OPERASI MATRIKS DAN TRANSPOSE MATRIKS

3

Objektif :

1. Mahasiswa mampu menghitung penjumlahan dan pengurangan matriks
2. Mahasiswa mampu mengetahui sifat – sifat penjumlahan dan pengurangan matriks
3. Mahasiswa mampu menghitung perkalian matriks
4. Mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahan mengenai transpose matriks dan kesamaan dua matriks
5. Mahasiswa mampu menggunakan scilab untuk operasi dan transpose matriks

---

Pendahuluan

Bab ini membahas matriks beserta operasi aljabarnya. Matriks ditulis sebagai suatu susunan segiempat (*rectangular array*) dari elemen-elemen dimana setiap entrinya memiliki dua subskrip, yang dimana entri adalah masing-masing bilangan dalam matriks dan subskrip merupakan tata penulisan angka atau huruf yang ditempatkan di bawah ketinggian huruf biasa, dan umumnya dalam ukuran lebih kecil dari huruf biasa, seperti $[a_{ij}]$. Berikut ini, penjelasan yang perlu diketahui dari beberapa operasi dan sifat aljabar matriks.

3.1 Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Penjumlahan serta pengurangan dalam matriks hanya dapat dilakukan apabila kedua matriks mempunyai ukuran dan tipe yang sama.

Misal, $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ dua buah matriks dengan ukuran yang sama misalkan matriks m(banyaknya baris) x n(banyaknya kolom). Maka, penjumlahan dan pengurangan matriks A dan B dituliskan sebagai berikut:

$$C = A \pm B \qquad | \qquad [c_{ij}] = [a_{ij}] \pm [b_{ij}].$$

Dimana:

C = matriks hasil penjumlahan A dan B

$\mathrm{i} = 1, 2, 3, \ldots, \mathrm{m}.$

$\mathrm{j} = 1, 2, 3, \ldots, \mathrm{n}.$

Sebagai catatan bahwa jika dua buah matriks mempunyai ukuran yang berbeda, maka elemen yang bersesuaian tidak dapat ditentukan. Penjumlahan matriks terdefinisi jika A dan B mempunyai jumlah baris dan kolom yang sama. Dalam permasalahan ini, matriks A dan B dapat dikatakan "*comformable in addition*" atau saling bersesuaian.

3.2 Sifat-Sifat Penjumlahan dan Pengurangan

Beberapa sifat-sifat dari penjumlahan dan pengurangan adalah sebagai berikut:

1. Komutatif

   $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{B} + \mathrm{A}$

   $\mathrm{E} - \mathrm{F} = -\mathrm{F} + \mathrm{E}$

2. Asosiatif

   $\mathrm{A} + (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = (\mathrm{A} + \mathrm{B}) + \mathrm{C}$

3. Sifat Matriks Nol/Identitas

   $\mathrm{A} + 0 = 0 + \mathrm{A} = \mathrm{A}$

4. $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0 \longrightarrow \mathrm{B} = -\mathrm{A}$
5. $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \mathrm{A} + (-\mathrm{B})$

Bentuk umum dari penjumlahan atau pengurangan matriks adalah sebagai berikut:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ dan } \mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Dengan:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} + b_{11}} & \boxed{a_{12} + b_{12}} & \boxed{a_{13} + b_{13}} \\ \boxed{a_{21} + b_{21}} & \boxed{a_{22} + b_{22}} & \boxed{a_{23} + a_{23}} \end{bmatrix}$$

Contoh Soal:

Diketahui matriks $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ dan $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$. Maka penjumlahan dan pengurangan matriks tersebut adalah…

Jawab:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + (-6) & (-7) + 2 & 4 + 1 \\ 1 + 3 & 5 + (-4) & (-3) + 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -5 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 - (-6) & -7 - 2 & 4 - 1 \\ 1 - 3 & 5 - (-4) & -3 - 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + 6 & -7 - 2 & 4 - 1 \\ 1 - 3 & 5 + 4 & -3 - 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -9 & 3 \\ -2 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

Tuntunan Latihan

Berikut ini diberikan perhitungan operasi dasar matriks pada software Scilab dalam penyelesaian ,dimana diketahui :

Matriks $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ dan Matriks $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 2 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

a) Mendefinisikan matriks A dan B ke dalam Scilab. Caranya mengetikkan langsung pada lembar kerja (console), yaitu:

   A = [5 6 4 ; 7 3 1] lalu tekan enter

   B = [4 1 8 ; 2 9 5] lalu tekan enter

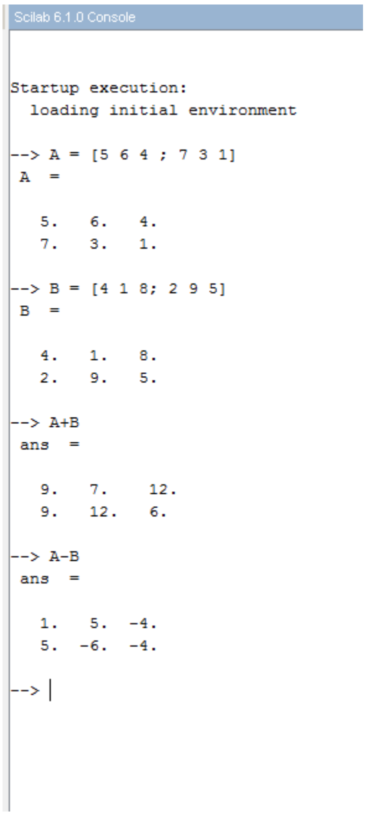
```
Scilab 6.1.0 Console

Startup execution:
  loading initial environment

--> A = [5 6 4 ; 7 3 1]
 A  =

   5.   6.   4.
   7.   3.   1.

--> B = [4 1 8; 2 9 5]
 B  =

   4.   1.   8.
   2.   9.   5.
```

Gambar 2.1 Penulisan pada scilab

b) Operasi penjumlahan dan pengurangan matriks diselesaikan dengan langsung menggunakan operator yang ada pada Scilab dimana :

“ + ” untuk operasi penjumlahan

“ - “ untuk operasi pengurangan



Gambar 2.2 Contoh Penulisan penambahan dan pengurangan pada scilab

Latihan

1. Diketahui matriks $A_{3x2} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B_{3x2} \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 8 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

   Tentukan:

   (a) $B - A$

   (b) $B + A$

2. Tentukan Pengurangan matriks $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ dengan matriks

   $B = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$!

3.3 Perkalian Matriks

Ada dua jenis perkalian matriks yaitu perkalian antara matriks A dengan skalar k, dan perkalian antara matriks A dengan matriks B.

1. Perkalian antara matriks A dengan skalar k akan menghasilkan matriks C yang elemennya merupakan perkalian dari setiap elemen pada matriks A dengan k.

$$C = k\,.\,A = \begin{bmatrix} k.a_{11} & k.a_{12} & k.a_{13} \\ k.a_{21} & k.a_{22} & k.a_{23} \\ k.a_{31} & k.a_{32} & k.a_{33} \end{bmatrix}$$

2. Perkalian antara matriks A yang mempunyai ukuran $m \times n$ dan matriks B yang mempunyai ukuran $n \times l$ akan menghasilkan matriks C dengan ukuran $m \times l$. perkalian antara dua matriks dapat dioperasikan jika banyaknya kolom pada matriks pertama sama dengan banyaknya baris pada matriks kedua.

$$C_{m \times l} = A_{m \times n} \times B_{n \times l}$$

Banyak kolom matriks A = Banyak baris matriks B

Misalkan, matriks $A_{2x2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B_{2x2} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, maka hasil kali matriks A dan matriks B adalah

$$A \times B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a.e + b.g & a.f + b.h \\ c.e + d.g & c.f + d.h \end{bmatrix}$$

Catatan :

- Beberapa hukum perkalian skalar. Jika matriks A dan B berukuran sama, α dan β skalar yang berupa bilangan real, maka berlaku :
  a. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (Sifat Distributif)
  b. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

c. $\alpha(\beta.A) = (\alpha.\beta)A$ (Sifat Asosiatif)

d. 1A = A

- Beberapa hukum pada perkalian matriks dengan matriks. Jika A, B dan C adalah matriks-matriks yang memenuhi syarat-syarat perkalian matriks, maka berlaku :

  a. $A(B + C) = AB + AC;\ (B + C)A = BA + CA$ (Sifat Distributif)

  b. $A(BC) = (AB)C$ (Sifat Asosiatif)

  c. $AB \neq BA$ (Tidak Komutatif)

  d. Jika $AB = AC$ belum tentu $B = C$

Contoh Soal:

3.3.1. Diketahui skalar α = 2, dan matriks A adalah $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$. Hasil dari $\alpha.A$ adalah…

Jawab:

$$\alpha.A = 2.\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\,.\,1 & 2\,.-5 \\ 2\,.\,3 & 2\,.\,8 \\ 2\,.-2 & 2\,.-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 6 & 16 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$$

3.3.2 Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ dan matriks B = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Tentukanlah matriks AB!

Jawab:

$A_{2x3}\ x\ B_{3x2} = C_{2x2}$

Artinya hasil kali matriks A dan matriks B adalah matriks berordo 2x2.

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1).3 + 3.(-1) + 2.(-2) & (-1).0 + 3.2 + 2.1 \\ 6.3 + 7.(-1) + 5.(-2) & 6.0 + 7.2 + 5.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 1 & 19 \end{bmatrix}$$

3.4 Transpose Matriks

Transpose dari matriks A yang dinotasikan dengan A' atau A^T merupakan matriks yang diperoleh dengan mengubah letak elemen pada setiap baris menjadi elemen kolom matriks. Baris pertama matriks A menjadi kolom pertama dari matriks A^T dan baris kedua matriks A menjadi kolom kedua dari matriks A^T. Misalkan $A = (a_{ij})$ berukuran $(m \times n)$ maka transpose dari A adalah matriks A^T berukuran $(n \times m)$ dengan $A^T = (a_{ji})$

Contoh :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A^t} = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$$

Catatan :

Beberapa sifat pada matriks transpose yaitu :

a. $(A+B)^T = A^T + B^T$
b. $(A\,B)^T = B^T A^T$
c. $\lambda(A^T) = (\lambda A)^T$
d. $(A\,B)^T = B^T A^T$

Contoh Soal:

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

Tentukan:

a. $(3A - 2B)^T$
b. $B^T A$

Jawab:

a. $(3A - 2B)^T$

$$3A - 2B = \begin{bmatrix} 3.2 & 3.(-7) & 3.4 \\ 3.1 & 3.5 & 3.(-3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.(-6) & 2.2 & 2.1 \\ 2.3 & 2.(-4) & 2.6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -21 & 12 \\ 3 & 15 & -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 & 4 & 2 \\ 6 & -8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-(-12) & (-21)-4 & 12-2 \\ 3-6 & 15-(-8) & -9-12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6+12 & (-21)-4 & 12-2 \\ 3-6 & 15+8 & -9-12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & -25 & 10 \\ -3 & 23 & -21 \end{bmatrix}$$

$$(3A - 2B)^{T} = \begin{bmatrix} 18 & -3 \\ -25 & 23 \\ 10 & -21 \end{bmatrix}$$

b. $B^{T}A$

$$B^{T} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B^{T}A = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B^{T}A = \begin{bmatrix} (-6.2)+(3.1) & (-6.-7)+(3.5) & (-6.\ 4)+(3.\ -3) \\ (2.2)+(-4.1) & (2.-7)+(-4.5) & (2.\ 4)+(-4.\ -3) \\ (1.\ 2)+(6.1) & (1.-7)+(6.\ 5) & (1.\ 4\ )+(6.\ -3) \end{bmatrix}$$

$$B^{T}A = \begin{bmatrix} -12+3 & 42+15 & -24+(-9) \\ 4+(-4) & -14+(-20) & 8+(12) \\ 2+6 & -7+30 & 4+(-18) \end{bmatrix}$$

$$B^{T}A = \begin{bmatrix} -9 & 57 & -33 \\ 0 & -34 & 20 \\ 8 & 23 & -14 \end{bmatrix}$$

3.5 Kesamaan Dua Matriks

Kesamaan pada dua matriks dapat terjadi apabila memenuhi beberapa syarat ketentuan yang berlaku. Adapun syarat dua buah matriks dinyatakan sama yaitu meliputi:

(i) Memiliki ordo yang sama.

(ii) Setiap pasangan elemen-elemen yang seletak adalah sama.

Dalam materi kesamaan dua matriks terdapat masalah seperti penyelesaian bentuk aljabar, baik berupa sistem persamaan linear, aljabar sederhana, persamaan kuadrat dan lain lain. Untuk itu contoh soal kesamaan dua matriks dapat diselesaikan dengan menyamakan komponen-komponen yang seletak dan mengeluarkannya dari matriks, setelah itu selesaikan dengan aljabar.

Pada umumnya rangkuman materi kesamaan dua matriks ini berkaitan dengan operasi matriks. Dalam hal ini pengoperasiannya berawal dari sebelah kiri ke kanan matriks. Agar anda lebih paham mengenai materi kesamaan dua matriks tersebut, maka perhatikan contoh soal berikut.

Contoh Soal:

2.6.1 Sebuah matriks C berordo 2 x 2 memenuhi persamaan berikut ini.

$$\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} + 2C = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Tentukanlah matriks C!

Jawab:

$$\begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} + 2C = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$2C = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2C = \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

2.6.2 Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} x + 2y & -1 \\ 2 & y \\ 1 & x - y + 2z \end{bmatrix}$, matriks B = $\begin{bmatrix} 7 & 2x - y \\ 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

Jika A = B, maka tentukanlah nilai x, y, dan z!

Jawab:

$$A = B$$

$$\begin{bmatrix} x+2y & -1 \\ 2 & y \\ 1 & x-y+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2x-y \\ 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan tersebut, diperoleh:

- $x + 2y = 7$
- $2x - y = -1$
- $y = 3$
- $x - y + 2z = 8$

karena $y = 3$, maka substitusi ke $x + 2y = 7$. Sehingga diperoleh,

$x + 2 . 3 = 7$

$x = 7 - 6$

$x = 1$

untuk mencari nilai z, maka

$x - y + 2z = 8$

$1 - 3 + 2z = 8$

$-2 + 2z = 8$

$2z = 10$

$z = 5$

jadi, nilai x, y, dan z adalah {1, 3, 5}

Tuntunan Latihan

A. Berikut ini diberikan perhitungan operasi dasar matriks pada software Scilab dalam penyelesaian

Dimana diketahui :

matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

(a) Mendefinisikan matriks A dan B ke dalam lembar kerja Scilab.

Scilab 6.1.0 Console

```
Startup execution:
  loading initial environment

--> A = [2 -7 4; 1 5 -3]
 A  =

   2.  -7.   4.
   1.   5.  -3.

--> B = [-6 2 1; 3 -4 6]
 B  =

  -6.   2.   1.
   3.  -4.   6.

-->
```

Gambar 2.3 Penulisan Pada Lembar Kerja Scilab

(b) Mendefinisikan matriks A dan B ke dalam lembar kerja Scilab.

```
Scilab 6.1.0 Console


Startup execution:
  loading initial environment

--> A = [2 -7 4; 1 5 -3]
 A  =

   2.  -7.   4.
   1.   5.  -3.

--> B = [-6 2 1; 3 -4 6]
 B  =

  -6.   2.   1.
   3.  -4.   6.

-->
```

Gambar 2.4 Penulisan Pada Lembar Kerja Scilab

(c) Operasi perkalian matriks dan transpose matriks diselesaikan dengan langsung menggunakan operator yang ada pada Scilab dimana :

" * "untuk operasi perkalian

" ' "untuk transpose matriks

```
Scilab 6.1.0 Console

Startup execution:
  loading initial environment

--> A = [2 -7 4; 1 5 -3]
 A  =

   2.  -7.   4.
   1.   5.  -3.

--> B = [-6 2 1; 3 -4 6]
 B  =

  -6.   2.   1.
   3.  -4.   6.

--> 3*A - 2*B
 ans  =

   18.  -25.   10.
  -3.    23.  -21.

--> B' *A
 ans  =

  -9.   57.  -33.
   0.  -34.   20.
   8.   23.  -14.
```

Gambar 2.5 Contoh Soal Perkalian dan Transpose

Latihan

Diketahui matriks $A_{3x2} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B_{3x2} = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Tentukan :

a. B + (-2)A
b. 3A – 2B
c. B’A

Rangkuman

1. $A_{m \, x \, n}$

Banyak Baris matriks A | Banyak Kolom matriks A

2. Menentukan penjumlahan matriks menggunakan rumus:

$$A_{mxn} + B_{mxn} = C_{mxn} \text{ dimana } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

3. Menentukan pengurangan matriks menggunakan rumus:

$$A_{mxn} - B_{mxn} = D_{mxn} \text{ dimana } d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

4. Menentukan perkalian skalar matriks menggunakan rumus :

   $\lambda \, . \, A_{mxn}$=[λa_{ij}] dimana λ adalah scalar

5. Jika matriks $A_{2x2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B_{2x2} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, maka rumus hasil kali matriks A dan matriks B adalah

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a.e + b.g & a.f + b.h \\ c.e + d.g & c.f + d.h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6. Transpose matriks A = (a_{ij}) didefinisikan dengan bentuk :

   A^T= (a_{ji}), dengan mengubah letak elemen pada setiap baris A menjadi elemen pada kolom matriks A^T.

7. Kesamaan dua matriks dapat diperoleh jika memiliki ordo yang sama dan setiap pasangan elemen-elemen yang seletak adalah sama.

Referensi

H.S., Suryadi. *Pengantar Aljabar Linier dan Geometri Analitik.* Jakarta: Gunadarma, 1996.

Kartika, Hendra. *Aljabar Matrik (Teori dan Aplikasinya dengan Scilab).* Yogyakarta: Deepublish, 2017.

Seymour Lipschutz, Marc Lipson. *Aljabar Linear Schaum Outlines.* Ketiga. Jakarta: Erlangga, 2004.

Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S., Agus S. *Matematika Dasar Perguruan Tinggi.* Bogor: Ghalia-Indonesia, 2011.