$\boxed{\text{CEVAP ANAHTARI}}$

30/11/2023

SAÜ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ ARASINAVI

İŞLEM YAPILMADAN VERİLEN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR.

1. $y = c_1x^2 + c_2\sqrt{x}$ eğri ailesini çözüm kabul eden en düşük basamaktan diferensiyel denklemi bulunuz ve bulduğunuz denklemin mertebe, derece ve lineerliğini belirtiniz. (Denklemi en sade şekilde yazınız.) 25p.

2. $y' = x^3(y-x)^2 + \dfrac{y}{x}$ denkleminin $y = ax$ şeklinde bir özel çözümünü elde edip genel çözümünü bulunuz. 25p.

3. $y = xy' + 2(y')^2$ denkleminin genel ve varsa aykırı çözümünü bulunuz. 25p.

4. Karakteristik denkleminin kökleri $0, 0, -1 \mp 2i, -1 \mp 2i, 4, 4, \sqrt{3}$ olan sabit katsayılı lineer homojen olmayan denkleme ilişkin sağ taraftaki fonksiyon $F(x) = xe^{-x}\cos 2x$ şeklindedir. Buna göre,

a) Homojen kısma ait genel çözümü yazınız. 10p.
b) Homojen olmayan kısma ait özel çözümün belirsiz katsayılar metodu yardımıyla nasıl seçilmesi gerektiğini ifade ediniz. (Katsayıları bulmaya çalışmayınız.) 15p.

SÜRE: 80 DAKİKADIR.

BAŞARILAR DİLERİZ

CEVAPLAR

1. Soru: 2 defa türev alırız.

$$y = c_1x^2 + c_2x^{1/2}$$
$$y' = 2c_1x + \tfrac{1}{2}c_2x^{-1/2}$$
$$y'' = 2c_1 - \tfrac{1}{4}c_2x^{-3/2}$$

$$y' = 2c_1x + \tfrac{1}{2}c_2x^{-1/2}$$
$$-x / \quad y'' = 2c_1 - \tfrac{1}{4}c_2x^{-3/2}$$
$$+ \quad y' - xy'' = \tfrac{3}{4}c_2x^{-1/2} \Rightarrow \boxed{c_2x^{-1/2} = \tfrac{4}{3}(y' - xy'')}$$

$$y = c_1x^2 + c_2x^{1/2}$$
$$-2x / \quad y' = 2c_1x + \tfrac{1}{2}c_2x^{-1/2}$$
$$+ \quad y - 2xy' = -3c_1x^2 \Rightarrow \boxed{c_1x^2 = -\tfrac{1}{3}(y - 2xy')}$$

$$y = c_1x^2 + c_2x^{-1/2}.x = -\tfrac{1}{3}(y - 2xy') + x.\tfrac{4}{3}(y' - xy'')$$

$$\Rightarrow \boxed{2x^2y'' - 3xy' + 2y = 0}$$ ikinci mertebeden, derecesi 1 olan lineer homojen denklem elde edilir.

2. Soru: Önce a kaçtır onu bulalım.

$y=ax,\ y'=a$

$y'=x^3(y-x)^2+\frac{y}{x}$

$\downarrow$

$a=x^3(ax-x)^2+\frac{ax}{x}$

$\cancel{a}=x^5(a-1)^2+\cancel{a} \Rightarrow a=1$

$y_1=x$ bir özel çözümdür.

2. adım $y=x+\frac{1}{u}$, $y'=1-\frac{u'}{u^2}$ dönüşümü yapalım.

$1-\frac{u'}{u^2}=x^3\left(\frac{1}{u}\right)^2+\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{u}\right)$

$\cancel{1}-\frac{u'}{u^2}=\frac{x^3}{u^2}+\cancel{1}+\frac{1}{xu}$ $\quad | -u^2$ ile çarpalım.

$u'=-x^3-\frac{1}{x}u \Rightarrow u'+\frac{1}{x}u=-x^3$ lineer denklem.

int. çarpanı: $\lambda(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$

Genel çözüm: $u=\frac{1}{x}\left[\int x\cdot(-x^3)dx+c\right]=\frac{1}{x}\left(-\frac{x^5}{5}+c\right)$

$\downarrow$

$\frac{1}{y-x}=\frac{5c-x^5}{5x} \Rightarrow \boxed{y=x+\frac{5x}{5c-x^5}}$ ✓

3. Soru: $y=xy'+2(y')^2$ Clairaut denklemidir.

$y'=p$ yazılırsa $y=xp+2p^2$ elde edilir.

x'e göre türev alalım: $y'=p=1\cdot p+xp'+4p\cdot p'$

$\Leftrightarrow 0=(x+4p)p'$

$\nearrow \frac{dp}{dx}=0 \Rightarrow p=c$

$\boxed{\text{Genel çözüm: } y=cx+2c^2}$ ✓

$\searrow x+4p=0 \rightarrow p=-x/4$

$y=x\left(-\frac{x}{4}\right)+2\left(-\frac{x}{4}\right)^2$

$\boxed{y=-\frac{x^2}{8}\text{, Aykırı çözüm}}$ ✓

4. Soru: Kökler $\underbrace{0,0}$, $\underbrace{-1\mp 2i,-1\mp 2i}$, $\underbrace{4,4}$, $\underbrace{\sqrt{3}}$, $F(x)=xe^{-x}\cos 2x$

reel ve iki katlı; kompleks ve iki katlı; reel ve iki katlı; reel

a) Temel çözüm kümesi $\{1, x, e^{-x}\cos 2x, e^{-x}\sin 2x, xe^{-x}\cos 2x, xe^{-x}\sin 2x, e^{4x}, xe^{4x}, e^{\sqrt{3}x}\}$

$$\boxed{y_h=(c_1+c_2x)+(c_3+c_4x)e^{-x}\cos 2x+(c_5+c_6x)e^{-x}\sin 2x+(c_7+c_8x)e^{4x}+c_9e^{\sqrt{3}x}}$$ ✓

b) $F(x)=x\underbrace{e^{-x}\cos 2x}$ ($\alpha=1$, $\beta=2$) ifadesinden köklerde $\alpha\mp i\beta=-1\mp 2i$ olup olmadığını kontrol etmeliyiz. 2-adet var.

$y_ö=(Ax+B)\left[C\cdot e^{-x}\cos 2x+D\cdot e^{-x}\sin 2x\right]x^2$ veya

$\boxed{y_ö=x^2e^{-x}\left[(c_1x+c_2)\cos 2x+(c_3+c_4x)\sin 2x\right]}$ şeklinde özel çözüm aranmalıdır.