INDUKSI MATEMATIKA

- Induksi Matematika merupakan suatu teknik yang dikembangkan untuk membuktikan pernyataan
- Induksi Matematika digunakan untuk mengecek hasil proses yang terjadi secara berulang sesuai dengan pola tertentu
- Indukasi Matematika digunakan untuk membuktikan universal statements $\forall\ n \in A \quad S(n)$ dengan $A \subset N$ dan N adalah himpunan bilangan positif atau himpunan bilangan asli.
- S(n) adalah fungsi propositional

TAHAPAN INDUKSI MATEMATIKA

- Basis Step : Tunjukkan bahwa S(1) benar
- Inductive Step : Sumsikan S(k) benar
  Akan dibuktikan $S(k) \rightarrow S(k+1)$ benar
- Conclusion : S(n) adalah benar untuk setiap n bilangan integer positif

PEMBUKTIAN INDUKSI MATEMATIKA

Contoh 1 :

Buktikan bahwa :

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$

untuk setiap n bilangan integer positif

Jawab :

- Basis : Untuk $n = 1$ akan diperoleh :

  $1 = \frac{1}{2}\,1 \cdot (1+1) \rightarrow 1 = 1$

- Induksi : misalkan untuk $n = k$ asumsikan $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{1}{2}\,k\,(k+1)$
- adib. Untuk $n = k+1$ berlaku

  $1 + 2 + 3 + \ldots + (k+1) = \frac{1}{2}\,(k+1)\,(k+2)$

  Jawab :

- $1 + 2 + 3 + \ldots + (k+1) = (k+1)\,(k+2) / 2$

  $1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = (k+1)\,(k+2) / 2$

  $k\,(k+1) / 2 + (k+1) = (k+1)\,(k+2) / 2$

  $(k+1)\,[\,k/2 + 1\,] = (k+1)\,(k+2) / 2$

  $(k+1)\,\frac{1}{2}\,(k+2) = (k+1)\,(k+2) / 2$

  $(k+1)\,(k+2) / 2 = (k+1)\,(k+2) / 2$

- Kesimpulan : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}\,n\,(n+1)$

  Untuk setiap bilanga bulat positif n

Contoh 2 :

Buktikan bahwa :

$1 + 3 + 5 + \ldots + n = (2n - 1) = n^2$

untuk setiap n bilangan bulat positif

Jawab :

- Basis : Untuk $n = 1$ akan diperoleh :

  $1 = 1^2 \rightarrow 1 = 1$

- Induksi : misalkan untuk $n = k$ asumsikan $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$
- adib. Untuk $n = k + 1$ berlaku

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2\,(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) = (k + 1)^2$

$1 + 3 + 5 + \ldots + ((2k + 1) - 2) + (2k + 1) = (k + 1)^2$

$\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)}_{k^2} + (2k + 1\ ) = (k + 1)^2$

$k^2 + (2K + 1) \quad = (k + 1)^2$

$k^2 + 2K + 1 \quad = k^2 + 2K + 1$

Kesimpulan : $1 + 3 + 5 + \ldots + n = (2n - 1) = n^2$

Untuk setiap bilangan bulat positif n

Contoh 3 :

Buktikan bahwa :

$N^3 + 2n$ adalah kelipatan 3

untuk setiap n bilangan bulat positif

Jawab :

- Basis : Untuk n = 1 akan diperoleh :

  $1 = 1^3 + 2(1) \rightarrow 1 = 3$, kelipatan 3

- Induksi : misalkan untuk n = k asumsikan $k^3 + 2k = 3x$
- adib. Untuk n = k + 1 berlaku

$(k + 1)^3 + 2(k + 1)$ adalah kelipatan 3

$(k^3 + 3k^2 + 3\,k{+}1) + 2k + 2$

$(k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 3)$

$\underbrace{(k^3 + 2k)}_{\text{Induksi}} + 3\,(k^2 + k + 1)$

$3x + 3\,(k^2 + k + 1)$

$3\,(x + k^2 + k + 1)$

Kesimpulan : $N^3 + 2n$ adalah kelipatan 3

Untuk setiap bilangan bulat positif n