VEKTOR

1

Objektif:

1. Mahasiswa mampu mengetahui definisi vektor
2. Mahasiswa mampu menghitung operasi vektor dan skalar

Pendahuluan

Dalam fisika sering fenomena atau gejala fisika akan mudah ditelaah dan diterangkan jika kita memandang beberapa besaran fisika yang terlibat (misalnya gaya, momentum) sebagai sebuah vektor. Dengan memandang besaran fisis sebagai vektor maka fenomena fisika yang terjadi (seperti gerak peluru) dapat dipahami dengan lebih baik. Namun demikian untuk menyelesaikan problem fisika yang melibatkan besaran-besaran vector memerlukan kajian analisis vektor bahkan sampai pada tataran yang cukup rumit. Hukum Newton F = ma dalam mekanika sering kita gunakan, besaran gaya F tersebut merupakan gaya resultan yang merupakan resultan semua gaya-gaya luar yang bekerja pada obyek. Contohnya, seorang pemanah menarik anak panah maka arah gerak anak panah ditentukan dengan menjumlahkan vektor dari gaya tarik tali di kedua ujung busur tersebut. ilustrasi yang berkaitan dengan arah dan jarak merupakan suatu vektor. Oleh karena itu, hal ini diharapkan dapat menumbuhkan minat mahasiswa untuk mempelajari materi vektor yang ada dalam Modul Penunjang Praktikum ILAB Aljabar Linear ini.

1.1 Definisi Vektor

Vektor adalah besaran yang mempunyai besar (nilai) dan arah. Vektor digambarkan dengan anak panah. Besar Vektor dinyatakan dengan **panjang** anak panah sedangkan arah vector dinyatakan dengan **arah** anak panah. Untuk vektor – vektor yang mempunyai arah dan panjang yang sama disebut ekivalen. Perhitungan vektor secara matematika adalah perpaduan antara aljabar dan geometri namun penekanannya lebih banyak ke aljabar daripada geometrinya.

Seperti yang sudah diketahui mengenai arti perpindahan, misalnya titik P kita pindahkan ke posisi yang lain menjadi titik Q. Pada perpindahan itu terkandung beberapa makna yaitu berapa jauh perpindahannya (jarak) serta ke arah mana perpindahannya. Perpindahan dari titik P ke titik Q tersebut dapat digambarkan dengan suatu anak panah yang berpangkal di P dan berujung di Q. Panjang ruas garis PQ menyatakan jauh perpindahannya, sedangkan mata panah menyatakan arah perpindahan. Anak panah yang menyatakan perpindahan itu disebut vektor. Jadi, **vektor** adalah besaran yang mempunyai besar dan arah. Sedangkan besaran-besaran seperti suhu yang hanya memiliki “besar” dan dapat dinyatakan dengan bilangan real disebut sebagai **skalar**.

Penulisan simbol atau lambang vektor tersebut juga dapat dilakukan dengan 2 cara antara lain sebagai berikut:

1. Vektor tersebut disimbolkan dengan dua huruf besar atau dengan satu huruf namun di atasnya diberi tanda anak panah. Seperti $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, dan sebagainya.
2. Vektor tersebut disimbolkan dengan dua huruf besar atau juga satu huruf yang ditebalkan. Seperti **a**, **b**, **PQ**, **RS**, dan sebagainya.

Untuk selanjutnya dalam modul ini akan digunakan penulisan vektor dengan satu huruf yang ditebalkan.

1.2 Operasi Vektor dan Skalar

Perhatikan dua vektor **u** dan **v** pada $\mathbf{R}^n$, misalnya

$\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ dan $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$

Terkadang suatu vektor pada ruang-n $\mathbf{R}^n$ ditulis secara vertical, dan bukan secara horizontal. Vektor semacam ini disebut vektor kolom. Dalam konteks ini, vektor yang ditulis secara horizontal tadi disebut vektor baris. Sehingga, vektor u dan v di atas dapat ditulis juga sebagai berikut.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Dua vektor **u** dan **v** dikatakan sama, apabila mempunyai banyak komponen yang sama dan masing-masing komponen yang bersesuaian letaknya, sama. Jumlah keduanya ditulis **u** + **v**, adalah vektor yang diperoleh dengan menjumlahkan komponen-komponen yang bersesuaian dari **u** dan **v**. Yaitu,

u + **v** = $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$

Hasil kali skalar atau sederhananya, hasil kali dari vektor **u** dengan suatu bilangan real k, ditulis k**u**, adalah vektor tang diperoleh dengan mengalikan setiap komponen dari **u** dengan k. Sehingga,

k**u** = $k(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = (ka_1, ka_2, ka_3, \dots, ka_n)$

Vektor negatif dan pengurangan pada $\mathbf{R}^n$ didefinisikan sebagai berikut:

-**u** = (-1)**u** dan **u** – **v** = **u** + (-**v**)

Vektor –**u** disebut sebagai negatif dari **u** dan **u** – **v** disebut sebagai selisih antara **u** dan **v**.

Dot produk dari vektor **u** dan **v** adalah

u.v = $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$

dan norm (panjang/besar) vektor **v** adalah:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}.\mathbf{v}} = \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2}$$

Dapat dicatat bahwa $\|\mathbf{v}\| = 0$ jika dan hanya jika **v** = 0 (vektor nol).

Contoh soal:

Diketahui: **p** = (3, 6, -2) dan **q** = (5, -7, 1)

Tentukanlah:
a. **p** + **q**
b. 7**p**
c. **p** – **q**
d. 3**q – **2**p**
e. **p.q**
f. $\|\mathbf{p}\|$

Jawab:

a. **p** + **q** = (3, 6, -2) + (5, -7, 1)
= (8, -1, -1)

b. 7**p** = 7 (3, 6, -2)
= (21, 42, -14)

c. **p** – **q** = (3, 6, -2) - (5, -7, 1)

= (-2, 13, -3)

d. 3**q – 2p** = 3(5, -7, 1) – 2(3, 6, -2)

= (15, -21, 3) – (6, 12, -4)

= (9, -33, 7)

e. **p.q** = (3, 6, -2).(5, -7, 1)

= 3.5 + 6.-7 + -2.1

= 15 – 42 –2

= -29

f. $\|\mathbf{p}\|$ = $\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}$

= $\sqrt{49}$

= 7

Rangkuman

- Vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah. Sedangkan besaran-besaran seperti suhu yang hanya memiliki "besar" dan dapat dinyatakan dengan bilangan real disebut sebagai skalar.
- Untuk vektor – vektor yang mempunyai arah dan panjang yang sama disebut ekivalen.
- Dua vektor **u** dan **v** dikatakan sama, apabila mempunyai banyak komponen yang sama dan masing-masing komponen yang bersesuaian letaknya, sama.
- Jika diketahui **u** = (a_1, a_2, a_3, …, a_n) dan **v** = (b_1, b_2, b_3, …, b_n), maka:

  (i) Penjumlahan dua buah vektor adalah **u** + **v** = $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$

  (ii) Hasil kali dari vektor **u** dengan suatu bilangan real k adalah

  k**u** = k(a_1, a_2, a_3, …, a_n) = (ka_1, ka_2, ka_3, …, ka_n)

  (iii) Dot produk dari vektor **u** dan **v** adalah **u.v** = $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$

  (iv) Norm (panjang/besar) vektor **v** adalah

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}.\mathbf{v}} = \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2}$$

Referensi

H.S., Suryadi. *Pengantar Aljabar Linier dan Geometri Analitik.* Jakarta: Gunadarma, 1996.

Kartika, Hendra. *Aljabar Matrik (Teori dan Aplikasinya dengan Scilab).* Yogyakarta: Deepublish, 2017.

Seymour Lipschutz, Marc Lipson. *Aljabar Linear Schaum Outlines.* Ketiga. Jakarta: Erlangga, 2004.