Del 2 – Med hjelpemidler – 2 timer

Oppgave 1 (4 poeng)

I ei eske ligger det 28 kuler. De er røde, blå og gule. Vi trekker tilfeldig to kuler uten tilbakelegging.

a) Hvor mange røde kuler er det i eska når sannsynligheten for å trekke to røde kuler er $\frac{1}{18}$?

Vi kan si at A er rødt på første trekk, og B er rødt på andre trekk. Med x som antall røde får vi da $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A|B) = x/28 \cdot (x-1)/27 = 1/18$. Vi kan lime dette inn i CAS, som vist under, og få den positive løsningen $x = 7$. Altså er det 7 røde kuler i eska.

1	x/28 · (x-1)/27=1/18
	Løs: $\{x = -6, x = 7\}$

b) Du veit nå hvor mange røde kuler det er. Hvor mange blå og hvor mange gule kuler er det når sannsynligheten for å trekke én blå og én gul kule er $\frac{2}{7}$?

Om vi har 7 røde kuler, er det 21 blå og gule. Om x er antall blå og y er antall gule kuler, gir dette

$$x + y = 21$$

og

$$P(\text{gul og blå}) = P(\text{først gul})P(\text{blå på andre gitt gul}) + P(\text{først blå})P(\text{gul på andre gitt blå})$$
$$= \frac{y}{28} \cdot \frac{x}{27} + \frac{y}{28} \cdot \frac{x}{27} = \frac{xy}{378} = \frac{2}{7}.$$

Vi fører disse to likningene inn i CAS, løser og får $x = 9 \wedge y = 12 \vee x = 12 \wedge y = 9$, som vist under.

3	x + y =21
	$\rightarrow \quad x + y = 21$
4	(x y)/378 = 2/7
	$\rightarrow \quad \frac{1}{378}\, x\, y = \frac{2}{7}$
5	{\$3, \$4}
	Løs: $\{\{x = 9, y = 12\}, \{x = 12, y = 9\}\}$

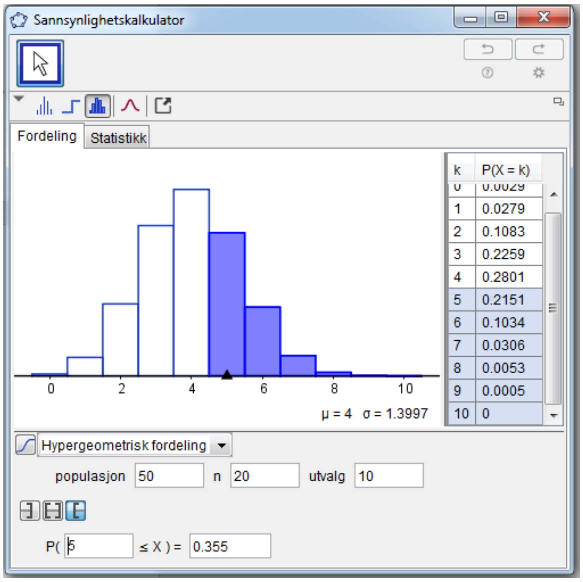
Altså er det enten 9 blå og 12 gule kuler, eller motsatt.

Oppgave 2 (6 poeng)

I ei eske med 50 kuler er det 20 røde kuler. Vi trekker tilfeldig 10 kuler og lar x være antallet røde kuler blant de 10.

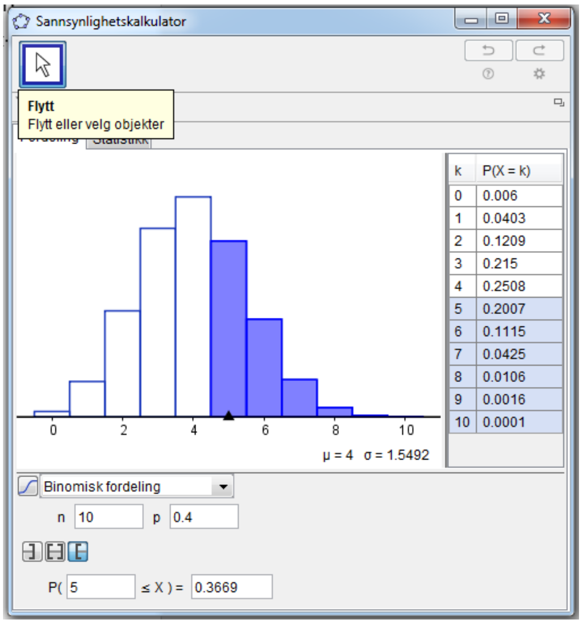
a) Finn $P(X = 4)$ og$P(X > 4)$ hvis vi trekker *uten* tilbakelegging.

Her har vi et hypergeometrisk forsøk, som vi kan løse med sannsynlighetskalkulatoren i Geogebra. Om vi setter *populasjon* til 50, *n* til 20 og *utvalg* til 10, får vi at $P(X = 4) = 28\ \%$ og $P(X > 4) = P(X \geq 5) = 36\ \%$, som vist i utklippet under.



b) Finn $P(X = 4)$ og$P(X > 4)$ hvis vi trekker *med* tilbakelegging.

Om vi trekker *med* tilbakelegging, får vi heller et binomisk forsøk. Her blir $p = \frac{20}{50} = 0{,}40$ og vi finner via sannsynlighetskalkulatoren at $P(X = 4) = 25\ \%$ og at $P(X > 4) = P(X \geq 5) = 37\ \%$, som vist i utklippet under.



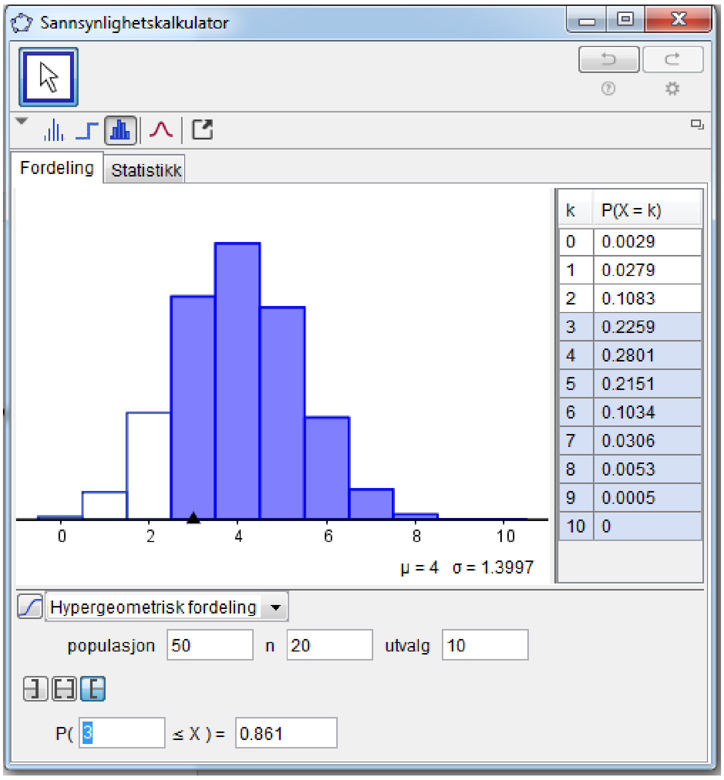
c) Finn $P(X = 4 | X \geq 3)$ hvis vi trekker *uten* tilbakelegging.

Her kan vi først sette opp uttrykket ved å bruke Bayes' setning, og får da

$$P(X = 4 | X \geq 3) = P(X \geq 3 | X = 4) \cdot P(X = 4) / P(X \geq 3).$$

Her må naturlig nok $P(X \geq 3|X = 4) = 1$ (om det er gitt at $X = 4$ er nødvendigvis også $X \geq 3$), og vi får at

$P(X = 4|X \geq 3) = \frac{P(X=4)}{P(X\geq 3)} = \frac{0{,}2801}{0{,}861} = 33\ \%$.



Oppgave 3 (2 poeng)

En funksjon er gitt ved

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Grafen til f har et bunnpunkt i $(3, 3)$ og et vendepunkt $(2, 5)$.

Bruk CAS til å finne tallene a, b, c og d.

Her må vi først sortere hva slags informasjon oppgaven gir oss. Vi skal finne fire verdier, og trenger da fire likninger. Vi blir gitt to funksjonsverdier, at $f(3) = 3$ og $f(2) = 5$, samt at $f'(3) = 0$ og $f''(2) = 0$. Vi har da et likningssett med fire ukjente, og kan løse dette i CAS som vist under.

2	f(3) = 3 ✓ $\mathbf{f(3) = 3}$
3	f'(3) = 0 ✓ $\mathbf{f'(3) = 0}$
4	f''(2)=0 ✓ $\mathbf{f''(2) = 0}$
5	f(2) = 5 ✓ $\mathbf{f(2) = 5}$
6	{$2, $3, $4, $5} Løs: $\{\{a = 1, b = -6, c = 9, d = 3\}\}$

Vi får altså at $a = 1$, $b = -6$, $c = 9$ og $d = 3$.

Oppgave 4 (6 poeng)

Om to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ veit vi at $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$ og $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Videre er $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ og $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

a) Finn $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Her gjør vi jobben enklere for oss selv om vi dekomponerer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Vi kan si at $\vec{a} = [6, 0]$ og vi må da finne en dekomponering av $\vec{b}$ som er slik at $|\vec{b}| = 5$ og at $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Siden $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ og $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, kan vi få $\vec{b} = [\cos 120°, \sin 120°] \cdot |\vec{b}| = \left[-\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right]$. Definert i CAS, sammen med $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som gitt i oppgaven, får $\vec{u} \cdot \vec{v} = 32$.

1	a := Vektor[(6, 0)] → $\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$
2	b := Vektor[(-5/2, 5 * sqrt(3)/2)]32 → $\mathbf{b} := \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$
3	u := a + b → $\mathbf{u} := \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 5 \end{pmatrix}$
4	v := 2a - b → $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} \frac{29}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 5 \end{pmatrix}$
5	u * v → $\mathbf{32}$

b) Finn $|\vec{u}|$ og $|\vec{v}|$.

Under ser vi at lengden av vektorene (deres absoluttverdi), vil være $|\vec{u}| = \sqrt{31}$ og $|\vec{v}| = \sqrt{229}$.

6	abs(u) → $\sqrt{31}$
7	abs(v) → $\sqrt{229}$

c) Finn $\angle(\vec{u}, \vec{v})$.

Vi kan finne denne vinkelen ved å bruke at

$$\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|},$$

satt opp og løst i CAS får vi da at $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 68°$, som vist under.

8	cos(x°) = u*v/(abs(u) * abs(v)) NLøs: $\{x = -67.68, x = 67.68\}$

d) La $\vec{w} = t \cdot \vec{a} - \vec{b}$. Bestem tallet t slik at $\angle(\vec{u}, \vec{w}) = 60°$.

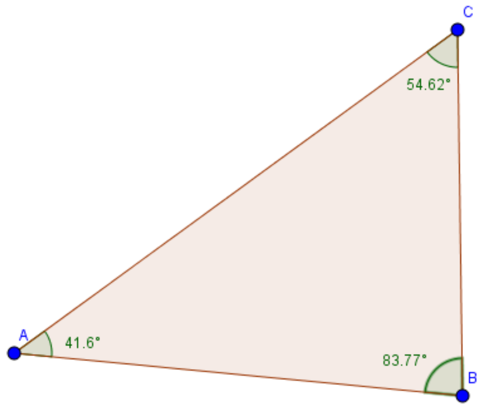
Vi definerer den nye vektoren $\vec{w}$ og setter opp tilsvarende uttrykk som i oppgave c. Løst numerisk i CAS får vi da at $t = 4{,}17$ for at $\angle(\vec{u}, \vec{w}) = 60°$.

9	w := t a - b → $w := \begin{pmatrix} 6\,t + \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 5 \end{pmatrix}$
10	cos(60°) = (u * w)/(abs(u) * abs(w)) ✓ $\cos(60°) = \frac{u\,w}{\lvert u\rvert\,\lvert w\rvert}$
11	$10 NLøs: $\{t = 4.17\}$

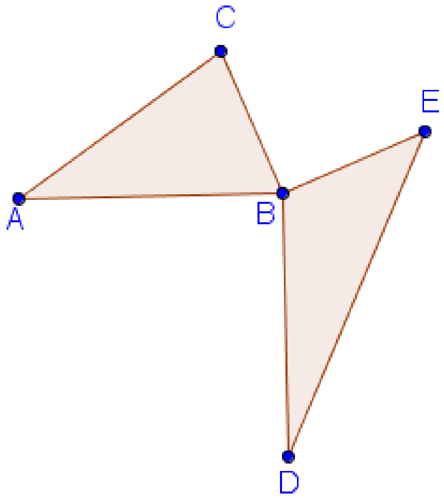
Oppgave 5 (6 poeng)

a) Tegn en trekant ABC ved hjelp av et digitalt verktøy. Finn vinklene i trekanten.

Her er trekanten under tegnet ved å bruke «Mangekant»-verktøyet i Geogebra, og vinklene er målt med vinkelverktøyet. I denne trekanten er vinklene 41,60°, 54,62° og 83,77°.

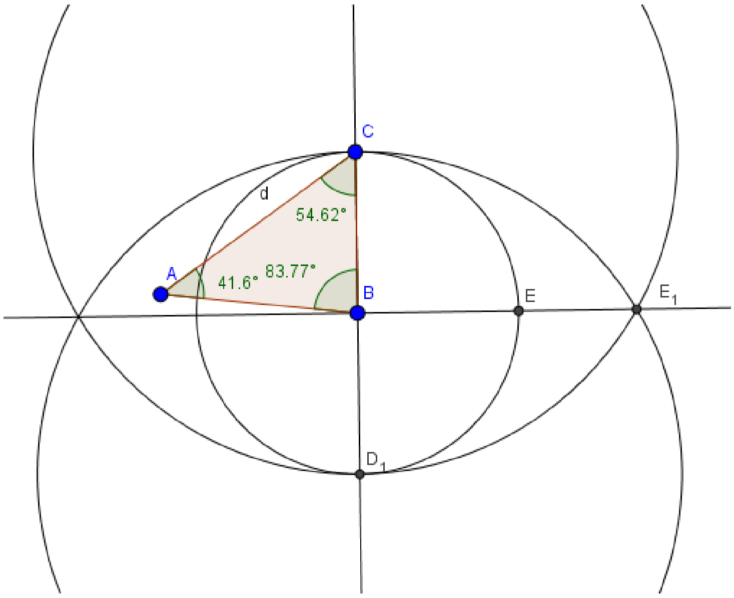


b) På figuren nedenfor har vi tegnet ΔBDE sammen med ΔABC.

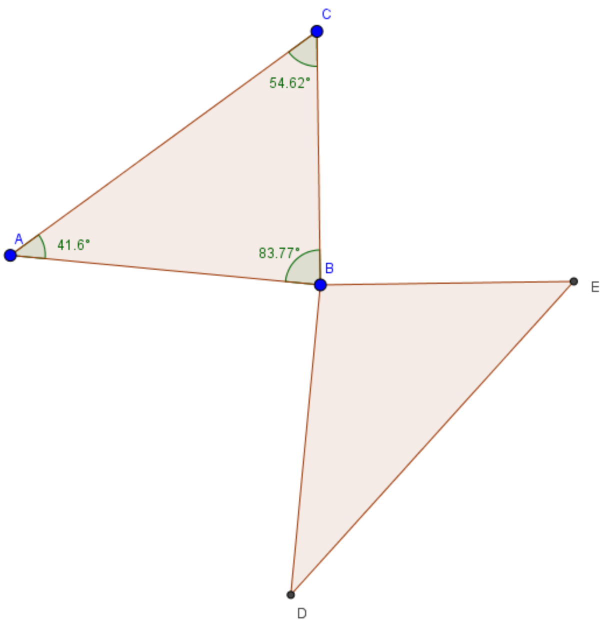


Her er $\angle ABD = 90°$, $\angle EBC = 90°$, $BD = AB$ og $BE = BC$. Konstruer ΔBDE digitalt ut fra den trekanten du lagde i oppgave a.

Under vises konstruksjonen av den ene rette vinkelen, $\angle EBC$. Her har vi forlenget CB og konstruert en sirkel (d) med senter i B og C som et periferipunkt, denne krysser nå CB i D_1 og C. Tegner så to sirkler med sentre i C og D_1, med henholdsvis D_1 og C som periferipunkt. Disse to sirklene skjærer hverandre i E_1, vi har nå $CB \perp BE_1$ og BE_1 skjærer d i E slik at $|CB| = |BE|$.

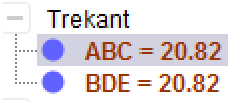


Vi gjentar denne prosessen for å finne punktet D slik at $AB \perp BD$ og $|AB| = |BD|$ og vi får da BDE som vist under.



c) Finn arealet av ΔABC og av ΔBDE. Hva ser du?

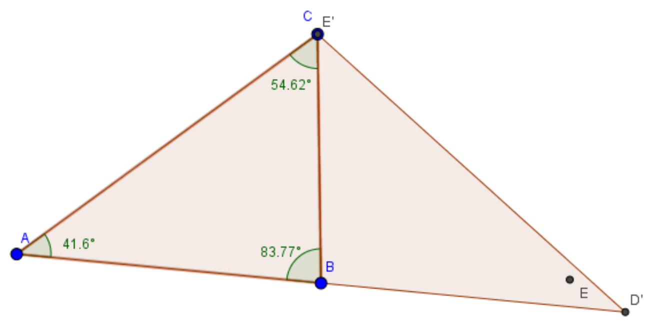
Geogebra gir $ABC = BDE = 20{,}82$. Vi ser at de to arealene er like.



d) Bevis den sammenhengen du fant i oppgave c.

Vi ser at om vi roterer BDE 90° mot klokka, vil $\angle ABD = 180°$ og $\angle CBE = 0°$. Som vist i figuren under. Vi har her fått to nye punkter, E' (punkt E rotert 90° om B) og D' (punkt D rotert 90° om B).

Om vi lar AB og BD' (som nødvendigvis er like lange) være grunnlinjene i de to trekantene, og C ned på AB eller E' ned på BD' være høydene, vil grunnlinjene og høydene i de to trekantene være parvis like. Siden arealet av en trekant er halvparten av produktet av grunnlinje og høyde, vil da også arealet til de to trekantene være like.



PS: I Matematikk 1T ble dette brukt til å utlede den såkalte «arealsetningen», $A = \frac{1}{2}ab\sin v$, hvor vi også kom fram til enheten $\sin v = \sin(180° - v)$.