1. Mertebeden Tam Dif. Denklemler

1. mertebeden tam dif. en genel halde $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ dır.

Tam dif olup olmadığını $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ şartını sağlayıp sağlamadığına bakarak anlaşılır. Çözüm olarak $M(x,y) = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$, $N(x,y) = \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ denklemleri $g(x,y)$ için çözülürse; $g(x,y) = C$ bulunur. Eğer tam dif değilse $\int \frac{M'}{M} \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ der M integral çarpanı ile her terim çarpılırsa denklem tam dif. haline gelir.

Not: 1. Mertebe lineer dif denklemlerindeki $I(x) = e^{\int P(x)dx}$ integrasyon çarpanı ile karıştırılmamalı

Ör: $\underbrace{(y + 2xy^3)}_{M} dx + \underbrace{(1 + 3x^2y^2 + x)}_{N} dy = 0$

Çözüm: $\frac{\partial M}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial N}{\partial x}$ $\quad$ $\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 1 + 2 \times 3 . y^2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 6xy^2 + 1 \end{aligned}\right\}$ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ old. görülüyor. O halde $(y + 2xy^3)dx + (1 + 3x^2y^2 + x)dy = 0$ Tam Dif. dir.

Tam dif. ise $g(x,y) = \int \underbrace{(y + 2xy^3)}_{M} dx = yx + 2y^3 . \frac{x^2}{2} + h(y)$

Bu değer soruda M yerine, y'ye göre türevi alınıp koyulursa ve N 'e eşitlenirse;

$$\frac{\partial\left[yx + x^2y^3 + h(y)\right]}{\partial y} = x + 3x^2y^2 + h(y)'$$

$$\cancel{x} + 3\cancel{x^2}y^2 + h(y)' = \underbrace{1 + 3\cancel{x^2}y^2 + \cancel{x}}_{N} \longrightarrow h(y)' = 1 \rightarrow \int h(y)' = \int 1\,dy \rightarrow h(y) = y + C_1$$

bulunur.

Ör: $2xy\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$

Çöz: $\underbrace{2xy}_{M}dx + \underbrace{(1+x^2)}_{N}dy \qquad \frac{\partial M}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \Rightarrow$ Tam dif.

$$g(x,y) = \int 2xy\,dx = 2\frac{x^2}{2}y + h(y) \qquad \frac{\partial\left[x^2y + h(y)\right]}{\partial y}' = x^2 + h(y)' \text{ bu değer}$$

M de yerine koyulur ve N ye eşitlenirse; $\cancel{x^2} + h(y)' = 1 + \cancel{x^2} \quad h(y)' = 1 \quad \int h(y)' = \int 1\,dy$

$h(y) = y + C_1$ işlem şu şekilde devam ettirilebilir. $h(y) = y + C_1$ ifadesi $g(x,y) = x^2y + h(y)$ de yerine yazılırsa $g(x,y) = x^2y + y + C_1$ ve $g(x,y)$ kural gereği C ye eşit ise ve $x^2y + y = C_2$ denilirse $C_2 = C - C_1$ bulunur. y için açık olarak çözülürse $y = C_2(x^2+1)$ elde edilir.

Ör: $(x + \sin y)\,dx + (x\cdot\cos y - 2y)\,dy = 0$

Çöz: $\overbrace{(x + \sin y)}^{M}dx + \overbrace{(x.\cos y - 2y)}^{N}dy = 0 \qquad \frac{\partial M}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial N}{\partial x}$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos y \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos y \Rightarrow$$ Tam dif. dir. Tam dif ile

$$g(x,y) = \int (x+\sin y)\,dx = \frac{x^2}{2} + x.\sin y + h(y) \qquad \frac{\left[\frac{x^2}{2} + x.\sin y + h(y)\right]'}{\partial y} = x.\cos y + h(y)'$$

$$x.\cancel{\cos y} + h(y') = x.\cancel{\cos y} - 2y \qquad h(y)' = -2y \qquad \int h(y)' = \int -2y\,dy \Rightarrow h(y) = -2\frac{y^2}{2} + C$$

$h(y) = -y^2 + C$ bulunur. Bu değer $g(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x.\sin y + h(y)$ de yerine yazılırsa;

$g(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x.\sin y - y^2 + C$ olur.

Ör. $\underbrace{3x^2y^2\,dx}_{\partial y} + \underbrace{(2x^3y + 4y^3)}_{\partial x}\,dy = 0 \qquad \frac{\partial M}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \left.\begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 2y \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 2y3x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Tam Dif

$$g(x,y) = \int 3x^2y^2\,dx = 3y^2.\frac{x^3}{3} + h(y) \qquad \frac{(x^3y^2 + h(y))'}{\partial y} = x^3 2y + h(y)' \qquad \cancel{x^3 2y} + h(y)' = \cancel{2x^3y} + 4y^3$$

$$h(y)' = 4y^3 \qquad \int h(y)' = \int 4y^3\,dy \qquad h(y) = 4\frac{y^4}{4} + c_1 \qquad h(y) = y^4 + c_1$$ bu ifade $x^3y^2 + h(y)$

de yerine yazılırsa; $x^3y^2 + y^4 + C_1 \to y^2(x^3 + y^2) = C_2$ bulunur.

Ör. $\underbrace{y}_{M}\,dx + \underbrace{x}_{N}\,dy = 0 \qquad \frac{\partial M}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \Rightarrow$ Tam dif.

$\int y\,dx = yx + h(y)$ $\qquad \dfrac{\partial\,(yx + h(y))}{\partial y} = x + h(y)'$

$x + h(y)' = x \rightarrow \int h(y)' = \int 0\,dy \quad h(y) = c_1$ değeri

$g(x,y) = yx + h(y)$ de yerine yazılırsa $\quad xy + c_1 = C$ bu durumda

$xy = C_2$ denilirse $\quad y = \dfrac{C_2}{x}$ bulunur.

Ör: $(3xy + y^2)\,dx + (x^2 + xy)\,dy = 0$ dif denklemini $\quad y(1) = 2$ için çözünüz.

Çözüm:

$$\underbrace{(3xy + y^2)}_{P}\,dx + \underbrace{(x^2 + xy)}_{Q}\,dy = 0$$

Not: Bazen literatürde M yerine P ve N yerine Q kullanılır.

$$\frac{\partial P}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad 3x + 2y \neq 2x + y \Rightarrow \text{Tam dif. değil.}$$

Tam dif haline getirmek için integrasyon çarpanı aranılır.

$$\int \frac{M'}{M} = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \qquad \int \frac{M'}{M} = \int \frac{3x+2y-2x+y}{x^2+xy}$$

$$\int \frac{M'}{M} = \int \frac{x+y}{x(x+y)} \rightarrow \ln M = \ln x \rightarrow M = x$$ (*** Burada integrasyon çarpanında C kullanılmaz.)

Bu integrasyon çarpanı ile her terim çarpılırsa dif. denklemi tam dif haline gelir.

$$x(3xy+y^2)dx + x(x^2+xy)dy = 0 \rightarrow \underbrace{(3x^2y+xy^2)}_{P}dx + \underbrace{(x^3+x^2y)}_{Q}dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad 3x^2+2xy = 2x^2+2xy \Rightarrow$$ Tam dif dir. Bu durumda

$$g(x,y) = \int P\,dx \quad g(x,y) = \int (3x^2y+xy^2)dx = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + h(y)$$ şimdi y'e

göre türev alıp Q ye eşitlenirse, $\cancel{x^3} + \cancel{x^2y} + h(y)' = \cancel{x^3} + \cancel{x^2y}$ $h(y)' = 0 + c_1$

$h(y) = c_1$ (kural gereği $g(x,y) = C$) $\rightarrow h(y) = c_1$ değeri $g(x,y)$ de yerine

yazılırsa $c = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + c_1$

$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = \underbrace{c_1 - c}_{c_2 \text{ dersek}}$ $\quad x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = c_2$ çözüm dür

$y(1) = 2$ de $\quad 1^3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 2^2 = c_2 \rightarrow c_2 = 4$ bulunur.

Bu durumda cevap $x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 - 4 = 0$ olur.