/2} \sin x dx, \Delta x = \Pi/12$

x	0	Π/12	Π/6	Π/4	Π/3	5Π/12	Π/2
y	0	0,5087	0,7071	0,8408	0,9306	0,9828	1

$$A = \frac{\Pi}{12}\left[\frac{0+1}{2} + 0,5087 + 0,7071 + \ldots + 0,9828\right] = 67,05br^2 (yamuk \cdot metodu)$$

$$A = \frac{\Pi}{12}[0 + 0,5087 + 0,7071 + \ldots + 0,9828 + 1] = 74,55br^2 (dikdörtgen \cdot metodu)$$

$$A = \frac{\Sigma_y}{n}(b-a) = \frac{4,97}{7} \cdot \frac{\Pi}{2} = 63,9br^2 (ortalama \cdot ordinat \cdot metodu)$$

25) $\int_0^{10} \left(\frac{x}{10}+2\right)dx, \Delta x = 1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3

$$A = \frac{\Sigma_y}{n} \cdot (b-a) = \frac{27,5}{11}(10-0) = 25br^2 \,(ortalama \cdot ordinat \cdot metodu)$$

$$A = 1 \cdot \left(\frac{2+3}{2} + 2,1 + 2,2 + ... + 2,9\right) = 25br^2 \,(yamuk \cdot metodu)$$

$$A = \frac{1}{3}(2 + 4.2,1 + 2.2,2 + 4.2,3 + ... + 4.2,9 + 3) = 25br^2 \,(simpson \cdot metodu)$$

26) $\int_0^{10} \left(\frac{x^2}{10}+4\right)dx, \Delta x = 1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	4	4,1	4,4	4,9	5,6	6,5	7,6	8,9	10,4	12,1	14

$$A = \frac{\Sigma_y}{n} \cdot (b-a) = \frac{82,5}{11}(10-0) = 75br^2 \,(ortalama \cdot ordinat \cdot metodu)$$

$$A = 1 \cdot \left(\frac{4+14}{2} + 4,1 + 4,4 + ... + 12,1\right) = 73,5br^2 \,(yamuk \cdot metodu)$$

$$A = \frac{1}{3}(4 + 4.4,1 + 2.4,4 + ... + 4.12,1 + 14) = 73,33br^2 \,(simpson \cdot metodu)$$

27)

x_k	y_k	Δ_y	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	1	7	12	6
2	8	19	18	6
3	27	37	24	6
4	64	61	30	6
5	125	91	36	6
6	216	127	42	
7	343	169		
8	512			

28) $y=x^3 \cdot 3x+1$, $h=1$, $1<=x<=10$

x	y	Δ_y	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	-1	4	12	6
2	3	16	18	6
3	19	34	24	6
4	53	58	30	6
5	111	88	36	6
6	199	124	42	6
7	323	166	48	6
8	489	214	54	
9	703	268		
10	971			

29) $\Delta^4 y_k = \Delta^3 y_{k+1} - \Delta^3 y_k$

k	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1	16	81	256	625	1296

$\Delta^4 y_{k=} \Delta^2 y_{k+2} - \Delta^2 y_{k+1} - \Delta^2 y_{k+1} + \Delta^2 y_k$

$\Delta^4 y_{k=} \Delta y_{k+3} - \Delta y_{k+2} - \Delta y_{k+2} + \Delta y_{k+1} - \Delta y_{k+2}$

$+\Delta y_{k+1} + \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$

$\Delta^4 y_{k=} y_{k+4} - y_{k+3} - y_{k+3} + y_{k+2} - y_{k+3} + y_{k+2}$

$+ y_{k+2} - y_{k+1} - y_{k+3} + y_{k+2} + y_{k+2} - y_{k+1}$

$+ y_{k+2} - y_{k+1} - y_{k+1} - y_k$

$\Delta^4 y_{k=} y_{k+4} - 4y_{k+3+} 6y_{k+1} - 4y_{k+1} - y_{k,}$ k=0 olsun

$\Delta^4 y_{0=} y_4 - 4y_{3+} 6y_1 - 4y_1 - y_0$

$\Delta^4 y_{0=}$256-4.81+6.16-4.1-0=***24***

30)

y	7	10	17	33	63	**121**	185	287	423	598	817
Δy		3	7	16	30	58	64	102	136	175	219
Δ^2y			4	9	14	28	6	38	34	39	44
Δ^3y				5	5	14	-22	32	-4	5	5
Δ^4y					0	9	-36	54	-36	9	0
						α	-4 α	**6 α**	-4 α	α	

6α en büyük olduğundan 121 yerine ***121-9=112*** yazılırsa tablo düzelir

31)

x	2	3	4
y=lnx	0,6931	1,0986	1,3862

$$P_2(x) = (0{,}6931)\frac{(x-3)(x-4)}{(2-3)(3-4)} + (1{,}3862)\frac{(x-2)(x-3)}{(4-2)(4-3)}$$

$$P_2(2{,}5) = (0{,}6931)\frac{(-0{,}5)(-1{,}5)}{(-1)(-2)} + (1{,}3862)\frac{0{,}5\cdot(-0{,}5)}{2\cdot 1}$$

$$P_2(2{,}5) = 0{,}2599 - 0{,}1732 + 0{,}82395$$

$$P_2(2{,}5) = 0{,}9106$$

$$e = GD - HD = \ln(2{,}5) - P_2(2{,}5) = 0{,}9162 - 0{,}9106 = 0{,}0056$$

$$A_3(2{,}5) = (2{,}5-2)(2{,}5-3)(2{,}5-4) = 0{,}375$$

$$y = f(x) = \ln x$$

$$y' = f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$f''' = \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(2) = \frac{1}{4}$$

$$f'''(4) = \frac{1}{32}$$

$$|R_2(2{,}5)| \leq |M_3(2;4).\frac{A_3(2{,}5)}{3}|$$

$$R_2(2{,}5) = \frac{1}{4}\cdot\frac{0{,}375}{1.2.3} = 0{,}0156$$

32)

x	2	3	4	5
y=lnx	0,6931	1,0986	1,3862	1,6094

$P_3(x)$=(0,6931)+(1,0986)(x-2)+1,3862)(x-2)

(x-3)+(1,6094)(x-2)(x-3)(x-4)

$| R_3(3{,}5) | \leq | M_4(2{,}5)\cdot \frac{A_4(3{,}5)}{4!} |$

$M_4(2,5)=\max\{f^4(x)\}={}^6/_{16}$,

$A_4(3,5)$=(3,5-2)(3,5-3)(3,5-4)(3,5-4)(3,5-5)=0,5625

$R_3(3,5)={}^6/_{16}x\quad {}^{0,5625}/_{4!}$ = ***0,0088***

33)

x	2	3	4	5
y=sinx	0,9092	0,1411	0,7568	0,9589

$$P_3(x)=(0{,}9092)\frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-3)(2-4)(2-5)}+(0{,}1411)\frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-2)(3-4)(3-5)}+(0{,}7568)$$
$$\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-2)(4-3)(4-5)}+(0{,}9589)\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-2)(5-3)(5-4)}$$

Lagrange interpolasyon.polinomu

$R(2{,}5)=M_4(2{,}5).\frac{A_4(2{,}5)}{4!}$,⇒$M_4(2,5)=\max\{f^4(x)\}$=0,9589,

$A_4(2,5)$=(2,5-2)(2,5-3)(2,5-4)(2,5-5)=-0,9375

R(2,5)=0,9589· ${}^{0,9375}/24$ =***0,0374***

34) 4x-y+z=7,

4x-8y+z=-21,

-2x+y+5z=15

$$x_{k+1}=\frac{7+y_k-z_k}{4},\qquad x_{k+1}=\frac{7+y_k-z_k}{4},$$
$$y_{k+1}=\frac{21+4x_{k+1}+z}{8},\qquad y_{k+1}=\frac{21+4x+z}{8},$$
$$z_{k+1}=\frac{15+2x_{k+1}-y_{k+1}}{5},\qquad z_{k+1}=\frac{15+2x-y}{5},$$

(x_o, y_o, z_o)=(1,2,2) olsun.x_1=1,75 x_2=3,75 x_3=2,95

Ek.3.Çözümlü Örnekler

Örnek:(2,11),(3,14),(5,21),(6,23),(7,27) ve (8,34) noktaları için f(x)=Ax+B en küçük kareler doğrusunu ve ortalama,etkin,maksimum hatayı bulun.

Çözüm:

k	x_k	y_k	x_k^2	$x_k.y_k$
1	2	11	4	22
2	3	14	9	42
3	5	21	25	105
4	6	23	36	138
5	7	27	49	189
6	8	34	64	272
+	31	130	187	768

6/ 187A + 31B = 768

-31/ 31A + 6B = 130 $\longrightarrow$ $B = \dfrac{130-31A}{6}$

1122A + 186B = 4608

-961A - 186B = -4030

161A = 578

A = 3,590 $\longrightarrow$ $B = \dfrac{130-31(3,59)}{6} = 3,118$

$f(x) = Ax_k + B \longrightarrow f(x) = 3,59x_k + 3,118$

$f(x_k)$	y_k	$\lvert e_k \rvert$	e_k^2
3,59.2 + 3,118 = 10,298	11	0,702	0,492
3,59.3 + 3,118 = 13,888	14	0,112	0,012
3,59.5 + 3,118 = 21,068	21	0,068	0,004
3,59.6 + 3,118 = 24,658	23	1,658	2,748
3,59.7 + 3,118 = 28,248	27	1,248	1,557
3,59.8 + 3,118 = 31,838	34	2,162	4,674
	+	5,95	9,487

$$E_\infty(f) = \max|e_k| = 2,162$$

$$E_1(f) = \frac{1}{6}.\sum|e_k| = \frac{5,95}{6} = 0,991$$

$$E_2(f) = \sqrt{\frac{1}{6}\sum e_k^2} = \sqrt{\frac{9,487}{6}} = 1,257$$

Örnek: $\int_2^8 Lnx.dx$ integralini h=1seçerek yamuk ve simpson yöntemiyle bulunuz..

Çözüm:

x	2	3	4	5	6	7	8
$y = \ln x$	0,693	1,098	1,386	1,609	1,791	1,945	2,079

$\Delta x = 1$

Yamuk Metodu:

$$A \cong \Delta x\left(\frac{y_1 + y_7}{2} + y_2 + y_3 + ... + y_6\right) \cong \Delta x\left(\frac{0,693 + 2,079}{2} + 1,098 + 1,386 + ... + 1,945\right) = 1,386 + 7,829 = 9,215br^2$$

Simpson Metodu:

$$A \cong \frac{\Delta x}{3}(y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + 4y_6 + y_7) = \frac{1}{3}(0,693 + 2,079 + 4(1,098 + 1,609 + 1,945) + 2(1,386 + 1,791))$$

$$A \cong \frac{1}{3}(2,772 + 18,608 + 6,354) = \frac{27,734}{3} = 9,244br^2$$

Örnek: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörleri nedir.

Çözüm:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (2-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda)] + 1[(0-0)] + 0 = 0 \\ &= (2-\lambda)\left[2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2\right] = 0 \\ &= 2\lambda^2 - 6\lambda + 4 - \lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = 0 \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0 \\ &= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0 \end{aligned}$$

	1	-5	8	4
1		1	-4	4
	1	-4	4	0

$\lambda = 1$ için sağlanır (Çarpanlardan biri bu nedenle $(\lambda - 1)$'dir.)

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \longrightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-2) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_{2,3} = 2$$

$\lambda = 1$ için

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 = 0 &\longrightarrow x_1 = x_2 \\ x_3 &= 0 \\ 4x_1 = 0 &\longrightarrow x_1 = 0 \end{aligned} \qquad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{2,3} = 2$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -x_2 = 0 &\longrightarrow x_2 = 0 \\ 4x_1 &= x_3 \end{aligned} \qquad x^{(2)} = x^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 4x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Örnek: $e^x + x = 0$ denkleminin kökünü 5 adımda teğetler yöntemiyle bulunuz.

Çözüm:

$$f(x) = e^x + 3x$$

$$f^{I}(x) = e^x + 3$$

$$x_0 = -1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)}$$

$$x_1 = -1 - \frac{-2,632120}{3,367879} = -0,218463$$

$$x_2 = -0,218463 - \frac{0,803753 - 0,655389}{3,803753} = -0,257467$$

$$x_3 = -0,257467 - \frac{0,773007 - 0,772401}{3,773007} = -0,257627$$

$$x_4 = -0,257627 - \frac{0,772883 - 0,772881}{3,772883} = -0,257627$$

Diğer adımlarda kök x=-0.257627 aynı olup milyonda iki hata ile köke yaklaşılmıştır.

Örnek:44,69,96,125,156,192,224,261,300,341,384 okunuşunda hatalı terimi bulup hatayı düzeltiniz.

Çözüm:

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
44				
	25			
69		2		
	27		0	
96		2		0
	29		0	
125		2		3
	31		3	
156		5		-12
	36		-9	
192		-4		18
	32		9	
224		5		-12
	37		-3	
261		2		3
	39		0	
300		2		0
	41		0	
341		2		
	43			
384				

$\alpha = 3$

Doğru Terim = 192 - 3 = 189