$$y''' - 5y'' - y' + 5y = \overbrace{\underbrace{10t}_{y_{p_1}} - \underbrace{63e^{-2t}}_{y_{p_2}} + \underbrace{29\sin 2t}_{y_{p_3}}}^{y_p}$$

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$$

Ör; Bilinmeyen sıcaklıkta bir cisim 30 °C sabit sıcaklıkta tutulan bir ortama koyuluyor. Eğer 10 dakika sonra cismin sıcaklığı 0 °C, 20 dakika sonra 15 °C ise cismin bilinmeyen ilk sıcaklığı nedir?

Çöz;

$$\frac{dT_c}{dt} + k(T - T_{ortam}) = 0 \qquad \boxed{T_{cisim} = c \cdot e^{-kt} + T_{ortam}}$$

$t = 10$ dak $T_c = 0°C \Rightarrow 0 = c.e^{-k.10} + 30 \rightarrow -30 = c.e^{-k.10}$ ①

$t = 20$ ″ $T_c = 15°C \Rightarrow 15 = c.e^{-k.20} + 30$ ②

① denklemi ② de yerine yazılırsa

$15 = -30 \cdot e^{10k} \cdot e^{-20k} + 30 \rightarrow -15 = -30 \cdot e^{-10k} \quad e^{-10k} = \frac{1}{2} \quad \ln e^{-10k} = \ln \frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \ln e^{n} = n$ kural $\Rightarrow -10k = \ln \frac{1}{2} \rightarrow \underline{k = 0{,}0693}$ bulunur. Denklemlerin (① ve ②) birinde yerine yazılırsa $\underline{C = -60}$ bulunur. Bu durumda

$$T_c = C \cdot e^{-kt} + T_{ortam} \quad T_c = -60 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot 0} + 30 \rightarrow T_c = -30\ ^{\circ}C$$

Ör: $y' = \dfrac{2y^4 + x^4}{x y^3}$ dif. denklemini çözünüz.

Çöz: $f(xt, yt) = f(x, y)$ old. görülüyor. Bu durumda homojen dif. denk. dir.

$y = ux \quad y' = u'x + u$ dönüşümü yapılır.

$$u'x + u = \frac{2u^4x^4 + x^4}{x\,u^3x^3} \qquad u'x = \frac{\cancel{x^4}(2u^4+1)}{\cancel{x^4}\,u^3} - \frac{u}{(u^3)} \qquad u'x = \frac{2u^4+1-u^4}{u^3}$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \frac{u^4+1}{u^3} \qquad \frac{x}{dx} = \frac{u^4+1}{u^3} \cdot du \qquad \frac{dx}{x} = \frac{u^3}{u^4+1}\,du \qquad \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{4}\int \frac{4u^3}{u^4+1}\,du$$

$\ln x = \frac{1}{4}\ln(u^4+1) + \ln C$ $\qquad \ln x = \ln(u^4+1)^{1/4} + \ln C$

$\ln x = \ln\left[(u^4+1)^{1/4} \cdot C\right]$

$xC = \sqrt[4]{u^4+1} \rightarrow xC = \sqrt[4]{\frac{y^4}{x^4}+1}$

$x = (u^4+1)^{1/4}\, C \qquad y = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x}$ yerine

yazılırsa; $x = \left(\frac{y^4}{x^4}+1\right)^{1/4} \cdot C$ çözüm olarak bulunur.

Ör: $x^2y'' - 9xy' + 25y = 0 \qquad y(1) = 1,\ y'(1) = 5$ için çözünüz.

Euler, segonder, $f(x) = 0 \Rightarrow$ homojendir.

$$\left.\begin{aligned} y &= x^r \\ y' &= r \cdot x^{r-1} \\ y'' &= r \cdot (r-1) \cdot x^{r-2} \end{aligned}\right\}$$

yerine yaz

$x^2 \cdot r \cdot (r-1)x^{r-2} - 9x \cdot r \cdot x^{r-1} + 25 \cdot x^r = 0$

$\cancel{x^2} \cdot r(r-1)x^r \cdot \cancel{x^{-2}} - 9\cancel{x}r\, x^r \cdot \cancel{x^{-1}} + 25x^r = 0$

$x^r\left[r(r-1) - 9r + 25\right] = 0 \qquad x^r \neq 0 \Rightarrow r^2 - r - 9r + 25 = 0$

$r^2 - 10r + 25 = 0 \begin{cases} r_1 = 5 \\ r_2 = 5 \end{cases} \quad r_1 = r_2 = r = 5 \quad \Delta = 0 \Rightarrow y = c_1 x^r + c_2 \underbrace{\ln x}_{\text{kökler eşit old. için}} x^r$

Buna göre $y = c_1 x^5 + c_2 \ln x\, x^5$

$$y' = 5.c_1x^4 + c_2.\frac{1}{x}x^5 + 5x^4.c_2\ln x \Rightarrow y' = 5c_1x^4 + c_2x^4 + 5c_2x^4.\ln x$$

$y(1)=1 \Rightarrow y = c_1x^5 + c_2\ln x.x^5 \Rightarrow 1 = c_1.1^5 + c_2.\ln 1.1^5 \Rightarrow c_1 = 1$

$y'(1)=5 \Rightarrow y' = 5c_1x^4 + c_2x^4 + 5c_2x^4.\ln x \Rightarrow 5 = 5.1.1^4 + c_2.1^4 + 5.c_2.1^4.\ln 1 \Rightarrow c_2 = 0$

Genel çözümde $c_1 = 1$ ve $c_2 = 0$ değerleri yerine yazılırsa;

$$y = c_1x^5 + c_2\ln x\, x^5$$
$$y = 1.x^5 + 0.\ln x.x^5$$
$$y = x^5 + 0$$

$y = x^5$ denklemin çözümü olur.

Ör:

$$\left.\begin{aligned} x' &= 3x - y + t \\ y' &= x + y - 2 \end{aligned}\right\}$$ Dif denklem sistemini özdeğer metoduna göre çözünüz.

Çöz: Bu tip problemlerde x' denklemindeki y çekilerek çözüme gidilir. Ancak x' denkleminde t sayısı old. için problem zorlaşır. Bu durumda y' denkleminden çözüme gidilir.

$y' = x + y - 2 \rightarrow x = y' - y + 2$

$x' = y'' - y' + 2y$ bu değer $x' = 3x - y + t$ denkleminde yerine yazılır.

$y'' - y' + 2y = 3(y' - y + 2) - y + t \rightarrow y'' - y' + 2y - 3y' + 3y + y = t + 6 \rightarrow$

$\rightarrow y'' - 4y' + 6y = 6 + t \rightarrow$ öz denklemi $\lambda^2 - 4\lambda + 6 = 0$ $\quad \Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{-8} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2}i$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \mp \Delta}{2a} = \dfrac{4 \mp 2\sqrt{2}i}{2} = \dfrac{\cancel{2}(2 \mp \sqrt{2}i)}{\cancel{2}} = 2 \mp \sqrt{2}i \Rightarrow \lambda_1 = 2 + \sqrt{2}i$, $\lambda_2 = \underbrace{2}_{a} - \underbrace{\sqrt{2}}_{b}i$ bulunur.

Kökler komplexs ise y_h nın genel görünümü $y_h = C_1 \cdot e^{ax} \cdot \cos bx + C_2 \cdot e^{ax} \cdot \sin bx$

Bu durumda $y_h = C_1 e^{2x} \cdot \cos\sqrt{2}x + C_2 \cdot e^{2x} \cdot \sin\sqrt{2}x$ bulunur.

Özel çözüm için; denklemin sağ tarafı $6 + t$ sabit bir sayıdır. Bu durumda $y_p = A_0$ olur. Mesela; Denklemin sağ tarafı x^2 olsa idi $y_p = A_2x^2 + A_1x + A_0$ olacaktı.

Ve $A_0 = 6 + t$ olduğu için $y_p = 6 + t$ bulunur. Genel çözüm ise

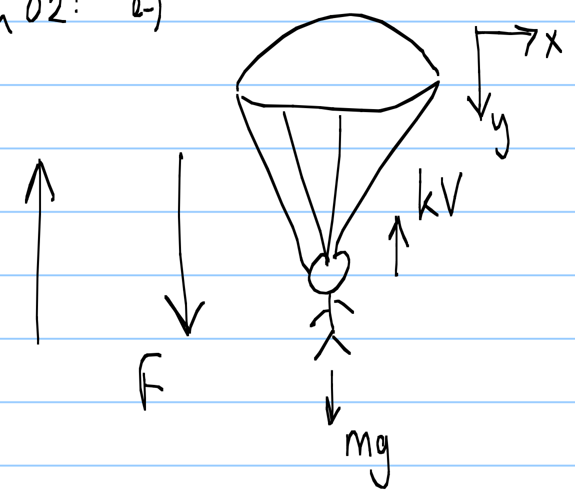
$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} \cdot \cos\sqrt{2}x + C_2 \cdot e^{2x} \sin\sqrt{2}x + 6 + t$ olarak bulunur.

Örnek: Kitlesi $m=110$ kg olan bir paraşütlü $H=1200$ m den atlıyor. $t=10$ sn de paraşüt açılıyor. Paraşüt kapalı iken direnç katsayısı $k=11$, paraşüt açıldıktan sonra $k=220$ dir. $g=10$ m/sn² alarak;

a) Paraşüt kapalı iken hareketin dif. denklemini bulunuz. Paraşüt açılılana kadar alınan yolu ve açıldığında hızını bulunuz.

b) Paraşüt açıldıktan sonra hareketin dif. denk. bulunuz. Paraşütün limit hızını ve toplam süreyi hesaplayınız.

Çözüm: a)



$$F = mg - kV$$

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = mg - kV$$ Her tarafı m'ye bölersek ve düzenlersek

$$\frac{dV}{dt} + \frac{k}{m} V = g$$ Bu hareketin dif. denk. olur.

$k=0$ da bu denklem $\frac{dv}{dt}+\frac{0}{m}V=g$ $\quad \frac{dv}{dt}=g$ $\quad \frac{dv}{dt}=a \Rightarrow a=g$

$k>0$ da ise Limit hız $V=\frac{g.m}{k}\Big(1-\underbrace{e^{-\frac{k}{m}t}}_{\text{sıfıra yakınsar.}}\Big) \rightarrow V=\frac{g.m}{k}$ olur.

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{k}{m}t}=0 \text{ dır.}$$

$\lim_{x\to 8} x^2 \overset{?}{=} +\infty$ $\quad \lim_{x\to 5} x^3 \overset{?}{=} +\ln$

$\frac{dV}{dt}+\frac{k}{m}V=g$ dif denklemi $y'+p(x)y=q(x)$ gibidir. O halde bu bir lineer dif denk dir. Çözüm için. $I(x)=e^{\int p(x)dx}$ int. çarpanı aranılır.

$$I(x)=I(t)=e^{\int p(t)dt}=e^{\int \frac{k}{m}dt}=e^{\frac{k}{m}t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(V.e^{\frac{k}{m}t}\right)=g\,e^{\frac{k}{m}t} \qquad \int \frac{d}{dt}\left(V.e^{\frac{k}{m}t}\right)dt=\int g.e^{\frac{k}{m}t}dt$$

$$V.e^{\frac{k}{m}t}=g.\frac{e^{\frac{k}{m}t}}{\frac{k}{m}}+c$$

$$\frac{V\cdot \cancel{e^{\frac{k}{m}t}}}{\cancel{e^{\frac{k}{m}t}}} = \frac{\frac{gm}{k}\cdot \cancel{e^{\frac{k}{m}t}}}{\cancel{e^{\frac{k}{m}t}}} + \frac{c}{e^{\frac{k}{m}t}} \rightarrow V = \frac{g\cdot m}{k} + c\cdot e^{-\frac{k}{m}t}$$

$t=0$ da $V=0 \Rightarrow 0 = \frac{gm}{k} + c\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot 0} \rightarrow c = -\frac{gm}{k}$ bunu yerine yazarak

$$V = \frac{gm}{k} - \frac{gm}{k}\cdot e^{-\frac{k}{m}t} \quad \text{düzenlenirse}$$

$$V = \frac{gm}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$ Paraşütcünün zamana göre hız değişimi bulunur.

Herhangi bir t anındaki konumu ise $\frac{dV}{dt}$ den yani $V = \frac{gm}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$'nin

t'ye göre int. alınırsa yol bulunur.

$$x(t) = \frac{mg}{k}\cdot t - \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \text{ olur.}$$

$t=10$ sn. sonraki hız $V = \frac{gm}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) = \frac{10\cdot 110}{11}\left(1 - e^{-\frac{11}{110}\cdot 10}\right) = 64{,}02$ m/sn.

$t=10$ sn. sonra aldığı yol ise $x(t) = \frac{mg}{k}t - \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) = \frac{110\cdot 10}{11}10 - \frac{110^2\cdot 10}{(11)^2}\left(1 - e^{-\frac{11}{110}\cdot 10}\right) = 360$ m b-) Parasüt açıldıktan sonraki hareketin denklemi aynıdır. Sadece k değişir.

Geriye kalan yol 1200 - 360 = 840 m. dir

$$x(t) = \frac{mg}{k}t - \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$$840 = \frac{110.10}{220}.t - \frac{(110)^2.10}{(220)^2}\left(1 - e^{-\frac{220}{110}.t}\right)$$

$$840 = 5t - \underbrace{2,5\left(1 - \frac{1}{e^{2t}}\right)}$$

sıfıra yakınsacağından sıfır alınırsa;

$$840 = 5t - 0 \rightarrow t = 168 \text{ sn.}$$

Toplam süre: Paraşüt açılana kadar (10 sn) + Açıldıktan sonra 168 sn
= 178 sn. Demek ki paraşütçü atladıktan 178 sn
sonra yere çakılır.

$$V_L = \frac{mg}{k} = \frac{110.10}{220} = 5 \text{ m/sn.}$$