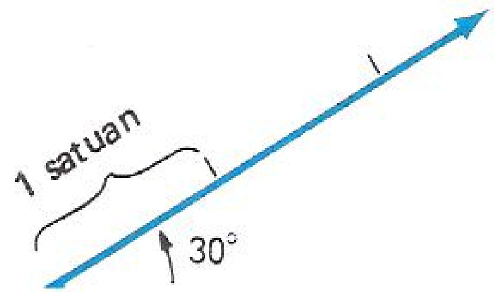
Vektor di R^2 dan R^3

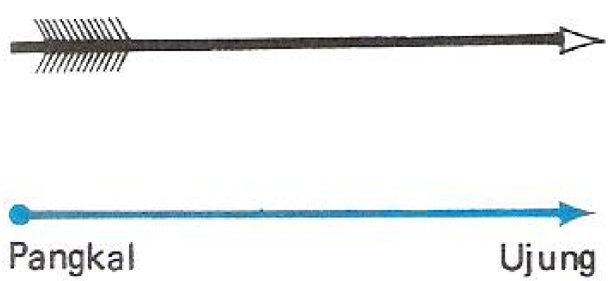
Dina Indarti

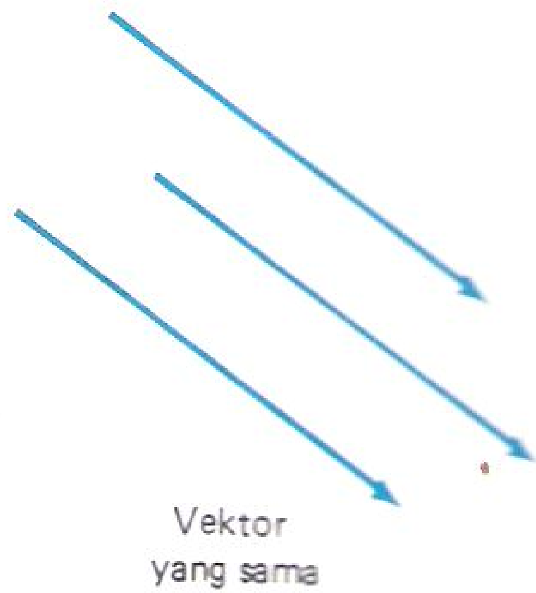
Pendahuluan

- Vektor dapat dinyatakan secara geometri sebagai suatu ruas garis berarah atau panah pada ruang dimensi 2 atau ruang dimensi 3.
- Panjang panah adalah besarnya vektor.
- Arah panah adalah arah dari vektor-vektor.
- Anak panah mempunyai pangkal dan ujung.
- Dua vektor dikatakan ekivalen jika memiliki panjang dan arah yang sama.
- Vektor biasa dinotasikan dengan huruf tebal, misalnya **u** dan **v**, atau dapat juga dengan $\vec{u}$ dan $\vec{v}$

Pendahuluan

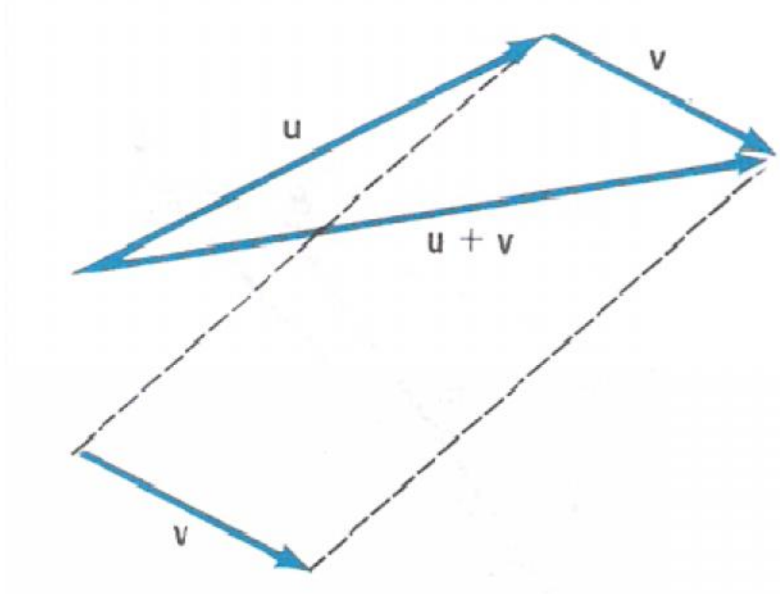




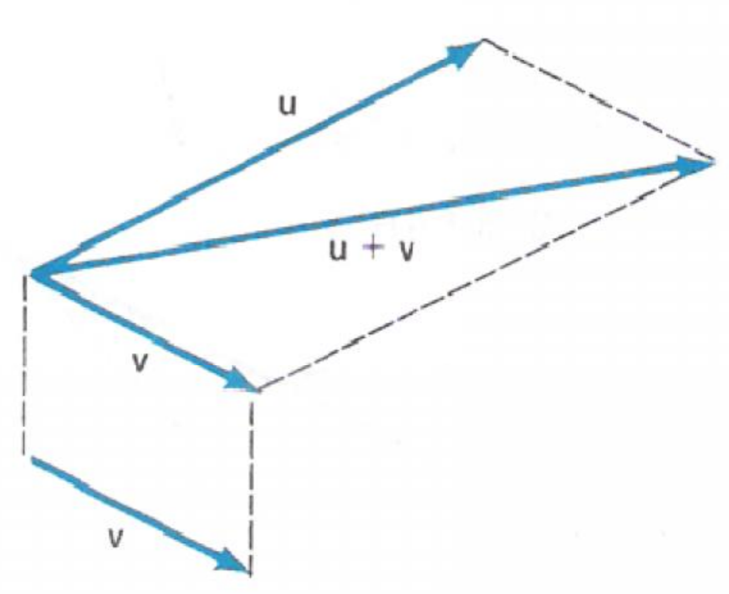


Pendahuluan

Penjumlahan Vektor Secara Geometris



(a)
Segitiga



(b)
Jajaran Genjang

Pendahuluan

Penjumlahan vektor bersifat komutatif dan asosiatif, yaitu:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

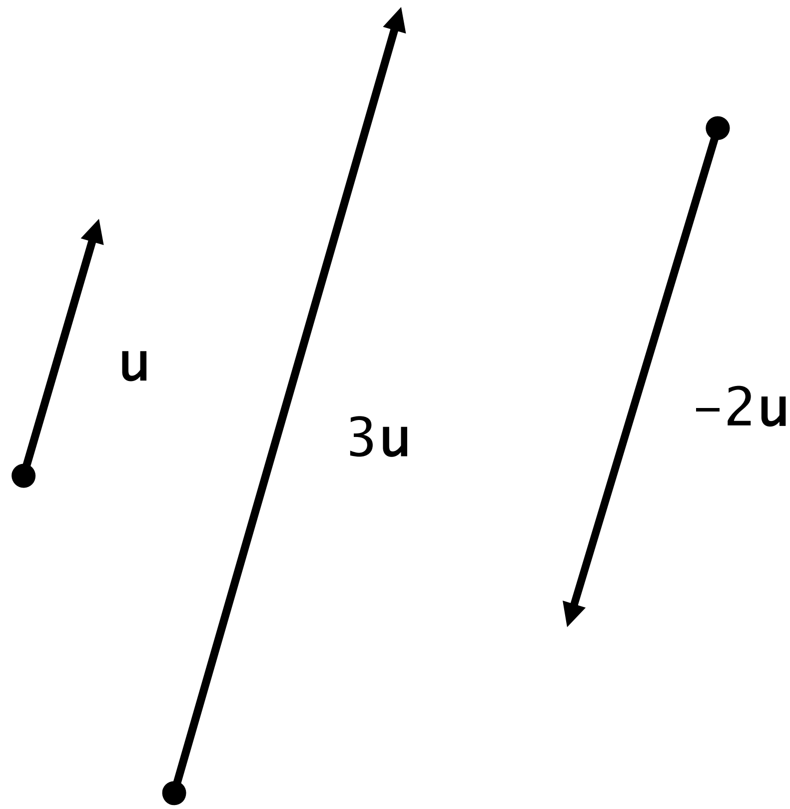
$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$c\mathbf{u}$ adalah kelipatan skalar vektor **u.**

panjang $c\mathbf{u}$ adalah $|c|$ dikali panjang **u.**

$c\mathbf{u}$ searah dengan **u** apabila c positif dan berlawanan arah bila c negatif.

Pendahuluan



Vektor di R^2

Diberikan vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\vec{w} = (w_1, w_2)$ dan sembarang bilangan k.

1. $\vec{v} = \vec{w}$ jika dan hanya jika $v_1 = w_1$ dan $v_2 = w_2$.
2. $\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$.
3. $\vec{v} - \vec{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2)$.
4. $k\,\vec{v} = (k\,v_1, k\,v_2)$.
5. Norm dari $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Catatan: hasil perhitungan dari norm vektor adalah suatu bilangan positif.

Vektor nol, $\vec{0} = (0, 0)$.

Vektor di R^2

Diberikan titik $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$.

1. $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.
2. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (perhatikan $d = ||\overrightarrow{P_1P_2}||$).

Vektor di R^3

Diberikan vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ dan sembarang bilangan k.

1. $\vec{v} = \vec{w}$ jika dan hanya jika $v_1 = w_1$, $v_2 = w_2$ dan $v_3 = w_3$.
2. $\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$.
3. $\vec{v} - \vec{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3)$.
4. $k\,\vec{v} = (k\,v_1, k\,v_2, k\,v_3)$.
5. Norm dari $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

Catatan: hasil perhitungan dari norm vektor adalah suatu bilangan positif.

Vektor nol, $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

Vektor di R^3

Diberikan titik $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

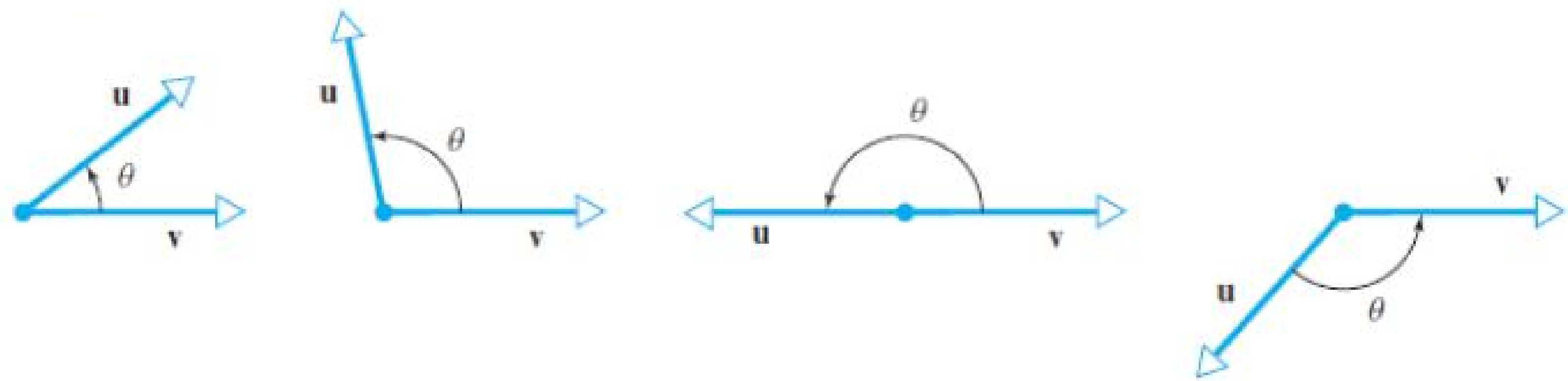
1. $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.
2. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ (perhatikan $d = ||\overrightarrow{P_1P_2}||$).

Hasil Kali Titik

Hasil kali titik (*dot product*) antara vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} ||\vec{u}||\ ||\vec{v}|| \cos\theta & \text{jika } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ dan } \vec{v} \neq \vec{0}, \\ 0 & \text{jika } \vec{u} = \vec{0} \text{ atau } \vec{v} = \vec{0}, \end{cases} \qquad (1)$$

dengan θ adalah sudut antara kedua vektor tersebut.



Catatan:

1. Hasil perhitungan dari hasil kali titik adalah bilangan.
2. $0 \leq \theta \leq \pi$.

Hasil Kali Titik

Jika $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\vec{w} = (w_1, w_2)$, maka

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1\, w_1 + v_2\, w_2. \tag{2}$$

Jika $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, maka

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1\, w_1 + v_2\, w_2 + v_3\, w_3. \tag{3}$$

Hasil Kali Titik

Theorem

Diberikan vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \tag{4}$$

Theorem

Misalkan $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ bukan vektor nol dan θ adalah sudut di antaranya.

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ *jika dan hanya jika θ adalah sudut lancip.*
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ *jika dan hanya jika θ adalah sudut tumpul.*
3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ *jika dan hanya jika $\theta = \pi/2$.*

Hasil Kali Titik

Tentukan b sehingga $\mathbf{u} = \langle 8,6 \rangle$ dan $\mathbf{v} = \langle 3, b \rangle$ tegaklurus

Penyelesaian

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (8)(3) + (6)(b) = 24 + 6b = 0$$

$$b = -4$$

Tentukan sudut antara $\mathbf{u} = \langle 8,6 \rangle$ dan $\mathbf{v} = \langle 5,12 \rangle$

Penyelesaian

$$\cos {}^{-} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{(8)(5) + (6)(12)}{(10)(13)} = \frac{112}{130} \approx 0,862$$

$${}^{-} = \arccos {}^{-} \approx 0,532 \text{ (atau } 30,5^{o})$$

Hasil Kali Titik

Theorem

Diberikan vektor $\vec{u}$, $\vec{v}$ dan $\vec{w}$ dan bilangan k, maka

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ *jika* $\vec{u} \neq \vec{0}$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ *jika* $\vec{u} = \vec{0}$

Hasil Kali Titik

Theorem

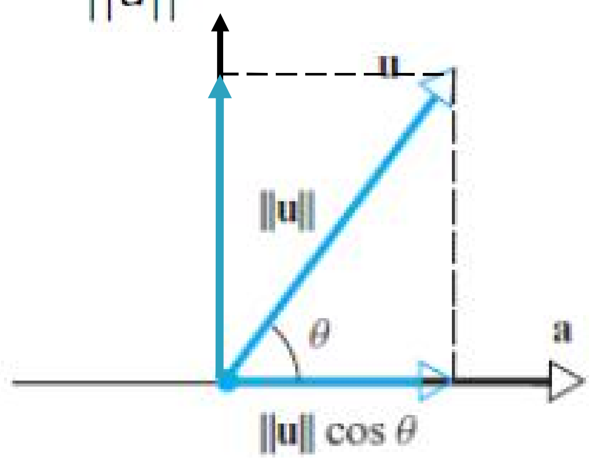
Diberikan vektor $\vec{u}$ dan $\vec{a}$. Jika $\vec{u} \neq \vec{0}$, maka

1. *Komponen vektor $\vec{u}$ pada $\vec{a}$*

$$proy_{\vec{a}}\, \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{||\vec{a}||^2}\, \vec{a} \tag{5}$$

2. *Komponen vektor $\vec{u}$ yang tegak lurus dengan $\vec{a}$*

$$\vec{u} - proy_{\vec{a}}\, \vec{u} = \vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{||\vec{a}||^2}\, \vec{a} \tag{6}$$



Hasil Kali Titik

Diberikan **u** = (2,-1,3) dan **a** = (4,-1,2). Tentukan Proj$_{\mathbf{a}}$**u** dan ||Proj$_{\mathbf{a}}$**u**|| !

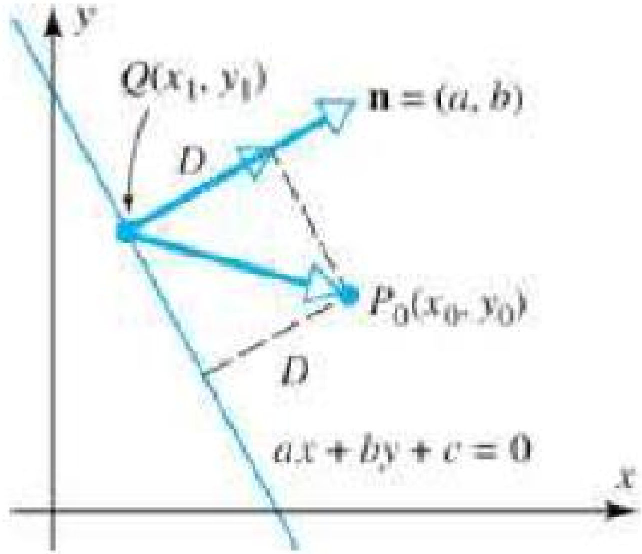
u.a = (2)(4)+(-1)(-1)+(3)(2) = 15

||**a**||^2 = 16+1+4 = 21

$$\text{Proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \left(\frac{60}{21}, -\frac{15}{21}, \frac{30}{21}\right) = \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right)$$

$$\|\ \text{Proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\ \| = \sqrt{\frac{400}{49} + \frac{25}{49} + \frac{100}{49}} = \sqrt{\frac{525}{49}} = \sqrt{\frac{75}{7}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{5}{7}\sqrt{21}$$

Hasil Kali Titik



Jarak titik $P(x_0, y_0)$ ke garis $ax + by + c = 0$

$$D = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{7}$$

Hasil Kali Silang

Misalkan $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j} + u_3\,\vec{k}$ dan
$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} + v_3\,\vec{k}$.

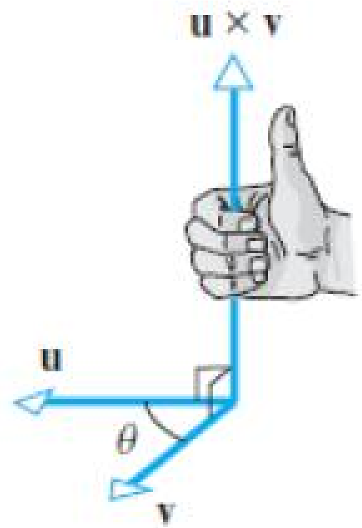
$\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$.

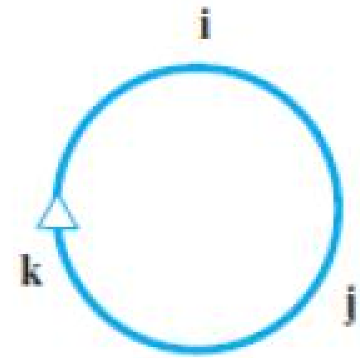
Hasil kali silang (*cross product*) antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} \;=\; \det\left(\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}\right) \tag{8}$$

1. Hasil kali silang hanya untuk vektor di ruang dimensi 3.
2. Hasil dari hasil kali silang adalah vektor.

Hasil Kali Silang





1. Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ tegak lurus dengan $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.
2. Arah vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ mengikuti Aturan Tangan Kanan.
3. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \;\; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \;\; \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$
4. $||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}|| \sin\theta$, yaitu luas jajar genjang yang dibentuk oleh vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.

Hasil Kali Silang

Theorem

Misalkan $\vec{u}, \vec{v}$ *dan* $\vec{w}$ *adalah vektor di ruang dimensi 3.*

1. $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$
2. $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$
3. $||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 \, ||\vec{v}||^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$
4. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$
5. $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$

Hasil Kali Silang

Theorem

Misalkan $\vec{u}, \vec{v}$ dan $\vec{w}$ adalah vektor di ruang dimensi 3, dan k adalah sembarang bilangan.

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
2. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$
4. $k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\,\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\,\vec{v})$
5. $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$
6. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

Hasil Kali Silang

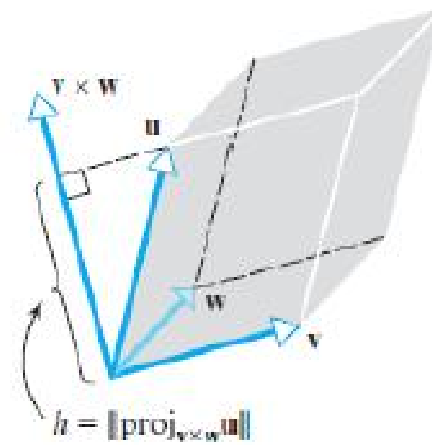
Jika $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dan $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, maka

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}\right) \tag{9}$$

disebut hasil kali tripel skalar (**scalar triple product**).

Catatan:

1. Hasil $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ adalah bilangan.
2. $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$: volume paralelepipedum yang dibentuk $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.



Hasil Kali Silang

Theorem

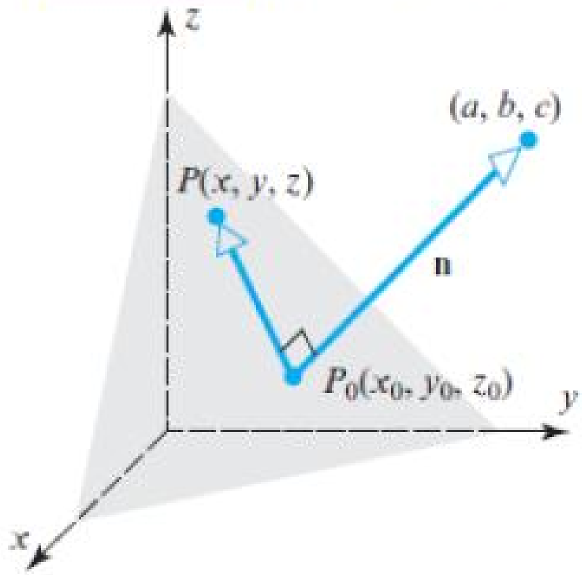
Misalkan $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *dan* $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ *mempunyai titik awal yang sama.*

Ketiga vektor tersebut terletak di bidang yang sama jika dan hanya jika

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Garis dan Bidang di R^3

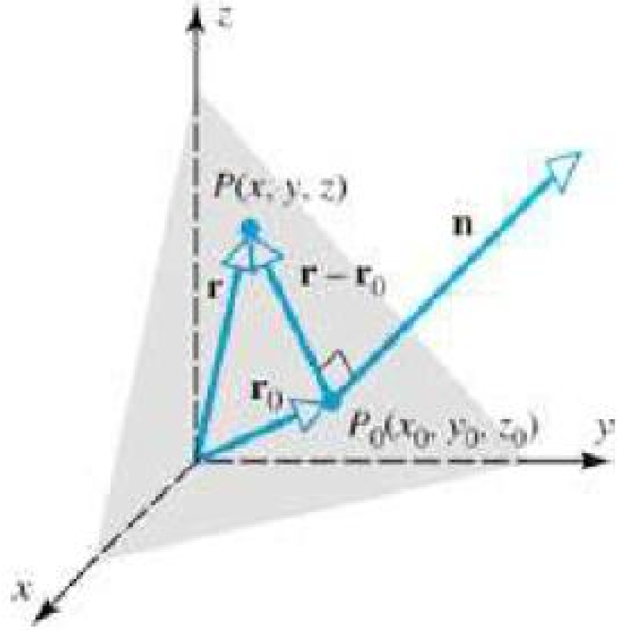
Vektor normal : vektor tak-nol yang tegak lurus suatu bidang.



Persamaan bidang yang melalui titik $P(x_0, y_0, z_0)$ dan mempunyai vektor normal $\vec{n} = (a, b, c)$:

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0. \qquad (10)$$

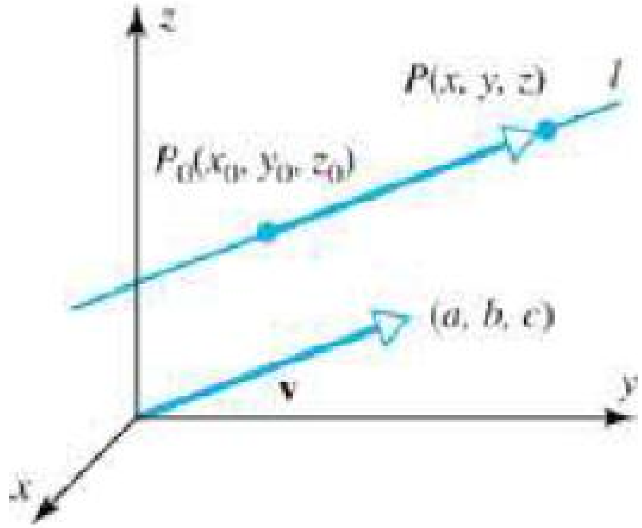
Garis dan Bidang di R^3



Titik $P(x, y, z)$ pada bidang; vektor posisi $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$.
Titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pada bidang; vektor posisi
$\vec{r_0} = \overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$.
Persamaan bidang dalam bentuk vektor:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0. \tag{11}$$

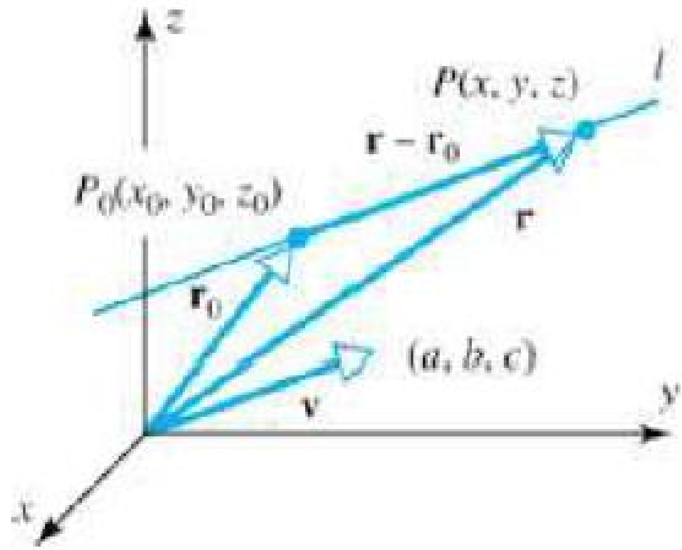
Garis dan Bidang di R^3



Persamaan parametrik garis yang melalui titik $P(x_0, y_0, z_0)$ dan mempunyai vektor arah $\vec{v} = (a, b, c)$:

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + a\,t, \\
y &= y_0 + b\,t, \\
z &= z_0 + c\,t.
\end{aligned}
$$

Garis dan Bidang di R³



Titik $P(x, y, z)$ pada garis l; vektor posisi $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$.
Titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pada garis l; vektor posisi
$\vec{r_0} = \overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$.
Persamaan garis dalam bentuk vektor:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\,\vec{v} = 0, \qquad (12)$$

dengan $-\infty < t < \infty$.