Bab IV

FUNGSI

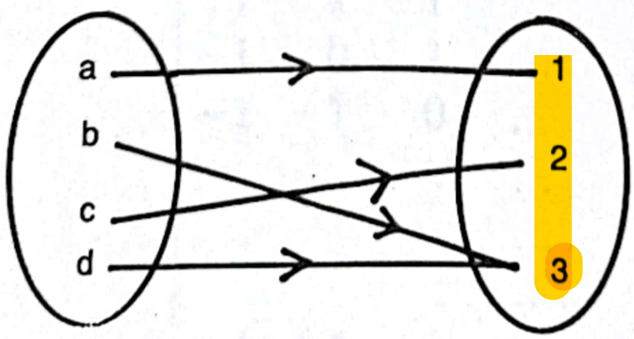
4.1 Definisi Fungsi

Pandang himpunan A dan B. R adalah suatu cara yang menghubungkan/mengkaitkan elemen A dengan elemen B. Dikatakan: terdapat suatu *relasi* R antara A dan B. Misalkan sekarang, f suatu relasi antara A dan B dengan sifat: f mengkaitkan setiap elemen A, dengan satu dan hanya satu elemen B. f disebut fungsi dari A ke B. Ditulis f; A $\rightarrow$ B.

Contoh (4.1):

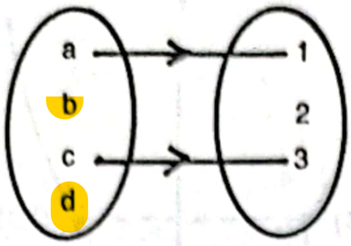
(a) Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Definisikan suatu fungsi f: $A \rightarrow B$ sebagai berikut:
$a \rightarrow 1$, $b \rightarrow 3$, $c \rightarrow 2$, $d \rightarrow 3$ atau: $f(a) = 1$, $f(b) = 3$, $f(c) = 2$, $f(d) = 3$.

Gambarnya:

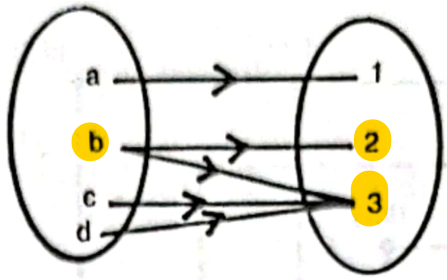


Dikatakan pula: peta dari a adalah 1, atau a merupakan prapeta dari 1.

(b) Yang berikut ini bukan fungsi (merupakan relasi biasa):



Tidak semua elemen dari A dikaitkan dengan elemen B.



Ada elemen A yang dikaitkan dengan lebih dari satu elemen B (yaitu b dikaitkan dengan 2 dan 3).

(c) Misalkan f mengkaitkan setiap bilangan riil dengan kuadratnya. Jelas f: $R^{\#} \rightarrow R^{\#}$ suatu fungsi dari himpunan bilangan riil $R^{\#}$ ke himpunan bilangan riil $R^{\#}$. Antara lain di sini: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(1\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{4}$, $f(\sqrt{2}) = 2$, $f(-1) = 1$ dan lain-lain.

Catatan (1):

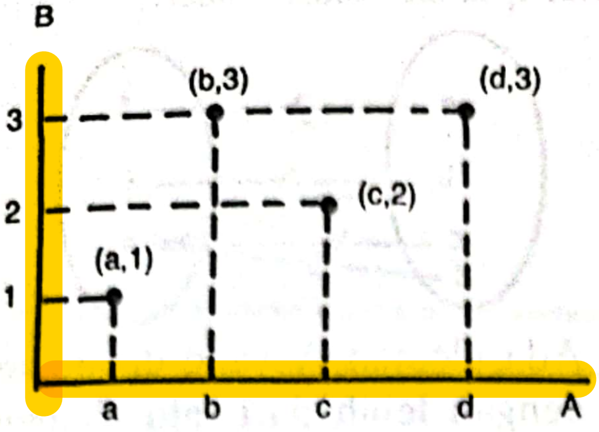
Selanjutnya kita lebih banyak membicarakan fungsi pada himpunan bilangan riil $R^{\#}$ (atau himpunan bagiannya). Fungsi itu disebut fungsi riil. Untuk menyatakan suatu fungsi riil kita dapat mencari rumus (bentuk) umumnya.
Contohnya: pada contoh (4.1c) secara singkat f dapat ditulis: $f(x) = x^2$ atau $y = x^2$. x disebut variabel (perubah) bebas, sedangkan y disebut variabel tak bebas. $f(x) = y$ disebut harga fungsi pada x.

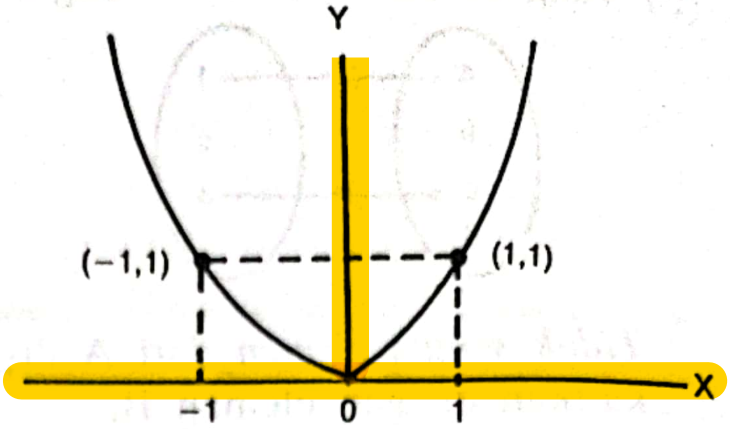
Catatan (2):

Fungsi dapat pula ditulis sebagai himpunan dari pasangan terurut. Contohnya: pada contoh (3.1a) fungsi dapat ditulis $f = \{(a, 1), (b, 3), (c, 2), (d, 3)\}$ dan contoh (3.1c): $f = \{(x, y), y = x^2, x \text{ riil}\}$. Elemen pertama dari pasangan terurut menunjukkan prapeta dan elemen kedua menunjukkan peta.

4.2 Grafik Fungsi, Sistem Koordinat

Suatu fungsi dapat digambar grafiknya dengan cara menggambar pasangan-pasangan terurut dari fungsi tersebut. Grafik fungsi contoh (4.1a), can contoh (4.1c).





Untuk setiap fungsi riil kita biasa menggambarnya dengan menggunakan sistem koordinat CARTESIAN terdiri dari 2 sumbu yang saling tegak lurus. Sumbu mendatar (sumbu X) menyatakan sumbu dari prapeta (sumbu variabel bebas), dan sumbu tegak (sumbu Y) menyatakan sumbu peta (sumbu variabel tak bebas).

4.3 Daerah Definisi dan Daerah Nilai (Domain dan Range)

Pandang suatu fungsi f: A → B. Himpunan A disebut daerah definisi (domain) dari f, ditulis $A = D_f$. Himpunan B disebut codomain dari f. $R_f = \{y | y = f(x),\ x \in A\}$, suatu himpunan bagian dari B, merupakan himpunan semua peta dari f. Himpunan R_f disebut daerah nilai (range) dari fungsi f.

Contoh (4.2):

f: $R^\# \to R^\#$ di mana $x \xrightarrow{f} x^2$. Maka $D_f = R^\#$, sedangkan $R_f = \{y | y \geqslant 0\}$ = himpunan bilangan nonnegatif.

Contoh (4.3):

Diketahui suatu fungsi riil dengan rumus $f(x) = y = \sqrt{1 - x^2}$. Maka $D_f = \{x | 1 - x^2 \geqslant 0\}$ atau interval $-1 \leqslant x \leqslant 1$,

$R_f = \{y | 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, karena harga di bawah tanda akar harus $\geqslant 0$.

Grafik f merupakan setengah lingkaran di atas sumbu X, pusat (0, 0) jari-jari = 1.

4.4 Beberapa Jenis Fungsi Riil

(1) *Fungsi polinom* (suku banyak) mempunyai bentuk:

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ .... (1)

a_i bilangan riil; $a_0 \neq 0$, n bilangan bulat positif. Polinom di atas disebut berderajat n.

Contoh (4.4):

$f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 2x - 8$, adalah polinom berderajat 3. $g(x) = 7x^5 - 8x + 12$, adalah polinom berderajat 5.

(2) *Fungsi Aljabar,* adalah suatu fungsi $y = f(x)$ yang memenuhi persamaan berbentuk: $p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(x)y + p_n(x) = 0$ .... (2) di mana $p_i(x)$ suatu polinom dalam x.

Kalau suatu fungsi aljabar dapat dinyatakan sebagai pembagian 2 polinom, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, ia disebut fungsi *aljabar rasional.*

Dalam hal lain, disebut *fungsi aljabar tak rasional.*

Contoh (4.5):

$f(x) = x^2 - 2x - 24$ ataupun $f(x) = \dfrac{x - 4}{x^3 + 7}$ merupakan fungsi aljabar rasional, sedangkan $f(x) = x + \sqrt{x - x^2}$ adalah fungsi aljabar tidak rasional.

Contoh (4.6):

Tunjukkan bahwa $f(x) = x + \sqrt{x - x^2}$ adalah fungsi aljabar.

Penyelesaian:

$f(x) = y = x + \sqrt{x - x^2} \rightarrow y - x = \sqrt{x - x^2}$, dikuadratkan: $y^2 - 2xy + x^2 = x - x^2 \rightarrow y^2 - 2xy + (2x^2 - x) = 0$ merupakan bentuk (2) di atas. Jadi benar fungsi aljabar.

(3) *Fungsi Transenden,* merupakan fungsi yang bukan fungsi aljabar. Beberapa fungsi transenden yang khusus:

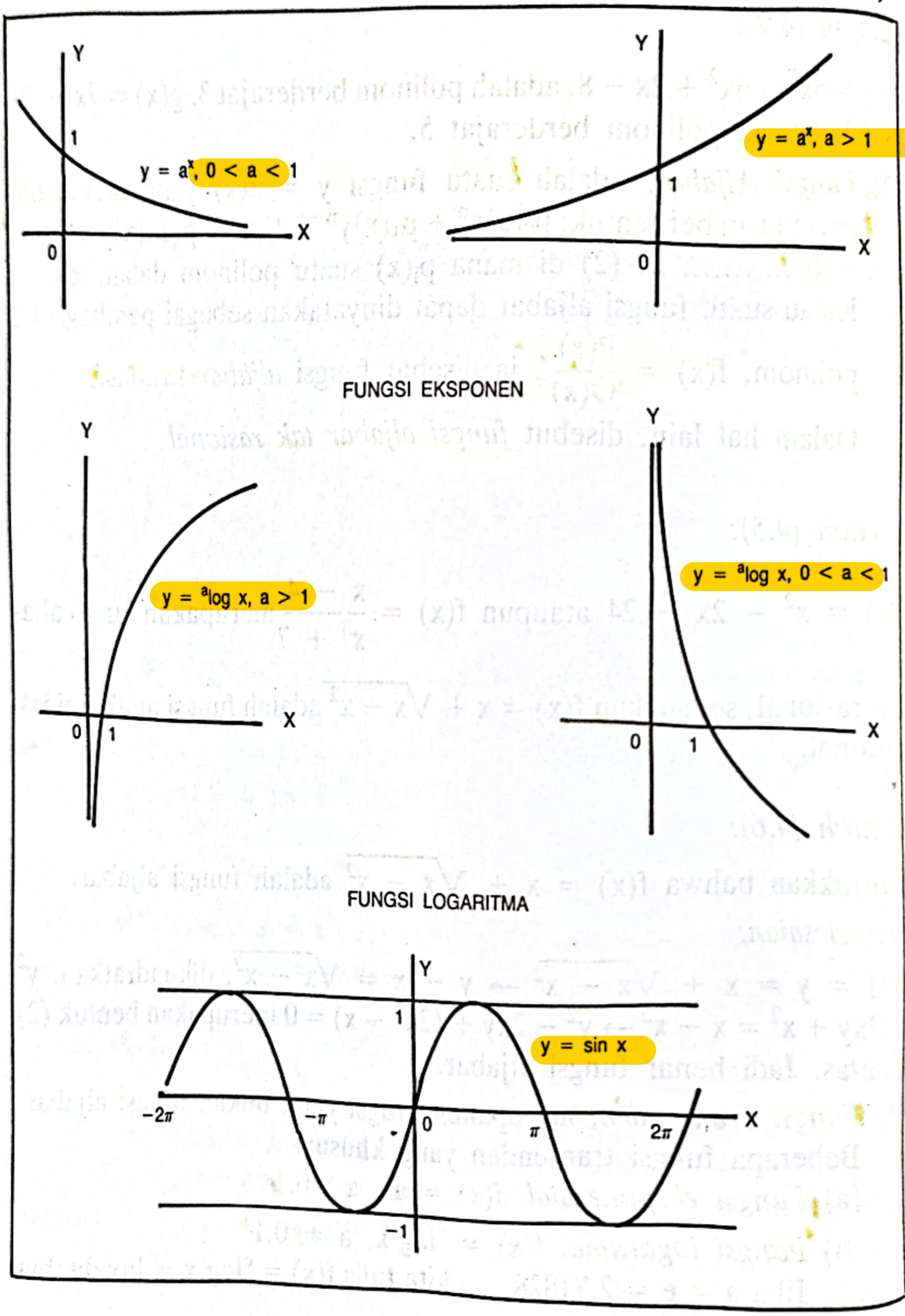
(a) *Fungsi eksponensial:* $f(x) = a^x$, $a \neq 0,1$

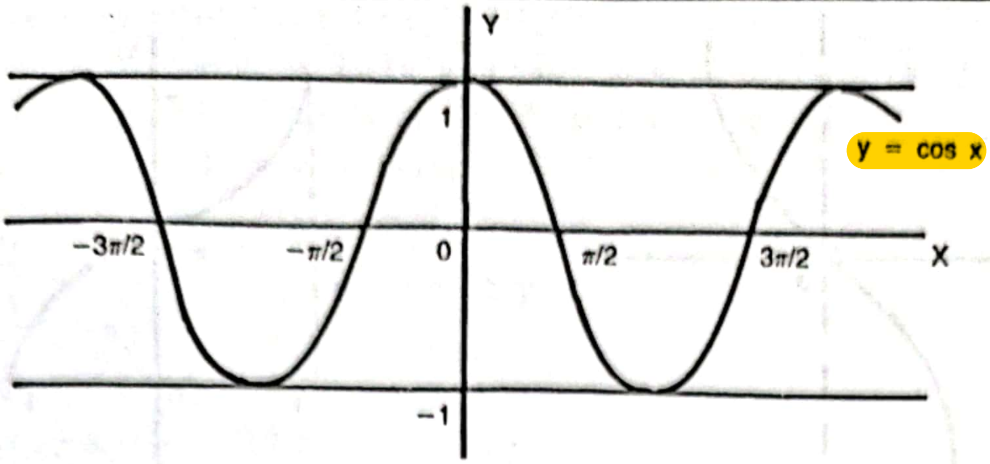
(b) *Fungsi logaritma:* $f(x) = {}^a\log x$, $a \neq 0,1$

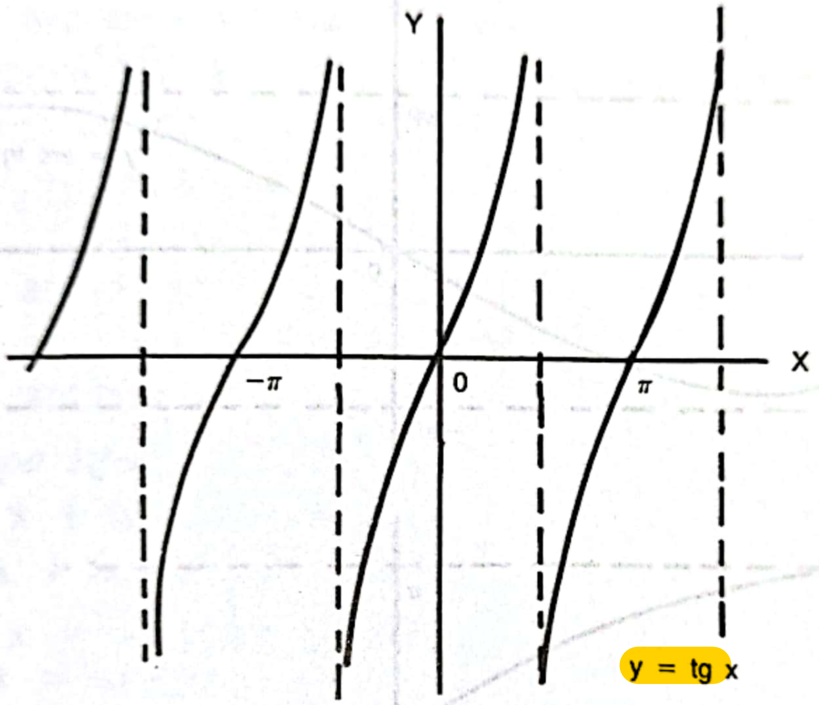
Jika $a = e = 2,71828\ldots$, kita tulis $f(x) = {}^e\log x = \ln x$ disebut logaritma natural dari x. Berlaku hubungan: bila $y = \ln x$ maka $e^y = x$.

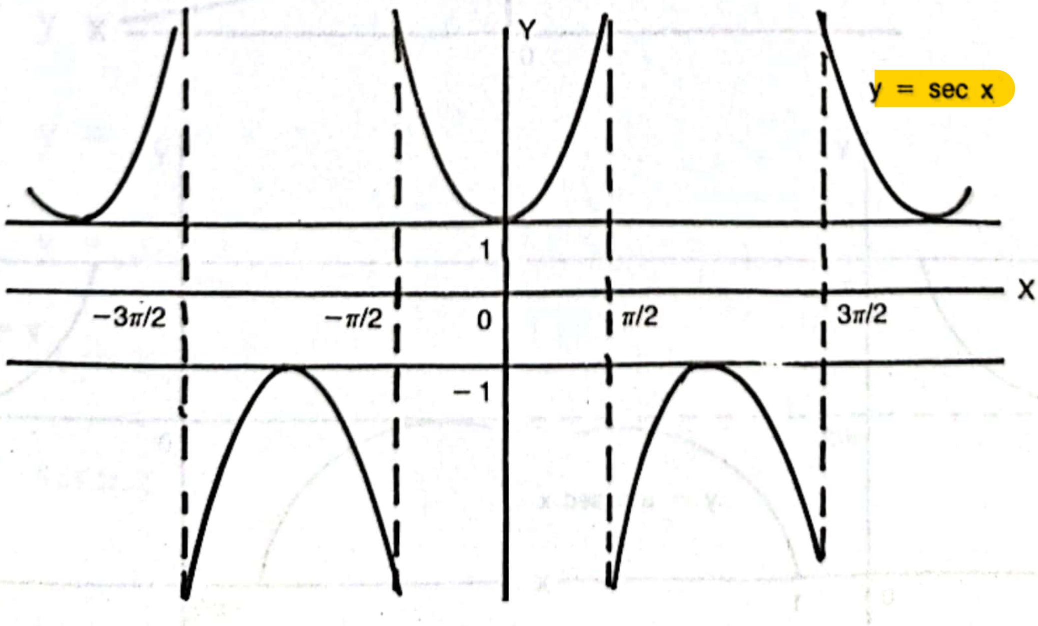
(c) *Fungsi trigonometri:* $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$

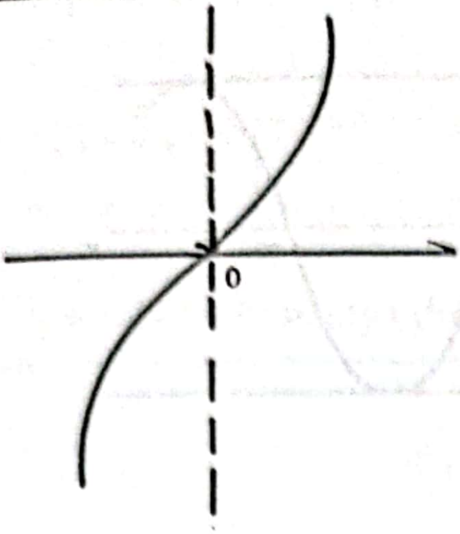
Variabel x biasanya dinyatakan dalam radian (π radian = 180°).

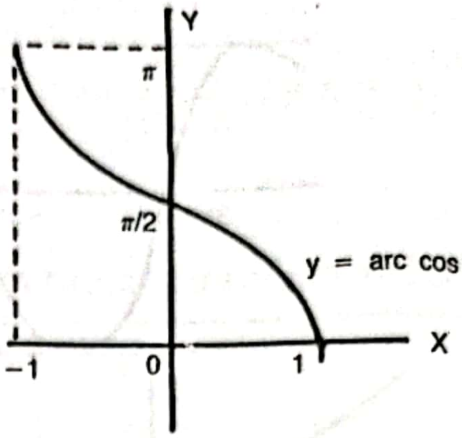


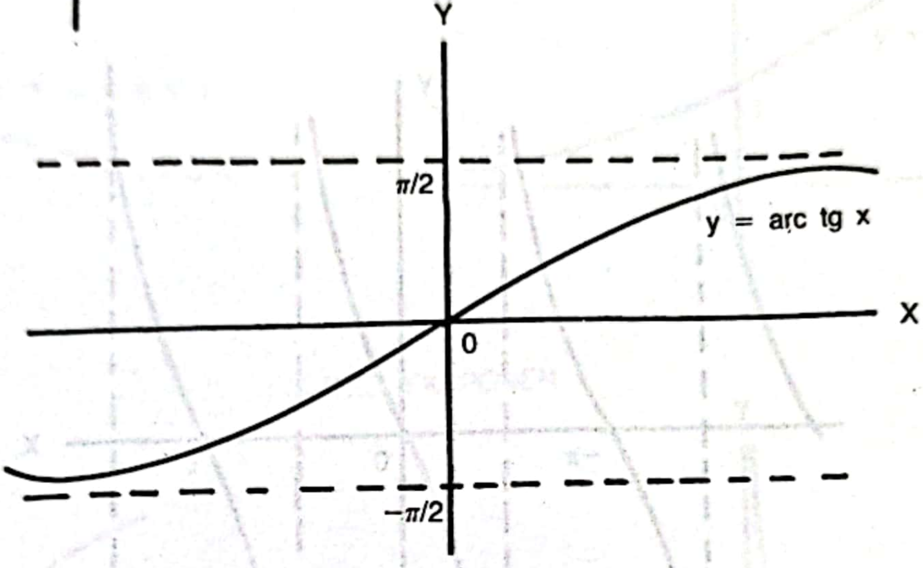

Y
1
$-3\pi/2$
$-\pi/2$
0
$\pi/2$
$3\pi/2$
X
-1
y = cos x

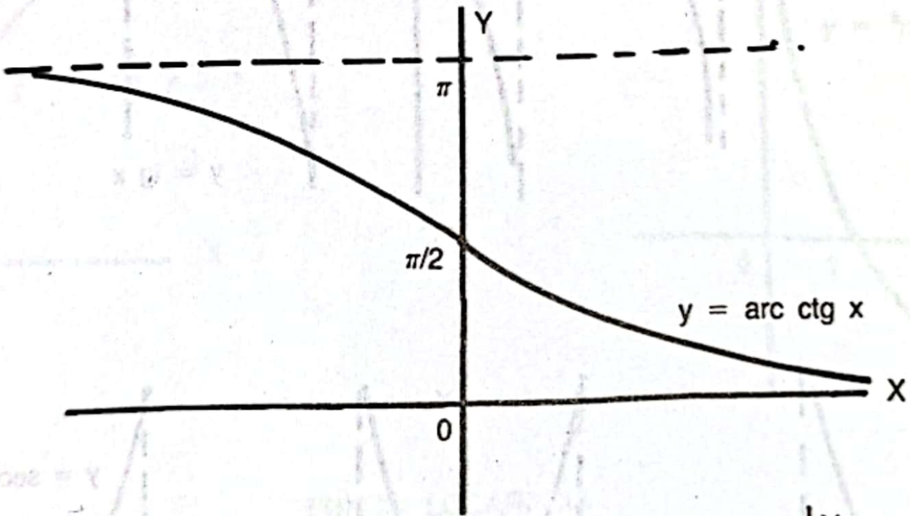

Y
X
$-\pi$
0
π
y = tg x

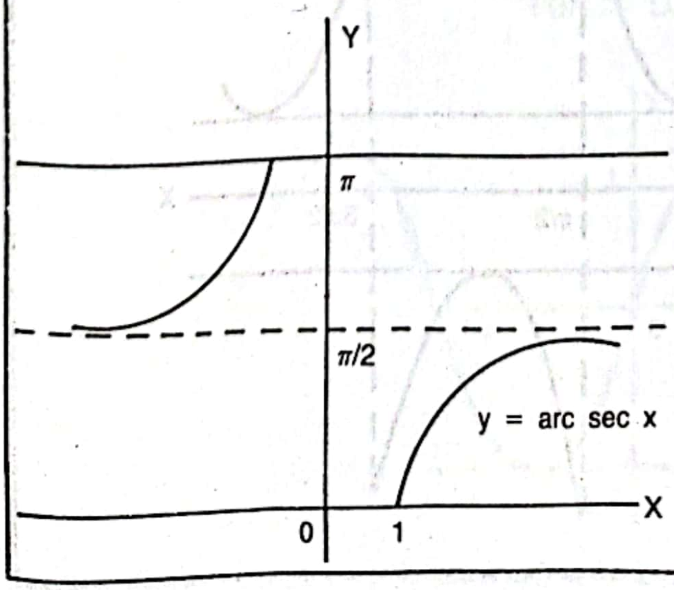

Y
y = sec x
1
X
$-3\pi/2$
$-\pi/2$
0
$\pi/2$
$3\pi/2$
-1

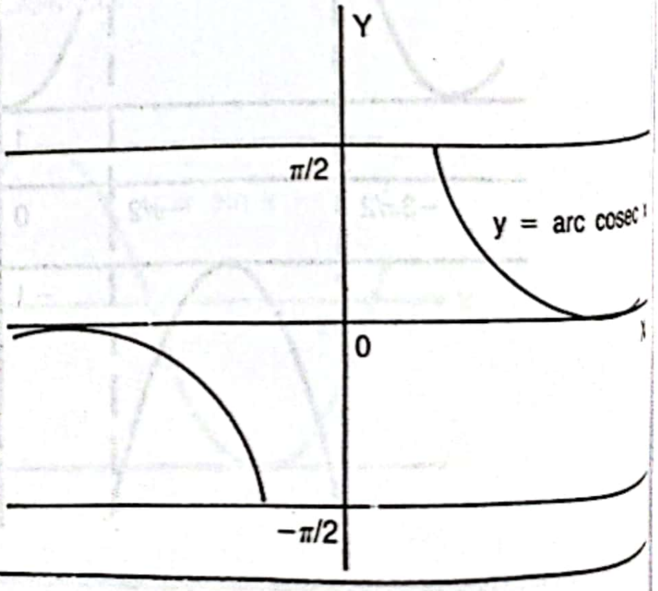

0


Y
π
π/2
y = arc cos x
X
−1
0
1


Y
π/2
y = arc tg x
X
0
−π/2


Y
π
π/2
y = arc ctg x
X
0


Y
π
π/2
y = arc sec x
X
0
1


Y
π/2
0
−π/2

Beberapa sifat dari fungsi trigonometri:

* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\mathrm{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$, $\mathrm{ctg}^2 x + 1 = \mathrm{cosec}^2 x$
* $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
* $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
* $\mathrm{tg}(x \pm y) = \dfrac{\mathrm{tg}\, x \pm \mathrm{tg}\, y}{1 \mp \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y}$
* $\sin(-x) = -\sin x$
* $\cos(-x) = \cos x$
* $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$

(d) *Fungsi siklometri* (fungsi invers trigonometri)

* $y = \arcsin x$ artinya $x = \sin y$
  Sehingga bila $x = ½ \rightarrow y = \arcsin ½ = \pi/6$.
  (Harga utama: $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$).
* $y = \arccos x$ (harga utama $0 \leqslant y \leqslant \pi$)
* $y = \mathrm{arc\,tg}\, x$ (harga utama: $-\pi/2 < y < \pi/2$)
* $y = \mathrm{arc\,ctg}\, x = \pi/2 - \mathrm{arc\,tg}\, x$ $(0 < y < \pi)$
* $y = \mathrm{arc\,sec}\, x = \arccos 1/x$ $(0 \leqslant y \leqslant \pi)$
* $y = \mathrm{arc\,cosec}\, x = \arcsin 1/x$ $(-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2)$

Beberapa sifat:

$\arcsin x + \arccos x = \pi/2$

$\mathrm{arc\,tg}\, x + \mathrm{arc\,cotg}\, x = \pi/2$

$\arcsin x = \arccos\sqrt{1 - x^2}$

$\mathrm{arc\,tg}\, x = \mathrm{arc\,cotg}\, 1/x$

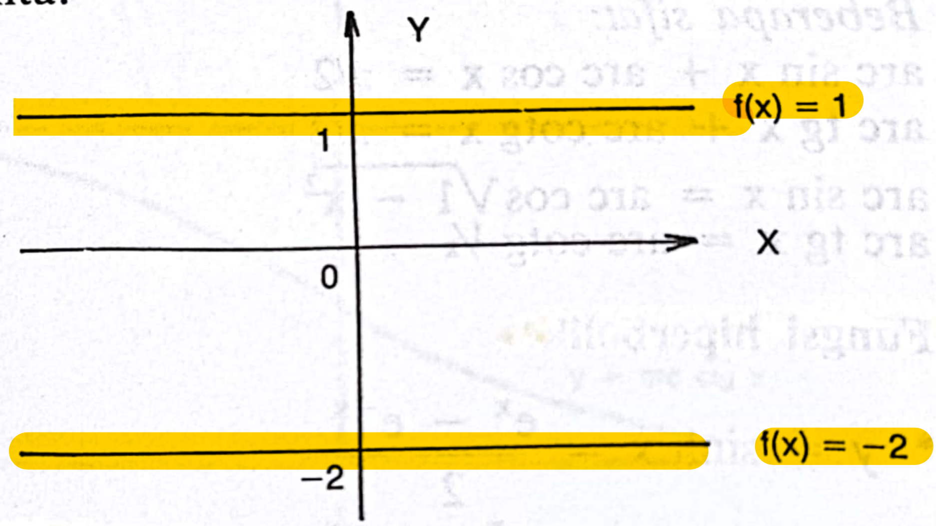
(e) **Fungsi hiperbolik:**

* $y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
* $y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
* $y = \mathrm{tgh}\, x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
* $\mathrm{ctgh}\, x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
* $\mathrm{sech}\, x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$
* $\mathrm{cosech}\, x = \dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

4.5 Beberapa Definisi

Fungsi Konstanta:

Suatu fungsi riil yang berbentuk: $f(x) = k$, untuk x variabel riil, dan k suatu bilangan riil tertentu, disebut suatu fungsi konstanta. Grafik fungsi konstanta, berbentuk garis lurus sejajar sumbu X. Bilangan riil disebut konstanta.



Fungsi Identitas (Kesatuan)

Suatu fungsi riil yang berbentuk $f(x) = x$ untuk x variabel riil, disebut fungsi identitas, ditulis juga $f = I$.

Fungsi Satu-satu (One-one)

Apabila berlaku: bila $x_1 \neq x_2$ maka haruslah $f(x_1) \neq f(x_2)$. (Atau: tidak ada prapeta yang mempunyai peta yang sama).

Contoh (4.6):

$f(x) = 4x$ adalah satu-satu.

Sedangkan $f(x) = x^2$ tidak satu-satu, sebab misalnya untuk $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ berlaku $f(-2) = f(2) = 4$.

Fungsi Pada (Onto)

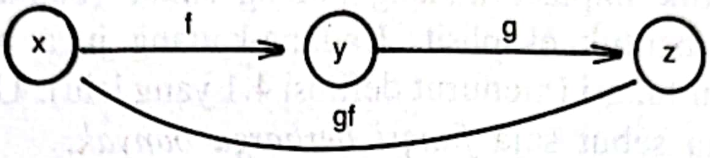
Apabila daerah nilai fungsi (range) R_f sama dengan codomainnya.

Contoh (4.7):

$f : R^{\#} \rightarrow R^{\#}$ di mana $f(x) = -5x$, adalah fungsi pada, tetapi $f(x) = x^2$ tidak, karena $R_f = \{y \mid y \geqslant 0\} \neq R^{\#}$.

Fungsi Komposisi (Tersusun)

Pandang $f : A \rightarrow R_f$ dan $g : R_f \rightarrow C$ di mana:



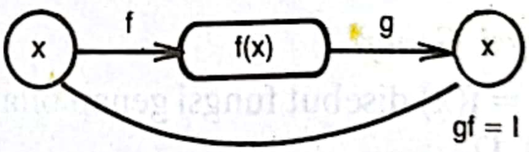
di sini $x \rightarrow z$ oleh suatu fungsi gf, fungsi gf disebut fungsi tersusun (komposisi) dari f dan g.

Contoh (4.8):

$f : x \rightarrow x + 3$, $g : x \rightarrow x^2 - 1$. Maka fungsi komposisi $gf : x \xrightarrow{f} x + 3 \xrightarrow{g} (x + 3)^2 - 1$ atau $gf(x) = (x + 3)^2 - 1$.

Fungsi Invers

Kalau $f : A \rightarrow B$ suatu fungsi yang satu-satu pada; $g : B \rightarrow A$ suatu fungsi sedemikian sehingga:



Dengan perkataan lain: bila komposisi $gf = I$ (fungsi identitas) maka g disebut invers dari f, ditulis $g = f^{-1}$. Hal yang sebaliknya berlaku pula, yaitu f adalah invers dari g. Jadi: $gf = fg = I$.

Catatan (3):

"Satu-satu pada" merupakan syarat perlu dan cukup suatu fungsi untuk mempunyai invers (invertible).

Contoh (4.9):

$y = f(x) = 2x - 4$ suatu fungsi riil. Inversnya dihitung: $y = 2x - 4 \rightarrow 2x = y + 4 \rightarrow x = 1/2y + 2$ atau $f^{-1}(y) = 1/2y + 2$ (boleh juga mengganti simbol y dengan x, $f^{-1}(x) = 1/2x + 2$).

Dapat dicatat bahwa $f(x) = x^2$ tidak punya invers, karena tidak satu-satu pada.

Fungsi Eksplisit, Implisit, Berharga Banyak

Kalau rumus suatu fungsi ditulis dengan y dinyatakan secara langsung oleh x : $y = f(x)$, di mana variabel y dan x terpisah pada ruas kiri dan kanan, maka fungsi disebut berbentuk eksplisit.

Contohnya $y = x^2 + 3x - 2$, $y = -3x^3 + \cos x$, $y = xe^x$ dan lain-lain.

Di dalam hal lain disebut berbentuk implisit.

Contohnya: $yx^2 + 3x = 4$, $\sin(x + y) = e^{-2x2y} + xy$ dan lain-lain.

Suatu bentuk implisit kadang-kadang sukar (bahkan tidak bisa) diubah ke bentuk eksplisit. Kadang-kadang juga bentuk implisit *bukan* suatu fungsi (menurut definisi 4.1 yang lalu). Untuk mempermudah, kita sebut saja *fungsi berharga banyak.*

Contohnya: $3x - 2y^2 + 4 = 0 \rightarrow y^2 = 1\frac{1}{2}x + 2$, bentuk ini bukan fungsi (menurut definisi 4.1), hanya relasi biasa, karena misalnya untuk $x = 4$ menghasilkan $y = \pm\sqrt{8}$.

Bentuk di atas dapat kita sebut fungsi berharga dua. Contoh lain fungsi berharga 2 : $x^2 + y^2 = 9$, $y^2 - 4x^2 = 16$, $y^2 = 4$.

$y = \arcsin x$, adalah fungsi berharga banyak. Untuk $x = \frac{1}{2}$ maka y $\pi/6 + 2k\pi$ serta $y = 5\pi/6 + 2k\pi$. Untuk itu kita batasi nilai dari y dengan apa yang disebut "harga utama", yaitu $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

Fungsi Genap

$y = f(x)$ disebut fungsi genap bila berlaku $f(-x) = f(x)$, untuk setiap $x \in D_f$.

Contoh (4.10):

$y = \cos x$ adalah fungsi genap, karena sifat $\cos(-x) = \cos x$. Contoh lainnya adalah: $y = x^2$, $y = -x^2 + 8$, $y = 1 - x^2$ dan lain-lain. Sedangkan $y = \sin x$, $y = x$, $y = x^3$ dan lain-lain adalah fungsi ganjil. Fungsi $y = 3x + 4$, $y = x^2 + 2x - 1$ ataupun $y = e^{-x}$ merupakan contoh fungsi yang tidak genap dan tidak ganjil.

Fungsi Periodik

$f(x)$ disebut fungsi periodik dengan periode T, jika untuk setiap $x \in D_f$ berlaku $f(x + T) = f(x)$, $T > 0$ konstanta terkecil yang memenuhi.

Contoh (4.11):

$f(x) = \sin x$ periodik, karena $\sin(x + 2\pi) = \sin x = \sin (x + 4\pi) = \sin (x + 6\pi) = \ldots = \sin (x + 2k\pi)$.

$f(x) = \operatorname{tg} x$ adalah fungsi periodik dengan periode π.

Fungsi Terbatas

$f(x)$ disebut terbatas di atas pada suatu interval bila terdapat konstanta M sedemikian sehingga $f(x) \leqslant M$, untuk setiap x pada interval tersebut. Disebut terbatas di bawah bila terdapat konstanta m sedemikian sehingga $f(x) \geqslant m$ untuk setiap x pada interval tersebut.

$f(x)$ disebut terbatas apabila $f(x)$ terbatas di atas dan terbatas di bawah. M disebut batas atas dan m disebut batas bawah.

Contoh (4.12):

$f(x) = 3 + x$ tidak terbatas pada interval $-\infty < x < +\infty$, tetapi terbatas pada interval $-1 \leqslant x \leqslant 1$, misalnya untuk $M = 5$ maka $f(x) < 5$ dan $m = 0$ maka $f(x) > 0$. Jadi 5 adalah suatu batas atas dan 0 suatu batas bawah.

* $f(x) = 1/x$ tidak terbatas pada interval $0 < x < 4$. Ia terbatas di bawah dengan batas bawah misalnya ¼; tetapi tidak terbatas di atas. Untuk $x \to 0$, $f(x)$ menjadi besar sekali, mendekati ∞.

Fungsi Monoton

$f(x)$ disebut naik monoton pada suatu interval jika untuk setiap x_1, x_2 pada interval tersebut dan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Jika $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ maka fungsi disebut turun monoton.

Contoh (4.13):

* $f(x) = 5 + \sqrt{9 - x}$ turun monoton pada $0 \leqslant x \leqslant 9$.

  Kalau $x_1 < x_2$: $f(x_1) = 5 + \sqrt{9 - x_1}$

  $> f(x_2) = 5 + \sqrt{9 - x_2}$

  (bila berlaku: $x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2)$; fungsi itu disebut pula turun langsung).

* $f(x) = 5$ pada interval $0 \leqslant x \leqslant 3$, naik monoton, juga turun monoton tetapi tidak naik maupun turun langsung.