INVERS MATRIKS

5

Objektif :

1. Mahasiswa mampu mendefinisikan matriks invers
2. Mahasiswa mampu menghitung invers matriks ordo 2 x 2
3. Mahasiswa mampu menghitung invers matriks ordo 3 x 3
4. Mahasiswa mampu mengetahui sifat-sifat matriks invers
5. Mahasiswa mampu menghitung invers menggunakan scilab

Pendahuluan

Operasi pada matriks tidak didefinisikan operasi pembagian, sehingga operasi seperti A/B tidak ada. Namun, jika A matriks persegi, maka mungkin saja terdapat matriks B, sedemikian hingga A.B = I. Dalam permasalahan ini, matriks *B* merupakan "invers" dari *A* yang dituliskan dengan B = A^{-1} dan A dikatakan sebagai matriks *invertible* atau *nonsingular*. Notasi A/B atau A = 1/B tidak pernah digunakan.

Matriks persegi A dikatakan *invertible* atau *nonsingular* jika terdapat matriks B sedemikian hingga A.B = B.A = I, di mana I adalah matriks identitas. Matriks B merupakan matriks yang tunggal, sedemikian hingga, jika $A.B_1 = B_1.A = I$ dan $A.B_2 = B_2.A = I$, maka $B_1 = B_1.I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2$. Perhatikan bahwa, operasi ini merupakan operasi yang simetri, sehingga jika B invers dari A, maka A invers dari B.

5.1. Menentukan Invers Matriks

Invers matriks A berukuran n x n adalah matriks B berukuran n x n sedemikian hingga,

$$AB = BA = I$$

Pada persamaan di atas, B adalah invers dari A dan dituliskan A^{-1}. Jika matriks persegi A mempunyai invers, maka A dikatakan matriks invertible atau nonsingular.

Jika A tidak mempunyai invers, maka A dikatakan matriks singular. Untuk matriks identitas I, matriks I dikatakan invertible karena,

$$II = I$$

Contoh :

Periksa apakah kedua matriks B = $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ dan C = $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ merupakan invers untuk matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Jawab :

B invers dari A jika hanya jika AB = BA = I ; C invers dari A jika hanya jika AC = CA = I. Sehingga,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 1 \\ \frac{13}{3} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sedangkan,

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = CA.$$

Jadi, B bukan merupakan invers dari A, sedangkan C merupakan invers dari A. Sedemikian hingga $A^{-1} = C$.

5.2. Invers Matriks pada Ordo 2 x 2

Pada invers matriks berordo 2 dapat diperoleh dengan cara menukar elemen – elemen pada diagonal utamanya, memberikan tanda negatif pada elemen – elemen lainnya, dan membagi setiap elemen matriks dengan determinannya. Semisal suatu matriks diketahui A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Maka rumus invers.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Contoh :

Tentukan invers dari matriks A tersebut, A = $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$!

Jawab :

$$A^{-1} = \frac{1}{6.3-2.1}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{18-2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{2}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{6}{16} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{16} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}1875 & -0{,}125 \\ -0{,}0625 & 0{,}375 \end{bmatrix}$$

Contoh penulisan pada Scilab

```
Scilab 6.1.0 Console


Startup execution:
  loading initial environment

--> A = [6 2; 1 3]
 A  =

   6.   2.
   1.   3.

--> inv(A)
 ans  =

   0.1875  -0.125
  -0.0625   0.375
```

5.3. Invers Matriks pada Ordo 3 x 3

Cara untuk menentukan nilai invers matriks A dengan ordo 3 x 3 tidak sama dengan cara menentukan invers matriks dengan ordo 2 x 2. Cara menentukan invers matriks ordo

3 x 3 lebih rumit dari cara menentukan invers matriks 2 x 2. Sebelum menentukan invers matriks ordo 3 x 3, perlu dipahami terlebih dahulu mengenai matriks minor, kofaktor, dan adjoin.

a. Matriks Minor

Diketahui sebuah matriks A berordo 3 x 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriks minor M_{ij} adalah matriks yang diperoleh dengan cara menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A sehingga diperoleh matriks minor berordo 2 seperti persamaan di bawah

Matriks M_{ij} dari matriks A

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

b. Kofaktor

Kofaktor baris ke-i dan kolom ke-j disimbolkan dengan C_{ij} dapat ditentukan dengan rumus seperti terlihat di bawah.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = |M_{11}| \qquad C_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = -|M_{23}|$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -|M_{12}| \qquad C_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = |M_{31}|$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = |M_{13}| \qquad C_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = -|M_{32}|$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = -|M_{21}| \qquad C_{33} = (-1)^{3+3}|M_{33}| = |M_{33}|$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = |M_{22}|$$

Kofaktor di atas akan digunakan untuk menentukan adjoin matriks yang akan dicari nilai inversnya.

c. Adjoin

Secara umum, sebuah matriks memiliki matriks adjoin seperti ditunjukkan pada matriks di bawah.

$$\text{Adj (A)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Keterangan: C_{ij} adalah kofaktor baris ke-i dan kolom ke-j. Sehingga, adjoin dari matriks A dinyatakan seperti terlihat pada persamaan di bawah.

$$\text{Adj (A)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

d. Invers matriks ordo 3 x 3

Matriks minor, kofaktor, dan adjoin yang telah kita bahas di atas berguna untuk menentukan nilai invers dari suatu matriks dengan ordo matriks di atas 3 atau lebih.

Rumus invers Matriks

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{Adj (A)}$$

Contoh :

Tentukan invers matriks A dibawah ini !

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Jawab :

1. Langkah pertama mencari determinan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

|A| = (3 x 6 x (-3)) + (-2 x 2 x 1) + (1 x 5 x 0) – (-2 x 5 x (-3) – (3 x 2 x 0) – (1 x 6 x 1)

|A| = (-54) + (-4) + (0) – (30) – (0) – (6)

|A| = - 94

2. Langkah kedua menentukan kofaktor

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

C_{11} = $|M_{11}|$ = $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$ = (-18 – 0) = -18

C_{12} = -$|M_{12}|$ = - $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$ = - (-15 – 2) = - (-17) = 17

C_{13} = $|M_{13}|$ = $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ = (0 – 6) = -6

C_{21} = -$|M_{21}|$ = - $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$ = - (6 – 0) = - (6) = -6

C_{22} = $|M_{22}|$ = $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$ = (-9 -1) = -10

C_{23} = -$|M_{23}|$ = - $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ = - (0 – (-2) = - (0 + 2) = - (2) = -2

C_{31} = $|M_{31}|$ = $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$ = (-4 – 6) = -10

C_{32} = -$|M_{32}|$ = - $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ = - (6 – 5) = – (1) = -1

C_{33} = $|M_{33}|$ = $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ = (18 – (-10) = (18 + 10) = 28

$$\text{Kof}(A) = \begin{bmatrix} -18 & 17 & -6 \\ -6 & -10 & -2 \\ -10 & -1 & 28 \end{bmatrix}$$

3. Menentukan Adjoin A

$$\text{Kof}(A) = \begin{bmatrix} -18 & 17 & -6 \\ -6 & -10 & -2 \\ -10 & -1 & 28 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Kof}(A)^T = \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

4. Menentukan Invers Matriks A

$$A^{-1} = \frac{1}{-94}\begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{18}{94} & \frac{6}{94} & \frac{10}{94} \\ -\frac{17}{94} & \frac{10}{94} & \frac{1}{94} \\ \frac{6}{94} & \frac{2}{94} & -\frac{28}{94} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{47} & \frac{3}{47} & \frac{5}{47} \\ -\frac{17}{94} & \frac{5}{47} & \frac{1}{94} \\ \frac{3}{47} & \frac{1}{47} & -\frac{14}{47} \end{bmatrix}$$

Contoh penulisan pada Scilab

```
Scilab 6.1.0 Console


Startup execution:
  loading initial environment

--> A = [3 -2 1;5 6 2;1 0 -3]
 A  =

   3.  -2.   1.
   5.   6.   2.
   1.   0.  -3.

--> inv (A)
 ans  =

   0.1914894   0.0638298   0.106383
  -0.1808511   0.106383    0.0106383
   0.0638298   0.0212766  -0.2978723
```

5.4. Sifat – Sifat Invers Matriks

Jika A, B dan C matriks persegi dengan ordo yang sama di mana A x B = I dan C x A = I, maka B = C.

Bukti

C = C . I = C . (A . B) = (C . A) . B = I . B = B

Invers suatu matriks bersifat unik

Bukti

Misal A dan B invers dari A. Maka,

A . B = I, B . A = I, A . C = I, dan C . A = I.

Sehingga B = C. Jika kedua matriks B dan C merupakan Invers A, maka kedua matriks tersebut haruslah sama. Sedemikian hingga, Invers matriks bersifat unik.

Jika A matriks 2 x 2 dengan A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. A dikatakan *nonsingular* jika hanya jika ad – bc ≠ 0. Sedemikian hingga, invers dari A adalah $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Sifat – sifat invers matriks

Misal, A dan B matriks persegi dengan A dan B matriks *nonsingular*, maka :

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A_1A_2\ldots.A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1} \ldots A_2^{-1}A_1$
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5. $(kA)^{-1} = \left[\frac{1}{k}\right](A^{-1})$ Jika skalar k ≠ 0
6. $A^{-n} = (A^{-1})^n$
7. Invers dari matriks simetri *nonsingular* adalah simetri
8. Invers dari matriks segitiga atas atau bawah *nonsingular* juga merupakan matriks segitiga atas atau bawah

Contoh :

Tentukan A^{-2} jika A = $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Jawab :

$A^{-n} = (A^{-1})^n$

$$A^{-1} = \frac{1}{6-(-4)}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{20} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

Rangkuman

1. Menentukan matriks invers berordo 2x2 pada matriks A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan menggunakan rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

2. Menentukan matriks invers berordo 3x3 dengan menggunakan rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \,.\, \mathrm{Adj}\ (A)$$

3. A dan B matriks persegi dengan A dan B matriks *nonsingular*, maka :
   - $(A^{-1})^{-1} = A$
   - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
   - $(A_1A_2\ldots .A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1} \ldots A_2^{-1}A_1$
   - $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
   - $(kA)^{-1} = \left[\frac{1}{k}\right](A^{-1})$ Jika skalar $k \neq 0$
   - $A^{-n} = (A^{-1})^n$
   - Invers dari matriks simetri *nonsingular* adalah simetri
   - Invers dari matriks segitiga atas atau bawah *nonsingular* juga merupakan matriks segitiga atas atau bawah

Referensi

H.S., Suryadi. Pengantar Aljabar Linier dan Geometri Analitik. Jakarta: Gunadarma, 1996.

Kartika, Hendra. Aljabar Matrik (Teori dan Aplikasinya dengan Scilab). Yogyakarta: Deepublish, 2017.

Seymour Lipschutz, Marc Lipson. Aljabar Linear Schaum Outlines. Ketiga. Jakarta: Erlangga, 2004.

Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S., Agus S. Matematika Dasar Perguruan Tinggi. Bogor: Ghalia-Indonesia, 2011.