

1. Merkebeden homojen olmayan dif. denklemler

$L(y) = \phi(x)$ gibi yani esitliğin sağ tarafı sıfır olmayan

lineer dif. denklemler homojen olmayan dif. denklemlerdir. Bu
 $L(y)$ yani esitliğin sol tarafının lineer olması gereklidir. Bu
duruşta homojen olmayan lineer dif. denkleminin lineer tarafı
 y_h homojenliğini ifade eder esitliğin x' e bağlı fonksiyonlu
kismini ise y_p (özel çözüm) yapır. Sonra her ikisi toplanarak
genel çözüm bulunur. Yani şunu söyler

$$y_G = y_h + y_p$$

\hookrightarrow özel çözüm ($p = private$)
homojen çözüm

Ör: $y'' - y = 2 \sin x$ dif. denkleminin özel çözümü $y_p = \sin x$ ise

genel çözümde bulunur -

$$y = y_h + y_p$$

$y'' - y = 0$ homojen hale geldi. 0 zaman homojen kismının
özel denklemini解决了. $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = -1$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -1$$

Homojen kismın genel çözüm formu $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ dir. ise

$$y_h = C_1 e^x + C_2 \cdot e^{-x}$$
 Genel çözümde $y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \sin x$

Ör: "Özel çözüm $y_p = x^2 + b$ olur $y'' - 2y' + y = x^2$ dit. denkleminin özel
çözümü bulunur -"

Cözl:

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Kvadratik formül} \quad \Delta = -2^2 - 4 \cdot 1 = 0 -$$

Bu durumda homojen çözüm $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot x \cdot e^{\lambda_2 x}$ genel formdir.

Not: Eğer kökler birbirine eşitse $y_h = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x \cdot e^{k_2 x}$ olur.

ve denklem polinom şeklinde

Kökler çift değilse ve polinom hali şöyledirse $y_h = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$ olur.

Bu durumda $y_h = c_1 e^x + c_2 x \cdot e^x$ ve $y = \underbrace{c_1 e^x}_{y_h} + \underbrace{c_2 x e^x}_{y_p} + x^2 + b$ bulunur: β_2 homojen çözümüne eklenir.
Bu durumda bu denklemin çözümü $\{e^x, x \cdot e^x\}$ dir. $W = e^{2x} \neq 0$ bulunur.
ve linear bağımsızdır.

Faydalama $W = 0 \Rightarrow$ linear bağımlı
 $W \neq 0 \Rightarrow$ linear bağımsız -

Oc.

$$y'' - y' - 2y = 4x^2 \text{ dit. denk. çözüm -}$$

C_{D2} : 2.mertebe, lineer, 1. derece, homojen denklemdir. çözüm $y = y_h + y_p$

$$\ddot{\lambda}^2 - \lambda - 2 = 0 \quad (\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

O halde homojen çözüm $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x \cdot e^{2x}$

$$y_h = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{2x} \quad \text{olar.}$$

Denklemdeki sağ taraf $4x^2$ yani polinom seklinde old. için

genel:

$$\begin{aligned} y_p &= A_2 x^2 + A_1 x + A_0 \quad \text{v.} \\ y_p' &= 2A_2 x + A_1 \end{aligned}$$

$y_p'' = 2A_2$ bu değerler sonda yerine gelirse

$$\begin{aligned} y &= y' - 2y = 4x^2 \\ 2A_2 - (2A_1 x + A_0) - 2(A_2 x^2 + A_1 x + A_0) &= 4x^2 \rightarrow \text{Dizilenir ve} \\ 2A_2 - 2A_2 x - A_1 - 2A_1 x - 2A_0 &= 4x^2 \rightarrow 2A_2 - 2A_1 - 2A_0 = 4x^2 \\ A_2 \text{ lar bulunur. } A_2 = -2 & \quad A_1 = 2 \quad A_0 = -3 \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

$$y_p = -2x^2 + 2x - 3 \quad \text{bulunur.}$$

$$y_h = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad y'' - y = 0 \quad \left(\begin{array}{l} k_1^2 - k_1 - 2 = 0 \\ k_2^2 - k_2 - 2 = 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} k_1 = -1 \quad \text{Daha} \\ \text{once} \\ k_2 = 2 \quad \text{bulundu!} \end{array}$$

$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ ve $y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + (C_1 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3)$ çözüm olur.

Ör: Sayı tarafın iste olmasın

$$y'' - y' - 2y = e^{3x} \quad 2 \text{ mertebe, lineer, homolojen deil. } y = y_h + y_p$$

Daha önce $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ bulunmuştu.

Sayı tarafı istenildiğinde $y_p = A \cdot e^{ax}$ genel çözüm formül.

Buradı $a=3$ dir. Denklemde $\text{Sayı tarafı } e^{3x}$ old. için

$$\left. \begin{array}{l} y_p = A e^{3x} \\ y_p' = 3A e^{3x} \\ y_p'' = 9A e^{3x} \end{array} \right\} \text{yine bulur.} \quad \begin{aligned} 9A e^{3x} - 3A e^{3x} - 2A e^{3x} &= e^{3x} \text{ denklemde} \\ h(A) &= 1 \rightarrow A = \frac{1}{h} \text{ bulunur. Bu durumda} \end{aligned}$$

$$y_p = \frac{1}{h} e^{3x} \text{ olur. Genel çözüm ise}$$

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{h} e^{3x} \text{ bulunur.}$$

4

Ör:

Sayı taran trigonometrik olmasa hali

$$y'' - 2y = \sin 2x \quad 2. \text{ merte, linear, homojen olmayan diff.- denklemi}$$

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} \quad \text{değe once bülümüş. Sayı taran trigonometrik olmasa}$$

Walinde en genel olası olası $y_p = A \sin \beta x + B \cos \beta x$ dir. Bu

Soruda β nn 2 olduğu gönlüyor. Bu durumda

$$y_p = A \sin \beta x + B \cos \beta x$$

yerine

$$\left. \begin{aligned} y_p' &= 2A \omega \cos \beta x - 2B \sin \beta x \\ y_p'' &= -6A \sin \beta x - 6B \cos \beta x \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{koşullar} \\ \text{ve sadeleştirilir} \end{array}$$

$$\begin{aligned} -6A + 2B &= 1 & A &= -\frac{3}{20} \\ -6B - 2A &= 0 & B &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\text{yapınca buluce } y_p = -\frac{3}{20} \sin \beta x + \frac{1}{10} \cos \beta x \quad \text{genel çözüm ise}$$

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{3}{20} \sin 2x + \frac{1}{10} \cos 2x \quad \text{bulunur.}$$

1. mertebeden sabit katsayılı linear homojen dit denklemler

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y = R(x) \quad R(x) = 0 \Rightarrow \text{homojener}$$

$$R(x) \neq 0 \Rightarrow \text{homojen değil}$$

Özdenklemler ve kökleri bulmak için y_h bulmam.

Köklere reel ve farklı ixt

Ör: $y'' + 3y' - 4y = 0$ 2.mertebeden, lineer, homojen genel çözüm

$$y_h = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1^2 + 3k_1 - 4 = 0 \\ k_1 = 1 \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} k_1 = 1 \\ k_2 = -4 \end{array}$$

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} \quad \text{çözüm t.}$$

Not: Köklere reel ve farklı ise

Ör: Köklere +a, -a ise

$$y'' - y = 0 \quad 2.\text{mertebeden homojen}$$

$$\text{Özdenklemleri } \lambda_1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1$$

.

$$y_h = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \text{ olur.}$$

Hatirlatma: $e^{kx} = \cosh kx + \sinh kx$ } ise.

$$e^{-kx} = (\cosh kx - \sinh kx)$$

$$y_h = C_1(\cosh kx + \sinh kx) + C_2(\cosh kx - \sinh kx) = C_1 \cosh kx + C_2 \sinh kx - C_2 \cosh kx - C_1 \sinh kx$$

$$= \underbrace{(C_1 + C_2)}_{k_1} \cosh kx + \underbrace{(C_1 - C_2)}_{k_2} \sinh kx$$

$$y_h = k_1 \cosh kx + k_2 \sinh kx = k_1 \cosh(-1)x + k_2 \sin(1)x = k_1 \cosh x + k_2 \sinh x \text{ olur.}$$

Not: k_1 + $v\pi i$ olsun; deej! Çünkü $k_2 = C_1 - C_2$ de

2. ol. e bir $\{-1\}$ var.

$$y'' - 5y = 0 \quad 2 \text{ mertebe linear homogen}$$

$$\text{Öz deðeler } \lambda^2 - \zeta^2 = 0. \quad (\lambda - \zeta)(\lambda + \zeta) = 0 \rightarrow \lambda_1 = \zeta$$

$\lambda_2 = -\zeta$

$$\text{Görm } y = C_1 e^{\zeta x} + C_2 \cdot e^{-\zeta x} \text{ ñu dñnd } y = k_1 \cosh(\zeta x) + k_2 \sinh(\zeta x)$$

Not: $y_h = k_1 \cosh(\zeta x) + k_2 \sinh(\zeta x)$ genel çözümdeki kriterler $k_{1,2} \in \mathbb{C}$ ñc
 $\zeta = \pm i$ alıñır.

Ör:

$$y'' + \lambda y' + \zeta y = 0 \quad 2.\text{ mertebe lineer homojen}$$

Öz deðeleri $\lambda^2 + \lambda + \zeta = 0$ kvadratik formüllede

$$\left(\Delta = b^2 - 4ac, \lambda_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

$$\lambda_{1,2} = -2 \mp i \text{ bulunur}$$

ñu dñnd ζ ñm

$$y = d_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + d_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$$

$$y = d_1 e^{(-2+i)x} + d_2 e^{(-2-i)x}$$

Bu kompleks telsizlik eittisi.

No laysıgına hiperbolik fonksiyonlarda $y = C_1 \cdot e^{ax} + C_2 \cdot e^{bx} + C_3 \cdot \cos(qx) + C_4 \cdot \sin(qx)$

genel formunda dir. $a = -2$ $b = 1$ dir

$$e^{(2+i)x}$$

Bu durumda

$$-2x$$

$$\begin{matrix} \downarrow a \\ \downarrow b \end{matrix}$$

$$y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x$$

Ör: $y'' - 2y' + 16y = 0$ 2. Mert, lineer, homojen
Öz dekkleri: $\lambda^2 - 2\lambda + 16 = 0 \rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$

Ör: $y'' = 0$ 2. Mert, lineer, homojen

$$\lambda_1^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = 0 \quad y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}$$

$$y_h = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} = C_1 + C_2 x$$

Ör: Aşağıda verilen 2. mertebe lineer homojen dekklerini yazın.

$$1.) y'' - y = 0 \quad 2.) y'' - 3y' - 3y = 0 \quad 3.) y'' - 2y' + y = 0 \quad 4.) y'' + 2y' + 2y = 0$$

Ör: $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ 3. mertebe, lineer, homojen
Öz dekkleri $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} = C_1 \cdot e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} \text{ bulunur.}$$

Ör: $y''' - 9y'' + 20y = 0$ i. mukabe linear homo'

$$\text{Öz deklemi: } \lambda^3 - 9\lambda^2 + 20 = 0 \quad (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 5) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 5 \end{cases}$$

$$Y_1 = e^{2x}, \quad Y_2 = e^{-2x}, \quad Y_3 = e^{5x}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{5x}$$

$$y = C_1 \underbrace{e^{2x}}_{k_1 \cdot \cosh 2x + k_2 \sinh 2x} + C_2 \underbrace{e^{-2x}}_{k_3 \cdot \cosh (-2x) + k_4 \sinh (-2x)} + C_3 e^{5x}$$

$$y = k_1 \cdot \cosh 2x + k_2 \cdot \sinh 2x + k_3 \cdot \cosh 5x + k_4 \cdot \sinh 5x \text{ bulunur}$$

Ör:

Q. mertebeden (lineer homo)'la bir dif. denkleminin kökü ei
2 ve 3 dir. Bu dif. denkleminin mertebesini, genel çözümü ve
buza dif. denklemini bulma

Cözl: Dif. denkleminin öz deklemine git likter $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ verilmesi

Vi opnår således formuleret

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \quad \text{Volumen}$$

Koeficienterne λ_1 og λ_2 skal løse $(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$ $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ da

Vi findede dit dermed $y'' - 5y' + 6y = 0$ der. 2. matrike