4

DETERMINAN MATRIKS

Objektif :

1. Mahasiswa mampu mengenal metode determinan matriks
2. Mahasiswa mampu mengenal dan mencari nilai minor dan kofaktor matriks
3. Mahasiswa mampu mengenal dan memahami sifat determinan matriks
4. Mahasiswa mampu menghitung determinan matriks

Pendahuluan

Istilah determinan pertama kali di perkenalkan oleh ahli matematika yaitu Jerman Carl Friedrich Gauss pada tahun 1801 yang digunakan untuk "*determine*" atau mendeskripsikan sifat jenis fungsi tertentu. Determinan suatu matriks adalah suatu fungsi tertentu yang menghubungkan matriks bujur sangkar dengan suatu bilangan real. Dengan kata lain, nilai determinan dari suatu matriks adalah skalar. Sekumpulan persamaan linear nonhomogen tidak dapat diselesaikan apabila determinan dari matriks koefisiennya sama dengan nol. Matriks itu disebut maktriks singular. Determinan ditulis diantara dua garis, bukan kurung. Untuk penyelesaian determinan orde 2 dapat dilakukan dengan perkalian langsung yaitu:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Sehingga det (A)= $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} = ad - bc$. Determinan dari A dapat dituliskan dengan det (A) atau |A|. Pada Topik ini akan dibahas metode determinan, minor dan kofaktor pada matriks, dan sifat-sifat dari determinan.

4.1 Metode Menentukan Determinan Matriks

Pada sub bab ini akan dibahas cara menentukan determinan menggunakan 4 metode yaitu metode hasil kali elementer, metode sarrus, metode ekspansi kofaktor, dan menggunakan scilab.

1. Metode hasil kali elementer

Hasil kali elementer dari sebuah matriks persegi $A_{n\times n}$, adalah hasil kali *n* entri matriks A dengan syarat **tidak ada dua entri** yang berasal dari baris maupun kolom yang sama. Sebagai contoh, terdapat 6 hasil kali elementer pada

$$\mathrm{A}_{3\times 3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

yaitu:

$a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$.

Hasil kali elementer pada $\mathrm{A}_{3\times 3}$ di atas berbentuk $a_{1p}a_{2q}a_{3r}$, di mana $(p, q, r) \in \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}$. Karena (p, q, r) mencakup semua permutasi dari $(1,2,3)$, maka banyak hasil kali elementer dari $\mathrm{A}_{3\times 3}$ adalah 3!=6. Secara umum, matriks $\mathrm{A}_{\mathrm{nxn}}$ memiliki hasil kali elementer sebanyak n!.

Pada permutasi, jika sebuah bilangan yang lebih besar mendahului sebuah bilangan yang lebih kecil, maka dikatakan terjadi sebuah invers. Banyaknya invers pada sebuah permutasi adalah banyaknya bilangan yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil. Sebagai contoh, permutasi $(2,1,3)$ memiliki sebuah invers 2 mendahului 1. Permutasi $(3,2,1)$ memiliki 3 invers karena 3 mendahului 2,3 mrndahului 1, dan 2 mendahului 1.

Definisi. Sebuah permutasi dikatakan genap [ganjil] jika banyak inversnya genap [ganjil]. Ganjil/genap disebut juga **paritas**.

Tabel 4.1 berikut menunjukan paritas permutasi dari (1,2,3):

Tabel 4.1. Paritas Permutasi dari (1,2,3)

Permutasi	Banyaknya invers	Paritas
(1,2,3)	0	Genap
(1,3,2)	1	Ganjil
(2,1,3)	1	Ganjil
(2,3,1)	2	Genap
(3,1,2)	2	Genap
(3,2,1)	3	Ganjil

Definisi. Diberikan matriks A_{nxn} dan $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ permutasi dari (1,2,...*n*). Hasil kali elementer bertanda untuk $(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n})$ di definisikan sebagai:

- $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n}$ jika $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ permutasi genap, atau
- $- a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n}$ jika $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ permutasi ganjil

Hasil kali elementer bertanda untuk matriks $\mathrm{A}_{3\times 3}$ ditampilkan pada Tabel 4.2 berikut:

Tabel 4.2. Hasil Kali Elementer

Hasil kali elementer	Permutasi	Paritas	Hasil kali elementer bertanda
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1,2,3)	Genap	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1,3,2)	Ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2,1,3)	Ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2,3,1)	Genap	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3,1,2)	Genap	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3,2,1)	Ganjil	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Definisi. Determinan dari matriks A, dinotasikan sebagai det (A), adalah jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda pada matriks A.

Mengacu pada tabel 4.2, jika seluruh hasil kali elementer bertanda pada kolom paling kanan dijumlahkan, maka diperoleh determinan matriks A_{3x3}. Lebih jelasnya:

$$\det(\mathrm{A}) = \mathrm{a}_{11}\mathrm{a}_{22}\mathrm{a}_{33} + \mathrm{a}_{12}\mathrm{a}_{23}\mathrm{a}_{31} + \mathrm{a}_{13}\mathrm{a}_{21}\mathrm{a}_{32} - \mathrm{a}_{13}\mathrm{a}_{22}\mathrm{a}_{31} - \mathrm{a}_{12}\mathrm{a}_{21}\mathrm{a}_{33} - \mathrm{a}_{11}\mathrm{a}_{23}\mathrm{a}_{32}$$

Determinan matriks persegi dengan ukuran lebih besar dapat ditentukan dengan cara serupa. Kelemahan metode ini adalah semakin besar ukuran matriks, maka banyaknya hasil kali elementer meningkat secara faktorial. Sebagai contoh, matriks berukuran 6 × 6 memiliki 6! = 720 hasil kali elementer.

2. Metode Sarrus

Menentukan determinan matriks 3 × 3 juga dapat dilakukan dengan cara *sarrus*. Misalkan diketahui matriks A dengan ordo 3 x 3 sebagai berikut.

$$A_{3\times3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Maka langkah-langkah penyelesaian menggunakan metode atau cara *sarrus* adalah sebagai berikut.

Langkah pertama, menuliskan kembali dua kolom pertama, setelah kolom terakhir. Sedemikian sehingga,

$$\det(A) = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Selanjutnya, kita coret entri-entri pada diagonal utama dan diagonal lainnya. Untuk menghitung determinan yaitu dengan mengurangkan jumlah hasil kali pada diagonal-diagonal utama (garis warna kuning) dengan jumlah hasil kali pada diagonal-diagonal lainnya (garis warna biru).

$$\det(A) = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Contoh:

Carilah determinan dari matriks $B_{3\,x\,3} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ menggunakan metode hasil kali elementer dan metode *sarrus*.

Jawab:

- Menggunakan metode hasil kali elementer

Tabel 4.3. Metode Hasil kali elementer pada contoh soal

Hasil Kali elementer	Permutasi	Paritas	Hasil Kali Elementer Bertanda
1×8×2 = 16	(1,2,3)	Genap	$a_{11}a_{22}a_{33}$
1×6×0 = 0	(1,3,2)	Ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
6×2×2 = 24	(2,1,3)	Ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
6×6×4 = 144	(2,3,1)	Genap	$a_{12}a_{23}a_{31}$
3×2×0 = 0	(3,1,2)	Genap	$a_{13}a_{21}a_{32}$
3×8×4 = 96	(3,2,1)	Ganjil	$-\ a_{13}a_{22}a_{31}$

Sehingga hasil det (B) = 16 – 0 – 24 +144 +0 -96 = 40

- Menggunakan cara *sarrus*

$$\det(\mathrm{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{matrix}$$

$$\det(\mathrm{B}) = (1 \times 8 \times 2) + (\ 6 \times 6 \times 4) + (3 \times 2 \times 0) - (3 \times 8 \times 4) - (6 \times 2 \times 2)\ - (1 \times 6 \times 0)$$

= 16 + 144 + 0 – 96 – 24 -0

= 40

3. Metode ekspansi kofaktor

Perlu di ketahui bahwa metode *sarrus* tidak dapat digunakan untuk n ≥ 4 dan metode hasil kali elementer pun sulit untuk di terapkan, sehingga diperlukan metode lain untuk menentukan determinan matriks dengan orde n ≥ 4, salah satunya dengan metode ekspansi kofaktor. Terdapat 2 istilah pada metode ekspansi kofaktor, yaitu:

a. Minor

Jika A matriks persegi, maka minor dari a_{ij} dituliskan dengan M_{ij} yang merupakan determinan dari submatriks A yang diperoleh dengan cara menghapus baris i dan kolom j. Submatriks yang terbentuk ini mempunyai ukuran selisih satu dari matriks A, misalnya untuk matriks A yang berordo 3 x 3 akan didapatkan submatriks yang berordo 2 x 2. Banyaknya minor pada suatu matriks sama dengan banyaknya elemen matriks tersebut.

b. Kofaktor

Kofaktor adalah hasil perkalian minor dengan suatu angka yang nilainya bergantung pada suatu aturan yaitu $(-1)^{i+j}$ dimana i adalah baris dan j adalah kolom. Kofaktor dinotasikan dengan C_{ij} dengan rumus $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$. Sehingga, banyaknya kofaktor suatu matriks sama dengan banyaknya minor.

Untuk memudahkan mengingat, $(-1)^{1+j}$ bernilai -1 jika i+j ganjil, dan bernilai +1 jika i+j genap. Berikut adalah nilai $(-1)^{1+j}$ berdasarkan posisinya pada matriks.

$$\begin{bmatrix} +1 & -1 & +1 & -1 & \cdots \\ -1 & +1 & -1 & +1 & \cdots \\ +1 & -1 & +1 & -1 & \cdots \\ -1 & +1 & -1 & +1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh: $M_{11} = C_{11},\ M_{12} = -C_{12}$, dan seterusnya.

Contoh:

1. Diberikan matriks $A_{3\times3}$ = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$. Tentukan minor dan kofaktor dari a_{32}.

   Jawab:

   Dengan menghilangkan baris 3 dan kolom 2 diperoleh sub matriks $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, sehingga:

   $$M_{32} = (3 \times 0) - \big(1 \times (-2)\big) = 2 \text{ dan } C_{32} = (-1)^{3+2}.\, 2 = -2$$

2. Diketahui matriks persegi berukuran 3 × 3 dengan bentuk:

   A_{3x3} = $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ tentukan matriks kofaktor dari matriks A!

   Jawab:

- Menggunakan cara manual:

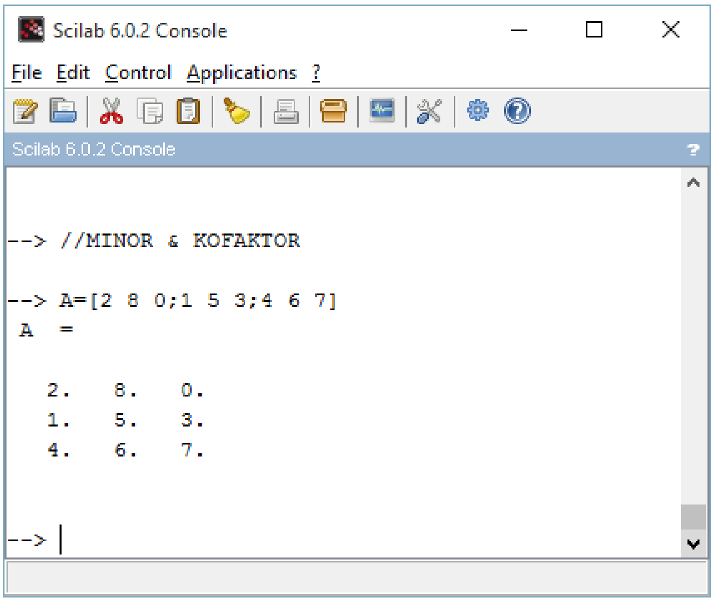
Tabel 4.4 Cara manual mencari minor dan kofaktor

Elemen Matriks & Minor		**Kofaktor**
Baris ke-1, kolom ke-1	$a_{11} = 2$	
$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 17$	$C_{11} = (-1)^{1+1}.17$ $C_{11} = 17$
Baris ke-1, kolom ke-2	$a_{12} = 8$	
$A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -5$	$C_{12} = (-1)^{1+2}.(-5)$ $C_{12} = 5$
Baris ke-1, kolom ke-3	$a_{13} = 0$	
$A_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -14$	$C_{13} = (-1)^{1+3}.(-14)$ $C_{13} = -14$
Baris ke-2, kolom ke-1	$a_{21} = 1$	
$A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$M_{21} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 56$	$C_{21} = (-1)^{2+1}.56$ $C_{21} = -56$
Baris ke-2, kolom ke-2	$a_{22} = 5$	
$A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 14$	$C_{22} = (-1)^{2+2}.14$ $C_{22} = 14$
Baris ke-2, kolom ke-3	$a_{23} = 3$	
$A_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -20$	$C_{23} = (-1)^{2+3}.(-20)$ $C_{23} = 20$
Baris ke-3, kolom ke-1	$a_{31} = 4$	
$A_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$M_{31} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 24$	$C_{31} = (-1)^{3+1}.24$ $C_{31} = 24$
Baris ke-3, kolom ke-2	$a_{32} = 6$	

$A_{32} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6$	$C_{32} = (-1)^{3+2}.6$ $C_{32} = -6$
Baris ke-3, kolom ke-3	$a_{33} = 7$	
$A_{33} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2$	$C_{33} = (-1)^{3+3}.2$ $C_{33} = 2$

- Menggunakan Scilab:

a. Mendefinisikan matriks A pada Scilab



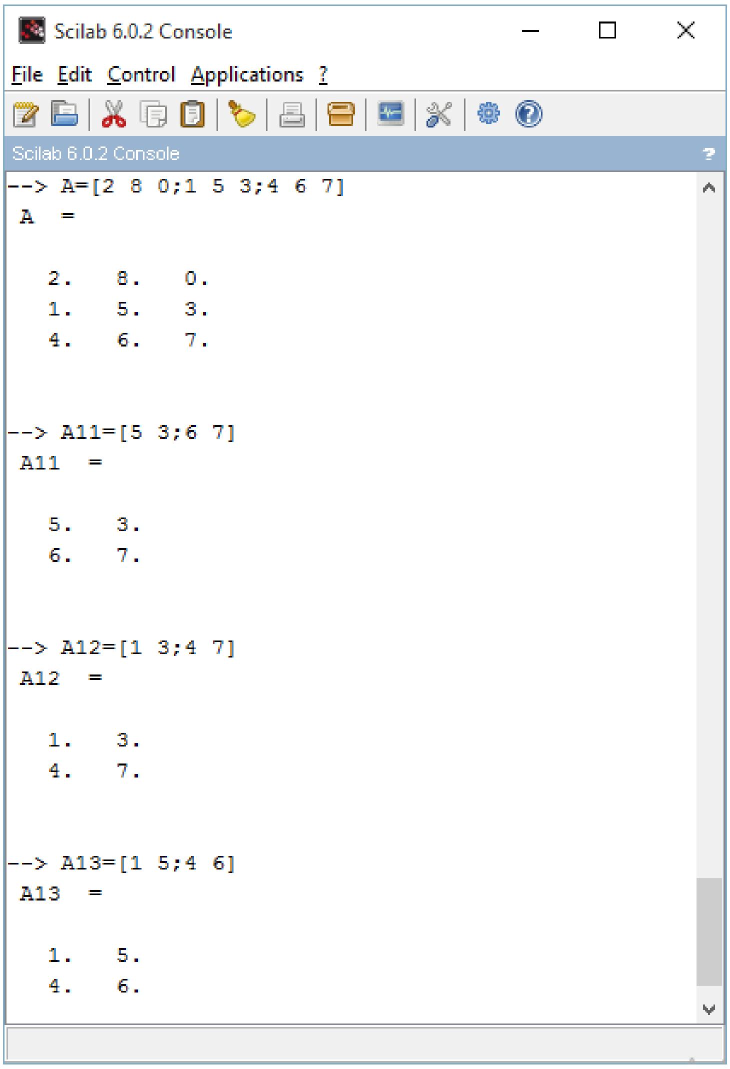
Gambar 4.1 Minor dan kofaktor pada Scilab

b. Mendefinisikan submatriks berordo 2 × 2 pada baris 1 dengan menghilangkan baris ke-1

A11: berarti menghilangkan baris 1 dan kolom 1

A12: berarti menghilangkan baris 1 dan kolom 2

A13: berarti menghilangkan baris 1 dan kolom 3



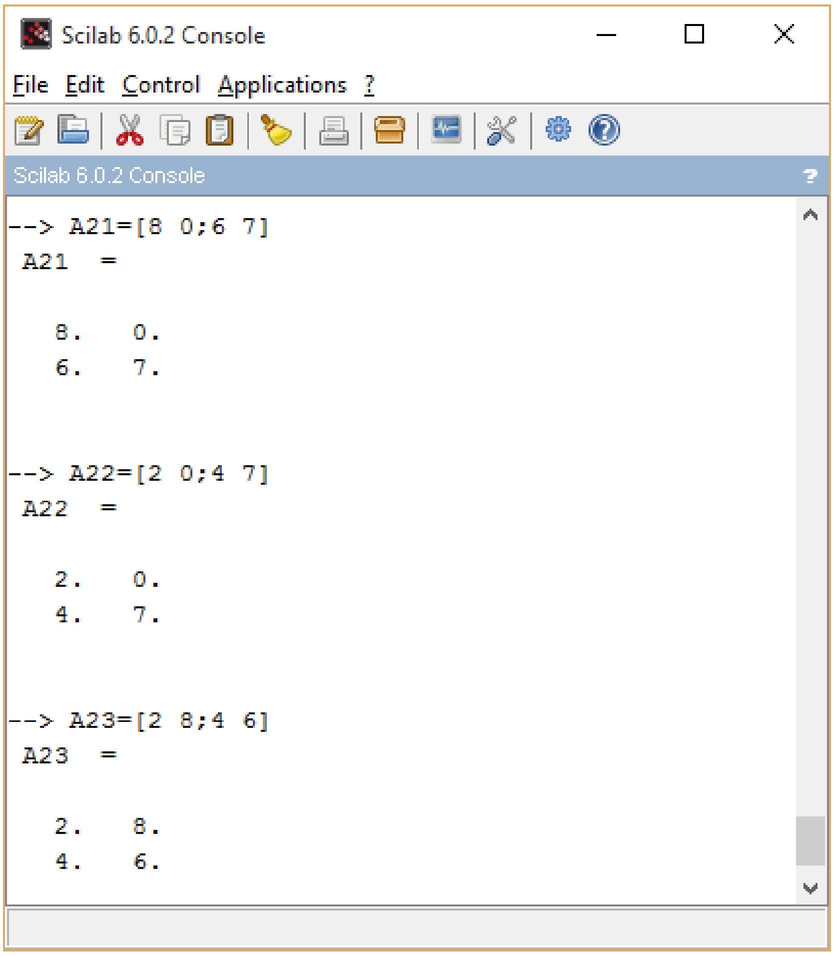
Gambar 4.2 mendefinisikan submatriks baris 1

c. Mendefinisikan submatriks berordo 2 × 2 pada baris 2 dengan menghilangkan baris ke-2

A21: berarti menghilangkan baris 2 dan kolom 1

A22: berarti menghilangkan baris 2 dan kolom 2

A23: berarti menghilangkan baris 2 dan kolom 3



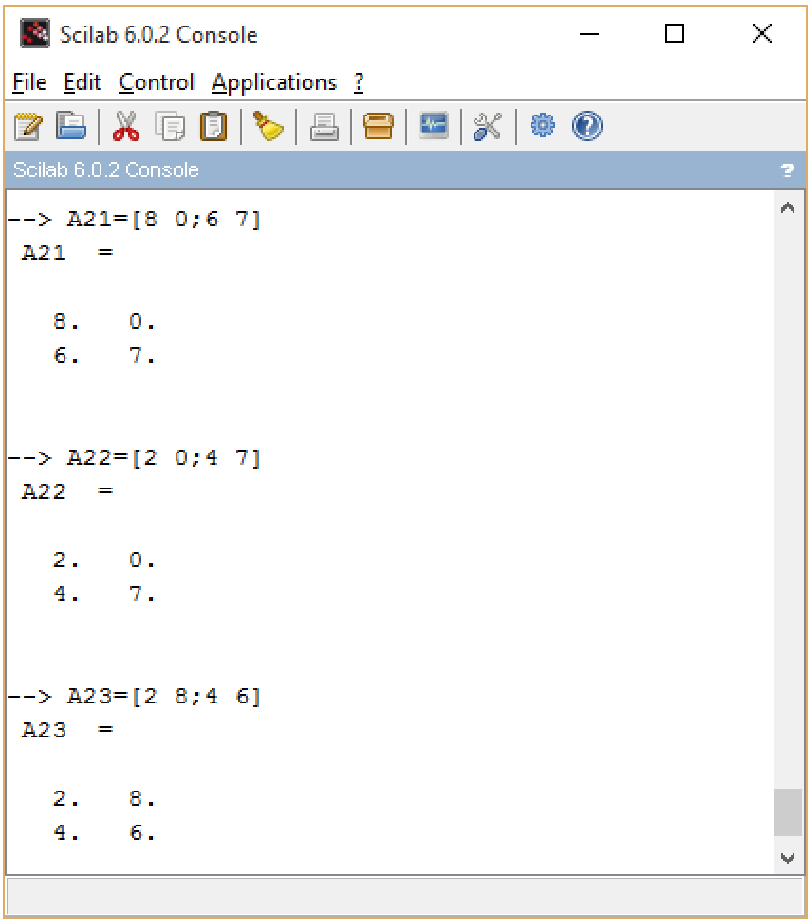
Gambar 4.3 mendefinisikan submatriks baris 2

d. Mendefinisikan submatriks berordo 2 × 2 pada baris 2 dengan menghilangkan baris ke-2

A21: berarti menghilangkan baris 2 dan kolom 1

A22: berarti menghilangkan baris 1 dan kolom 2

A23: berarti menghilangkan baris 1 dan kolom 3



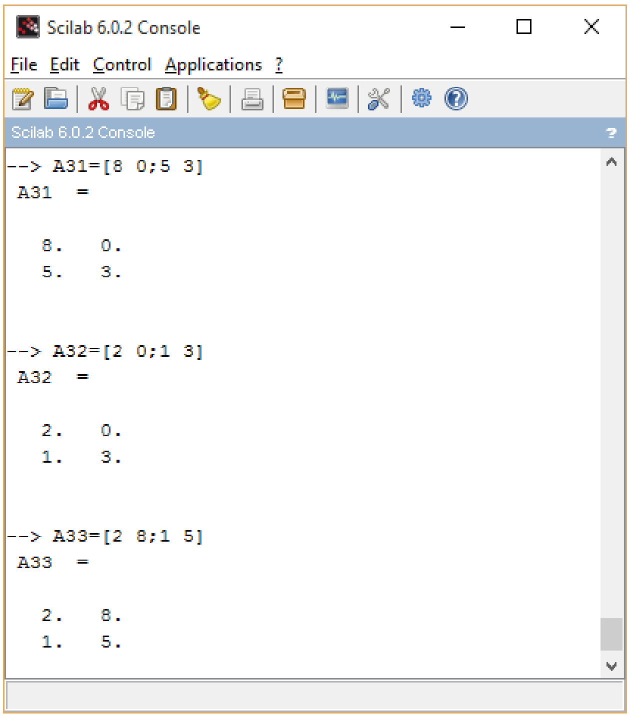
Gambar 4.4 mendefinisikan submatriks baris 3

e. Mendefinisikan submatriks berordo 2 × 2 pada baris 3 dengan menghilangkan baris ke-3

A31: berarti menghilangkan baris 3 dan kolom 1

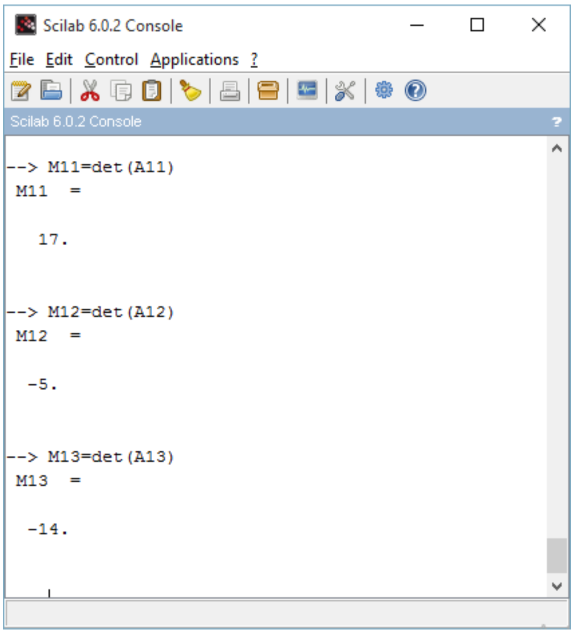
A32: berarti menghilangkan baris 3 dan kolom 2

A33: berarti menghilangkan baris 3 dan kolom 3



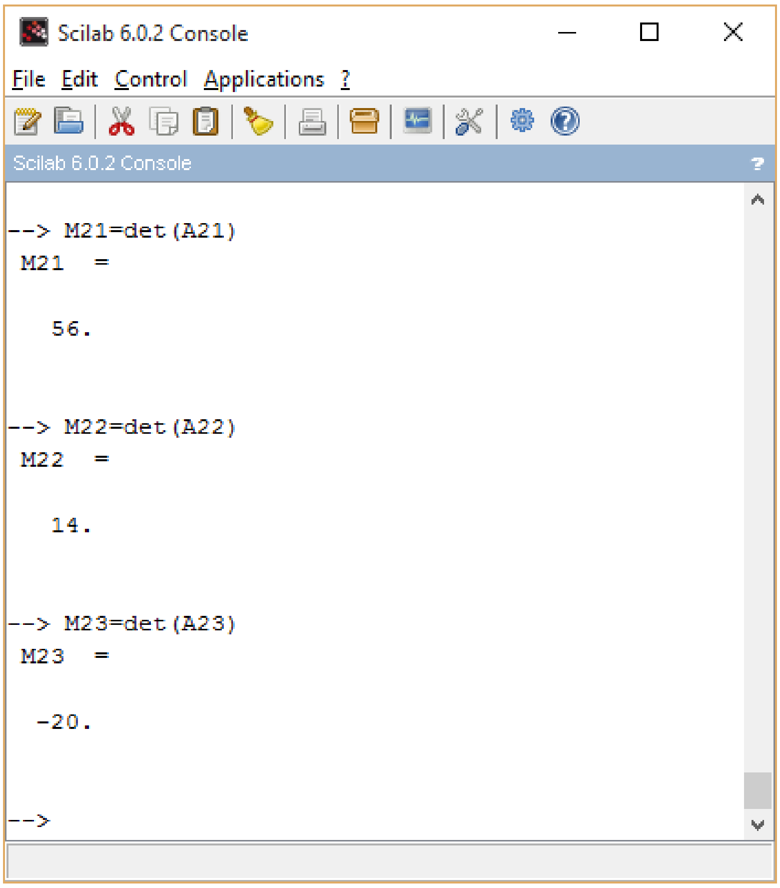
Gambar 4.5 mendefinisikan submatriks baris 3

f. Mendefinisikan Minor pada baris 1 dengan menggunakan fungsi "**det**" pada Scilab



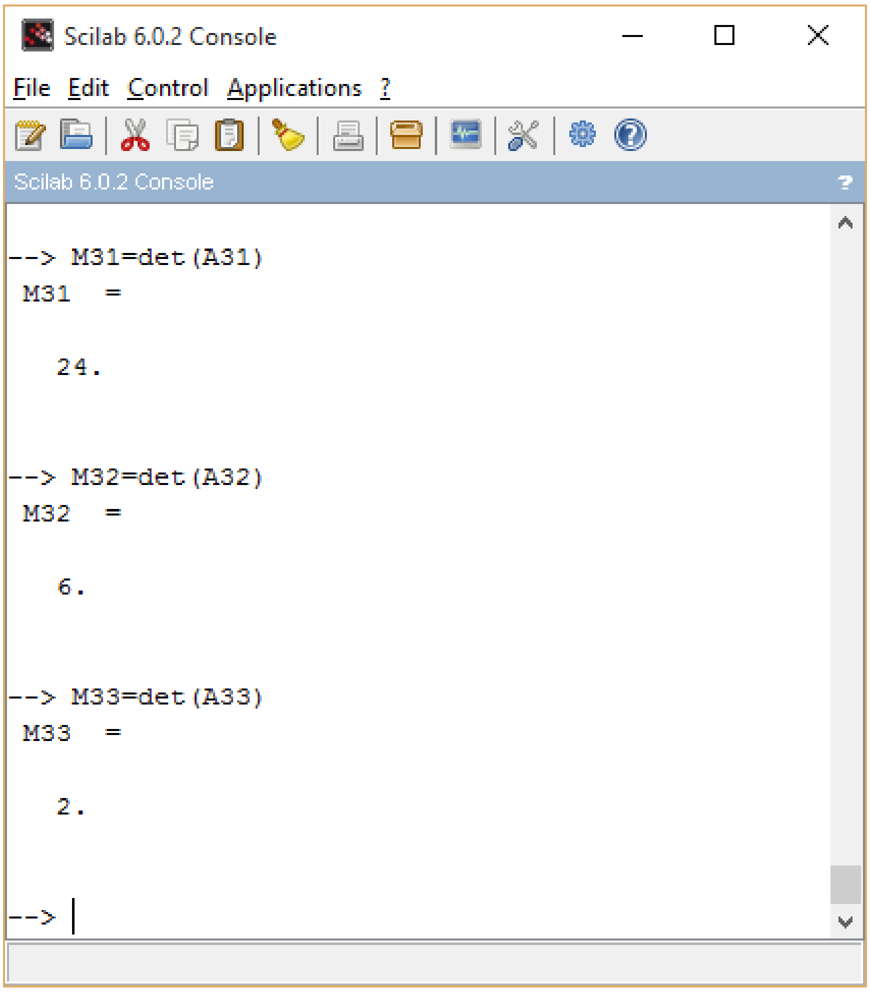
Gambar 4.6 mendefinisikan minor pada baris 1

g. Mendefinisikan Minor pada baris 2 dengan menggunakan fungsi "**det**" pada Scilab



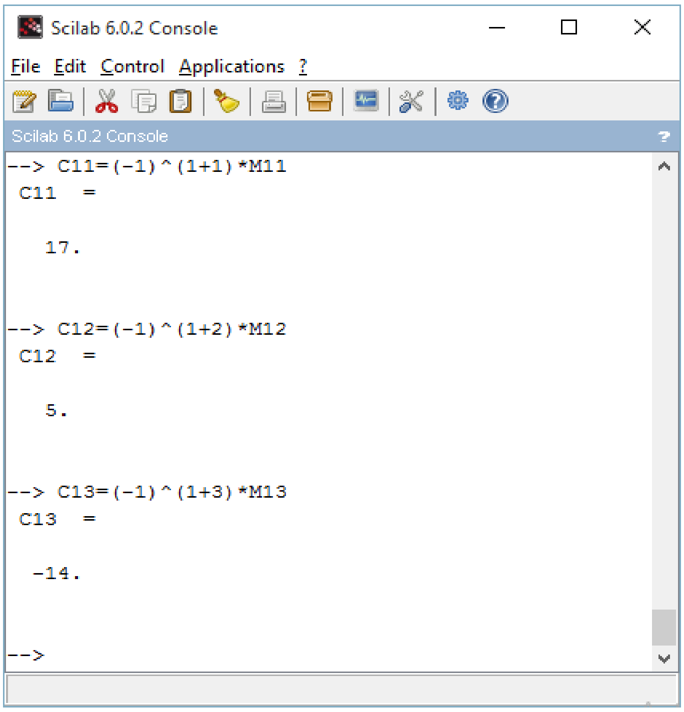
Gambar 4.7 mendefinisikan minor pada baris 2

h. Mendefinisikan Minor pada baris 3 dengan menggunakan fungsi “**det**” pada Scilab



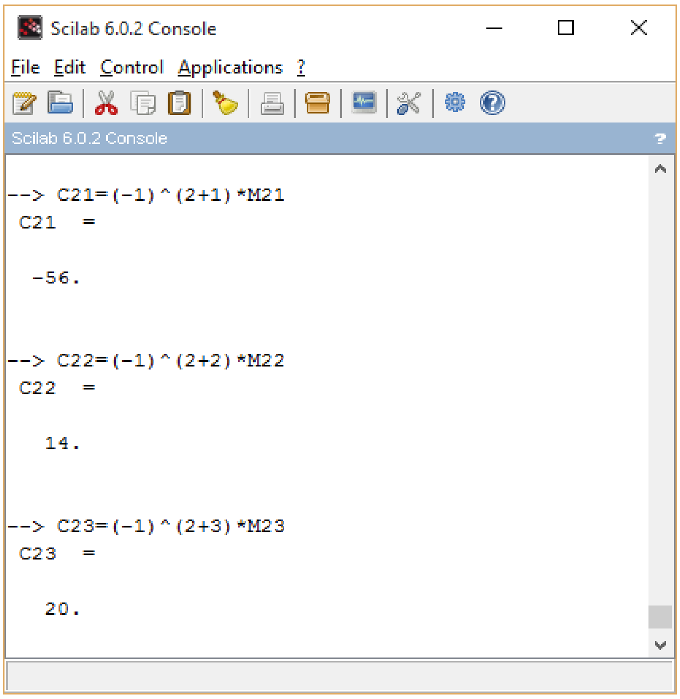
Gambar 4.8 mendefinisikan minor pada baris 3

i. Mendefinisikan Kofaktor pada baris 1 dengan menuliskan rumus kofaktor dengan menggunakan operator **"^"** untuk pangkat dan operator **"*"** untuk perkalian pada Scilab.



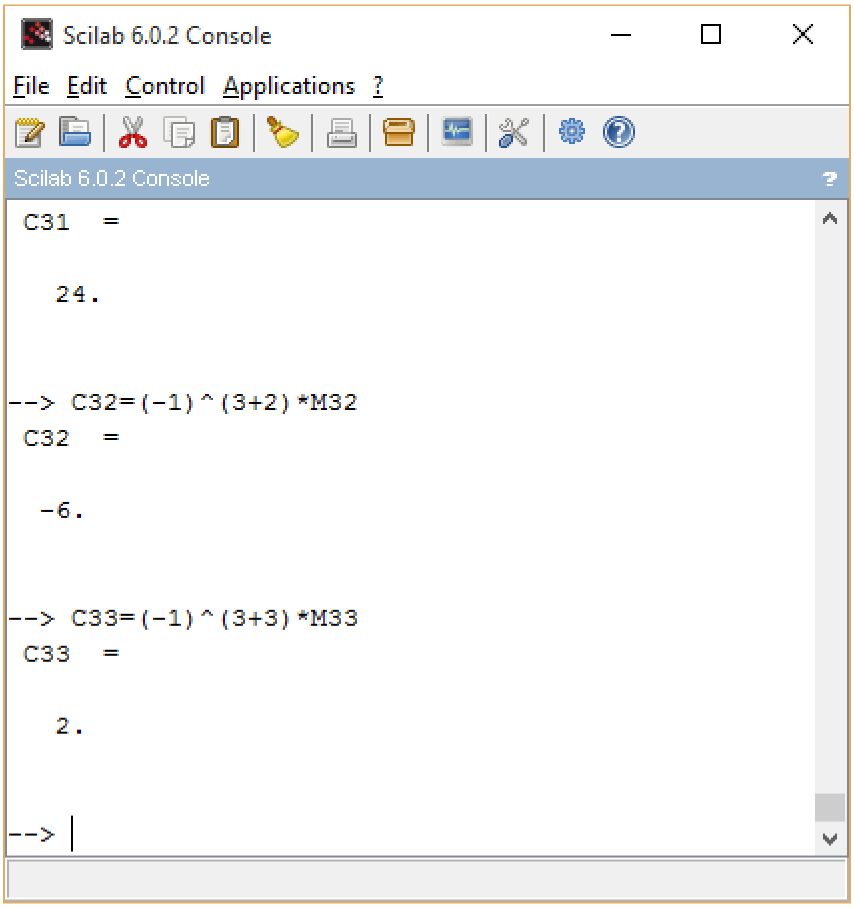
Gambar 4.9 mendefinisikan kofaktor pada baris 1

j. Mendefinisikan Kofaktor pada baris 2 dengan menuliskan rumus kofaktor dengan menggunakan operator **“^”** untuk pangkat dan operator **“*”** untuk perkalian pada Scilab.



Gambar 4.10 mendefinisikan kofaktor pada baris 2

k. Mendefinisikan Kofaktor pada baris 3 dengan menuliskan rumus kofaktor dengan menggunakan operator **“^”** untuk pangkat dan operator **“*”** untuk perkalian pada Scilab.



Gambar 4.11 mendefinisikan kofaktor pada baris 3

Sehingga, berdasarkan cara manual dan menggunakan scilab, diperoleh matriks kofaktor dari matriks A adalah

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 5 & -14 \\ -56 & 14 & 20 \\ 24 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka untuk menentukan determinan A menggunakan ekspansi kofaktor, dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan berikut.

$\det(\mathrm{A}) = \mathrm{a_{1J}C_{1J}} + \mathrm{a_{2J}C_{2J}} + \cdots + \mathrm{a_{nJ}C_{nJ}}$ (ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j) atau

$\det(\mathrm{A}) = \mathrm{a_{i1}C_{i1}} + \mathrm{a_{i2}C_{i2}} + \cdots + \mathrm{a_{in}C_{in}}$ (ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-1)

Contoh:

Tentukan determinan dari matriks $A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ menggunakan ekspansi kofaktor!

Jawab:

Misal, akan di tentukan determinan dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-1 $(M_{11}, M_{12,} M_{13})$. Sedemikian sehingga,

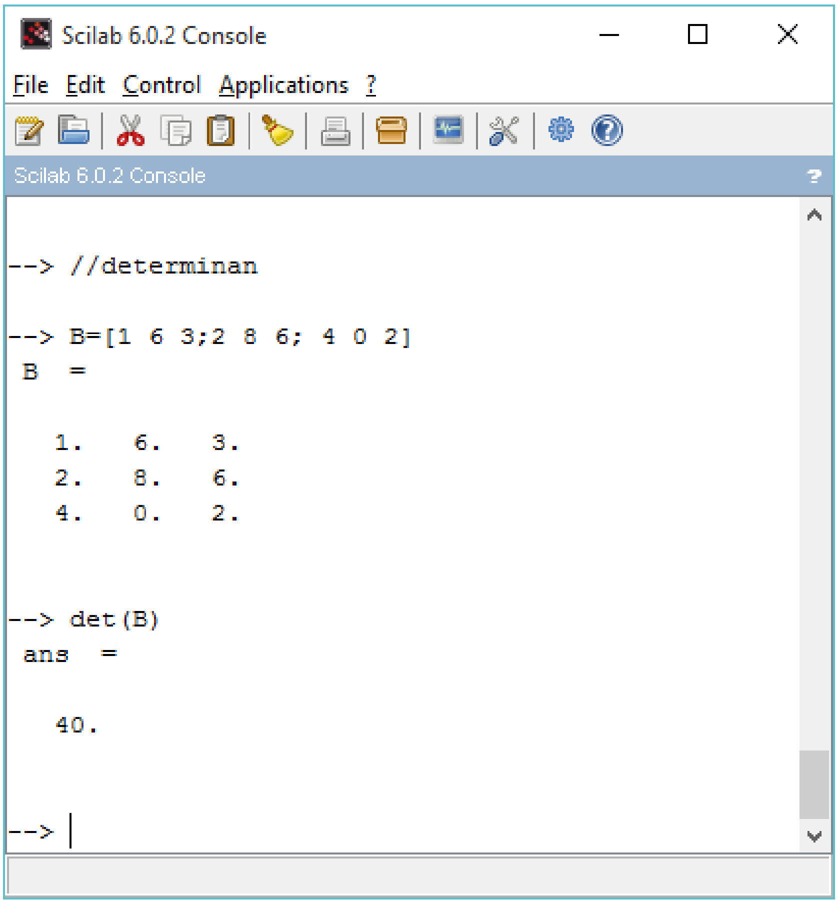
$$\det(A) = 3\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-15) - 2(-6) + 1(-9)$$

$$= -42$$

4. Menentukan determinan dengan Scilab

Scilab menyediakan operator det (B) dimana B adalah matriks yang akan ditentukan nilai determinannya. Berikut ini adalah contoh penggunaan operator det( ) pada Scilab.



Gambar 4.12 Fungsi Determinan pada Scilab

4.2 Sifat-Sifat Determinan Matriks

Pada bagian ini akan membahas sifat-sifat dari determinan matriks. Berikut adalah sifat dari determinan matriks.

1. Nilai determinan tidak berubah apabila baris dan kolomnya dtukar jika matriks tersebut adalah matriks persegi n × n, maka

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Contoh:

Diketahui matriks $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ berapakah nilai dari det(A) dan det(A^T)

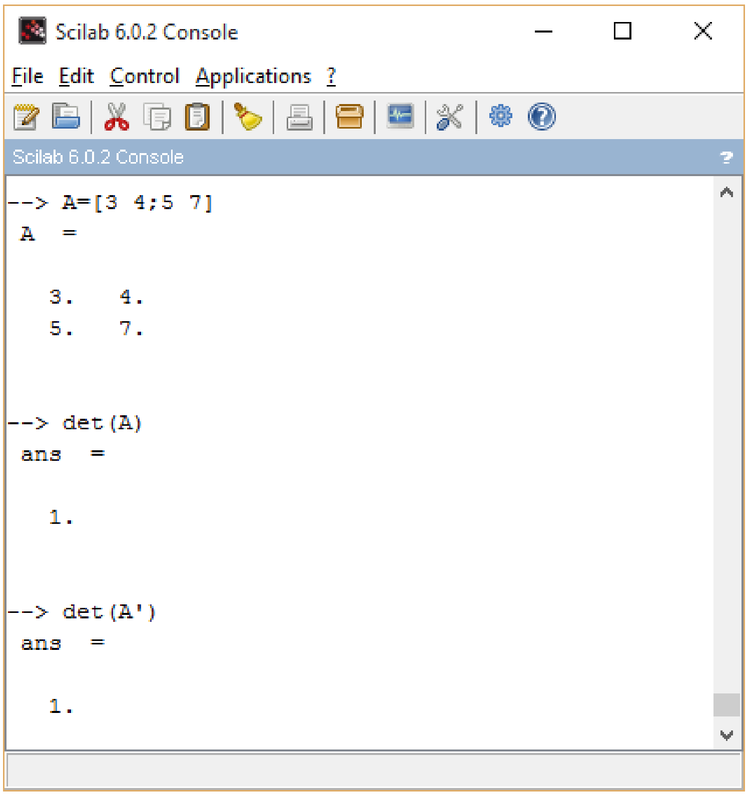
Jawab:

- Menggunakan cara manual

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3.7 - 4.5 = 1$$

$$\det(A^T) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3.7 - 4.5 = 1$$

- Menggunakan Scilab



Gambar 4.13 menentukan determinan matriks sifat 1

2. Jika matriks B diperoleh dari matriks A dengan menukar dua baris atau kolom berbeda pada A, maka

$$\det(\mathrm{B}) = -\det(\mathrm{A})$$

Contoh:

Diketahui matriks $\mathrm{A}_{2x2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ dan matriks $\mathrm{B}_{2x2} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$berapakah nilai dari masing-masing determinan matriks tersebut

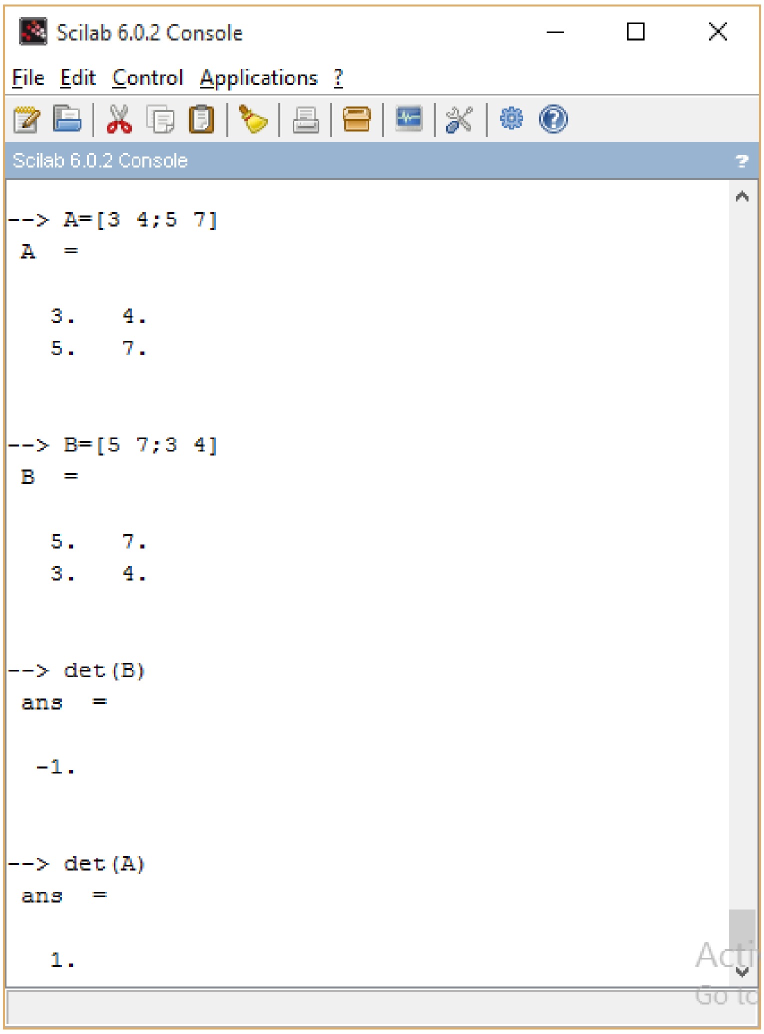
Jawab:

- Menggunakan cara manual

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3.7 - 4.5 = 1$$

$$\det(\mathrm{B}) = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5.4 - 3.7 = -1$$

- Menggunakan Scilab



Gambar 4.14 menentukan determinan matriks sifat 2

3. Jika dua baris atau dua kolom pada A sama, maka

$$\det(A) = 0$$

Contoh:

- Diketahui matriks $A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ tentukan $\det(A)$

Jawab:

- Menggunakan cara manual

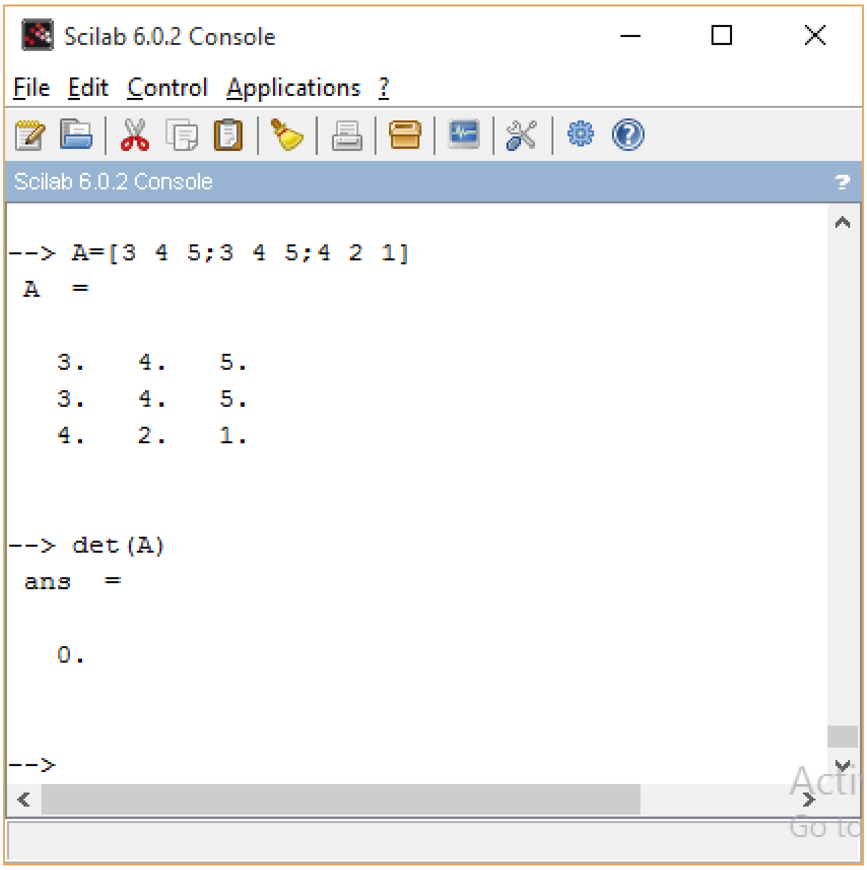
$\det(A) = \left|\begin{matrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{matrix}$

$\det(A)$= (3×4×1) + (4×5×4) + (5×3×2) – (5×4×4) - (3×5×2) - (4×3×1)

= 12 + 80 + 30 – 80 – 30 - 12

= 0

- Menggunakan Scilab



Gambar 4.15 menentukan determinan matriks sifat 3

4. Jika salah satu baris atau kolom pada A bernikai nol, maka

$$\det(\mathrm{A}) = 0$$

Contoh:

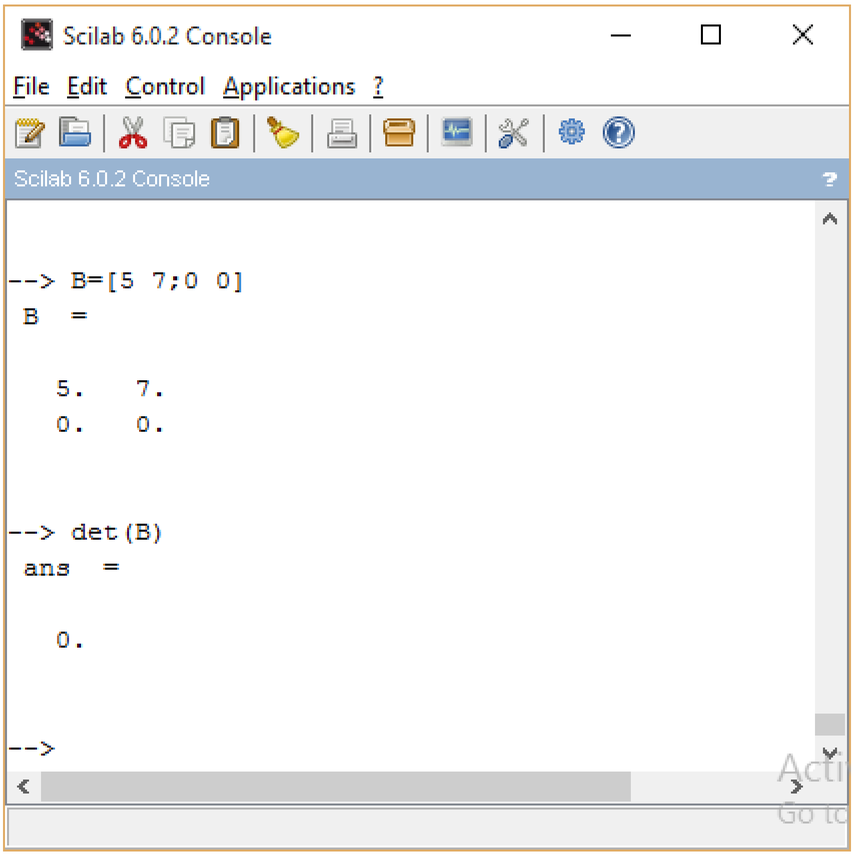
- Diketahui sebuah matriks $\mathrm{B}_{2x2} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tentukan determinan dari maktriks B

Jawab:

- Menggunakan cara manual

$$\det(\mathrm{B}) = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 5.0 - 7.0 = 0$$

- Menggunakan Scilab



Gambar 4.16 menentukan determinan matriks sifat 4

5. Jika B diperoleh dari A dengan cara mengalikan suatu baris atau kolom dengan suatu skalar k, maka

$$\det(B) = k.\det(A)$$

Contoh:

- Diketahui $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan matriks $B_{2x2} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ tentukan determinan dari masing-masing matriks!

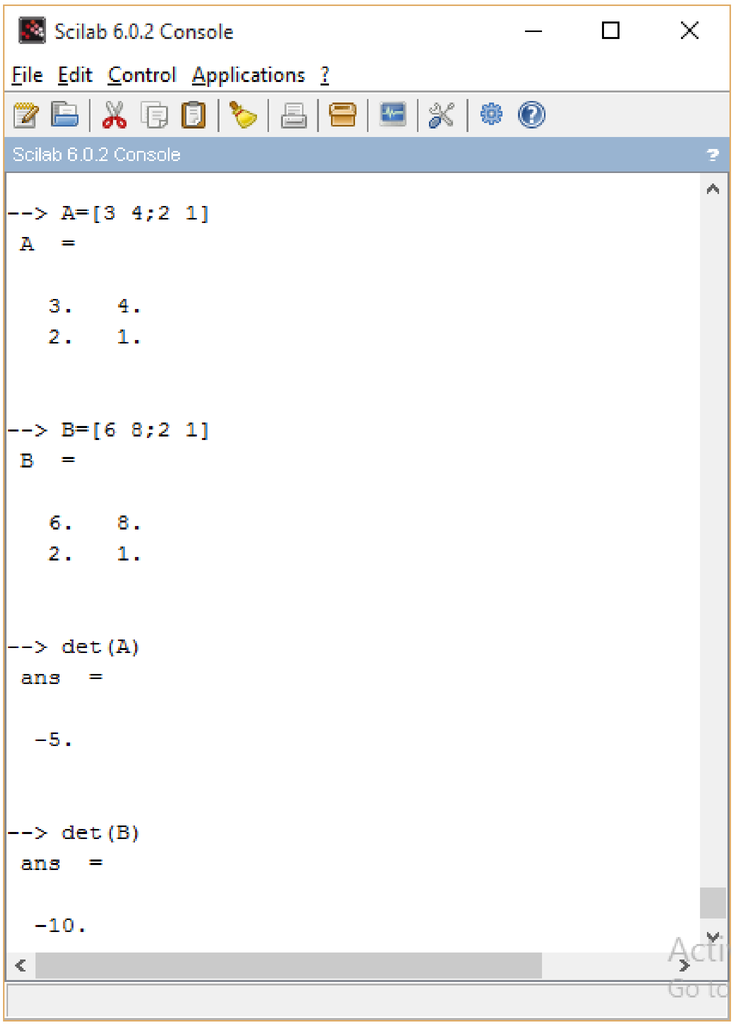
Jawab:

- Menggunakan cara manual

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.1 - 4.2 = -5$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6.1 - 8.2 = -10$$

- Menggunakan Scilab



Gambar 4.17 menentukan determinan matriks sifat 5

6. Jika A matriks n × n dan k suatu skalar, maka

$$\det(kA) = k^n.\mathrm{Det}(A)$$

Contoh:

- Diketahui matriks $B_{2x2} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan k adalah sebuah skalar dengan nilai 3, tentukan determinan dari det (3B) !

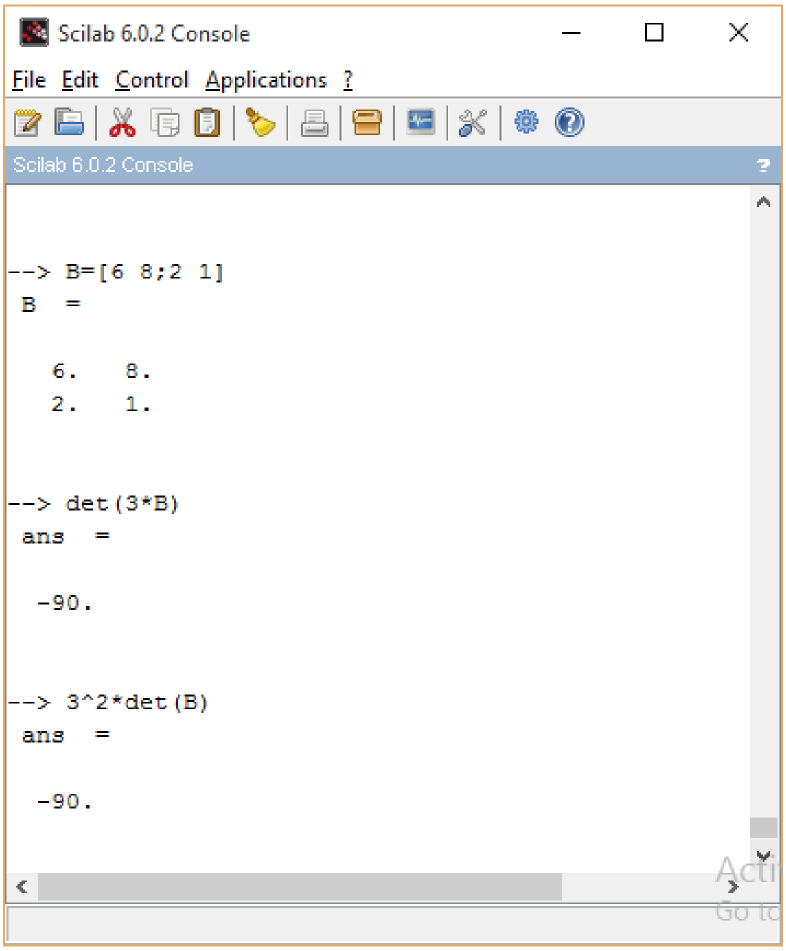
Jawab:

- Menggunakan cara manual

$$\det(3B) = 3\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 24 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 18.3 - 24.6 = -90$$

$$\det(3B) = 3^2\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9(-10) = -90$$

- Menggunakan Scilab



Gambar 4.18 menentukan determinan matriks sifat 6

7. Jika matriks $A = [a_{ij}]$ adalah segitiga atas atau bawah, maka

$$\det(A) = a_{11}, a_{22} \ldots a_{nn}.$$

Sehingga, determinan matrik segitiga adalah hasil kali dari elemen pada diagonal utama. Sebagai contoh:

- Diketahui matriks $B_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ tentukan nilai determinan dari matriks tersebut

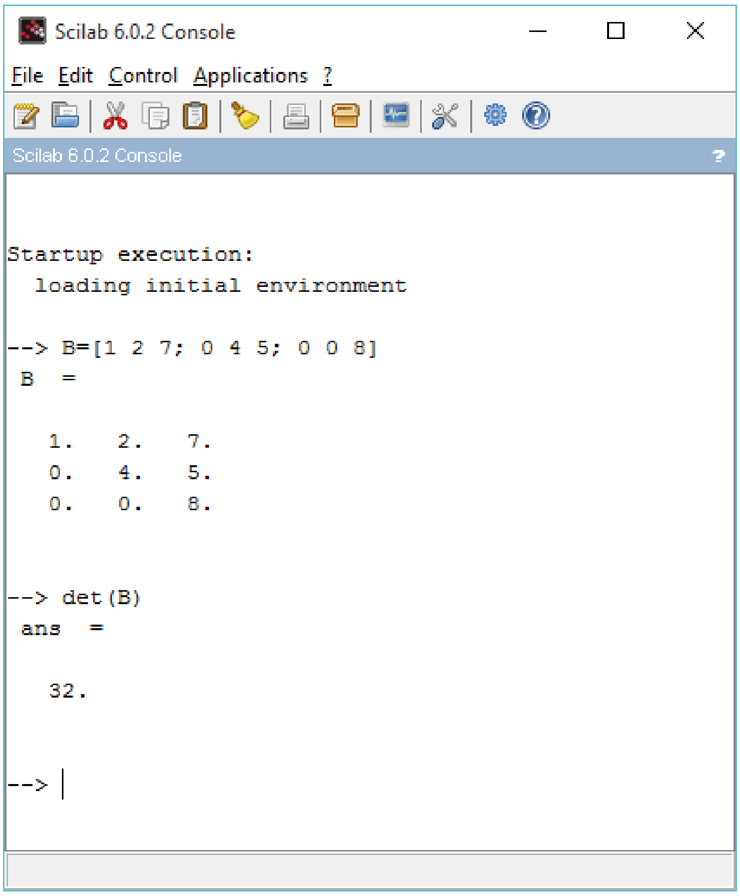
Jawab:

- Menggunakan cara manual

  Karena matriks diatas adalah matriks segitiga atas maka untuk menentukan matriksnya adalah dengan mengalikan diagonal utama dari matriks tersebut. Sehingga

$$\det(B) = 1 \times 4 \times 8 = 32$$

- Menggunakan Scilab



Gambar 4.19 menentukan determinan matriks sifat 7

8. Jika A dan B matrik n × n maka

$$\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})$$

Sebagai contoh:

- Diketahui $\mathrm{A}_{2x2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan matriks $\mathrm{B}_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ tentukan det (AB)

Jawab:

- Menggunakan cara manual

  Solusi dari contoh soal diatas ada 2 yaitu dengan melakukan perkalian terlebih dahulu lalu menghitung determinannya, cara lainnya adalah dengan melakukan determinan masing-masing matriks lalu di lakukan perkalian. Berikut adalah solusi dari soal diatas:

  i. Melakukan perkalian matriks lalu menghitung determinan

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \times 2) + (4 \times 4) & (3 \times 5) + (4 \times 1) \\ (2 \times 2) + (1 \times 4) & (2 \times 5) + (1 \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 19 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathrm{AB}) = \begin{vmatrix} 22 & 19 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} = 22.11 - 19.8 = 90$$

  ii. Melakukan determinan masing-masing matriks lalu melakukan perkalian dari hasil determinan.

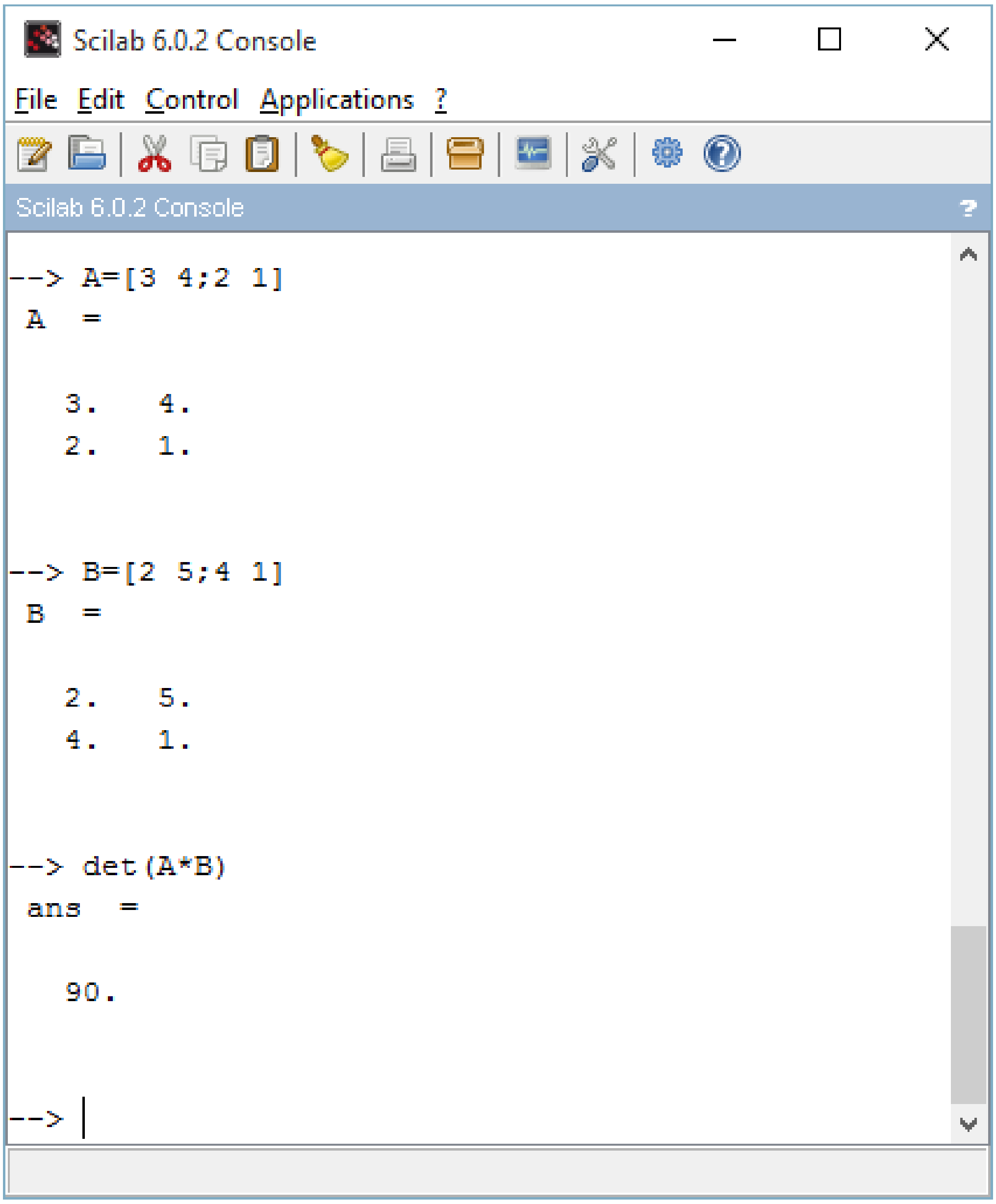
$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.1 - 4.2 = -5$$

$$\det(\mathrm{B}) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2.1 - 5.4 = -18$$

$$\det(\mathrm{AB}) = (-5) \times (-18) = 90$$

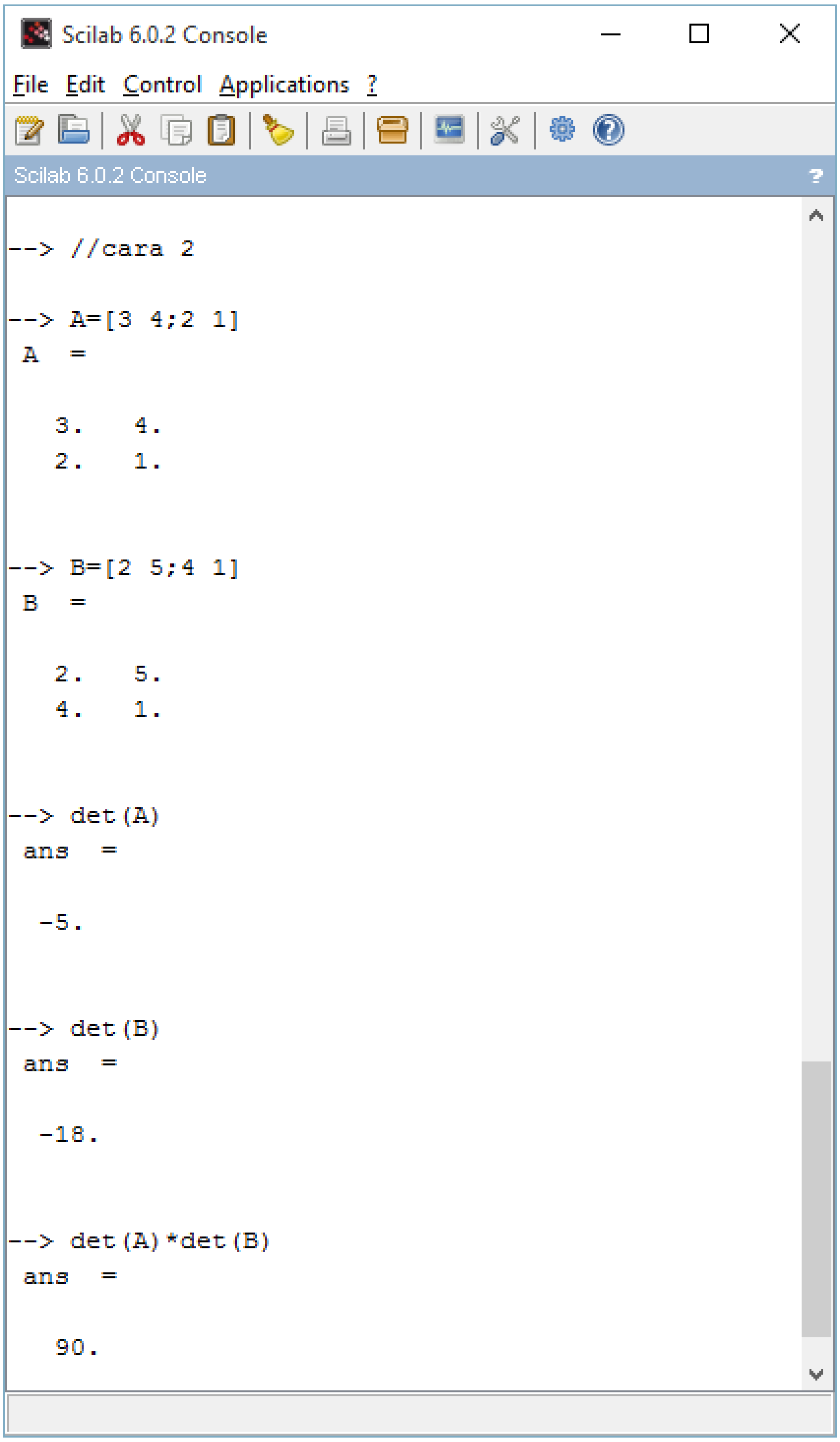
- Menggunakan Scilab

    I. Cara 1



Gambar 4.20 menentukan determinan matriks sifat 8 cara 1

II. Cara 2



Gambar 4.21 menentukan determinan matriks sifat 8 cara 2

9. Jika A matrik *n × n*, maka A *nonsingular* atau *invertible* jika hanya jika

$$\det(\mathrm{A}) \neq 0$$

Arti *invertible* adalah bahwa matriks tersebut dapat dilakukan invers jika hasil dari determinan tidak sama dengan nol. Hal ini berhubungan dengan sifat determinan matriks selanjutnya.

10. Jika A adalah matriks persegi *n x n* dan *nonsingular* atau *invertible* maka

$$\det(\mathrm{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathrm{A})}$$

Contoh:

- Diketahui $\mathrm{A}_{2\mathrm{x}2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ jika matriks tersebut *nonsingular* atau *invertible*, tentukan nilai $\det(A^{-1})$

Jawab:

- Menggunakan cara manual

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.1 - 4.2 = -5 \text{ (hasilnya } \neq 0)$$

Hasilnya tidak sama dengan nol, maka matriks tersebut *nonsingular* atau *invertible*, sehingga dapat melakukan langkah selanjutnya.

$$\det(\mathrm{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathrm{A})} = \frac{1}{-5}$$

Rangkuman

- Terdapat 3 metode menghitung determinan yaitu metode hasil kali elementer, metode sarrus, dan metode ekspansi kofaktor
- Metode ekspansi kofaktor dilakukan dengan mencari nilai minor dan kofaktor dari matriks.
- Pada scilab determinan suatu matriks dapat menggunakan fungsi det(A) dimana A adalah suatu matriks.

Referensi

H.S., Suryadi. *Pengantar Aljabar Linier dan Geometri Analitik.* Jakarta: Gunadarma, 1996.

Kartika, Hendra. *Aljabar Matrik (Teori dan Aplikasinya dengan Scilab).* Yogyakarta: Deepublish, 2017.

Seymour Lipschutz, Marc Lipson. *Aljabar Linear Schaum Outlines.* Ketiga. Jakarta: Erlangga, 2004.

Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S., Agus S. *Matematika Dasar Perguruan Tinggi.* Bogor: Ghalia-Indonesia, 2011.