

Ters Türev ve Belirsiz Integral

Ters Türev

Türevi $f(x) = 3x^2$ olan bir \bar{F} fonksiyonunu bulmak

İçin türev kullanımda yararlanıp

$$\bar{F}(x) = x^3 \text{ 'dir. diyebiliriz, çünkü } \frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2 \text{ 'dir.}$$

Burada \bar{F} fonksiyonu f nin ters türevidir.

Tanım Bir \bar{F} fonksiyonu, bir I analitik daki bütün x değerleri için $\bar{F}'(x) = f(x)$ eşitliğini sağlıyorsa, f nin I analitik daki ters türevidir.

Örneğin,

$$f(x) = x^2 \text{ olsun. } \Rightarrow \bar{F}(x) = \frac{1}{3}x^3$$

öte yandan $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100 \Rightarrow G'(x) = f(x)$.

Yani hem \bar{F} hem de G fonksiyonları f in ters türevleridir.

$$\Rightarrow H = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Teorem Eğer F fonksiyonu, f nin bir I analitikindaki herhangi bir ters türevi ise, o zaman f nin I analitikindeki en genel ters türevi

$$F(x) + C \text{ 'dir.}$$

Burada C herhangi bir sabittir.

Örnek Aşağıdakilerin en genel ters türevlerini bulunuz.

(a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = x^n$, $n \neq -1$

Ters Türen Formüller

Fonksiyen

$$cf(x)$$

$$f(x) + g(x)$$

$$x^n \quad (n \neq -1)$$

$$\frac{1}{x}$$

$$e^x$$

$$b^x$$

$$\cos x$$

$$\sin x$$

$$\sec^2 x$$

$$\sec x \tan x$$

$$\frac{1}{1+x^2}$$

$$\sinh x$$

Ters Türen

$$c\bar{F}(x) + C$$

$$F(x) + G(x) + C$$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\ln|x| + C$$

$$e^x + C$$

$$\frac{b^x}{\ln b} + C$$

$$\sinh x + C$$

$$-\cos x + C$$

$$\tan x + C$$

$$\sec x + C$$

$$\arctan x + C$$

$$\cosh x + C$$

⋮

Örnek $g'(x) = 4\sin x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$ i saglayan bütün g fonksiyonlarını bulunuz.

Fonksiyonun türevini bulmak için $g'(x)$ denilen $g(x)$ fonsiyonunu bulmak demektir. Bu fonsiyon x ile ilişkili bir denir. $f'(x) = 2x$ denilen $f(x)$ fonsiyonu da adıda $f'(x) = 2x$ denir.

- ⑤ Bir fonksiyonun türevini içeren eşitliklere diferansiyel denklemler denir.

Örnek $f'(x) = e^x + 2x(1+x^2)^{-1}$ ve $f(0) = -2$ ise f 'yi bulunuz.

② $f(x) = 2x$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$f(x)$ fonksiyonunun ters türevlerinin ailesi C bir sabit olmak üzere $F(x) = x^2 + C$ dir.

→ Burada C ye integrasyon sabiti denir.

→ F ile gösterilen fonksiyonlar ailesine de f nin genel ters türü denir.

→ $\bar{F}(x) = x^2 + C$ fonksiyonu da aslında $\bar{F}'(x) = 2x$ diferansiyel denklemının genel çözümüdür.

③ $\frac{dy}{dx} = f(x)$ formunda bir diferansiyel denklemi gözlemek için $dy = f(x) dx$ şeklinde yazalım.

• Bu denkemin bütün çözümlerini bulma işlemini ters türü almır (ya da belirsiz integrali hesaplama) işlemi diyoruz ve belirsiz integral işlemini \int ile gösteriyoruz.

Genel Gözüm integral
değeri

$$y = \underbrace{\int f(x) dx}_{\text{integrand}} = \overbrace{F(x) + C}^{\substack{y \\ f \text{ nin} \\ \text{ters} \\ \text{turu}}} \rightarrow \text{integrasyon} \text{ sabiti}$$

Femel Integral Kuralları

$$\int F'(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \text{integrasyon türünü} \\ \text{sir tersidir.}$$

$$\text{Eğer } \int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = f(x)$$

↓
türün integralinin tersidir.

Örnekler

1) $\int (2x^3 - 6x^2 + 3x + 5) dx$

original integral
↓

Yeniden yaz.

↓

integral
al
↓

Sadeleştir

$$2) \int \frac{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt{x} + 1}}{x^4} dx$$

oder Formel mit?

$$\text{Vorwissen: } u = 4(x^2 + 5x - 2)^3 \quad (2x+5)$$

ausrechnen,

$$\text{Satz: } \int u^n f(u) du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$$

$$\text{Satz: } \int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$$

$$= F(x) + C$$

$$3) \int \left(\frac{1}{4^x} + 4^x \right) dx$$

Geht nicht, es ist kein Anteil, der gleich abweichen kann.

Wen bedrängt das?

"für $\frac{1}{4^x}$ kann man nichts machen"

$$4) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

Geht nicht, da es sich um eine Potenz handelt.

Was kann man tun?

Bsp: $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

Degisken Dönsümü

Zincir Kuralını tersten düşünüyoruz.

Örnek $F(x) = (x^2 + 5x - 2)^4$

$$\Rightarrow f(x) = F'(x) = 4(x^2 + 5x - 2)^3 (2x + 5).$$

O halde,

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int 4(x^2 + 5x - 2)^3 (2x + 5) dx \\ &= (x^2 + 5x - 2)^4 + C \\ &= F(x) + C \end{aligned}$$

Genel olarak, f, g ve u fonksiyonlar, x e göre dифerensiyellenebilen fonksiyonlar olsun.

$$f(x) = g(u) \frac{du}{dx} \quad \text{olsun.}$$

O halde,

$$\int f(x) dx = \int g(u) \frac{du}{dx} dx = \int g(u) du = G(u) + C \text{ 'dir.}$$

Burada G , g fonksiyonunun ters türündedir.

Örnek 1) $\int x^3 \cos(x^4 + 2) dx$

2) $\int \sqrt{2x+1} dx$

3) $\int e^{5x} dx$

$$4) \int \sqrt{1+x^2} \cdot x^5 dx$$

$$\int \frac{e^x}{e^x + 2} dx$$

$$5) \int \tan x dx$$

$$6) \int \frac{\sin^2(\ln x)}{x} dx$$

$$7) \int \frac{dx}{(x \ln x) \cdot \ln(\ln x)}$$

$$8) \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$9) \int \sqrt{1+\sin x} \ dx$$

$$10) \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin 2x} dx$$