Asymptotic Analysis, Mathematical Analysis of Non-Recursive and Recursive Problems

Öğrenci Adı: Tarık TAŞKIN

Öğrenci Numarası: 21011022

Dersin Eğitmeni: M. Amaç Güvensan

1. a. $T(n) = 9 \cdot T(n/4) + n^2$ $\quad a=9,\ b=4,\ d=2$
b. $T(n) = 3 \cdot T(n/3) + \log(n)$ $\quad a=3,\ b=3,\ d=\emptyset$
c. $T(n) = 3 \cdot T(n/2) + n$ $\quad a=3,\ b=2,\ d=1$

a. $9 < 4^2 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2)$
b. $3 > 3^{\emptyset} \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_3 3}) \equiv T(n) \in \Theta(n)$
c. $3 > 2^1 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_2 3})$

2. • f1 fonksiyonundaki for döngüsü N defa döneceği için:

$\underline{T(N) \in O(N)}$

• f2 fonksiyonundaki içteki döngü, dıştaki döngüye bağlı olarak $0 + 1 + 2 + \dots + N-1 = \frac{(N-1) \cdot N}{2}$ kez çalışır ve O(N) karmaşıklı f1 fonksiyonu da üstteki sayı kadar çağırılır.

$T(N) = \frac{(N-1) \cdot N}{2} \cdot \underline{N \in O(N^3)}$

• f3 fonksiyonundaki döngü N kez f3(N-1) değerini çağırır. f3(N-1) fonksiyonu da f3(N-2) fonksiyonunu N-2 kez çağırır. Bu işlem $N = \emptyset$ oluncaya kadar devam eder.

$T(N) = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot (N-(N-1)) = N! \ \underline{\in O(N!)}$

• $T(N) = 2 \cdot T(N/2) + 3 \cdot f1(N), \quad f1(N) \in O(N)$

Master theorem ile $a=2$, $b=2$ ve $d=1$ bulunur. $2 = 2^1$ olduğu için: $T(N) \in \Theta(N\log N)$ olarak bulunur.

Big-Theta da $0 \le c_1 \cdot g(n) \le \underbrace{f(n) \le c_2 \cdot g(n)}$

buradaki ifade sağlandığı için

$\underline{T(N) \in O(N\log N)}$

3.

$f(n)$	$g(n)$	cevap
n^2	n^3	O
$n \lg n$	n	Ω
1	$3+\sin n$	X
3^n	2^n	Ω
4^{n+4}	2^{2n+2}	Θ
$n \log n$	$n^{105/100}$	Ω
$\log\sqrt{10n}$	$\log n^3$	Θ
$n!$	$(n+1)!$	O

4. a) $2^{n+1} + 3^{n-1}$

$0 \le c_1 \cdot 3^n \le 2^{n+1} + 3^{n-1} \le c_2 \cdot 3^n$; $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $n = 1$ için

$0 \le 1 \cdot 3^1 \le 2^2 + 3^0 \le 2 \cdot 3^1 \Rightarrow 0 \le 3 \le 5 \le 6$ sağlar.

$\underline{2^{n+1} + 3^{n-1} \in \Theta(3^n)}$

b) $2n \log(n+2)^2 + (n+2)^2 \cdot \log \frac{n}{2}$

$0 \le c_1 \cdot n^2 \cdot \log n \le 2 \cdot n \log(n+2)^2 + (n+2)^2 \cdot \log \frac{n}{2} \le c_2 \cdot n^2 \log n$

$n = 2$, $c_1 = 1$, $c_2 = 5$ için

$0 \le 4 \cdot 1 \le 2 \cdot 2 \cdot 4 + 16 \cdot 0 \le 5 \cdot 4 \cdot 1$

$0 \le 4 \le 16 \le 20$ sağlar.

$2n \log(n+2)^2 + (n+2)^2 \cdot \log \frac{n}{2} \in \Theta(n^2 \log n)$

5. $$\sum_{i=1}^{n}(i+1)\,2^{i-1} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i.2^{i-1}}_{1.\ \text{KISIM}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}}_{2.\ \text{KISIM}}$$

1. KISIM

$$\sum_{i=1}^{n} i.2^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i.2^{i}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n} i.2^{i} \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i.2^{i} = (n-1).2^{n+1}+2$$

$$= \frac{(n-1).2^{n+1}+2}{2} = (n-1)\,2^{n}+1$$

2. KISIM

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 2^{i} \rightarrow \sum_{i=\emptyset}^{n} 2^{i} = 2^{n+1}-1$$

$\rightarrow$ $i=\emptyset$ için $2^{\emptyset}=1$ değerinin $i=1$ başlangıç değeri toplam sembolünden çıkartılması gereklidir.

$$= \frac{2^{n+1}-1-1}{2} = 2^{n}-1$$

$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)\,2^{i-1} = (n-1).2^{n}+\cancel{1}+2^{n}-\cancel{1} = 2^{n}(n) \in O(n.2^{n})$$

6. $T(n) = T(n-2)+2n$

$$T(n) = (T(n-4)+2n-4)+2n = T(n-4)+4n-4$$
$$T(n) = (T(n-6)+2n-8)+4n-4 = T(n-6)+6n-12$$
$$T(n) = (T(n-8)+2n-12)+6n-12 = T(n-8)+8n-24$$

$$T(n) = T(n-2)+2n$$
$$T(n-2) = T(n-4)+2n-4$$
$$T(n-4) = T(n-6)+2n-8$$
$$T(n-6) = T(n-8)+2n-12$$
$$T(n-2i) = T(n-2i-2)+2n-4i$$

$\emptyset\ 4\ 8\ 12\ \dots\ 4i$ sayılarının toplamı

$$\frac{(4i).(4i+\emptyset+4)}{4.2} = 2i.(i+1)$$

$$T(n) = T(n-2i)+2in-2i(i+1)$$

$2i=n$ için $T(n) = T(n-n)+n.n-n.\left(\frac{n}{2}+1\right)$

$$T(n) = T(\emptyset)+n^{2}-\frac{n^{2}}{2}-n$$

$T(\emptyset)=c$, $c\in\mathbb{N}$ kabul edersek (c, sabit sayı)

$$T(n) \in O(n^{2})$$