Homogen Diferensiyel Denklemleri

Bir $f(x,y)$ fonksiyonu

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

şeklinde yazılabiliyorsa n-inci dereceden homogendir denir. $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ homogen fonksiyonlar olmak üzere $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ şeklindeki bir diferensiyel denkleme "Homogen Diferensiyel Denklem" denir. Homogen Denklemler $y = vx$ transformasyonu ile değişkenlerine ayrılabilen denklemlere dönüşürler. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ şek. yazılabiliyorsa denk. homogendir denir.

Örnek $f(x,y) = x^4 - x^3 y$ fonksiyonu 4. dereceden homogendir. Gerçekten;

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^4 - (\lambda x)^3 (\lambda y)$$

$$= \lambda^4 x^4 - \lambda^4 x^3 y = \lambda^4 (x^4 - x^3 y) = \lambda^4 f(x,y)$$

Örnek: $f(x,y) = e^{y/x} + \tan\frac{y}{x}$ 0. dereceden homogendir. Çünkü

$$f(\lambda x, \lambda y) = e^{\lambda y/\lambda x} + \tan\frac{\lambda y}{\lambda x} = e^{y/x} + \tan\frac{y}{x} = \lambda^0 f(x,y)$$

Örnek: $f(x,y) = x^2 + \sin x \sin y$ Homogen değildir

Çünkü $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + \sin(\lambda x)\cos(\lambda y) \neq \lambda^n f(x,y)$

Alıştırmalar

1) $Mdx + Ndy = 0$ denklemi homogen iken $y = vx$ transformasyonu ile değişkenlerine ayrılacaktır. Gösteriniz

<u>Çözüm:</u> $Mdx + Ndy = 0$ n inci dereceden homogen ise

$$Mdx + Ndy = x^n \left\{ M_1\left(\frac{y}{x}\right)dx + N_1\left(\frac{y}{x}\right)dy \right\} = 0 \text{ yazılabilir}$$

ve $M_1\left(\frac{y}{x}\right)\cancel{dx} + N_1\left(\frac{y}{x}\right)\cancel{dy} = 0$ dır

$y = vx, \quad dy = v\,dx + x\,dv$ transformasyonu bunu

$$M_1(v)dx + N_1(v)\{v\,dx + x\,dv\} = 0 \text{ veya } \{M_1(v) + vN_1(v)\}dx + x\,N_1(v)\,dv = 0$$

şekline indirgen ve sonuç olarak

$$\frac{dx}{x} + \frac{N_1(v)\,dv}{M_1(v) + vN_1(v)} = 0$$ elde edilir. Bu da değişkenlerine ayrılmış denklemdir.

---

2) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ denkleminin çözümünü bulunuz

<u>Çözüm:</u>

$$x\,dy = \left(\sqrt{x^2 - y^2} + y\right)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x} \quad \text{(Homogen)}$$ (dy ve dx in katsayıları I. dereceden homogen old-dan)

$$y = vx \Rightarrow y' = v'x + v$$

Buradan

$$v'x + v = \frac{\sqrt{x^2 - v^2x^2} + vx}{x} = \sqrt{1 - v^2} + v$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1 - v^2} \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \arcsin v = \ln x + \ln c = \ln cx \Rightarrow v = \sin(\ln cx)$$

$$\Rightarrow y = x\sin\ln(cx)$$

ikinci bir çözüm $V = \mp 1$ $\quad y = \pm x \quad x\dfrac{dv}{dx} = \sqrt{1-v^2}$ sağ tarafı

sıfır yapan değerlere bakıyoruz

---

3) $\left(2x\sinh\frac{y}{x} + 3y\cosh\frac{y}{x}\right)dx - 3x\cosh\frac{y}{x}\,dy = 0$ denklemini

çözünüz

Çözüm: Denklem birinci derecede homojendir

$$f(tx,ty) = \left(2tx\sinh\frac{ty}{tx} + 3ty\cosh\frac{ty}{tx}\right)dx - 3tx\cosh\frac{ty}{tx}\,dy = 0$$

$$= t\left[\left(2x\sinh\frac{y}{x} + 3y\cosh\frac{y}{x}\right)dx - 3x\cosh\frac{y}{x}\,dy\right] = 0$$

$f(tx,ty) = t\,f(x,y)$ 1. dereceden homogen.

$y = vx$ dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$\left(2x\sinh\frac{v\cancel{x}}{\cancel{x}} + 3vx\cosh\frac{v\cancel{x}}{\cancel{x}}\right)dx - 3x\cosh\frac{v\cancel{x}}{\cancel{x}}(v\,dx + x\,dv)$$

$$(2x\sinh v + 3vx\cosh v)\,dx - 3xv\cosh v\,dx - 3x^2\cosh v\,dv = 0$$

$2x\sinh v\,dx - 3x^2\cosh v\,dv = 0$ $\quad$ X'e bölelim

$$2\sinh v\,dx - 3x\cosh v\,dv = 0$$

Değişkenlerine ayırırsak

$$2\frac{dx}{x} - 3\frac{\cosh v}{\sinh v}dv = 0$$

$$\Rightarrow 2\ln x - 3\ln\sinh v = \ln c$$

$$\Rightarrow x^2 = c\sinh^3 v \Rightarrow \boxed{x^2 = c\sinh^3\frac{y}{x}}$$

—o—

4) $x^2y\,dx - (x^3-y^3)\,dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz

Çözüm: $f(tx,ty) = t^2x^2ty\,dx - (t^3x^3 - t^3y^3)\,dy = 0$

$$= t^3[x^2y\,dx - (x^3+y^3)dy] = 0$$

$$= t^3 f(x,y)$$

3. dereceden homojen.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y}{x^3-y^3} \qquad y = vx \Rightarrow y' = v'x + v$$

$$v'x + v = \frac{v}{1-v^3} \Rightarrow v'x = \frac{v}{1-v^3} - v \Rightarrow v'x = \frac{v - v + v^4}{1-v^3}$$

değişkenlerine ayırırsak

$$\frac{1-v^3}{v^4}dv - \frac{dx}{x} = 0$$ elde edilir. İntegral

alırsak

$$-\frac{1}{3v^3} - \ln v - \ln x = \ln c$$

$$-\frac{1}{3v^3} = \ln cxv$$ ya da

$3v^3 \ln cxv + 1 = 0$ bulunur $v = \frac{y}{x}$ yazarsak

$3\frac{y^3}{x^3} \ln cx\frac{y}{x} + 1 = 0$ ya da

$$\boxed{3y^3 \ln cy + x^3 = 0}$$ bulunur

---

5) $(2ye^{\frac{y}{x}} - x)y' - 2x + y = 0$ denk. çöz. bulunuz.

Çözüm: 1. dereceden homogen. (ödev)

---

6) $(2x+3y)dx + (y-x)dy = 0$ Denklemini çözünüz.

1. dereceden homogen. $y = vx \Rightarrow y' = v'x + v$

$\Rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$

Buradan

$(2+3v)dx + (v-1)(v\,dx + x\,dv) = 0$ veya

$(v^2+2v+2)dx + x(v-1)dv = 0$. bulunur

Değişkenlerine ayırırsak

$$\frac{dx}{x} + \frac{v-1}{v^2+2v+2}dv = \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\frac{2v+2}{v^2+2v+2}dv - \frac{2\,dv}{(v+1)^2+1} = 0$$

Buradan integral alırsak

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln(v^2+2v+2) - 2\arctan(v+1) = c_1$$

Sonuç olarak

$$\boxed{\ln(y^2+2xy+2x^2) - 4\arctan\frac{x+y}{x} = c}$$

elde edilir.

Homogen Hale Getirebilen Diferensiyel Denklemler:

$$(ax+by+c)\,dx+(a'x+b'y+c')\,dy=0$$

diferensiyel denklemi homogen olmamasına rağmen basit bir değişken değiştirmesi ile homogen hale getirilebilir.

$ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ düzlemde iki doğruyu gösterirler.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b=0$$ ise bu iki doğru paralel, sıfır değilse $(\Delta\neq 0)$ bu iki doğru bir noktada kesişirler.

(*) $\Delta\neq 0$ hali: $ax+by+c=0$ ve $a'x+b'y+c'=0$ doğrularının kesim noktası (α,β) olmak üzere

$$x=\alpha+\xi \quad , \quad y=\beta+\eta$$

değişken transformasyonu yapalım. $dx=d\xi$, $dy=d\eta$ olacağından dif. denk.

$$(a\xi+b\eta)\,d\xi+(a'\xi+b'\eta)\,d\eta=0$$

halini alır. Bu da homogen bir dif denk.dir.

(*) $\Delta = 0$ hali:

$\Delta = ab' - a'b = 0$ old dan

$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = k$ yazılabilir. Bu durumda dif. denk

$(ax+by+c)\,dx + [k(ax+by)+c']\,dy = 0$

şeklinde yazılabilir. Bu son denklemde

$u = ax+by$ dönüşümü yapılırsa

$du = a\,dx + b\,dy$ olduğundan

$b(u+c)\,dx + (ku+c')(du - a\,dx) = 0$

elde edilir. Bu denklem homogendir.

Bu denklemler

$y' = \varphi\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ şeklinde dif. denklerin

bir özel halidir.

SORULAR:

Aş. Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerini bulunuz.

1) $(x+2y+7)y'+(2x-y+4)=0$

2) $(x-y-1)dx+(4y+x-1)dy=0$

3) $(2x-5y+3)dx-(2x+4y-6)dy=0$

4) $(5x+2y+1)dx+(2x+y+1)dy=0$

5) $(x+2y+1)y'+(x+2y-1)=0$

6) $(x+y)dx+(3x+3y-4)dy=0$

7) $y(xy+1)dx+x(1+xy+x^2y^2)dy=0$

8) $(x+2y+3)dx+(2x+4y-1)dy=0$

Çözümler: 1) $(x+2y+7)y'+(2x-y+4)=0$

Verilen denklemde

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1-4=-5\neq 0$$ old dan

$x+2y+7=0$ ve $2x-y+4=0$ doğruları bir noktada kesişirler.

$$y' = \frac{-2x+y-4}{x+2y+7}$$ Kesim noktasını bulmak için

$$\begin{cases} -2x+y-4=0 & y_0=-2=\beta \\ x+2y+7=0 & x_0=-3=\alpha \end{cases}$$ old dan

$x=-3+\xi$ ve $y=-2+\eta$ dönüşümü yapılırsa

$dx=d\xi$ $dy=d\eta$ olup verilen denklemde

yerlerine konulursa

$$(-3+\xi+2(-2+\eta)+7)\frac{d\eta}{d\xi}+2(-3+\xi)-(-2+\eta)+4=0$$

$$(\xi+2\eta)\frac{d\eta}{d\xi}+(2\xi-\eta)=0$$ elde edilir.

Bu son denklem homogen old. dan

$$\eta=v\xi \qquad \frac{d\eta}{d\xi}=\frac{dv}{d\xi}\xi+v$$

dönüşümü uygulanırsa

$$(\xi+2v\xi)\left(\xi\frac{dv}{d\xi}+v\right)+(2\xi-v\xi)=0$$

veya

$$(1+2v)\left(\xi\frac{dv}{d\xi}+v\right)+(2-v)=0$$

elde edilir.

$$\Rightarrow \quad \xi(1+2v)\frac{dv}{d\xi}+2(1+v^2)=0$$

yazılabilir

Bu son denklemi değişkenlerine ayırırsak

$$\frac{1+2v}{1+v^2}\,dv + 2\frac{d\xi}{\xi} = 0$$ şekle yazarız ve integral

alırsak

$$\arctan v + \ln(1+v^2) + 2\ln\xi = \ln c$$ sonucunu

elde ederiz

$v = \frac{\eta}{\xi}$ konulursa

$$\arctan\frac{\eta}{\xi} + \ln\left(1+\frac{\eta^2}{\xi^2}\right) + 2\ln\xi = \ln c$$

veya

$$\arctan\frac{\eta}{\xi} + \ln(\xi^2+\eta^2) = \ln c$$

bulunur

$\xi = x+3$ $\eta = y+2$ değerleri yerine yazılırsa

$$\boxed{\arctan\frac{y+2}{x+3} + \ln\left[(x+3)^2+(y+2)^2\right] = \ln c}$$

değeri elde edilir.

—— o ——

2) $(x-y-1)\,dx+(4y+x-1)\,dy=0$

$\Delta=5\neq 0$ old dan

$x-y-1=0 \quad x+4y-1=0$ doğruların kesim noktası $(\alpha=1,\ \beta=0)$ dır.

$x=1+\xi \quad y=0+\eta \qquad dx=d\xi \quad dy=d\eta$

$(\xi-\eta)\,d\xi+(4\eta+\xi)\,d\eta=0$ homogen dif denk. elde ederiz.

$\eta=v\xi \qquad \dfrac{d\eta}{d\xi}=\dfrac{dv}{d\xi}\xi+v$

dönüşümü yapılırsa

$$\xi\frac{dv}{d\xi}+v=\frac{v-1}{4v+1}$$

veya

$$\xi\frac{dv}{d\xi}+\frac{1+4v^2}{4v+1}=0$$ bu denklemi

değişkenlerine ayırırsak

$$\frac{4v+1}{4v^2+1}\,dv+\frac{d\xi}{\xi}=0$$ bulunur Integral

alırsak

$$\frac{1}{2}\frac{2.4v}{4v^2+1}\,dv+2\frac{dv}{4v^2+1}+\ln\xi=c_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(4v^2+1)+\frac{1}{2}\arctan 2v+\ln\xi=c_1$$

bulunur.

Bu denklem

$$\ln \xi^2(4u^2+1) + \arctan 2u = c$$

formunda yazılabilir. $u = \frac{\eta}{\xi}$ ters dönüşümü ile

$$\ln(4\eta^2+\xi^2) + \arctan 2\frac{\eta}{\xi} = c$$ bulunur.

$\xi = x-1$ $\eta = y$ yazılırsa

$$\boxed{\ln\left[4y^2+(x-1)^2\right] + \arctan\frac{2y}{x-1} = c}$$

çözümü elde edilir.

---

3) $(2x-5y+3)\,dx - (2x+4y-6)\,dy = 0$

$$y' = \frac{2x-5y+3}{2x+4y-6}$$

$\Delta = 2.4 - 2.5 = -2 \neq 0$ dır.

Doğrular kesişiyor. Kesişme noktası $(1,1)$ dir.

$x = 1+\xi$ $y = 1+\eta$

$dx = d\xi$ $dy = d\eta$

dönüşümü ile

$$(2\xi-5\eta)\,d\xi - (2\xi+4\eta)\,d\eta = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklem birinci dereceden homogendir.

$\eta = \xi v$ dönüşümü yapılırsa

$d\eta = v\,d\xi + \xi\,dv$

dönüşümü denklemde yerine koyalım.

$$(2-5v)\,d\xi-(2+4v)(v\,d\xi+\xi\,dv)=0$$

$$\Rightarrow (2-7v-4v^2)\,d\xi-\xi(2+4v)\,dv=0$$

Bu denklemi değişkenlerine ayırırsak

$$\frac{d\xi}{\xi}+\frac{4}{3}\frac{dv}{4v-1}+\frac{2}{3}\frac{dv}{v+2}=0$$ elde edilir.

Bu integralin sonucu

$$\ln\xi+\frac{1}{3}\ln(4v-1)+\frac{2}{3}\ln(v+2)=\ln c_1$$

$$\xi^3(4v-1)(v+2)^2=c$$ $v=\frac{\eta}{\xi}$ yazılırsa

$$(4\eta-\xi)(\eta+2\xi)^2=c$$ elde edilir

Bu son denklemde $\xi=x-1$ $\eta=y-1$ değerleri yerine konulursa

$$\boxed{(4y-x-3)(y+2x-3)^2=c}$$

değeri elde edilir

$\Rightarrow \frac{z+1}{-z+3}\, dz = dx \quad \Rightarrow \left(-1 + \frac{4}{-z+3}\right) dz = dx$

$\Rightarrow -z - 4\ln(-z+3) = x + \ln c$

$\Rightarrow -z - x = \ln\left(c(3-z)^4\right) \Rightarrow c(3-z)^4 = e^{-z-x}$

$\Rightarrow \boxed{c(3-x-2y)^4 = e^{-2x-2y}}$ elde edilir.

---

6) $(x+y)dx + (3x+3y-4)dy = 0$

$\Delta = 0$ old dan denklemi

$(x+y)dx + [3(x+y)-4]dy = 0$ şeklinde

yazabiliriz. $u = x+y$ dersek

$dy = du - dx$ old dan

$u\,dx + (3u-4)(du-dx) = 0$ elde edilir

Bu denklem

$(4-2u)dx + (3u-4)du = 0$ şeklinde yazılabilir

Bu denklemi de değişkenlerine ayırırsak

$2\,dx + \frac{3u-4}{2-u}\, du = 0$ ve

$2x + \int\left(-3 + \frac{2}{2-u}\right) du = c$

$2x - 3u - 2\ln(2-u) = c$

$u = x+y$ yazarsak

$$-3(x+y) - 2\ln(2-x-y) + 2x = c$$

veya

$$-x - 3y - 2\ln(2-x-y) = c$$ ve

$$\boxed{x + 3y + 2\ln(2-x-y) = c_1}$$ sonucunu buluruz

7) $y(xy+1)\,dx + x(1+xy+x^2y^2)\,dy = 0$

$xy = v$, $y = \frac{v}{x}$ $\quad dy = \frac{x\,dv - v\,dx}{x^2}$

dönüşümü denklemi

$$\frac{v}{x}(v+1)\,dx + x(1+v+v^2)\,\frac{x\,dv - v\,dx}{x^2} = 0$$ şekline indirgenir

Bu denklemi düzenlersek

$$v^3\,dx - x(1+v+v^2)\,dv = 0$$ elde ederiz

Bu denklemi de değişkenlerine ayırırsak

$$\frac{dx}{x} - \frac{dv}{v^3} - \frac{dv}{v^2} - \frac{dv}{v} = 0$$ elde ederiz

İntegral alınırsa

$$\ln x + \frac{1}{2v^2} + \frac{1}{v} - \ln v = c_1$$

$$2v^2\ln\left(\frac{v}{x}\right) - 2v - 1 = cv^2$$ $v = xy$ dersek

$$\boxed{2x^2y^2\ln y - 2xy - 1 = cx^2y^2}$$ bulunur.