Perkalian Titik dan Silang

Coba kerjakan

- **Tentukan Panjang dan titik tengah dari segmen dengan titik akhir pada(−2, 3, 4) and (6, 1, −5).**

A. 8.31; $\left(2, 2, -\frac{1}{2}\right)$

B. 10.04; $\left(2, 2, -\frac{1}{2}\right)$

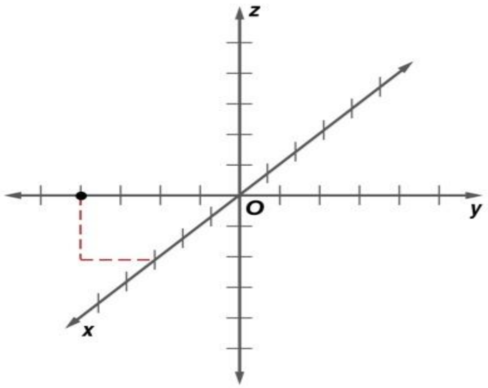
C. 12.21; $\left(2, 2, -\frac{1}{2}\right)$

D. 12.21; $\left(4, 2, -\frac{9}{2}\right)$

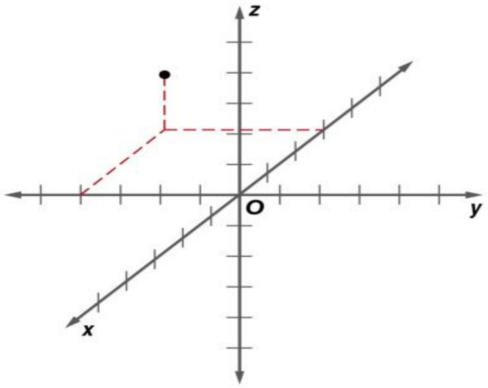
Coba kerjakan

Gambarkan v = (–3, 4, 2).

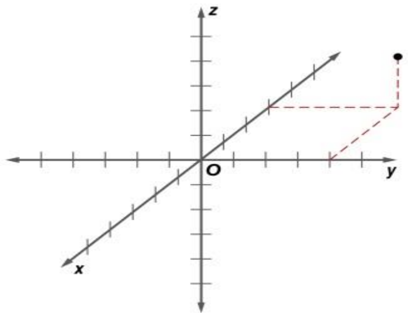
A.



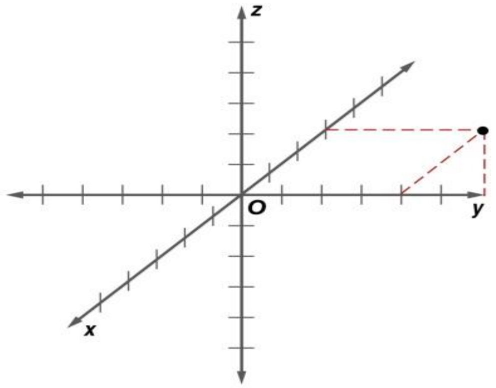
B.



C.



D.



Coba Kerjakan

Mana berikut ini yang merepresentasikan 3*x* – 5*y* + *z* jika *x* = ⟨2, –7, 1⟩, *y* = ⟨–5, 0, 3⟩, dan *z* = ⟨–1, 6, –4⟩?

A. **⟨–23, –15, 14⟩**

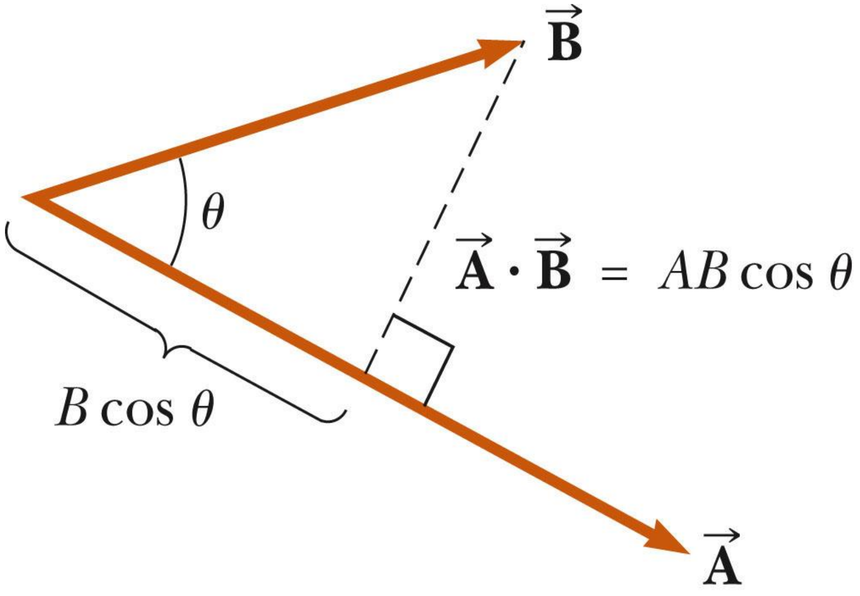
B. **⟨6, –1, –6⟩**

C. **⟨30, −15, −16⟩**

D. **⟨30, −15, 14⟩**

Produk Skalar dari Dua Vektor

- Produk skalar dari dua vektor ditulis berbentuk $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$
  - Sering disebut sebagai perkalian titik
- $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \equiv A\,B\,cos\ \theta$
  - θ adalah sudut antara *A* and *B*
- Contoh:



$$W = F\Delta r\cos\theta = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}$$

Perkalian Titik

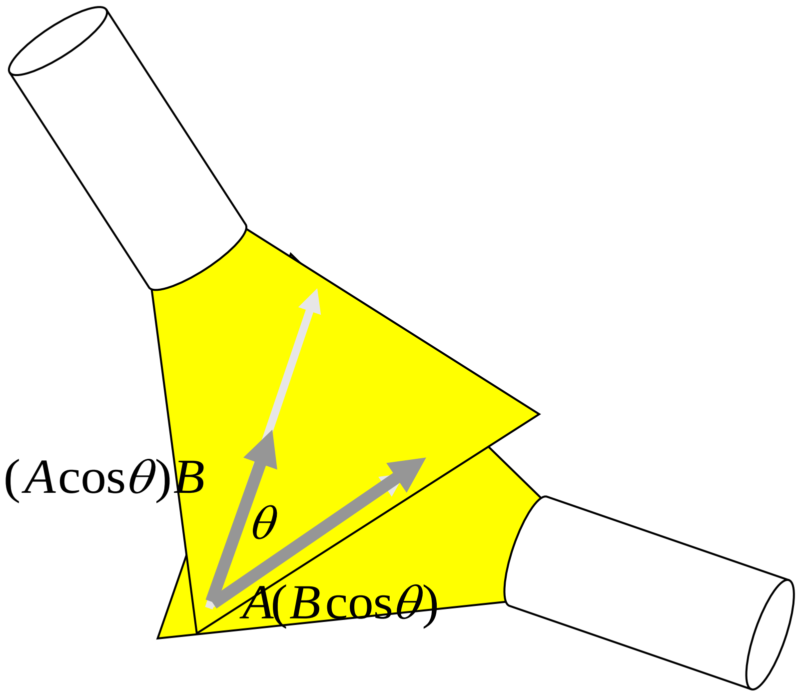
- Perkalian titik mengatakan seberapa parallel dua buat vektor tersebut.
- Perkalian titik (produk scalar) dari dua vektor dapat dibayangkan sebagai proyeksi sebuah vektor terhadap vektor lainnya.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

$$\vec{A}\cdot\hat{i} = A\cos\theta = A_x$$

- Komponen

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$



Proyeksi dari vektor: Produk Titik

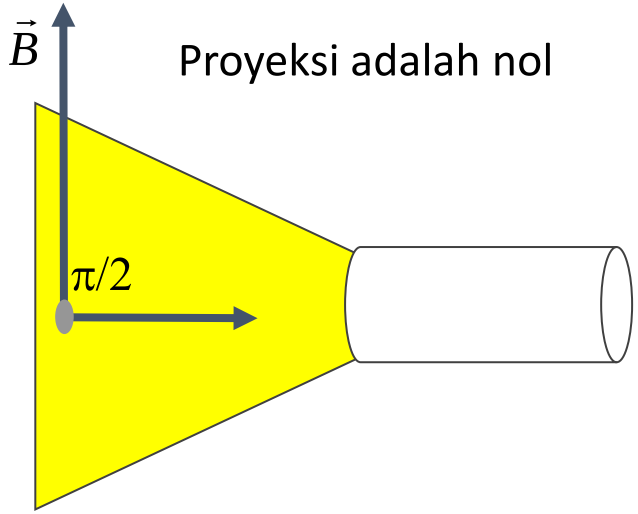
- Perkalian titik mengatakan seberapa parallel dua buat vektor tersebut.
- Perkalian titik (produk skalar) dari dua vektor dapat dibayangkan sebagai proyeksi sebuah vektor terhadap vektor lainnya.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

$$\vec{A}\cdot\hat{i} = A\cos\theta = A_x$$

- Komponen

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$



Derivasi

- Dari asalnya? $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$
- Mulai dari
$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$
- Kemudian
$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) \\ &= A_x\hat{i}\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) + A_y\hat{j}\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) + A_z\hat{k}\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})\end{aligned}$$
- Tetapi
$$\hat{i}\cdot\hat{j} = 0;\ \ \hat{i}\cdot\hat{k} = 0;\ \ \hat{j}\cdot\hat{k} = 0$$
$$\hat{i}\cdot\hat{i} = 1;\ \ \hat{j}\cdot\hat{j} = 1;\ \ \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$
- Maka
$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= A_x\hat{i}\cdot B_x\hat{i} + A_y\hat{j}\cdot B_y\hat{j} + A_z\hat{k}\cdot B_z\hat{k} \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\end{aligned}$$

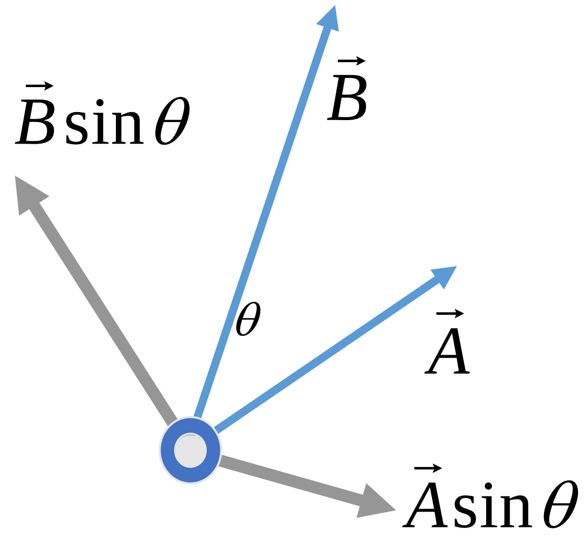
Perkalian Silang

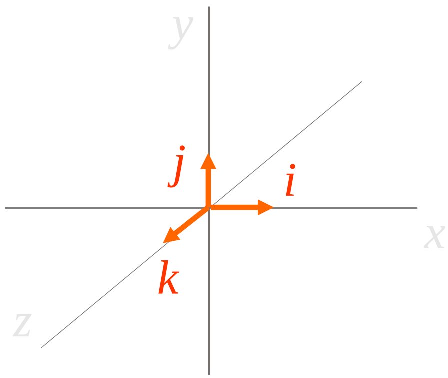
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

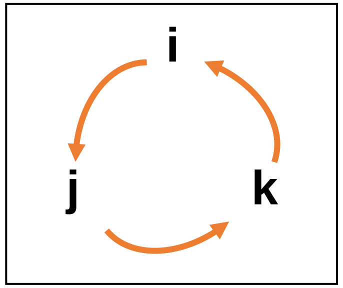
- Perkalian silang dua vektor mengatakan seberapa perpendikularnya vector vector tersebut.
- Besarnya: $$\left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = AB\sin\theta$$
  - θ adalah sudut terkecil antara vektor
  - Perkalian Silang antara vector yang paralel = nol
  - Perkalian silang maksimum untuk vektor yang perpendikular
  - Perkalian silang dari vektor unit Kartesian:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k};\ \ \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j};\ \ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = 0;\ \ \hat{j} \times \hat{j} = 0;\ \ \hat{k} \times \hat{k} = 0$$



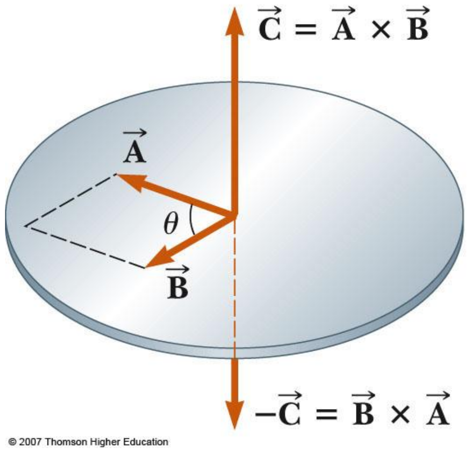




Perkalian Silang

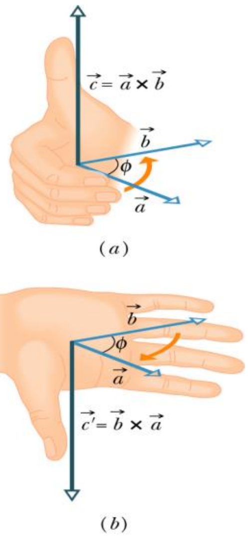
- Arah: C perpendikulan terhadap kedua A dan B (kaidah tangan-kanan)
  - Tempatkan A dan B dengan ekor menempel
  - Tangan Kanan, bukan tangan kiri
  - Keempat jari mengarah sepanjang vektor pertama A
  - “genggam” dari vektor pertama A kearah vektor kedua B pada sudut terkecil antaranya
  - Ibu jari menunjuk kearah C
- Latihan pertama

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{B}\times\vec{A}\,?$$



$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{B}\times\vec{A}\,?$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$



Derivasi

- Dari asalnya?

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}$$

- Mulai dari

$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$$
$$\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$$

- Kemudian

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B}&=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})\\&=A_x\hat{i}\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})+A_y\hat{j}\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})+A_z\hat{k}\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})\end{aligned}$$

- Tetapi

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k};\;\;\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j};\;\;\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$$
$$\hat{i}\times\hat{i}=0;\;\;\hat{j}\times\hat{j}=0;\;\;\hat{k}\times\hat{k}=0$$

- Maka

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B}&=A_x\hat{i}\times B_y\hat{j}+A_x\hat{i}\times B_z\hat{k}+A_y\hat{j}\times B_x\hat{i}+A_y\hat{j}\times B_z\hat{k}\\&\quad+A_z\hat{k}\times B_x\hat{i}+A_z\hat{k}\times B_y\hat{j}\end{aligned}$$

Perkalian Titik dan Vektor Orthogonal

KeyConcept Dot Product and Orthogonal Vectors in Space

The dot product of $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ and $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ is defined as $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. The vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ are orthogonal if and only if $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Gunakan Perkalian Titik untuk Menentukan Vektor Ortogonal

Tentukan perkalian titik vektor u dan v, untuk u = ⟨–1, 6, –3⟩ dan v = ⟨3, –1, –3⟩. Kemudian tentukan apakah u dan v ortogonal.

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -1(3) + 6(-1) + (-3)(-3)$

$= -3 + (-6) + 9$ or 0

Karena $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, **u** dan **v** ortogonal.

Jawab: 0; ortogonal

Gunakan Perkalian Titik untuk Menentukan Vektor Ortogonal

Tentukan perkalian titik vektor u dan v, untuk u = $\langle 2, 4, -6 \rangle$ dan v = $\langle -3, 2, 4 \rangle$. Kemudian tentukan apakah u dan v ortogonal.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= 2(-3) + 4(2) + (-6)(4) \\ &= -6 + 8 + (-24) \text{ or } -22 \end{aligned}$$

Karena $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$, **u** dan **v** tidak ortogonal.

Jawab: –22; tidak ortogonal

Gunakan Perkalian Titik untuk Menentukan Vektor Ortogonal

Tentukan perkalian titik dari u = ⟨–4, 5, –1⟩ dan v = ⟨3, –3, 1⟩. Kemudian tentukan apakah u dan v ortogonal.

A. – 28; ortogonal

B. – 28; tidak ortogonal

C. – 4; ortogonal

D. – 4; tidak ortogonal

Sudut Antara Dua Vektor

Tentukan sudut $\boldsymbol{\theta}$ antara u = ⟨–4, –1, –3⟩ dan v = ⟨7, 3, 4⟩.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle -4, \ -1, \ -3\rangle \bullet \langle 7, \ 3, \ 4\rangle}{|\langle -4, \ -1, \ -3\rangle||\langle 7, \ 3, \ 4\rangle|}$$

$$\cos\theta = \frac{-43}{\sqrt{26}\sqrt{74}}$$

Sudut antara 2 vektor

u = ⟨**–4, –1, –3**⟩
dan **v** = ⟨**7, 3, 4**⟩

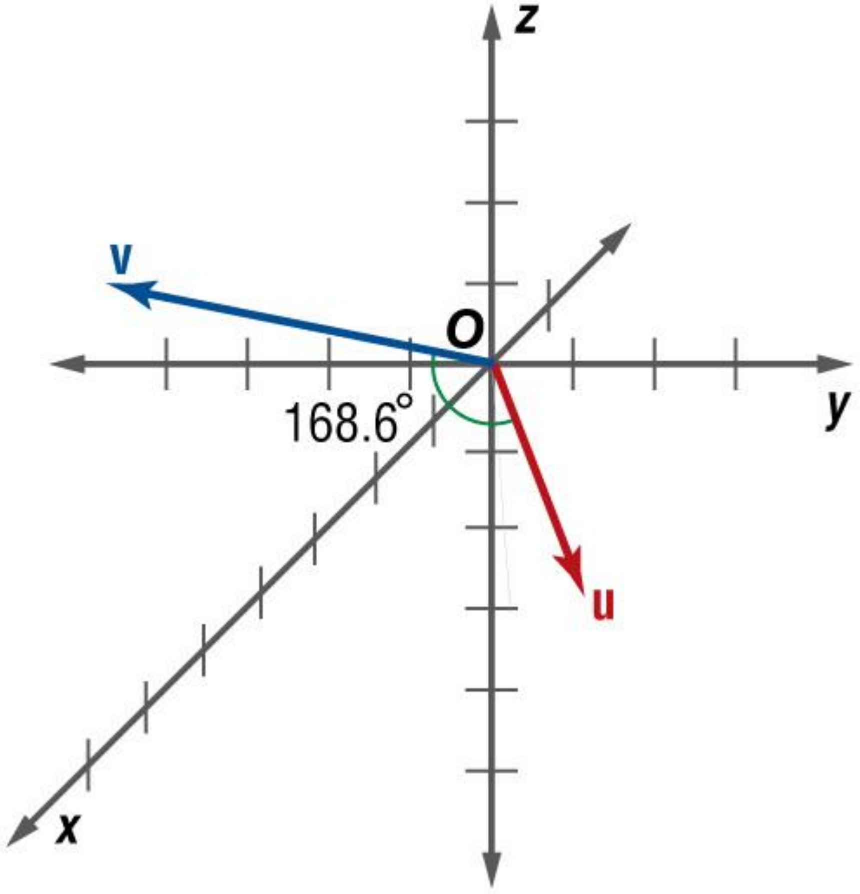
Hitung perkalian titik dan besarnya.

Sudut Antara Dua Vektor

$$\cos\theta = \frac{-43}{2\sqrt{481}}$$

Cari θ.

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-43}{2\sqrt{481}}$$



Pengukuran sudut antara **u** dan **v** adalah 168.6°.

Jawab: 168.6°

Sudut Antara Dua Vektor

Tentukan sudut antara u = $\langle -2, 3, -1 \rangle$ dan v = $\langle -4, -3, 4 \rangle$.

A. 12.0°

B. 78.0°

C. 82.8°

D. 102.0°

KeyConcept Cross Product of Vectors in Space

If $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ and $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, the cross product of **a** and **b** is the vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}.$$

Menentukan Perkalian Silang dari Dua Vektor

Tentukan perkalian silang antara u = ⟨6, –1, –2⟩ dan v = ⟨–1, –4, 2⟩. Kemudian tunjukkan bahwa u × v orthogonal terhadap kedua u dan v.

$$\mathrm{u}\times\mathrm{v}$$

$$=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & -1 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$=(-2-8)\mathbf{i}-(12-2)\mathbf{j}+(-24-1)\mathbf{k}$$

u = ⟨6, –1, –2⟩
and
v = ⟨–1, –4, 2⟩

Determinan matriks 3 × 3

Determinan matriks 2 × 2

Menentukan Perkalian Silang dari Dua Vektor

$$= -10\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 25\mathbf{k}$$

Sederhanakan.

$$= \langle -10, \ -10, \ -25 \rangle$$

Bentuk Komponen

Untuk menunjukkan apakah **u** × **v** ortogonal terhadap kedua **u** dan **v**, cari perkalian titik antara **u** × **v** dengan **u** dan **u** × **v** dengan **v**.

(u × v) • u

$= \langle -10, -10, -25 \rangle \cdot \langle 6, -1, -2 \rangle$

$= -10(6) + (-10)(-1) + (-25)(-2)$

$= -60 + 10 + 50$ or 0

Menentukan Perkalian Silang dari Dua Vektor

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$

$= \langle -10, -10, -25 \rangle \cdot \langle -1, -4, 2 \rangle$

$= -10(-1) + (-10)(-4) + (-25)(2)$

$= 10 + 40 + (-50)$ or 0

Karena kedua perkalian titik adalah 0, maka vector-vector tersebut ortogonal.

Jawab: $\langle -10, -10, -25 \rangle$;

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \langle -10, -10, -25 \rangle \cdot \langle 6, -1, -2 \rangle$

$= -60 + 10 + 50 = 0$

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \langle -10, -10, -25 \rangle \cdot \langle -1, -4, 2 \rangle$

$= 10 + 40 - 50 = 0$

Tentukan perkalian silang dari u = $\langle 2, 3, -1 \rangle$ dan v = $\langle -3, 1, 4 \rangle$.

A. u × v = $\langle 13, 5, 11 \rangle$

B. u × v = $\langle 13, -5, 11 \rangle$

C. u × v = $\langle 12, -5, 7 \rangle$

D. u × v = $\langle 13, 5, 11 \rangle$