SISTEM PERSAMAAN LINEAR

6

Objektif :

1. Mahasiswa mampu mengenal dan mencari solusi dari persamaan linear
2. Mahasiswa mampu mengenal dan mencari solusi dari sistem persamaan linear
3. Mahasiswa mampu mengenal persamaan matriks dari sistem persamaan linear
4. Mahasiswa mampu mengenal dan menyelesaikan sistem persamaan linear dengan Aturan Cramer
5. Mahasiswa mampu menyelesaikan aturan cramer menggunakan scilab

---

Pendahuluan

Sistem persamaan linear memiliki peranan penting dan menarik dalam bidang aljabar linear dan ditemukan hampir di semua cabang ilmu pengetahuan. Bahkan dalam kehidupan sehari kita dihadapkan dalam permasalahan sistem persamaan linear. Misalnya ketika membeli tiga kilo jeruk dan satu kilo mangga dengan harga total Rp 55.000, maka hal tersebut sudah dihadapkan pada persoalan dalam menyelesaikan suatu kasus persamaan linear. Jadi, teknik-teknik yang diperkenalkan dalam bab ini dapat diterapkan untuk menjabarkan ide-ide abstrak yang akan diperkenalkan kemudian.

Seluruh sistem persamaan linear melibatkan skalar-skalar, baik sebagai koefisien maupun sebagai konstanta, dan skalar-skalar tersebut dapat berasal dari sebarang bilangan. Secara umum, seluruh skalar tersebut adalah bilangan-bilangan real.

6.1 Persamaan Linear

Persamaan linear adalah sebuah persamaan aljabar, yang tiap sukunya mengandung konstanta, atau perkalian konstanta dengan variabel tunggal. Persamaan ini dikatakan linear sebab hubungan matematis ini dapat digambarkan sebagai garis lurus dalam Sistem koordinat Kartesius.

Secara umum sebuah persamaan linear dengan n variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dapat dituliskan sebagai suatu persamaan linear dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b \qquad (6.1)$$

Dengan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ adalah koefisien dari variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dan b konstanta real.

Solusi persamaan linear adalah sejumlah nilai untuk variable-variabel yang tidak diketahui. Solusi dalam persamaan linear bisa tunggal maupun banyak solusi. Dalam soal-soal , kita biasanya menggunakan x, y untuk dua variable tidak diketahui dan x, y, z untuk tiga variable tidak diketahui, dan seterusnya.

Contoh: perhatikan persamaan linear dengan tiga variabel tidak diketahui berikut ini.

$$x + 2y - 3z = 6$$

kita mengetahui bahwa $x = 5, y = 2, z = 1$ atau vektor $u = (5, 2, 1)$ adalah solusi persamaan tersebut. Sehingga, benar bahwa

$$\begin{aligned} 5 + 2(2) - 3(1) &= 5 + 4 - 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Di lain pihak, $w = (1, 2, 3)$ bukanlah solusi persamaan, karena ketika kita mensubstitusikannya, kita tidak mendapatkan pernyataan yang benar.

$$1 + 2(2) - 3(3) = -4 \qquad \text{(tidak memenuhi karena -4} \neq 6)$$

Solusi persamaan linear pada soal ini adalah banyak (tak hingga dalam bilangan real), dan bisa dilakukan dengan cara coba-coba yang nilai-nilainya memenuhi persamaan tersebut.

6.2 Sistem Persamaan Linear

Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan linear dengan variabel-variabel yang tidak diketahui. Secara umum sistem persamaan linear dapat ditulis dalam bentuk $AX = B$, dengan $A = a_{mn}$ adalah matriks koefisien, $X = x_n$ adalah vektor kolom dari variabel-variabel tidak diketahui, dan $B = b_n$ adalah vektor kolom dari konstanta.

Secara khusus, sistem persamaan linear yang terdiri dari m persamaan dengan n variabel yang tidak diketahui dapat disusun dalam bentuk berikut.

$$\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nn}\,x_n = b_n \end{array} \qquad (6.2)$$

Dimana a_{ij} dan b_i adalah konstanta. Huruf a_{ij} adalah koefisien dari variable tidak diketahui x_j, dan bilangan b_i adalah konstanta tetap.

Sistem persamaan linear di atas disebut sistem bujusangkar jika m = n, yaitu jika banyaknya persamaan m sama dengan banyaknya variable tidak diketahui n. sistem tersebut disebut **homogen** jika semua suku konstantanya adalah nol, yaitu jika $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, … , $b_m = 0$. Jika tidak, maka sistem itu disebut sistem **nonhomogen**. Himpunan semua solusi sistem tersebut disebut sebagai himpunan solusi/penyelesaian dari sistem tersebut.

Contoh:

1. Perhatikan sistem persamaan berikut ini

   $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 19$

   $x_1 - 3x_2 + x_3 = -6$

   Tentukan apakah: a. $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, dan $x_3 = -2$

   b. $x_1 = 8$, $x_2 = -6$, dan $x_3 = -3$

   merupakan solusi dari system tersebut?

Jawab:

a. Substitusikan nilai-nilai $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, dan $x_3 = -2$ ke dalam sistem persamaan tersebut. Sehingga diperoleh,

   2(5) + 3 – 3(-2) = 19 (memenuhi)

   5 – 3(3) + (-2) = -6 (memenuhi)

   Jadi, $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, dan $x_3 = -2$ merupakan solusi dari sistem persamaan tersebut.

b. Substitusikan nilai-nilai $x_1 = 8$, $x_2 = -6$, dan $x_3 = -3$ ke dalam sistem persamaan tersebut. Sehingga diperoleh,

   2(8) + (-6) – 3(-3) = 19 (memenuhi)

8 – 3(-6) + (-3) = 23 ≠ -6 (tidak memenuhi)

karena x_1= 8, x_2 = -6, dan x_3 = -3 hanya memenuhi pada persamaan pertama, maka bukan merupakan solusi dari sistem persamaan tersebut.

2. Tentukan solusi dari sistem persamaan berikut ini:

$2x + 3y = -1$ ……. (1)

$x - 4y = 16$ ……. (2)

Jawab:

Sistem persamaan pada soal ini merupakan sistem persamaan linear dua variabel karena mempunyai 2 variabel yaitu x dan y.

- Eliminasi persamaan (1) dan (2)

$$\begin{array}{rl|c|l} 2x + 3y = -1 & & \times 1 & 2x + 3y = -1 \\ x - 4y = 16 & & \times 2 & \underline{2x - 8y = 32} \; - \\ & & & 11y = -33 \\ & & & y = -3 \end{array}$$

- Substitusi nilai y = -3 ke persamaan (1), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 2x + 3(-3) &= -1 \\ 2x - 9 &= -1 \\ 2x &= -1 + 9 \\ 2x &= 8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Jadi, solusi dari sistem persamaan tersebut adalah {4,3}

3. Tentukan solusi dari sistem persamaan berikut ini:

$x + 2y + 3z = 11$ ……. (1)

$2x - y + 2z = -1$ ……. (2)

$x + 3y + z = 10$ ……. (3)

Jawab:

Sistem persamaan pada soal ini merupakan sistem persamaan linear tiga variabel karena mempunyai 3 variabel yaitu x, y, dan z.

- Eliminasi persamaan (1) dan (2)

$$\begin{array}{l|c|l} x + 2y + 3z = 11 & \times 2 & 2x + 4y + 6z = 22 \\ 2x - y + 2z = -1 & \times 1 & \underline{2x - y + 2z = -1} \; - \\ & & 5y + 4z = 23 \quad \text{……. (4)} \end{array}$$

- Eliminasi persamaan (1) dan (3)

$$\begin{array}{rl} x + 2y + 3z &= 11 \\ \underline{x + 3y + z} &\underline{= 10} \;- \\ -y + 2z &= 1 \qquad \ldots\ldots\text{(5)} \end{array}$$

- Eliminasi persamaan (4) dan (5)

$$\begin{array}{rl|c|rl} 5y + 4z &= 23 & x1 & 5y + 4z &= 23 \\ -y + 2z &= 1 & x2 & \underline{-2y + 4z} &\underline{= 2} \;- \\ & & & 7y &= 21 \\ & & & y &= 3 \end{array}$$

- Substitusi $y = 3$ ke persamaan (5), sehingga diperoleh

$$\begin{array}{rl} -3 + 2z &= 1 \\ 2z &= 1 + 3 \\ 2z &= 4 \\ z &= 4 \end{array}$$

- Substitusi $y = 3$ dan $z = 2$ ke persamaan (1)

$$\begin{array}{rl} x + 2(3) + 3(2) &= 11 \\ x + 6 + 6 &= 11 \\ x + 12 &= 11 \\ x &= -1 \end{array}$$

Jadi, solusi dari system persamaan tersebut adalah $\{-1, 3, 2\}$

6.3 Persamaan Matriks dari Sistem Persamaan Linear

Sistem persamaan pada (6.2) yang terdiri dari m persamaan linear dengan n variable todak diketahui, ekuivalen dengan persamaan matriks berikut.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ atau } AX = B \qquad (6.3)$$

Dimana $A = [a_{ij}]$ adalah matriks koefisien, $X = [x_j]$ adalah vektor kolom dari variabel-variabel tidak diketahui, dan $B = [b_i]$ adalah vektor kolom dari konstanta.

Pernyataan bahwa sistem persamaan linear dan matriks adalah ekuivalen berarti bahwa sebarang solusi vektor dari system persamaan linear adalah solusi dari persamaan matriks, dan sebaliknya.

Contoh:

Sistem persamaan linear dan persamaan matriks berikut ini ekuivalen:

$$x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 4$$
$$3x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 8x_4 = 8$$
$$4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 11$$

dan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 3 & -5 & 6 & -8 \\ 4 & -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Dapat diperhatikan bahwa x_1= 3, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 1, atau dengan kata lain, vektor u [3, 1, 2, 1] adalah solusi dari system. Maka vektor (kolom) u juga merupakan solusi dari persamaan matriks.

6.4 Aturan Cramer

Aturan Cramer didasarkan atas perhitungan determinan matriks. Aturan Cramer merupakan metode untuk menyelesaikan persamaan linear dengan koefisien matriks yang invertible atau hasil perhitungan det(A) ≠ 0. Penyelesaian yang di dapatkan dengan metode ini adalah penyelesaian tunggal. Metode ini diperkenalkan pada tahun 1750 oleh ahli matematika Swiss yang bernama Gabriel Cramer.

Aturan Cramer merupakan salah satu cara untuk menentukan solusi dari sistem persamaan linear n variable. Perhatikan system AX = B yang terdiri dari n persamaan linear dengan n variable tidak diketahui. Disini A = [a_{ij}] adalah matriks koefisien (bujursangkar) dan B = [b_i] adalah vektor kolom yang berisi konstanta.

Secara umum, sistem persamaan linear n variable dapat ditulis seperti berikut ini.

$$\begin{aligned} &a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ &a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ &\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nn}\,x_n = b_n \end{aligned}$$

Misalkan A_i adalah matriks yang diperoleh dari A melalui penggantian kolom ke-i dari A dengan vektor kolom B. Maka dapat diperoleh solusi unik dari sistem (bujursangkar) $AX = B$ jika dan hanya jika D ≠ 0 yaitu:

$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$ atau $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$

dimana, i = 1, 2, 3, …, n

det (A_i) = Determinan dari matriks A yang kolom ke-i diganti dengan elemen-elemen matriks B

Contoh:

Gunakan Aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan berikut.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 12 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 3x - y + z &= 11 \end{aligned}$$

Jawab:

Langkah 1. Ubah persamaan diatas menjadi sebuah matriks A_{3x3} dengan cara mengambil koefisien yang di depan variabel x, y, z lalu susun menjadi tiga baris dan tiga kolom menggunakan persamaan $AX = B$ seperti berikut.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Langkah 2. Menentukan nilai determinan A atau det (A) dengan cara menambahkan kolom 1 dan 2 ke sebelah kanan. Lalu buat tanda panah dengan arah diagonal ke kanan dan dikurangkan dengan diagonal kiri.

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right.$$

= {(2x2x1) + (1x-1x3) + (1x1x-1)} – {(1x2x3) + (2x-1x-1) + (1x1x1)}

= (4 – 3 – 1) – (6 + 2 +1)

= 0 – 9

= -9

Langkah 3. Menentukan det (A_x), det (A_y), dan det (A_z). det (A_x) adalah determinan dari matriks A yang kolom pertama diganti dengan elemen-elemen matriks B. det (A_y) adalah determinan dari matriks A yang kolom kedua diganti dengan elemen-elemen matriks B. det (A_z) adalah determinan dari matriks A yang kolom ketiga diganti dengan elemen-elemen matriks B. Sehingga diperoleh,

det (A_X) = $\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 11 & -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 12 & 1 \\ 3 & 2 \\ 11 & -1 \end{matrix}$

= {(12x2x1) + (1x-1x11) + (1x3x-1)} – {(1x2x11) + (12x-1x-1) + (1x3x1)}

= (24 – 11 -3) – (22 + 12 + 3)

= 10 – 37

= -27

det (A_Y) = $\begin{vmatrix} 2 & 12 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 11 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 12 \\ 1 & 3 \\ 3 & 11 \end{matrix}$

= {(2x3x1) + (12 x -1 x 3) + (1x1x11)- {(1x3x3) + (2x-1x11) + (12x1x1)}

= (6 – 36 + 11) – (9 – 22 + 12)

= -19 – (-1)

= -18

det (A_Z) = $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 11 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{matrix}$

= {(2x2x11) + (1x3x3) + (12x1x-1)} – {(12x2x3) + (2x3x-1) + (1x1x11)}

= (44 + 9 – 12) – (72 – 6 + 11)

= 41 – 77

= -36

Langkah 4. Menentukan nilai x, y, dan z menggunakan rumus berikut.

$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-27}{-9} = 3$

$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{-18}{-9} = 2$

$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{-36}{-9} = 4$

Jadi, himpunan penyelesaian dari sistem persamaan tersebut adalah {3, 2, 4}

Contoh:

Gunakan Aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan AX = B dengan

$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ serta $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,

Jawab:

- Definisikan bentuk soal

  AX = B

  $$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Menghitung determinan dari matriks A untuk menentukan apakah Aturan Cramer dapat di terapkan dalam penyelesaian sistem persamaan tersebut.

  $$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 2 \end{matrix}$$

  $\det(\mathrm{A})$ = ((3×6×1) + (4×5×4) + (5×3×2)) – ((5×6×4) + (3×5×2) + (4×3×1))

  = -34

  Karena $(\mathrm{A}) \neq 0$, maka dapat digunakan Aturan Cramer.

- Hitung $\det(\mathrm{A}_1), \det(\mathrm{A}_2), \text{dan} \det(\mathrm{A}_3)$.

  $$\det(\mathrm{A}_1) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{matrix}$$

  $$= ((1 \times 6 \times 1) + \left(4 \times 5 \times (-1)\right) + (5 \times 1 \times 2)\big) -$$

  $$\Big(\big(5 \times 6 \times (-1)\big) + (1 \times 5 \times 2) + (4 \times 1 \times 1)\Big)$$

  $$= (6 - 20 + 10) - \big((-30) + 10 + 4\big)$$

  $$= 12$$

  $$\det(\mathrm{A}_2) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{matrix}$$

  $$= ((3 \times 1 \times 1) + \big(5 \times 1 \times 4) + (5 \times 3 \times (-1)\big) -$$

  $$\Big((5 \times 1 \times 4) + \big(3 \times 5 \times (-1)\big) + (1 \times 3 \times 1)\Big)$$

  $$= (3 + 20 - 15) - (20 - 15 + 3)$$

  $$= 0$$

  $$\det(\mathrm{A}_3) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 2 \end{matrix}$$

  $$= (\big(3 \times 6 \times (-1)\big) + \big(4 \times 1 \times 4) + (1 \times 3 \times 2)\big) -$$

  $$((1 \times 6 \times 4) + (3 \times 1 \times 2) + (4 \times 3 \times (-1)))$$

  $$= (-18 + 16 + 6) - (24 + 6 - 12)$$

  $$= 14$$

Jadi nilai untuk x_1, x_2, dan x_3 adalah:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{12}{-34} = -\frac{6}{17}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{0}{-34} = 0,$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-14}{-34} = \frac{7}{17}$$

Sehingga,

$$X = \begin{bmatrix} -6/17 \\ 0 \\ 7/17 \end{bmatrix}$$

Contoh:

Gunakan Aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan berikut menggunakan Scilab.

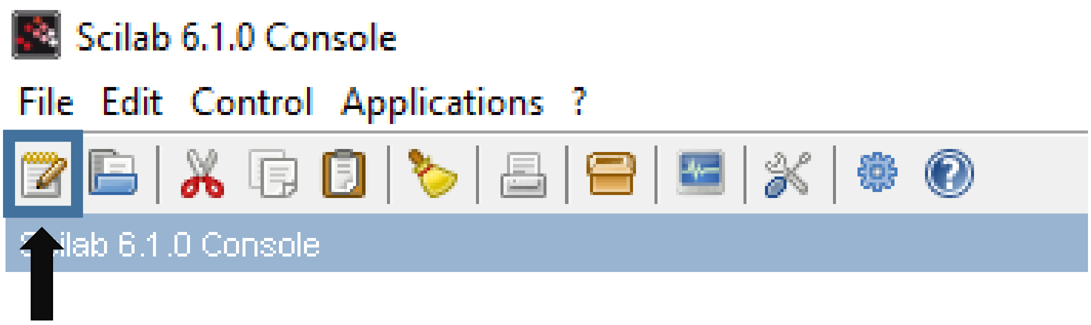
Carilah nilai x, y, z dari sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 12 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 3x - y + z &= 11 \end{aligned}$$

Jawab:

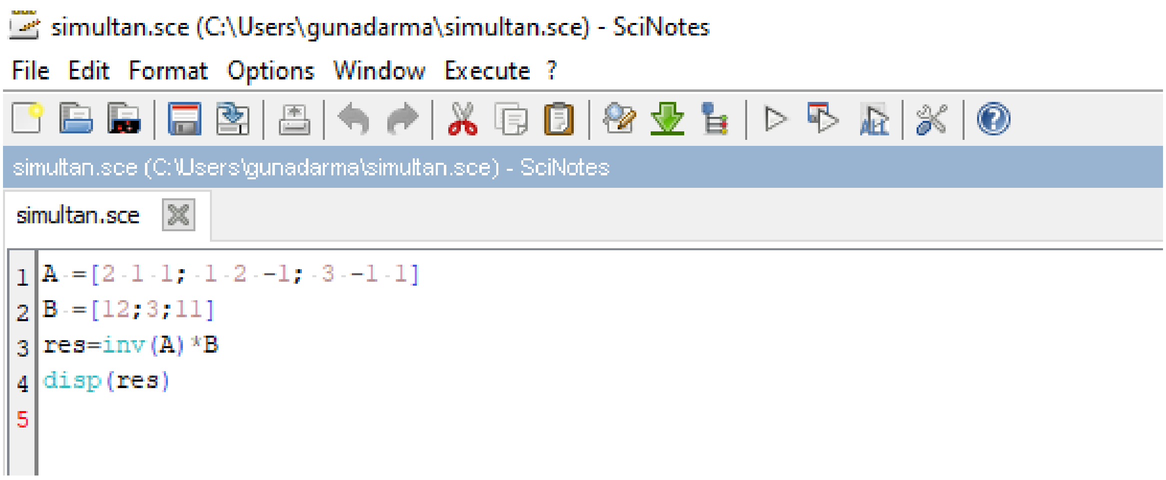
Langkah 1:

Buka software scilab dan klik Launch SciNotes untuk menulis kodingan SPL



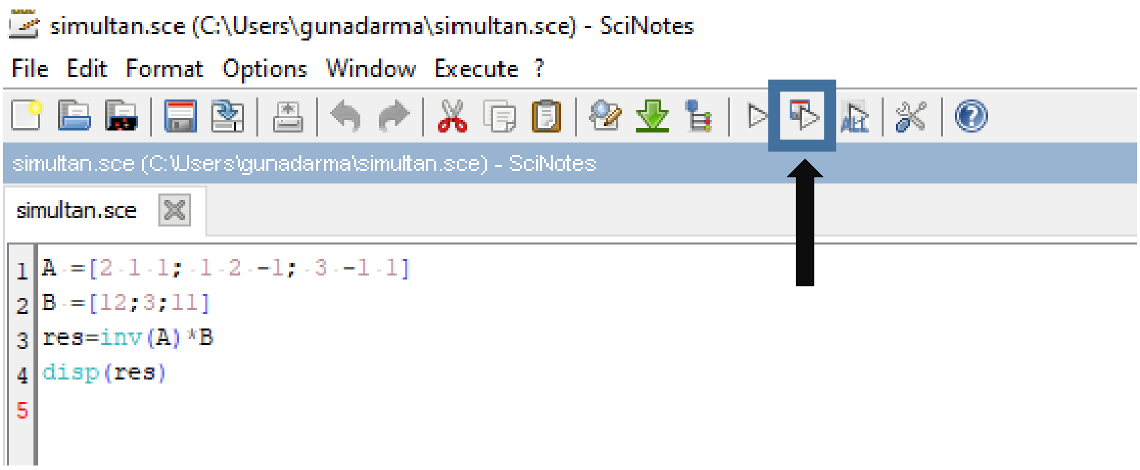
Langkah 2:

Ketik kodingan SPL seperti dibawah ini dengan mendefinisikan matriks A dan B pada lembar kerja SciNotes dan mendefinisikan variabel res dengan menggunakan rumus inv(A)*B. Lalu, untuk menampilkan hasil dari variabel res yaitu dengan disp(res)



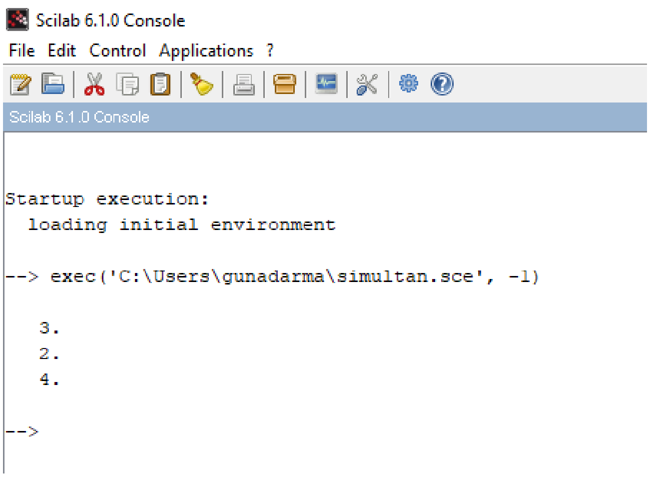
Langkah 3:

Lalu, klik save and execute, beri nama pada tampilan kerja tersebut



Langkah 4:

Maka hasil dari program dari kodingan sebelumnya akan ditampilkan dalam lembar kerja scilab tampilan awal



Rangkuman

- Sistem persamaan linear merupakan gabungan dari beberapa persamaan linear.
- Beberapa cara menentukan solusi dari persamaan linear maupun sistem persamaan linear adalah dengan eliminasi, substitusi, maupun campuran
- Sistem persamaan linear dapat dibentuk menjadi persamaan matriks dengan memperhatikan banyaknya baris dan kolomnya.
- Sistem persamaan linear juga dapat diselesaikan dengan aturan cramer menggunakan nilai-nilai determinan pada persamaan matriksnya.

Referensi

H.S., Suryadi. *Pengantar Aljabar Linier dan Geometri Analitik.* Jakarta: Gunadarma, 1996.

Kartika, Hendra. *Aljabar Matrik (Teori dan Aplikasinya dengan Scilab).* Yogyakarta: Deepublish, 2017.

Seymour Lipschutz, Marc Lipson. *Aljabar Linear Schaum Outlines.* Ketiga. Jakarta: Erlangga, 2004.