Matematikk R1 – Utsatt heldagsprøve

4. mai 2017 – Edvard Munch vgs

Del 1: Uten hjelpemidler – 3 timer

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene.

a) $f(x) = x^2 + 2\ln x$

b) $g(x) = e^{x^2} - x^2$

c) $h(x) = (2x+1)^6$

Oppgave 2 (3 poeng)

Løs likningene.

a) $\ln(x^2 + 7) = 4\ln 2$

b) $e^x + 6e^{-x} = 5$

Oppgave 3 (10 poeng)

En polynomfunksjon P er gitt ved

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

a) Vis at $x = 2$ er et nullpunkt for P.

b) Faktoriser om mulig $P(x)$ i førstegradsfaktorer.

c) Finn minimalpunktet og maksimalpunktet til P ved regning.

d) Finn x-koordinaten til vendepunktet (infleksjonspunktet) til P.

e) Lag en skisse av grafen til P.

f) Løs ulikheten

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^2 - 4} \leq 0$$

Oppgave 4 (4 poeng)

a) Ta utgangspunkt i et linjestykke $AB = 10$ cm og konstruer en trekant ABC slik at $AC = 7$ cm og $\angle C = 90°$.

b) Konstruer den innskrevne sirkelen i ΔABC fra oppgave a.

Oppgave 5 **(2 poeng)**

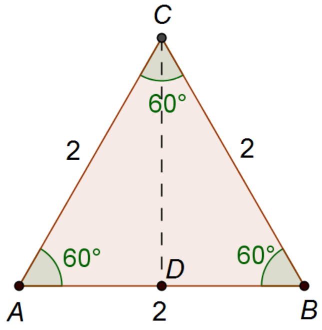
Bevis at midtpunktet på hypotenusen i en rettvinklet trekant er sentrum i den omskrevne sirkelen.

Oppgave 6 **(2 poeng)**

Figuren til høyre viser en likesidet trekant *ABC* der alle sidene har lengde 2. Punktet *D* er midtpunktet på *AB*. Bruk figuren til å vise at

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ og } \cos 60° = \frac{1}{2}$$

Du kan få bruk for disse verdiene i andre oppgaver i dette settet.



Oppgave 7 **(4 poeng)**

Vi har gitt vektorene

$$\vec{u} = \left[\sqrt{3}, 3\right] \text{ og } \vec{v} = \left[-1, \sqrt{3}\right]$$

a) Finn $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ og $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) Finn vinkelen mellom vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Oppgave 8 **(6 poeng)**

Om to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ vet vi at $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ og $\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 60°$. Videre er

$$\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b} \text{ og } \vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$$

a) Finn $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) Finn $|\vec{u}|$ og $|\vec{v}|$.

c) Finn $\cos\left(\angle\left(\vec{u}, \vec{v}\right)\right)$.

Del 2: Med hjelpemidler – 2 timer

Oppgave 9 (6 poeng)

I ei eske ligger det 40 røde og 60 blå kuler. Vi trekker tilfeldig 10 av dem.

a) Finn sannsynligheten for at vi trekker 5 røde og 5 blå kuler hvis vi trekker uten tilbakelegging.

b) Nå trekker vi de 10 kulene på denne måten: Vi trekker ei og ei kule og legger kula tilbake i eska før vi trekker neste kule.

1) Finn sannsynligheten for at vi nå trekker 5 røde og 5 blå kuler.

2) Finn sannsynligheten for at antallet røde kuler er 5 når vi vet at vi har trukket minst 4 røde kuler.

Oppgave 10 (14 poeng)

En kurve K har parameterframstillingen

$$K:\begin{cases} x=\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{5}{4} \\ y=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{5}{4} \end{cases}$$

a) Vis at $A\left(\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right)$ ligger på kurven K.

b) Finn skjæringspunktene mellom K og koordinataksene.

c) Tegn grafen til K digitalt.
Tegn linja l med parameterframstilling

$$l:\begin{cases} x=-1+t \\ y=1-t \end{cases}$$

i det samme koordinatsystemet.

d) Tegn digitalt ei linje m gjennom A som står vinkelrett på linja l.

e) Vi har gitt punktet $P(1,3)$.

Finn avstanden fra A til punktet P og avstanden fra A til linja l.
Hva ser du?

f) Bruk derivasjon til å finne en retningsvektor for tangenten til kurven K i punktet A.

g) Vis at vektoren $\vec{n}=[1,3]$ står vinkelrett på tangenten fra oppgave f.

Bruk dette til å finne en parameterframstilling for normalen n til tangenten i punktet A.

h) Finn vinkelen mellom normalen n og linja m.
Finn vinkelen mellom normalen n og linjestykket AP.
Hva ser du?

i) Undersøk om det du fant i oppgave e og h også gjelder for andre punkter A på kurven K.

FASIT

Oppgave 1

a) $f'(x) = 2x + \frac{2}{x}$

b) $g'(x) = \left(2x+3\right) \cdot e^x$

c) $h'(x) = 12 \cdot \left(2x+1\right)^5$

Oppgave 2

a) $x = \pm 3$

b) $x = \ln 2 \vee x = \ln 3$

Oppgave 3

b) $P(x) = (x-2)^2 \cdot (x-1)$

c) Minimalpunkt $x = 2$

Maksimalpunkt $x = \frac{4}{3}$

d) $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{27}\right)$

f) $x < -2 \vee 1 \le x < 2$

Oppgave 7

a) $\left|\vec{u}\right| = 2\sqrt{3}$, $\left|\vec{v}\right| = 2$ og $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2\sqrt{3}$

b) $60°$

Oppgave 8

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -24$

b) $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{156} = 2\sqrt{39}$ og $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{21}$

c) $\cos\left(\angle\left(\vec{u}, \vec{v}\right)\right) = -\frac{24}{\sqrt{156} \cdot \sqrt{21}} = -\frac{4}{\sqrt{91}}$

Oppgave 9

a) 0,208

b) **1)** 0,201

2) 0,325

Oppgave 10

b) $(0, 2)$ og $(0, 10)$

e) $\frac{1}{4}\sqrt{50} \approx 1,77$ og $\frac{1}{4}\sqrt{50} \approx 1,77$

f) $\vec{r} = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$

g) $n: \begin{cases} x = \dfrac{5}{4} + t \\ y = \dfrac{5}{4} + 3t \end{cases}$

h) 26,6° og 26,6°