**Bab V**

# LIMIT DAN KONTINUITAS FUNGSI

## Limit Barisan dan Konvergensi

*DEFINISI:*

Bilangan-bilangan $c_1$, $c_2$, $c_3$, ..., $c_n$ disebut barisan bilangan tak hingga.

$c_n$ disebut suku umum dari barisan.

Bilangan n, (n = 1, 2, 3, ...) adalah nomor urut atau indeks yang menunjukkan letak bilangan tersebut dalam barisan.

*Catatan (1):*

Suku umum dari barisan, yaitu $c_n$ merupakan suatu fungsi dari n atau $c_n = f(n)$.

*Contoh (5.1):*

Barisan 1, ½, ⅓, ¼, ...., suku umumnya dapat kita tulis: $c_n = \frac{1}{n}$. Kita dapat menyebut barisan di atas sebagai barisan $\{c_n\} = \{\frac{1}{n}\}$.

*Contoh (5.2):*

Barisan 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{256}$, .... suku umumnya adalah $c_n = \frac{1}{n^n}$. Barisannya adalah $\{c_n\} = \{\frac{1}{n^n}\}$.

***Definisi:***

Suatu barisan $\{c_n\}$ dikatakan mempunyai limit l bila untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ dapat dicari suatu nomor indeks $n_0$ sedemikian sehingga untuk $n \geqslant n_0$ berlaku $l - \epsilon < C_n < l + \epsilon$ (atau $|C_n - l| < \epsilon$.

Artinya jika $l$ adalah limit dari $\{c_n\}$ maka $c_n$ mendekati $l$ jika n mendekati tak terhingga.

Ditulis $C_n \to l$ bila $n \to \infty$, atau: $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = l$

*Contoh (5.4):*

Buktikan bahwa barisan $\{C_n\} = \{\frac{1}{n^2}\}$ mempunyai limit.

*Bukti:*

Misalkan $\epsilon$ adalah suatu bilangan positif yang diketahui (bagaimanapun kecilnya).

Kita cari $c_n \geqslant \epsilon$ jadi $\frac{1}{n^2} \geqslant \epsilon \to \frac{1}{\epsilon} \geqslant n^2 \to n^2 \leqslant \frac{1}{\epsilon} \to (n^2 - \frac{1}{\epsilon}) \leqslant 0$

$\to (n - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}})(n + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}) < 0 \to -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \leqslant n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$

Jadi banyaknya n hingga. Mulai dari suatu nomor indeks $n_0$, $(n_0 > \frac{1}{\epsilon})$

akan berlaku $\frac{1}{n^2} < \epsilon$ untuk setiap $n \geqslant n_0$. Dan karena $\frac{1}{n^2}$ positif maka

berlaku $-\epsilon < \frac{1}{n^2} < \epsilon$ atau $0 - \epsilon < \frac{1}{n^2} < 0 + \epsilon$ atau $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \epsilon$.

Berarti barisan $\{c_n\} = \{\frac{1}{n^2}\}$ mempunyai limit 0.

***Definisi:***

Suatu barisan disebut konvergen jika barisan itu mempunyai limit, dan dalam hal lain disebut divergen.

*Catatan (2):*

Jika suatu barisan konvergen maka limitnya tunggal (unik).

*Contoh (5.5):*

(a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{(2n + 1/n)} = \dfrac{1}{2+0} = ½$

Barisan $\{c_n\} = \{\dfrac{n}{2n+1}\}$ konvergen.

(b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 + 2n^2 + 7}{n+5} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{3 + 2/n + 7/n^2}{1/n^2 + 5/n^3}$

$= \dfrac{3+0+0}{0+0} = \infty$. Barisan tersebut divergen.

*Catatan (3):*

***Limit yang Tak Sebenarnya***

(1) Kalau $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$, dikatakan juga bahwa barisan mempunyai limit yang tak sebenarnya $+\infty$.
Hal mana berlaku bila untuk sebarang bilangan positif M (bagaimanapun besarnya) dapat dicari suatu nomor indeks $n_0$ sedemikian sehingga $c_n > M$, untuk setiap $n > n_0$.

(2) Kalau $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$, dikatakan juga bahwa barisan mempunyai limit yang tak sebenarnya $-\infty$.
Hal mana berlaku, bila untuk sekarang bilangan positif M (bagaimana besarnya), dapat dicari suatu nomor indeks $n_0$, sedemikian sehingga $c_n < -M$, untuk setiap $n > n_n$.

(3) $\{c_n\}$ divergen jika $\{c_n\}$ mempunyai limit yang tak sebenarnya atau tak mempunyai limit sama sekali.

*Contoh:*

(a) $\{c_n\} = \{\dfrac{n^2}{2n+2}\}$ divergen, karena $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2n - n^n} = \infty$

(b) $\{c_n\} = \{2n - n^2\}$. Mulai dari $n = 2$ berlaku $c_n < 0$, $n^2$ lebih cepat mendekati $\infty$ daripada 2n. Ditulis $\lim_{n\to\infty} (2n - n^2) = -\infty$.

(c) $\{c_n\} = \{(-1)^n\}$

$$= \begin{cases} -1, & \text{bila n ganjil} \\ 1, & \text{bila n genap.} \end{cases}$$

atau: $-1, 1, -1, 1, \ldots$

Barisan ini tidak mempunyai limit sama sekali.

***Catatan (4):* Sifat-sifat Limit Barisan**

Bila $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = m$, maka:

(1) $\operatorname{Lim}\limits_{n\to\infty} (c_n + d_n) = \lim\limits_{n\to\infty} c_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} d_n = l \pm m.$

$\lim\limits_{n\to\infty} k\, c_n = k \lim\limits_{n\to\infty} c_n = k\, l$, bila k sebarang bilangan riil.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (c_n . d_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} c_n)(\lim\limits_{n\to\infty} d_n) = l\, m.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{c_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} c_n} = \dfrac{1}{l},$

bila semua suku $c_n \neq 0$ dan $l \neq 0$.

(4) $\operatorname{Lim}\limits_{n\to\infty} \dfrac{d_n}{c_n} = (\lim\limits_{n\to\infty} d_n)/\lim\limits_{n\to\infty} (c_n) = m/l,$

bila semua suku $c_n \neq 0$ dan $l \neq 0$.

(5) $\operatorname{Lim}\limits_{n\to\infty} (c_n)^P = (\lim\limits_{n\to\infty} c_n)^P = l^{\,P}$ untuk sebarang P bilangan riil dan $l^{\,P}$ ada.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} p^{c_n} = P^{\lim\limits_{n\to\infty} C_n} = p^l$, untuk sebarang P bilangan riil dan $P^l =$ ada.

*Contoh (5.7):*

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2};$

$1 + 2 + 3 + \ldots + n$ adalah suatu deret hitung dengan n buah suku. Suku pertama = 1, suku terakhir = n, dan beda = 1. Jadi, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = ½n(1 + n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{½n(1 + n)}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{½n + ½n^2}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{½n + ½}{1} = ½$$

b. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ 3.2.1}{n\ n\ n\ \ldots\ n.n.n}$$

dengan menggunakan perluasan sifat (2), maka:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim\ (n/n)\ .\ \lim\ (n-1)/n\ .\ \lim\ (n-2)/n\ \ldots\ \lim\ (1/n)$$

$$= 1\ .\ 1\ .\ 1\ \ldots\ 0.0 = 0$$

c. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{\sqrt{4n^2 + 2n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2 + n + 1}{4n^2 + 2n}}$$

$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n + 1}{4n^2 + 2n}}$$

$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/n + 1/n^2}{4 + 2/n}}$$

$$= \sqrt{¼} = ½.$$

## 5.2 Barisan-barisan yang Istimewa

1. $\{C^n\} = \{\sqrt[n]{a}\} = \{a^{1/n}\}$, a bilangan positif.
   berlaku $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$.

2. $\{c_n\} = \{\sqrt[n]{n}\} = \{n^{1/n}\}$, berlaku $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$.

3. $\{c_n\} = \{\sqrt{f(n)} - \sqrt{g(n)}\}$
   berlaku $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \{\sqrt{f(n)} - \sqrt{g(n)}\} \dfrac{\sqrt{f(n)} + \sqrt{g(n)}}{\sqrt{f(n)} - \sqrt{g(n)}}$

4. $\{c_n\} = \{a^n\}$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq$ w1.

Jika $a > 1$, maka $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$ (divergen).

$-1 < a < 1$, maka $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ (konvergen).

$a < -1$, maka $\{c_n\}$ divergen.

5. $\{c_n\} = \{(1 + 1/n)^n\}$ dengan $n \geqslant 1$, atau:
$\{d_n\} = \{(1 - 1/n)^{-n}\}$ dengan $n \geqslant 2$, berlaku:
a. $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = e$, b. $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = e$.

Hasil (a) sudah dibuktikan pada Bab 2 mengenai Binomium Newton, sedangkan (b):

$$\lim_{n\to\infty} (1 - 1/n)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} . \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)$$

$$= \lim_{(n-1)\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} . 1 = e.1 = e.$$

*Contoh (5.8):*

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n.2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{n}$

$= 2\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 2 . 1 = 2.$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2 + n} + \sqrt{9n^2 - n} - 5n)$

Misalkan $l = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2 + n} + \sqrt{9n^2 - n} - 5n)$

Jadi, $l = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2 + n} - 2n + \sqrt{9n^2 - n} - 3n)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2 + n} - 2n) + \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{9n^2 - n} - 3n)$

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2 + n} - 2n) = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2+n}-2n) \frac{\sqrt{4n^2+n}+2n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + n - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4 + 1/n} + 2} = 1/4$$

Sedangkan $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{9n^2 - n} - 3n) = -1/6$

Jadi, $l = 1/4 - 1/6 = 1/12$

c. $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n + 1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n + 1 - 1}{n + 1}\right)^{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n + 1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1 - 1/(n+1))^{-(n+1)}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} (1 - 1/(n+1))^{-(n+1)}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n+1\to\infty} (1 - 1/(n+1))^{-(n+1)}} = 1/e$$