1 Mertebeden Ayrılabilir ve Homojen Dif. Denklemler.

Genel Çözüm

$A(x)dx + B(y)dy = 0$ şeklinde 1. mertebeden ayrılabilir bir dif. denkleminin çözümü

Not: $\int A(x)dx + \int B(y)dy = C$ dir.

Ayrılabilir olduğu $M(x,y) = A(x) \Rightarrow$ sadece x'in fonksiyonu
$N(x,y) = B(y) \Rightarrow$ " y'nin "

Ör: $x\,dx - y^2 dy = 0$ dif. denklemini çözünüz.

$\int x\,dx + \int (-y^2)\,dy = C$

$\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} = C \qquad \frac{3x^2}{6} - \frac{2y^3}{6} = C \qquad 3x^2 - 2y^3 = 6C$

(3) (2)

$\frac{3x^2}{2} - \frac{2y^3}{2} = \frac{6C}{2} \rightarrow y^3 = \frac{3}{2}x^2 - 3C \quad k = -3C$ denilirse;

$y = \left(\frac{3}{2} x^2 + k\right)^{1/3}$ bulunur.

Ör: $y' = y^2 x^3$

Çöz: $y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2 x^3 \longrightarrow \frac{dy}{y^2} = x^3 dx \quad y^{-2}dy - x^3 dx = 0$

$\int y^{-2}dy - \int x^3 dx = C \quad \frac{y^{-2+1}}{-2+1} - \frac{x^{3+1}}{3+1} = C \quad -\frac{y^{-1}}{1}_{(4)} - \frac{x^4}{4}_{(1)} = C \rightarrow -4y^{-1} + x^4 = 4c$

$\frac{4}{y} - x^4 = -4c \quad k = -4c$ denilirse; $\frac{4}{y} = k + x^4 \rightarrow y = \frac{4}{k+x^4}$ çözüm olur.

Ör: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2}{y}$

Çöz: $y\,dy = (x^2+2)dx \quad (x^2+2)dx - y\,dy = 0 \qquad A(x) = x^2+2$ ve $B(y) = -y$ ile ayrılabilir

Bu durumda

$\int (x^2+2)dx - \int y\,dy = C \quad \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{2}y^2 = C \quad y^2 = \frac{2}{3}x^3 + 4x - 2C$

$k = -2c$ denilirse $y = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 4x + k}$ bulunur.

Ör: $y' = 5y$

Çöz: $\frac{dy}{dx} = 5y \quad \frac{dy}{y} = 5\,dx \quad 5dx - \frac{1}{y}dy = 0 \quad A(x) = 5,\ B(y) = -\frac{1}{y}$ ile

$\int 5dx - \int \frac{1}{y}dy = 0 \quad 5x - \ln y = c$ olur.

Not: Paydanın türevi payı veriyorsa bu ifadenin integrali $\ln(\text{payda})$ dır.

$\ln y = 5x - c$ her iki tarafı üstel olarak yazarsak; $e^{\ln y} = e^{5x-c}$

$e^{\ln y} = y$ olduğu için $y = e^{5x-c}$ veya $y = e^{5x} \cdot e^{-c}$ bulunur.

$k = \mp e^{-c}$ denilirse $y = k \cdot e^{5x}$ denklemin çözümü olur.

Ör: $y' = \frac{x+1}{y^4+1}$

Çöz: $(x+1)dx + (-y^4-1)dy = 0 \quad \int (x+1)dx + \int (-y^4-1)dy = 0$

$\frac{x^2}{2} + x - \frac{y^5}{5} - y = C \quad y^5$ ve y gibi terimler olduğu için açık bir çözüm yoktur. Bu yüzden çözüm eldeki kapalı biçimde yani $\frac{x^2}{2} + x - \frac{y^5}{5} - y = C$ şeklinde bırakılır.

Ör: $dy = 2t(y^2+9)dt$

Çöz: $\int \frac{dy}{y^2+9} - \int 2t\,dt = 0 \rightarrow \frac{1}{3}\arctg\frac{y}{3} - t^2 = C \rightarrow \arctg\frac{y}{3} = 3(t^2+c)$

$\frac{y}{3} = tg\,3(t^2+c) \rightarrow y = 3\,tg\,3(t^2+c) \rightarrow y = 3\,tg(3t^2+3c)$ çözüm olarak bulunur.

Ör: $x\,dx + y\,dy = 0$

Çöz: $\int x\,dx + \int y\,dy = 0$ $\quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \rightarrow y^2 = 2c - x^2$ $\quad k = 2c$ denilirse;

$y = (k - x^2)^{1/2}$ çözüm olarak bulunur.

Ör: $x\,dx - y^3\,dy = 0$

Çöz: Ayrılabilir bir dif. dir. O zaman çözüm olarak her terimin int. alınır.

$\int x\,dx - \int y^3 dy = 0$ $\quad \frac{x^2}{2} - \frac{y^4}{4} = C \xrightarrow{\text{Sadeleştirme}} y^4 = -4c + 2x^2$ $\quad k = -4c$ denilirse;

$y = (k + 2x^2)^{1/4}$ çözümdür.

Ör: $(t+1)\,dt - \frac{1}{y^2}\,dy = 0$

Çöz: Ayrılabilir dif. dir. Buna göre her iki tarafın integrali alınır.

$\int (t+1)\,dt - \int \frac{1}{y^2}\,dy = 0$ $\quad \int t\,dt + \int dt - \int y^{-2}\,dy = 0$ $\quad \frac{t^2}{2} + t - y^{-1} = C$

Sadeleştirme $\frac{1}{y} = -c + \frac{t^2+2t}{2}$ $\quad k = c^{-1}$ denilirse $y = k + \frac{2}{t^2+2t}$ bulunur.

Ör: $\frac{4}{t}\,dt - \frac{y-3}{y}\,dy = 0$

Çöz: t ler, y ler bir tarafta ise ayrılabilir dif. dir. O halde her terimin int. alınır.

$\int \frac{4}{t}\,dt - \int \frac{y}{y}\,dy - \int \frac{3}{y}\,dy = 0 \rightarrow 4\ln t - y - 3\ln y = C$ bulunur.

Ör: $\sin x\,dx + y.dy = 0$ dif denklemini $y(0) = -2$ olacak şekilde çözünüz.

Çöz: $y(0) = -2 \Rightarrow x = 0$ da fonksiyon 2'ye eşittir anlamındadır. Verilen denklemde x ler ve y ler bir tarafta old. için ayrılabilir dif. dir. Bu durumda her iki tarafın int. alınır.

$$\int \sin x\,dx + \int y\,dy = 0 \qquad -\cos x\Big|_0^x + \frac{y^2}{2}\Big|_{-2}^{y} = C \rightarrow$$

$$\rightarrow -\cos x - \underbrace{(-\cos 0)}_{1} + \left(\frac{y^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) = C \qquad -\cos x + 1 + \frac{y^2}{2} - 2 = C \text{ sadeleştirilirse}$$

$y^2 = 2c + 2 + 2\cos x \quad k = 2c + 2$ alınırsa $y^2 = k + 2\cos x \rightarrow y = \sqrt{k + 2\cos x}$ bulunur.

Ör: $(x^2+1)\,dx + \frac{1}{y}\,dy = 0 \quad y(-1) = 1$ için çözüm yapınız.

Çöz: Ayrılabilir dif denklemi olduğu görülüyor. Her iki tarafın int. alınır.

$$\int (x^2+1)\,dx + \int \frac{1}{y}\,dy = 0 \qquad \int x^2\,dx + \int dx + \int \frac{1}{y}\,dy = 0 \qquad \frac{x^3}{3} + x\Big|_{-1}^{x} + \ln y\Big|_{-1}^{y} = C$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + x\right) - \left[\frac{-1^3}{3} + (-1)\right] + \ln y - \underbrace{\ln 1}_{0} = 0 \xrightarrow{\text{Sadeleştirme}} \ln y = C - \frac{4}{3} - \frac{x^3 + 3x}{3}$$ bulunur.

Ör: $\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2$

Çöz: $$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} - \int dt = 0 \rightarrow \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 1} - \int dt = 0 \rightarrow \operatorname{arctg}(x-1) - t = c$$

$x-1 = tg(t+c) \rightarrow x = 1 + tg(t+c)$ bulunur.

Başlangıç değer problemlerinin çözümü

$A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0$ dif. denkleminde sınır şartlarını kullanarak C katsayısı bulunur. 2 farklı metot ile bulunabilir.

1. Metot: $\int A(x)\,dx + \int B(y)\,dy = C$ ile denklem çözülür ve sınır şartları uygulanarak C bulunur.

2. Metot: Başlangıç şartları direkt uygulanarak denklem çözülür.

Ör: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}$ dif denklemini $x=2$ ve $y=1$ başlangıç değerleri ile çözerek C sabitini bulunuz.

Çöz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}$$

Ayrılabilir. Her tarafın int. alınır.

$$\int (1+y^2)\,dy = \int x^2\,dx \rightarrow y + \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C$$

$x = 2$ ve $y = 1 \Rightarrow 1 + \frac{1^3}{3} = \frac{2^3}{3} + C \rightarrow C = -\frac{4}{3}$ bulunur.

Ör: $y' + y = 0$ dif denkleminde $x=0$ ve $y=1$ ise C sabitini bulun.

Çöz:

$\frac{dy}{dx} = -y \quad -\frac{dy}{y} = dx \Rightarrow$ Ayrılabilir çözüm için her terimin int. alınır.

$\int \frac{dy}{y} = -\int dx + c \rightarrow \ln y = -x + c \quad x=0,\ y=1$ değerleri yerine yazılırsa;

$\ln 1 = -0 + c \rightarrow c = 0$ Not: $\ln 1 = 0$ dır.

Ör: $e^x dx - y dy = 0$ $x=0$ $y=1$ ise yani $y(0)=1$ olmak üzere başlangıç değer problemini çözünüz.

1.yol. $\int e^x dx + \int -y\,dy = 0 \rightarrow e^x - \frac{y^2}{2} = c \rightarrow \frac{y^2}{2} = e^x - c \rightarrow y^2 = 2e^x - 2c$

$k = -2c$ denilirse $y^2 = 2e^x + k$ olur.

$y(0)=1 \Rightarrow 1^2 = 2.e^0 + k \rightarrow k=-1$ Bu durumda $y^2 = 2e^x - 1 \rightarrow y = \mp\sqrt{2e^x - 1}$ bulunur.

2.yol. Madem ki $x=0$ da $y=1$ dir. O halde

$$\int_0^x e^x dx + \int_1^y (-y)\,dy = 0 \quad e^x \Big|_0^x + \frac{-y^2}{2}\Big|_1^y = 0 \rightarrow e^x - e^0 + \left(-\frac{y^2}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$y^2 = 2e^x - 1 \rightarrow y = \mp\sqrt{2e^x - 1}$ bulunur.

Ör: $x.\cos x\,dx + (1 - 6y^5)\,dy = 0$ $y(\pi)=0$ şartları ile denklemin çözümü

Çöz:

$A(x) = x.\cos x$ $B(y) = 1 - 6y^5$ dir. Ayrılabilir dif. denklemdir. Bunun çözümü için her terimin integrali alınır. $x\sin x\Big|_\pi^x + \cos x\Big|_\pi^x + (y - y^6)\Big|_0^y = 0$

$x.\sin x + \cos x + 1 = y^6 - y$ bulunur. y^6 ve y terimlerinden dolayı açık çözüm yapılamaz. Kapalı çözüm olarak bırakılır.

1. Mertebe Homojen Denklem Çözümü

Homojen dif. denklemler $y = u.v$ dönüşümü ile ayrılabilir hale getirilir.

$$y = u.v \Rightarrow y' = v + uv' \quad \text{Veya} \quad y = ux \Rightarrow y' = x\frac{du}{dx} + u$$

Ör: $y' = \dfrac{y+x}{x}$ dif denklemini çözünüz.

Çöz: Homojendir $y = ux$ dönüşümü yapılır. $y' = \dfrac{du}{dx}x + u$ Bu durumda

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{ux+x}{x} \rightarrow x\frac{du}{dx} + u = \frac{\cancel{x}(u+1)}{\cancel{x}} \quad x\frac{du}{dx} = u+1-u$$

$$x\frac{du}{dx} = 1 \rightarrow \frac{x}{dx} = \frac{1}{du} \rightarrow \frac{1}{x}dx = du$$ Ayrılabilir Her tarafın int. al.

$$\int \frac{1}{x}dx = \int du \quad \ln x = u + c \quad u = \ln|x| - c \quad c = -\ln|k| \text{ alınırsa}$$

$$u = \ln|x| + \ln|k| \rightarrow u = \ln|kx| \text{ ve } y = ux \Rightarrow \frac{y}{x} = \ln|kx| \quad y = x\ln|kx| \text{ bulunur}$$

Ör: $y' = \dfrac{2y^4 + x^4}{xy^3}$

Ör: $y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ $\quad y(1) = -2$ için çözün.

Çöz: homojendir $y = ux \Rightarrow y' = x\dfrac{du}{dx} + u$ dönüşüm

$$x \cdot \frac{du}{dx} + u = \frac{x^2+(ux)^2}{x\,ux} \xrightarrow{\text{Sade.}} \int \frac{1}{x}\,dx = \int u\,du \rightarrow \ln x = \frac{u^2}{2} + c$$

$\rightarrow 2\ln x = u^2 + 2c \quad k = 2c$ alınırsa $\ln x^2 + k = u^2$ olur.

$y = ux \Rightarrow u = \dfrac{y}{x}$ yerine yazılır. $\ln x^2 + k = \dfrac{y^2}{x^2}$

$y^2 = x^2 \ln x^2 + kx^2$ olarak çözüm bulunmuş olur.

Başlangıç koşuluna göre $y^2 = x^2 \ln x^2 + kx^2$ de değerler yerine yazılırsa; $(-2)^2 = 1^2 . \ln 1^2 + k . 1^2 \rightarrow k = 4$ bulunur. Bu durumda

$$y^2 = x^2 \ln x^2 + 4x^2 \text{ veya } y = \sqrt{x^2 \ln x^2 + 4x^2}$$

Ör:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

Çöz: $y = ux \quad y' = x\dfrac{du}{dx} + u$ Homojen old. için dönüşümü yapılır

Ve sadeleştirilmesi $\frac{1}{x}dx = -\frac{u^2-1}{u(u^2+1)}du$ bulunur.

Daha sonra $\int \frac{1}{x}dx + \int\left(-\frac{1}{u} + \frac{2u}{u^2+1}\right)du = 0$

$\ln x - \ln u + \ln(u^2+1) = c$ bulunur. $c = \ln(k)$ denilirse ve düzenlenirse;

$$\ln|x| + \ln(u^2+1) = \ln|k| + \ln|u|$$

$$\ln[x(u^2+1)] = \ln|ku|$$

$$x(u^2+1) = k.u \qquad y = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x}$$

$$x\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) = k\frac{y}{x} \text{ düzenlenirse}$$

$x^2+y^2 = ky$ çözümünü alır.

1. Mertebe Tam Dif. Denklemler.