Heldagsprøve i Matematikk R1 våren 2017
Løsningsforslag del 1.

Oppgave 1

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x - 3$

$\underline{\underline{f'(x) = x - 3}}$

b) $g(x) = 10^x$

$\underline{\underline{g'(x) = 10^x \ln 10}}$

c) $h(x) = 3 \cdot e^{x^2 - 2x}$

$h'(x) = 3 \cdot e^{x^2-2x} \cdot (x^2 - 2x)'$

$h'(x) = 3 \cdot e^{x^2-2x} (2x - 2)$

$\underline{\underline{h'(x) = 6(x-1)e^{x^2-2x}}}$

d) $p(x) = \ln(2x+2) - x$

$p'(x) = \frac{1}{2x+2} \cdot (2x+2)' - 1$

$p'(x) = \frac{1}{2(x+1)} \cdot 2 - 1$

$\underline{\underline{p'(x) = \frac{1}{x+1} - 1}}$

Oppgave 2

a) $P(x)$ er delelig med både $(x-2)$ og $(x-3)$ $\iff$ $P(2)=0 \wedge P(3)=0$

$$P(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 + ax + b$$

$$P(2) = 2^4 - 5\cdot 2^3 + 7\cdot 2^2 + 2a + b$$

$$= 16 - 40 + 28 + 2a + b = 0$$

I $\quad \underline{2a + b = -4}$

$$P(3) = 3^4 - 5\cdot 3^3 + 7\cdot 3^2 + 3a + b$$

$$= 81 - 135 + 63 + 3a + b$$

II $\quad \underline{3a + b = -9}$

Finner b fra I som $b = -4 - 2a$, innsatt i II gir dette

$$3a + (-4 - 2a) = -9$$

$$\underline{a = -5}$$

Med $b = -4 - 2\cdot(-5)$

$$\underline{b = 6}$$

Får altså at $\underline{\underline{a = -5 \text{ og } b = 6}}$

b) Har da $P(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6$

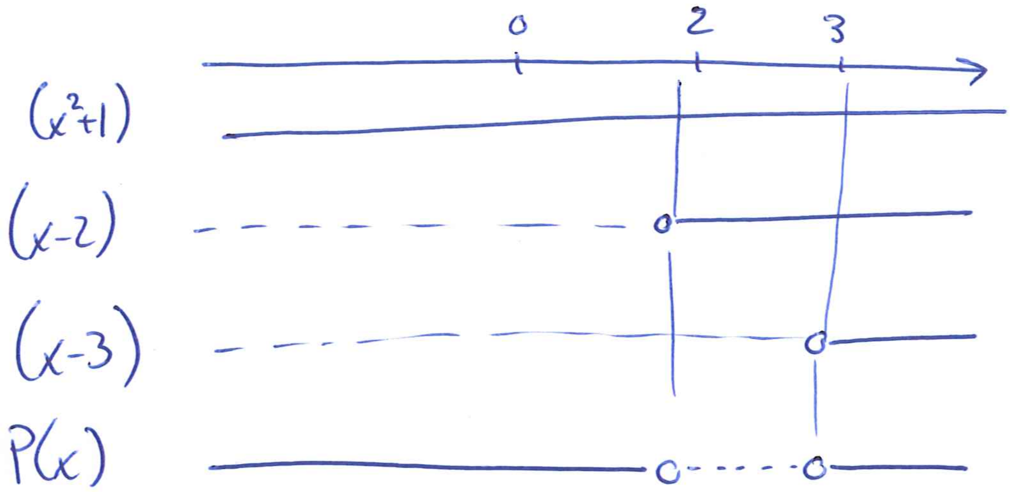
og ønsker først å forkorte bort $(x-2)$ og $(x-3)$. Gjør dette i ett ved å dele P(x) på $(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 5x + 6) = x^2 + 1 \\
\underline{x^4 - 5x^3 + 6x^2} \\
\qquad\qquad x^2 - 5x + 6 \\
\qquad\qquad \underline{x^2 - 5x + 6} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

x^2+1 kan ikke faktoriseres, siden $x^2+1=0$ ikke har noen løsning. Vi får da

$$\underline{\underline{P(x) = (x^2+1)(x-2)(x-3)}}$$

c) Løser ulikheten $P(x) < 0$ ved å tegne fortegnslinje.



Vi får da $\underline{\underline{P(x) < 0 \iff x \in \langle 2, 3 \rangle}}$

(alternativt $2 < x < 3$)

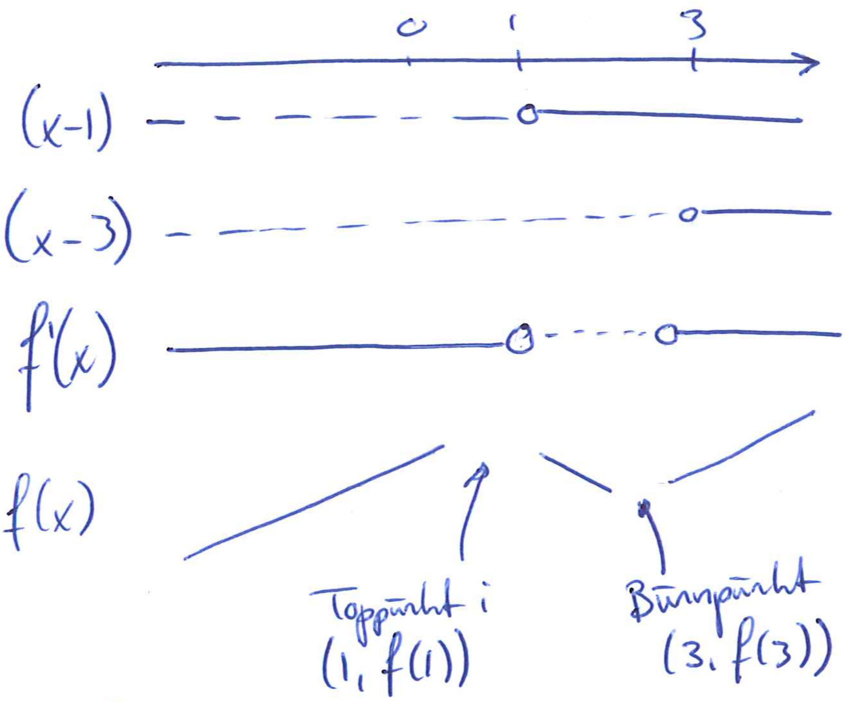
Oppgave 3

a) Topp- og bunnpunkt har vi der $f'(x)$ skifter fortegn.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$f'(x) = (x-1)(x-3)$$



$$f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 1 = \frac{7}{3}$$

$$f(3) = \frac{1}{3}3^3 - 2\cdot3^2 + 3\cdot3 + 1 = 1$$

Vi får da $\underline{\underline{T\left(1, \frac{7}{3}\right) \text{ og } B(3, 1)}}$.

b) $f(x)$ har et vendepunkt når $f''(x)$ skifter fortegn.

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3$$
$$f''(x) = 2x - 4$$

$$\begin{array}{llcl} & & 0 \quad\quad\quad\quad 2 & \rightarrow x \\ f''(x) & - - - - - - - - - - & 0 & \text{———} \end{array}$$

Vendepunkt i $(2, f(2))$

$$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$
$$= \frac{5}{3}$$

Vi får da $\underline{\underline{V\left(2, \frac{5}{3}\right)}}$.

c) Midtpunktet M kan uttrykkes som vektoren $\overrightarrow{OM}$.
M ligger midt på BT og vi kan da si at $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BT}$

$\overrightarrow{OB} = [3, 1]$, $\overrightarrow{BT} = [-2, \cancel{-}\frac{4}{3}]$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{BT} = [-1, \cancel{-}\frac{4}{6}]$

$\overrightarrow{OM} = [3, 1] + [-1, \cancel{-}\frac{4}{6}] = [3-1, 1+\frac{4}{6}] = [2, \frac{5}{3}]$

Altså er $M\left(2, \frac{5}{3}\right)$ og vi får at $M = V$. Vendepunktet ligger midt mellom topp- og bunnpunktet.

Oppgave 4

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y + d = 0, \quad r = 5$$

a) En sirkel er på formen $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$, hvor $S(x_0, y_0)$ er sentrum.

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + d = 0$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 - d$$

Vi har at $r = 5$. Med $r^2 = 5 - d$ får vi da $5 - d = 25$, $\underline{d = -20}$.

$x^2 - 4x + y^2 - 2y + d = 0$ kan skrives som
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5^2$, som er en sirkel med radius 5 og sentrum i $(2, 1)$.

b) Punktet $A(6, 4)$ ligger på sirkelen hvis $(6, 4)$ er en løsning av likningen.

$$(6-2)^2 + (4-1)^2 = 25$$

$$\underline{\underline{16 + 9 = 25}}$$

Altså ligger $(6, 4)$ på sirkelen.

c) $\vec{SA} = [6-2, 4-1] = [4, 3]$

$\vec{SB} = [-1-2, 5-1] = [-3, 4]$

$\vec{SA} \perp \vec{SB}$ hvis og bare hvis

$\vec{SA} \cdot \vec{SB} = 0$

$\vec{SA} \cdot \vec{SB} = [4, 3] \cdot [-3, 4] = -12 + 12 = 0$

Altså stemmer det at $\vec{SA} \perp \vec{SB}$.

d) $\cos \angle ACB = \dfrac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|}$

$\vec{CA} = [6-6, 4-(-2)] = [0, 6]$, $|\vec{CA}| = 6$

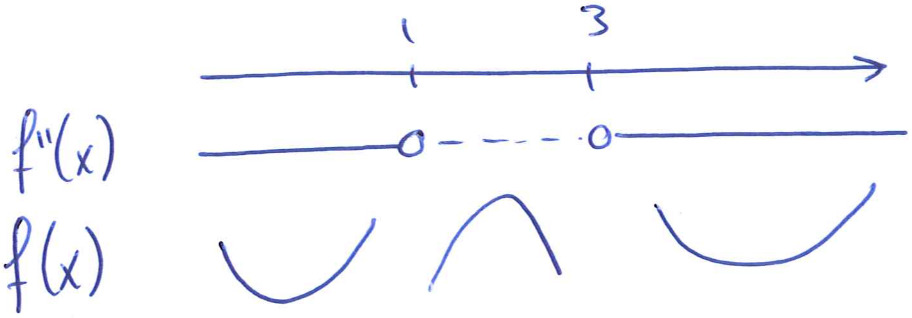
$\vec{CB} = [-1-6, 5-(-2)] = [-7, 7]$, $|\vec{CB}| = \sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}$

$$\cos(\angle ACB) = \frac{[0, 6] \cdot [-7, 7]}{6 \cdot 7\sqrt{2}} = \frac{0 \cdot (-7) + 6 \cdot 7}{6 \cdot 7\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

Vi får at $\cos(\angle ACB) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ eller at $\angle ACB = 45°$

Oppgave 5

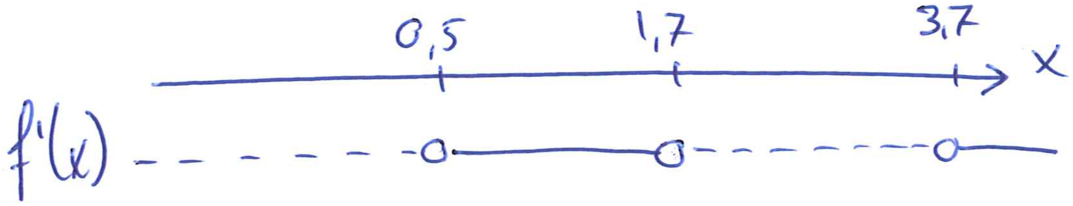
a) Vi ser av $f''(x)$ at dennes fortegnslinje er



og vi får da krumning som vist for $f(x)$ over.
A utelukkes da denne ser ut til å ha motsatt krumning ($h''(x)$) og B sitt første vendepunkt ser ut til å være i $(0, 2)$. ($g''(0) = 0$).
Vi ser da at C må være grafen til $f(x)$.

b) Vi ser fra C at $f(x)$ synker når $x \in \langle \leftarrow, 0{,}5 \rangle \cup \langle 1{,}7, 3{,}7 \rangle$ og stiger for øvrig.

Vi får da følgende fortegnslinje for $f'(x)$:



Oppgave 6

$$f(x) = \frac{x^2-3x-4}{2x-6}$$

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ hvor $P(x), Q(x)$ er polynomfunksjoner har en vertikal asymptote om $Q(x)=0$ og $f(x)$ er ferdig forkortet.

Faktoriserer

$$f(x) = \frac{x^2-3x-4}{2x-6} = \frac{(x-4)(x+1)}{2(x-3)}$$

$Q(x) = 2(x-3)$, $Q(x)=0$ når $x=3$ altså har $f(x)$ en vertikal asymptote $\underline{\underline{i\ x=3.}}$

Siden $P(x)$ har grad to og $Q(x)$ har grad én, vil $f(x)$ også ha en skrå asymptote som $f(x)$ nærmer seg når x går mot $\pm\infty$.

Finner denne ved å se på polynomdivisjonen uten restleddet.

$$(x^2-3x-4):(2x-6) = \frac{1}{2}x - \underbrace{\frac{4}{2x-6}}_{\text{restledd}}$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^2-3x} \\ \quad 0-4 \\ \quad \underline{-4} \\ \quad\ \ 0 \end{array}$$

Altså har $f(x)$ også en skrå asymptotet i $\underline{\underline{y=\frac{1}{2}x}}$

Oppgave 7

a) $f(x)$ er kontinuerlig dersom grenseverdien er den samme når vi nærmer oss bruddpunktet i $x=2$ fra begge sider.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 2^-}\left(-x^2+x+2\right) = \lim_{x\to 2^+}\left(x^2-8x-d\right)$$

$$-2^2+2+2 = 2^2-8\cdot 2-d$$

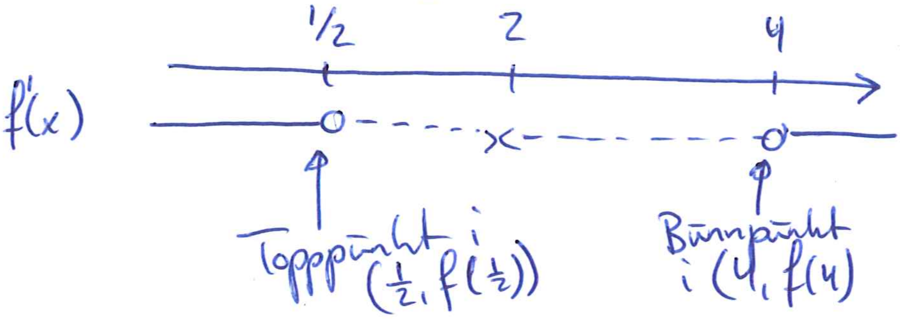
$$0 = -12-d$$

$$\underline{\underline{d = -12}}$$

b) Topp- og bunnpunkter der den deriverte skifter fortegn

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+x+2, & x<2 \\ x^2-8x+12, & x\geq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x+1, & x<2 \\ 2x-8, & x>2 \end{cases}$$



$$f(1/2) = -\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{1}{2}+2 = \tfrac{9}{4}$$

$$f(4) = 4^2-8\cdot 4+12 = -4$$

Topppunkt i $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ og bunnpunkt i $(4, -4)$

c) f er deriverbar i alle punkter hvis den deriverte nærmer seg samme verdi fra begge sider av bruddpunktet, altså hvis

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} f'(x)$$

Vi har $\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} (-2x+1) = -3$ og

$$\lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x-8) = -4$$

$\underline{\underline{-3 \neq -4}}$ altså er ikke f(x) deriverbar i $x=2$ og dermed ikke i alle punkter.