

Karışık Örnekler

Ör: $y' + 2 \cot(2x) y - 1 = 0$ dif. denklemini $y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -1$ için özel çözümünü bulunuz.

Çöz: $y' + 2 \cot(2x) y = 1$ denlemi $y' + p(x)y = q(x)$ formunda olduğun için 1. mertebe lineer bir dif. denlemdir.

Int. Çarpanı aranılır $I(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\int 2 \cot(2x) dx} = e^{\int 2 \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx}$

Hatırlatma: $(\sin 2x)' = 2 \cdot \cos 2x$. Burada $I(x) = e^{\ln \sin 2x} = \sin 2x$ ve $e^{\ln A} = A$ dir

$$\frac{d}{dy} (y \cdot \sin 2x) = 1 \cdot \sin 2x \rightarrow \int \frac{d}{dx} (y \cdot \sin 2x) dx = \int \sin 2x dx$$

$$y \cdot \sin 2x = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$$

$$y = -\frac{\cos^2 x}{\sin x} + \frac{C}{\sin 2x} \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -\frac{\cos^2 x}{2 \sin 2x} + \frac{C}{\sin 2x} \text{ bulunur.}$$

$$y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow -1 = -\frac{1}{2} - \frac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin 2\left(\frac{3\pi}{4}\right)} + \frac{C}{\sin 2\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \Rightarrow -1 = 0 - C$$

$C = 1$ bulunur.

Bu durumda özel çözüm

$$y = -\frac{\cos^2 x}{2 \sin 2x} + \frac{1}{\sin 2x} \text{ olur.}$$

Ör: $y' = \frac{-4xy}{2x^2 + 2y^2}$ dif denklemini çözünüz.

Çöz: Denklem $f(tx, ty) = f(x, y)$ şartını sağlıyor. Aşağıdakiya benzerdir.

$$y = vx \rightarrow y' = v'x + v \text{ denklemini çözelim.}$$

$$v'x + v = \frac{-4x \cdot vx}{2x^2 + 2(vx)^2} \rightarrow v'x = \frac{-4vx^2}{2x^2 + 2v^2x^2} = -v \quad v' = \frac{-4vx^2}{2x^2(1+v^2)} = -\frac{2v}{1+v^2}$$

$$u'x = \frac{-2u - u - u^3}{1+u^2} \quad \frac{du}{dx} \cdot x = \frac{-3u - u^3}{1+u^2} \quad \frac{x}{dx} = \frac{-u^3 - 3u}{1+u^2} \cdot \frac{1}{du} \int \frac{dx}{x} = \int \frac{1+u^2}{-u^3-3u} du$$

$$\ln x = \int \frac{3}{3 - (u^3+3u)} du \quad \ln x = \int -\frac{1}{3} \frac{3u^2+3}{u^3+3u} du \quad (u^3+3u) \text{ nun } f(u) = 3u^2+3 \text{ parça } du' \\ \text{verdiği için } \int \frac{3u^2+3}{u^3+3u} du = \ln(u^3+3u)$$

$$\ln x = -\frac{1}{3} \ln(u^3+3u) + C \quad y = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x} \text{ yerine yazılır}$$

$$\ln x = -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{y^3}{x^3} + \frac{3y}{x}\right) + C \quad \left\{ C = \ln x + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{y^3}{x^3} + \frac{3y}{x}\right) \right\}$$

Hatırlatma: $a \cdot \ln b = \ln b^a$ ve $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ dir.

$$C = \ln x + \ln\left(\frac{y^3}{x^3} + \frac{3y}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow C = \ln\left(x^3 \sqrt[3]{\frac{y^3}{x^3} + \frac{3y}{x}}\right)$$

$$C = \ln\left(x^3 \sqrt[3]{\frac{y^3+3xy}{x^3}}\right) \text{ ve belirli formda bulmamızıdır.}$$

$$y' = -3e^{-2z} \cdot (\cot y + 2z) = 0 \text{ dit denkleminin } z\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln 2 \text{ ise } C \text{ bulunur.}$$

$$C = \ln 2 = \ln 2 \cdot e^{-2z} (\cot y + 2z) \rightarrow 2 \cdot dz = (3e^{-2z} \cot y) \cdot dy \text{ her iki taraf}$$

$$e^{-2t} \text{ ye bölünürse } \frac{2}{e^{-2t}} dt = \frac{3e^{-2t} \cos 3y}{e^{-2t}} dy \quad 2 \cdot e^{-2t} = 3 \cdot \cos 3y \text{ dy kullanılabilir}$$

gibi elimalar (2'ler) bir taraftan armutlar (y'ler) bir tarafta ile ayrılabilir diti di. Görmes be iki taraftan int. alınarak bulunur.

$$\int 2 \cdot e^{-2t} dt = \int 3 \cdot \frac{\cos 3y}{\sin 3y} dy \quad 2 \cdot \frac{e^{-2t}}{2} = \ln \sin 3y + C \text{ olur}$$

Hatırlatma $(\sin 3y)' = 3 \cdot \cos 3y$ dir.

ve $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$ gibi düşünülür.

Bu durumda $e^{2t} = \ln \sin 3y + C$ denklemini $z(\frac{\pi}{6}) = \ln 2$ ise $e^{2 \ln 2} = \ln \left(\sin 3 \cdot \frac{\pi}{6} \right) + C$

$$e^{2 \ln 2} = \ln 1 + C \quad \underline{\underline{\quad \quad \quad}}$$

$$\rightarrow e^{\ln 2^2} = 0 + C \quad e^{\ln 4} = C \quad (\text{Hatırlatma } e^{\ln a} = a \text{ dir})$$

yeine yapılır. $e^{2t} = \ln \sin 3y + C$ özel çözüm bulunmuş olur.

Hatırlatma:

Kısmi İntegrasyon

$$\int f(x) g(x) dx = U \cdot V - \int V \cdot dU$$

Ör: $\int x^2 x dx$ kısmi integrasyonu için U ve dV ler belirleriz.

$$\int \underbrace{x^2 x}_{U} dx$$

denilirse

$$U = x^2$$

$$\frac{dU}{dx} = 2x$$

$$dU = 2x dx$$

yerine yazılırsa,

$$dV = x \cdot dx \Rightarrow \int dV = \int x dx \rightarrow V = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x^2 x \cdot dx = UV - \int V dU = x^2 \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} 2x dx = \frac{x^4}{2} - \frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{4} + C \text{ bulunur.}$$

$$\text{Gerçekten de } \int x^2 x dx = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C \text{ dir.}$$

Burada U tanımlaması yapılabilir

$U = \text{LAPTÜ}$

↳ bslü itade
↳ Trigonometrik itade
↳ Polinom itade
↳ Arc + Trigonometrik itade

\rightarrow logaritmik ite de sırası
 islemleri birli birine aklında olsun!

Or: $\underbrace{(2xy + 3y^2)}_M dx + \underbrace{(x^2 + 9xy^2)}_N dy = 0$
 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ $2x + 9y^2 = 2x + 9y^2$ ise tam diferansiyeldir.

$$g(x, y) = \int M(x, y) dx = \int (2xy + 3y^2) dx = x^2 y + 3xy^2 + C(y)$$

$$\left[x^2 y + 3xy^2 + C(y) \right]' = x^2 + 9xy^2 + C(y)' \quad \text{ve bu ifade } N \text{ 'ye ise}$$

eslektir $\cancel{x^2 + 9xy^2} + C(y)' = \cancel{x^2 + 9xy^2}$ $C(y)' = 0$ Doğru yolda
olduğunu algıladı
çok sadelerdi

$$C(y)' = 0 \quad C(y) = 0 + C_1 \quad \text{bulunur}$$