1. Mertebeden Lineer ve Bernouilli Dif. Denklemler

1. mertebe lineer dif denklemleri çözmek için integrasyon çarpanına bakılır.

İnt. çarpanı $I(x) = e^{\int p(x)\,dx}$ sonra bütün terimler int. çarpanı ile çarpılır ve $\dfrac{d(y)I}{dx} = I\,q(x)$ yazarak her iki tarafın integrali alınır.

Ör:

$y' - 3y = 6$ dif. denklemini çözünüz.

Çöz: $y' + p(x)y = q(x)$ formatında ise 1. mert. lineer dif dir.

İntegrasyon çarpanı bulunur. $I(x) = e^{\int p(x)\,dx} \rightarrow I(x) = e^{-3x}$ bulunur.

$\dfrac{d}{dx}\left[y\,I(x)\right] = I(x)\cdot q(x)$ de yerine yazılır.

$\displaystyle\int \frac{d}{dx}\left[y\cdot e^{-3x}\right]dx = \underbrace{\int e^{-3x}\cdot 6\,dx}$

*** Not:** $\displaystyle\int \frac{d}{dx}\left[y\cdot I(x)\right]$ 'in integrali her zaman $y\cdot I(x)$ dir. KURAL

Öte yandan $e^{\ln x} = x$ olduğu unutulmamalı

$y \cdot e^{-3y} = -2e^{-3x} + c \rightarrow y = c \cdot e^{3x} - 2$ bulunur.

Ör:

$y' - 2x = x$ $\quad$ $y' + p(x)\, y = q(x)$ formatında old. için 1. Mert. Lineer.

$\underbrace{y' - 2x}_{p(x)} = \underbrace{x}_{q(x)}$

$I(x) = e^{\int p(x)\, dx} = e^{\int -2x\, dx} = e^{-x^2}$ bulunur.

Kural $\quad \dfrac{d}{dx}\left(y \cdot I(x)\right) = I(x)\, q(x)$

$\dfrac{d}{dx}\left(y \cdot e^{-x^2}\right) = e^{-x^2} \cdot x \qquad \int \dfrac{d}{dx}\left(y \cdot e^{-x^2}\right) = \int e^{-x^2} x\, dy$

$y \cdot e^{-x^2} = -\dfrac{1}{2} e^{-x^2} + c$

$y = c \cdot e^{x^2} - \dfrac{1}{2}$ çözümüdür.

Ör: $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$

$y' + 5y = 0 \quad y' + p(x)y = q(x)$ formatında 1. Mert. Lineer dif. dir

$p(x)=5 \quad q(x)=0 \quad I(x)=e^{\int p(x)\,dx} \Rightarrow I(x)=e^{\int 5\,dx} \rightarrow I(x)=e^{5x}$

$\int \frac{d}{dx}(y.e^{5x})=\int 0 \quad y.e^{5x}=C \rightarrow y=c.e^{-5x}$ bulunur.

Ör: $\frac{dy}{dx}-5y=0 \quad y'+p(x)y=q(x) \Rightarrow$ 1. mert. Lineer dif.

$p(x)=-5 \quad q(x)=0 \quad I(x)=e^{\int p(x)dx} \Rightarrow I(x)=e^{\int -5\,dx} \rightarrow I(x)=e^{-5x}$

$\int \frac{d}{dx}(e^{-5x}y)=0 \Rightarrow y=c.e^{5x}$ bulunur.

Ör: $y'+3x^2y=0 \quad p(x)=3x^2 \quad q(x)=0 \quad I(x)=e^{\int 3x^2dx} \rightarrow I(x)=e^{x^3}$

$\frac{d}{dx}(y.e^{x^3})=0 \quad y.e^{x^3}=c \rightarrow y=c.e^{-x^3}$ bulunur

Ör: $\frac{dy}{dx}+2xy=0 \quad y'+2xy=0 \quad y'+p(x)y=q(x)$ gibi $\Rightarrow$ 1. mert. Lineer dif

$p(x)=2x \quad q(x)=0 \quad I(x)=e^{\int 2x\,dx} \rightarrow I_x=e^{x^2} \Rightarrow \int \frac{d}{dx}(y.e^{x^2})=\int 0\,dy \rightarrow y=c.e^{-x^2}$

Ör: $y'-x^2y=0$ Çözümü $y=c.e^{x^3/3}$

Ör: $y'-3x^4y=0$ Çözümü $y=c.e^{\frac{3}{5}x^5}$

Ör: $y'+\frac{2}{x}y=0 \rightarrow$ çözümü $y=\frac{c}{x^2}$

Ör: $y'+\frac{1}{x}y=0 \quad$ " $\quad y=\frac{c}{x}$

Not: $e^{\ln x}=x \quad e^{2\ln x}=e^{\ln x^2}=x^2$ dir.

Ör: $y' - 7y = e^x$ Çözümü $y = -\frac{1}{6}e^x + e^{7x} + c$

Not: $\int e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}c^{-ax} + c$ dir

Ör: $y' + \frac{4}{x}y = x^4$ Çözümü $y = \frac{c}{x^4} + \frac{1}{9}x^5$

Ör: $y' - 3y = 6$ çözümü $y = c.e^{3x} - 2$ bulunur.

Bernoulli Dif Denklemler

$y' + p(x)y = q(x)y^n$ genel formatında $n \geq 2, 3, \ldots$

Çözümü için $z = y^{1-n}$ yerine koyulması ile $y' + p(x)y = q(x)y^n$ formatında olan Bernoulli dif denklemi lineer dif denklemi haline gelir.

Ör: $y' + xy = xy^2$ dif denklemini $z(0) = -4$ için çözünüz.

Çözüm: $y' + p(x)y = q(x)y^n$ ve $n \geq 2, 3, \ldots$ old. için bu denklem Bern. dif dir.
Bern. dif denklemini çözmek için $z = y^{1-n}$ olmalı $n = 2 \Rightarrow$ Soruda verilmiş

$z = y^{1-2} = y^{-1} \rightarrow y = \frac{1}{z}$ $\quad y' = \frac{0.z - z'.1}{z^2} = -\frac{z'}{z^2}$ Bu sorudan yerine yazılır

$-\frac{z'}{z^2} + x \cdot \frac{1}{z} = x \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^2 \rightarrow z' - xz = -x$ bu denklem $y' + p(x)y = q(x)$ formatında olduğu için lineerdir.

$p(x) = -x \quad q(x) = -x \quad I(x) = e^{\int -x \, dx} = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$\frac{d}{dx}\left(z \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

$z \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} + c$

Ör: $y' + xy = xy^2 \rightarrow n = 2$ Bernoulli dir $z = y^{1-n}$ dönüşümü

$y = \frac{1}{z} \quad y' = -\frac{z'}{z^2}$ yerine yazılır.

$-\frac{z'}{z^2} + x \cdot \frac{1}{z} = x\left(\frac{1}{z}\right)^2 \rightarrow z' - xz = -x$ 1. Mert. lineer

$p(x) = -x \quad q(x) = -x \quad I(x) = e^{\int p(x)\,dx} \rightarrow I(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\frac{d}{dx}\left(z \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad z \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} + c \rightarrow z = 1 + \frac{c}{e^{-\frac{x^2}{2}}}$

$z = 1 + c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$ bulunur.