NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

7

Objektif :

1. Mengenal dan menghitung nilai eigen dan vektor eigen
2. Menghitung nilai eigen dan vektor eigen dengan scilab

Pendahuluan

Pada bab kali ini akan dibahas mengenai Nilai Eigen dan Vektor Eigen, mulai dari definisi, beberapa manfaat Nilai dan Vektor Eigen dalam kehidupan, dan mencari Nilai eigen serta Vektor eigen dengan cara manual dan menggunakan aplikasi Scilab. namun sebelum itu untuk membedakan antara skalar atau bilangan, vektor dan matriks digunakan ketentuan sebagai berikut:

1. Skalar atau bilangan menggunakan huruf kecil seperti: a, b, c, . . . , z.
2. Vektor menggunakan huruf kecil yang dicetak tebal, seperti: **a, b, c, … , z.**
3. Vektor ruang disimbolkan dengan: $\mathbb{R}^n$
4. Matriks menggunakan huruf kapital, seperti: A, B, C, . . . , Z.

7.1 Definisi Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai Eigen dan Vektor Eigen merupakan karakteristik dari sebuah matriks. Hal ini karena vektor Eigen dapat mewakili matriks yang bersangkutan. Jika diketahui A adalah matriks berukuran n x n, maka vektor tak nol u di $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A jika $\mathrm{A}\mathbf{u}$ adalah kelipatan skalar dari **u** atau dapat ditulis dengan bentuk:

$$A\mathrm{u} = \lambda I\mathbf{u}, \qquad \textbf{(Persamaan 1)}$$

Untuk suatu skalar λ.

Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan vektor **u** adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ [Anton, 1994].

Nilai eigen dari matriks A dapat ditentukan dengan menuliskan **persamaan 1** dalam bentuk:

$$A\mathrm{u} = \lambda I\mathbf{u},$$

$$A\mathbf{u} - \lambda I\mathbf{u} = 0\,,$$

$$(A - \lambda I)\mathrm{u} = \mathbf{0}. \qquad \textbf{(Persamaan 2)}$$

Persamaan 2 membentuk sistem persamaan linear homogen, persamaan ini akan mempunyai solusi tidak nol jika dan hanya jika:

$$\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) = 0 \qquad \textbf{(Persamaan 3)}$$

Persamaan 3 disebut persamaan karakteristik dari A. Nilai skalar λ yang memenuhi persamaan 3 disebut nilai eigen dari A. Untuk nilai λ tertentu, solusi dari persamaan 3, yaitu vektor **u** , dapat dicari dan vektor **u** yang diperoleh disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai λ tertentu.

Contoh 1:

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$!

Jawab:

a. Menentukan nilai eigen

Untuk mendapatkan nilai eigen gunakan persamaan 3 dimana I adalah matriks identitas bujur sangkar berdimensi 2 adalah $\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, sehingga:

$$\det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$(3 - \lambda) \cdot (-1 - \lambda) = 0$, maka jika dijabarkan menjadi persamaan karakteristik dari matriks A yaitu $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. Sehingga nilai eigen pada matriks A yaitu

$$(3 - \lambda) = 0 \text{ atau } (-1 - \lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 3$ atau $\lambda_2 = -1$ jadi nilai eigen dari matriks A adalah 3 dan -1.

b. Menentukan vektor eigen berdasarkan nilai eigen.

Vektor eigen dapat ditentukan dengan mensubstitusi masing-masing nilai eigen ke dalam persamaan 2 seperti berikut ini:

a) Untuk nilai eigen $\lambda_1 = 3$, persamaan 2 menjadi:

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ 8 & -1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

ini adalah sistem persamaan linear (SPL) homogen. Solusi dari SPL tersebut dapat ditentukan dengan

$$8u_1 - 4u_2 = 0$$

$$u_2 = 2u_1$$

SPL ini memiliki banyak solusi, dengan memisalkan u_1= t adalah sembarang bilangan, maka solusi SPL tersebut adalah

$$u_1 = t$$

$$u_2 = 2t$$

Atau dapat ditulis sebagai $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$t. Jadi diperoleh vektor eigen

untuk matriks A dengan nilai eigen $\lambda_1 = 3$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

b) Untuk nilai eigen $\lambda_1 = -1$, persamaan 2 menjadi

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ 8 & -1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

Ini adalah sistem persamaan linier (SPL) homogen. Karena baris 1 merupakan kelipatan baris 2, maka dapat dipilih salah satu baris untuk mendapatkan solusi SPL tersebut. Solusi dari SPL tersebut dapat ditentukan dengan

$$4u_1 = 0$$
$$8u_1 = 0$$

SPL ini mempunyai banyak solusi, dengan memisalkan

$u_2 = \text{t}$ adalah sembarang bilangan, maka solusi SPL tersebut adalah

$$u_1 = 0$$
$$u_2 = t$$

Atau dapat ditulis sebagai $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$. Jadi diperoleh vektor eigen untuk matriks A dengan nilai eigen $\lambda_1 =$ -1 adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Contoh 2:

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$!

Jawab:

a. Menentukan Nilai Eigen

Untuk menentukan nilai eigen dapat menggunakan persamaan 3, dengan matriks identitas untuk matriks bujur sangkar berdimensi 3 adalah $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, sehingga persamaan 3 untuk contoh ini adalah

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Dengan menggunakan ekspansi baris ketiga untuk mencari determinan, maka persamaan diatas menjadi

$$1\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2-\lambda & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + (3-\lambda)\begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$1(0-(-4+2\lambda) + 0 + (3-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)) = 0$$

$$4 - 2\lambda + (3-\lambda)(-2\lambda + \lambda^2) = 0$$

$$4 - 2\lambda - 6\lambda + 3\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

$$4 - 2\lambda - 6\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0, \text{atau}$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

Persamaan di atas adalah persamaan karakteristik dari matriks A. Nilai λ yang memenuhi persamaan karakteristik atau nilai akar persamaan adalah nilai eigen dari matriks A. Karena konstanta pada persamaan di atasa adalah −4, maka nilai akar persamaan yang mungkin adalah faktor-faktor dari −4 yaitu ±1, ±2, dan ±4. Persamaan diatas dapat diperoleh dengan mensubstitusi faktor-fakor dari −4 yang memenuhi persamaannya atau dapat juga dilakukan pemfaktoran. Faktorisasi dari persamaan di atas adalah

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 2) = 0$$
$$\lambda - 1 = 0, atau\ \lambda - 2 = 0$$
$$\lambda_1 = 1\ atau\ \lambda_2 = 2$$

Jadi nilai eigen dari matriks A adalah 1 dan 2

b. Menentukan Vektor Eigen berdasarkan nilai eigen

Vektor eigen dapat ditentukan dengan mensubstitusi masing-masing nilai eigen ke dalam persamaan 2.

- Untuk nilai eigen, $\lambda_1 = 1$, persamaan 2 menjadi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0$$

Ini adalah sistem persamaan linier (SPL) homogen. Karena baris ketiga merupakan kelipatan dari baris pertama, maka beris ketiga tidak digunakan dalam penentuan solusi SPL di atas. Solusi dari SPL tersebut dapat ditentukan dengan

$$-u_1 - 2u_3 = 0$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

SPL ini mempunyai banyak solusi, dengan memisalkan $u_3 = t$ adalah sembarang bilangan, maka solusi SPL tersebut adalah

$$\mathrm{u}_1 = -2\mathrm{t}$$

$$\mathrm{u}_2 = -\mathrm{u}_1 - \mathrm{u}_3 = 2\mathrm{t} - \mathrm{t} = \mathrm{t}$$

Atau dapat ditulis sebagai $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$ Jadi diperoleh vektor eigen untuk

matriks A dengan nilai eigen $\lambda_1 = 1$ adalah $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- Untuk nilai eigen, $\lambda_1 = 2$, persamaan 2 menjadi

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0$$

Ini adalah sistem persamaan linier (SPL) homogen. Karena baris kesatu merupakan kelipatan baris ke dua atau ke tiga dan baris kedua sama dengan baris ketiga, maka dipilih satu baris untuk mendapatkan solusi SPL di atas. Solusi dari SPL tersebut dapat ditentukan dengan

$$-2u_1 - 2u_3 = 0$$

SPL ini mempunyai banyak solusi, dengan memisalkan $u_2 = t$ dan $u_3 = s$ adalah sembarang bilangan, maka solusi SPL tersebut adalah

$$u_1 = -u_3 = -s$$

$$u_2 = t$$

$$u_3 = s$$

Atau dapat ditulis sebagai $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$. Jadi diperoleh vektor eigen untuk matriks A dengan

nilai eigen $\lambda_2 = 2$ adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

7.2 Penggunaan Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Scilab

Sebelum masuk dalam penggunaan nilai eigen dan vektor eigen pada Scilab berikut adalah beberapa contoh penggunaan nilai eigen dan vektor eigen dalam kehidupan dan cara mendapatkan nilai eigen dan vektor eigen pada aplikasi Scilab.

1. Pada bidang Pengolahan Video; vektor eigen dominan (vektor eigen dari nilai eigen terbesar) dari matriks kovariansi yang dibangun dari sebuah video yang dinyatakan dalam bentuk matriks dapat menghasilkan sebuah video yang hanya mengandung objek-objek latar belakang [Sari, I., Juarna, A., Harmanto, S., & kerami, D, 2018].
2. Pada bidang Pengolahan Citra; vektor eigen digunakan untuk pengenalan wajah[Turk, M. & Pentland, A., 1991].
3. Pada bidang Pengambilan Keputusan; salah satu metode pengambilan keputusan yaitu Analytical Hierarchy Process (AHP) dapat menggunakan nilai dan vektor eigen dalam menentukan vektor prioritas [Hafiyusoleh, M., Asyhar, A. H., Komaria, R., 2015].
4. Dalam bidang Fisika; Tegangan-tegangan utama yang bekerja pada sebuah sistem tegangan, nilainya sama dengan nilai-nilai eigen dari matrik tegangannya [Arief, S. 2015].

Selain empat contoh di atas, masih banyak kegunaan nilai eigen dan vektor eigen. Oleh karena itu, sangat penting bagi mahasiswa untuk mempelajari nilai eigen dan vektor eigen.

Nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A dapat dihitung dengan fungsi "**spec**" yang mempunyai sintaks sebagai berikut :

lambda = spec(A),

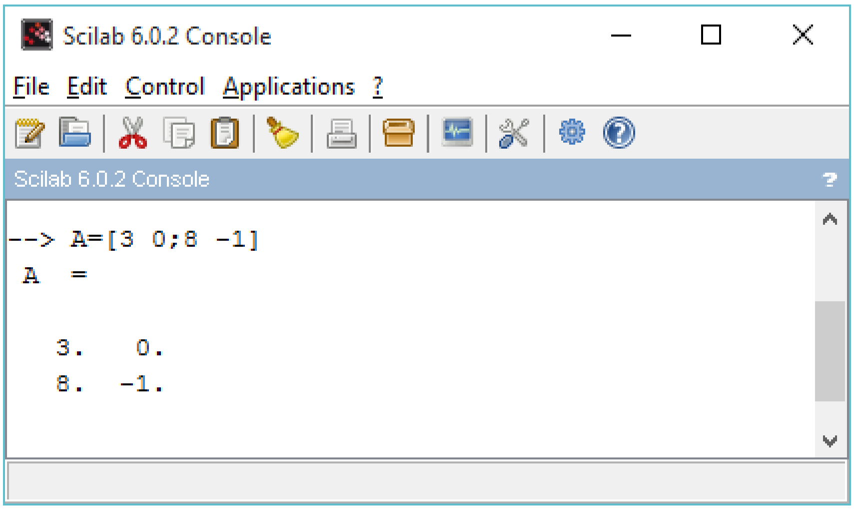
[U, lambda] = spec(A)

Contoh 1:

Dengan menggunakan Scilab tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$!

Jawab:

a. Langkah pertama yaitu mendefinisikan matriks A kedalam aplikasi Scilab.

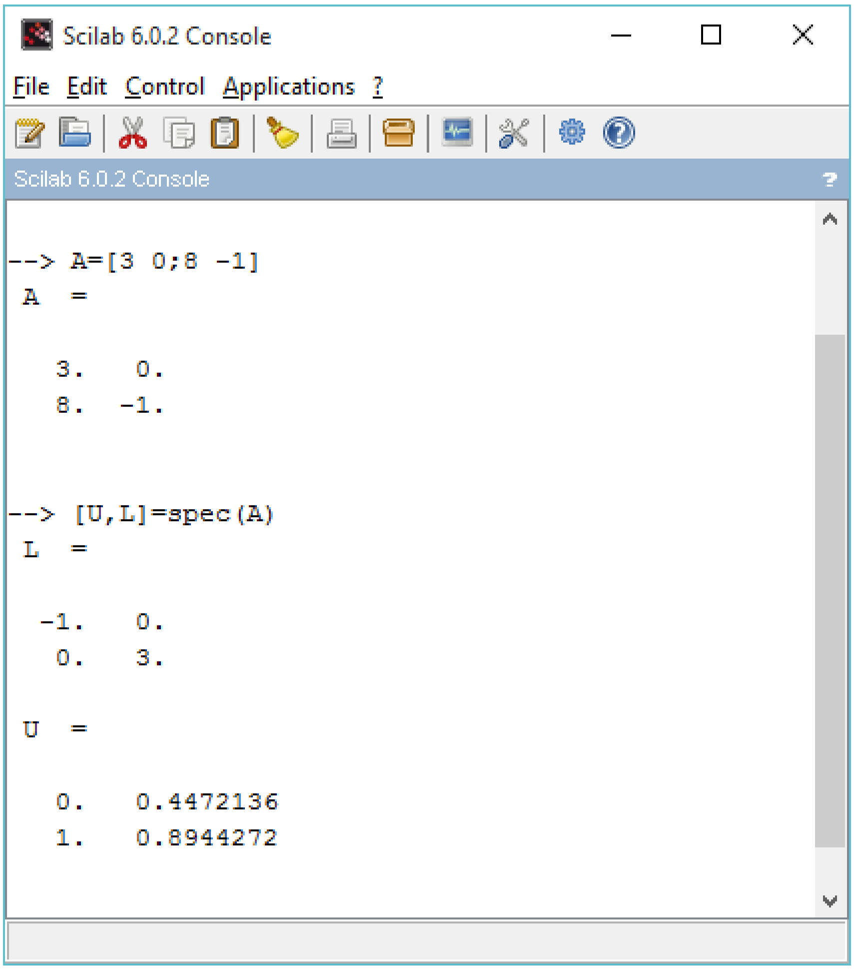


b. Menerapkan fungsi "**spec**" yang ada pada Scilab terhadap matriks A.

Spec(A) adalah fungsi pada Scilab untuk mendapatkan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A.

[U,L]= spec(A) maksudnya adalah vektor eigen dari matriks A disimpan dalam matriks U, sedangkan nilai eigen dari matriks A disimpan dalam matriks L yang merupakan matriks diagonal, dengan elemen-elemen diagonalnya adalah nilai-

nilai eigen dari matriks A.



c. Berdasarkan hasil output Scilab diperoleh vektor eigen untuk nilai eigen $\lambda_1 = -1$ adalah $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ dan vektor eigen untuk nilai eigen $\lambda_2 = 3$ adalah $\begin{bmatrix}0.4472136\\0.8944272\end{bmatrix}$ dapat dinyatakan juga $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ karena $\begin{bmatrix}0.4472136\\0.8944272\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}0.4472136.$

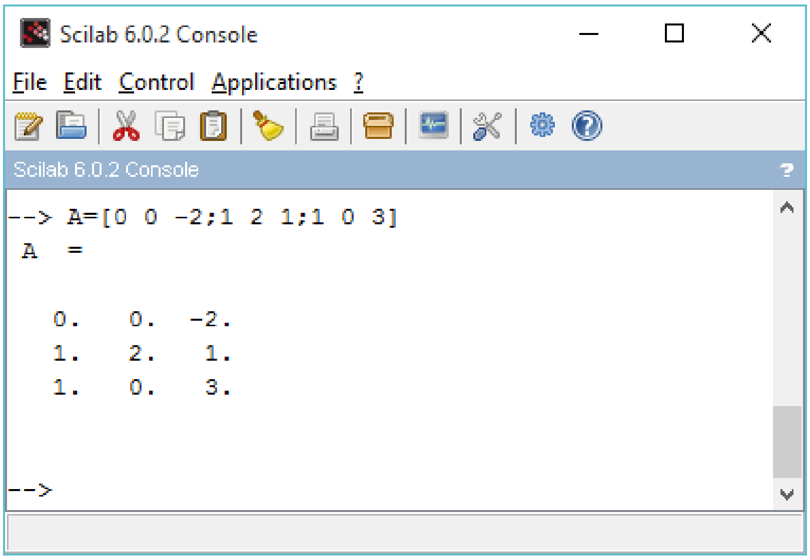
Contoh 2:

Dengan menggunakan Scilab tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks

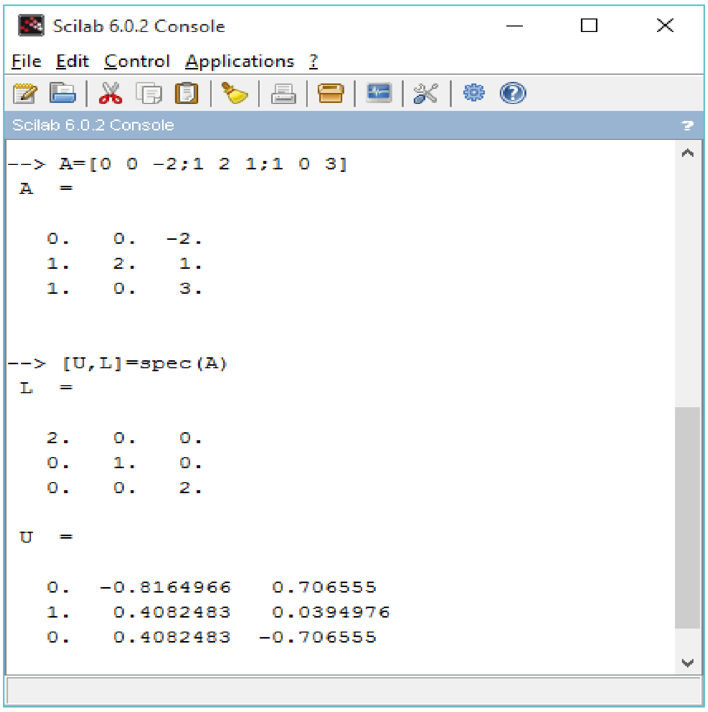
$$A = \begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\1 & 2 & 1\\1 & 0 & 3\end{bmatrix}!$$

Jawab:

a. Definisikan terlebih dahulu matriks A pada Scilab.



b. Menerapkan fungsi “spec” yang ada dalam Scilab terhadap matriks A.



c. Berdasarkan output di atas diperoleh nilai-nilai eigen matriks A adalah $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 2$, kemudian vektor-vektor eigen dari matriks A adalah vektor-vektor kolom matriks U yang bersesuaian dengan nilai eigen pada matriks L. Jadi, vektor eigen untuk nilai eigen $\lambda_1 = 2$ adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, vektor eigen untuk nilai eigen λ_2 = 1 adalah $\begin{bmatrix} -0.8164966 \\ 0.4082483 \\ 0.4082483 \end{bmatrix}$, dan vektor eigen untuk nilai eigen λ_3 = 2 adalah $\begin{bmatrix} 0.706555 \\ 0.0394976 \\ -0.706555 \end{bmatrix}$, Scilab atau aplikasi yang lain seperti Matlab cenderung memberikan hasil elemen-elemen vektor eigen berupa desimal, sedangkan jika dilakukan perhitungan secara analitik elemen-elemen vektor eigen lebih umum menghasilkan bilangan bulat. Jika setiap elemen pada vektor eigen merupakan kelipatan maka vektor eigen tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk lain. Perhatikan elemen-elemen vektor eigen yang dihasilkan pada contoh ini. Elemen-elemen vektornya saling berkelipatan sehingga vektor-vektor eigennya dapat dinyatakan sebagai berikut:

nilai eigen λ_1 = 2 adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

nilai eigen λ_2 = 1 adalah $\begin{bmatrix} -0.8164966 \\ 0.4082483 \\ 0.4082483 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 0.4082483$,

nilai eigen λ_3 = 2 adalah $\begin{bmatrix} 0.706555 \\ 0.0394976 \\ -0.706555 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.06 \\ -1 \end{bmatrix} 0.706555$,

sehingga dapat juga disimpulkan bahwa vektor eigen untuk nilai eigen λ_1 = 2 adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, nilai eigen λ_2 = 1 adalah $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, nilai eigen λ_3 = 2 adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.06 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Rangkuman

1. Nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A dapat dihitung dengan menggunakan persamaan karakteristik dari matriks A, yaitu : $\det(A - \lambda I) = 0$ Nilai skalar λ yang memenuhi persamaan karakteristik disebut nilai eigen dari A. Untuk nilai λ tertentu, solusi dari persamaan karakteristik yaitu vektor $\boldsymbol{u}$, dapat dicari dan vektor $\boldsymbol{u}$ yang diperoleh disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai λ tertentu.
2. Pada software Scilab, nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A dapat dihitung dengan fungsi "spec" yang mempunyai sintaks sebagai berikut : $\mathrm{lambda} = \mathrm{spec(A)}$, $[\mathrm{U}, \mathrm{lambda}] = \mathrm{spec(A)}$.

Referensi

H.S., Suryadi. Pengantar Aljabar Linier dan Geometri Analitik. Jakarta: Gunadarma, 1996.

Kartika, Hendra. Aljabar Matrik (Teori dan Aplikasinya dengan Scilab). Yogyakarta: Deepublish, 2017.

Seymour Lipschutz, Marc Lipson. Aljabar Linear Schaum Outlines. Ketiga. Jakarta: Erlangga, 2004.

Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S., Agus S. Matematika Dasar Perguruan Tinggi. Bogor: Ghalia-Indonesia, 2011.

Dr., Ahmad Sabri. Nilai Eigen dan Vektor Eigen. Jakarta:Gunadarma, 2011.