

Relasi Rekurensi

- Relasi rekurensi adalah sebuah formula rekursif dimana setiap bagian dari suatu barisan dapat ditentukan menggunakan satu atau lebih bagian sebelumnya
- Jika a_k adalah banyak cara untuk menjalankan prosedur dengan k objek, untuk $k = 0, 1, 2, \dots$, maka relasi rekurensi adalah sebuah persamaan yang menyatakan a_n sebagai sebuah fungsi dari a_k untuk $k < n$

Contoh:

- $a_n = 2a_{n-1}$
- $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_ra_{n-r}$ dengan c_i konstanta
- $a_n = ca_{n-1} + f(n)$ dengan $f(n)$ sembarang fungsi dari n
- $a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \dots + a_{n-1}a_0$
- $a_{n,m} = a_{n-1,m} + a_{n-1,m-1}$

Nilai a_n tidak akan pernah dapat dicari jika suatu **nilai awal** tidak diberikan. Jika suatu relasi rekurensi melibatkan r buah a_k , maka r buah nilai awal a_0, a_1, \dots, a_{r-1} harus diketahui. Sebagai contoh, pada relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, tidak cukup hanya diketahui sebuah nilai $a_0 = 2$, akan tetapi butuh sebuah nilai lagi yaitu misal $a_1 = 3$. Dengan demikian $a_2 = a_1 + a_0 = 3 + 2 = 5$; $a_3 = a_2 + a_1 = 5 + 3 = 8$; $a_4 = a_3 + a_2 = 8 + 5 = 13$; dan seterusnya dapat diketahui.

Jika model relasi rekurensi dapat ditemukan untuk menyatakan sebuah permasalahan "counting" serta kondisi nilai awal diberikan, maka biasanya masalah tersebut dapat diselesaikan untuk jumlah n yang tidak terlalu besar, misalkan $n = 20$. Jika masalah terlalu besar, maka dibutuhkan alat bantu seperti kalkulator atau komputer.

Untuk beberapa bentuk relasi rekurensi tertentu, formula eksplisit untuk a_n dapat ditentukan. Akan tetapi biasanya akan lebih mudah menemukan nilai yang diinginkan secara rekursif ketimbang menggunakan formula eksplisit.

Contoh 1: (*Arrangements*)

Tentukan relasi rekurensi untuk menentukan banyaknya cara menyusun n buah objek yang berbeda dalam suatu barisan. Tentukan banyaknya cara untuk menyusun 8 buah objek.

Jawab:

Misalkan a_n menyatakan banyaknya cara menyusun n objek yang berbeda, maka ada n cara meletakkan n objek pada urutan pertama di barisan. Dengan cara yang sama untuk a_{n-1} , maka ada $n-1$ cara. Oleh karena itu formula relasi rekurensi dapat dinyatakan sebagai $a_n = n a_{n-1}$

$$a_n = n a_{n-1} = n[(n-1)a_{n-2}] = \cdots = n(n-1)(n-2) \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

Jadi $a_8 = 8!$

Contoh 2: (*Climbing Stairs*)

Sebuah rumah memiliki tangga dengan n buah anak tangga untuk dinaiki. Setiap langkah dapat melewati satu atau dua anak tangga. Tentukan relasi rekurensi untuk a_n , banyaknya cara berbeda seseorang dapat menaiki n buah anak tangga.

Jawab:

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 2, \text{ yaitu } 1,1 \text{ atau } 2$$

$$a_3 = 3, \text{ yaitu } 1,1,1 \text{ atau } 1,2 \text{ atau } 2,1$$

$$a_4 = 5, \text{ yaitu } 1,1,1,1 \text{ atau } 1,2,1 \text{ atau } 1,1,2 \text{ atau } 2,2 \text{ atau } 2,1,1$$

Apakah dapat ditentukan cara yang sistematis dalam mengenumerasi cara untuk menaiki empat anak tangga dimana banyak cara menaiki tiga atau kurang anak tangga dilibatkan?

Sangat jelas terlihat bahwa ketika sebuah langkah dijalankan, maka akan ada tiga atau kurang anak tangga lagi yang tersisa untuk dinaiki. Dengan demikian setelah langkah pertama menaiki sebuah anak tangga, akan ada a_3 cara untuk meneruskan menaiki tiga anak tangga berikutnya. Jika langkah pertama menaiki dua anak tangga, maka akan

ada a_2 cara untuk meneruskan menaiki dua anak tangga yang tersisa. Dengan demikian $a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2$.

Secara umum dapat dikatakan bahwa $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \rightarrow$ **Relasi Fibonacci**. Jika $a_0 = a_1 = 1$, maka 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... disebut **bilangan Fibonacci**

Contoh 3: (*Dividing the Plane*)

Misalkan akan digambarkan n buah garis pada selembar kertas demikian sehingga setiap pasang garis berpotongan (tetapi tidak boleh ada tiga garis berpotongan pada titik yang sama). Berapa daerah yang dapat dibuat jika n buah garis membagi bidang datar dengan cara tersebut?

Jawab:

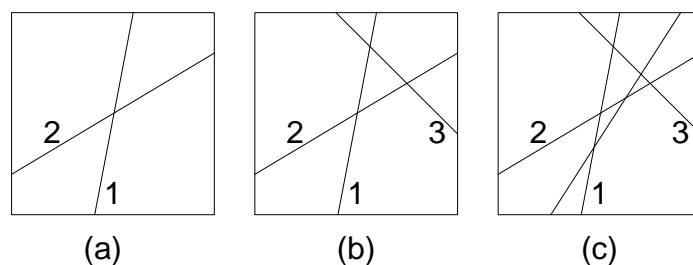
Seperti sebelumnya, akan dicoba menggunakan kasus n kecil.

Dengan satu garis, kertas tadi dapat dibagi menjadi dua daerah, berarti $a_1 = 2$

Dengan dua garis, kertas tadi dapat dibagi menjadi empat daerah, berarti $a_2 = 4$.

Pada gambar (b) terlihat menggunakan tiga garis dapat dibuat tujuh daerah, berarti $a_3 = 7$. Pertanyaannya adalah apakah dengan menggunakan tiga garis selalu diperoleh tujuh daerah?

Jawabnya adalah, karena garis ketiga harus memotong kedua garis yang lain dan tidak boleh memotong pada titik yang sama, berarti garis ketiga tadi akan selalu membagi tiga daerah yang terbentuk dari dua garis sebelumnya. Oleh karena itu dapat dipastikan bahwa garis ketiga akan selalu membentuk tiga daerah baru, berarti $a_3 = a_2 + 3 = 4 + 3 = 7$.



Dengan cara yang sama, garis ke empat akan membentuk empat daerah baru setelah memotong tiga garis tidak pada satu titik yang sama. Dapat dilihat pada gambar (c). Sehingga diperoleh $a_4 = a_3 + 4 = 7 + 4 = 11$.

Secara umum diperoleh relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + n$.

Contoh 4: (*Tower of Hanoi*)

Tower of Hanoi adalah sebuah permainan yang terdiri dari n buah lingkaran dengan berbagai ukuran dan terdapat tiga buah pasak/tiang tempat meletakkan lingkaran-lingkaran tadi. Pada awalnya seluruh lingkaran diletakan pada salah satu pasak dengan lingkaran terbesar berada pada posisi terbawah baru diikuti oleh lingkaran lain yang lebih kecil secara terurut. Lingkaran-lingkaran pada pasak pertama akan dipindahkan ke pasak ketiga dengan susunan yang sama. Persoalannya adalah ketika lingkaran tadi akan dipindahkan, maka susunan lingkaran harus selalu terurut dari besar ke kecil (dari bawah ke atas).

Tentukan relasi rekurensi untuk a_n , yaitu banyak langkah minimum yang dibutuhkan untuk memindahkan n buah lingkaran. Berapa banyak langkah yang dibutuhkan untuk bermain dengan 6 buah lingkaran?

Jawab:

Ke enam lingkaran yang ada pada pasak pertama akan dipindahkan seluruhnya pada pasak ketiga dengan aturan mula-mula mainkan "permainan *Tower of Hanoi* untuk lima lingkaran terkecil" dimana lima lingkaran terkecil dipindahkan dari pasak pertama ke pasak kedua. Kemudian lingkaran keenam dipindahkan dari pasak pertama ke pasak ketiga. Permainan yang sama dilakukan ketika akan memindahkan lima lingkaran terkecil yang ada pada pasak kedua ke pasak ketiga. Jadi ketika akan memindahkan n buah lingkaran dari pasak pertama ke pasak ketiga, mula-mula pindahkan $(n-1)$ lingkaran terkecil dari pasak pertama ke pasak kedua, kemudian memindahkan lingkaran terbesar (ke- n) dari pasak pertama ke pasak ketiga, baru $(n-1)$ lingkaran terkecil yang ada pada pasak kedua dipindahkan seluruhnya ke pasak ketiga. Jika a_n adalah banyaknya langkah yang dibutuhkan untuk memindahkan lingkaran dari satu pasak ke pasak yang lain, maka relasi rekurensi yang terbentuk adalah $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$. Dengan kondisi awal $a_1 = 1$, maka $a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$; $a_3 = 2a_2 + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$; $a_4 = 2a_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$; $a_5 = 2a_4 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$; dan $a_6 = 2a_5 + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = 63$. Jadi untuk memindahkan enam buah lingkaran dibutuhkan minimal 63 langkah.

Formula eksplisit untuk relasi rekurensi ini adalah $a_n = 2^n - 1 \rightarrow$ akan dibuktikan kemudian

Contoh 5: (*Money Growing in a Savings Account*)

Sebuah Bank membayar 8 persen bunga setiap tahun untuk uang yang tersimpan disetiap *account*. Tentukan relasi rekurensi untuk jumlah uang yang diterima setelah n tahun jika strategi investasinya sebagai berikut:

- Investasi \$ 1000 dan menyimpannya di Bank selama n tahun
- Investasi \$ 100 pada setiap akhir tahun

Jawab:

Jika sebuah account berisi \$ x pada awal tahun, maka pada akhir tahun (pada awal tahun berikutnya) akan menjadi \$ x ditambah bunga dari \$ x , dengan asumsi tidak ada uang yang ditambahkan ataupun diambil dari *account* tersebut selama setahun.

- Relasi rekurensinya adalah $a_n = a_{n-1} + 0,8a_{n-1} = 1,8a_{n-1}$ dengan kondisi awal $a_0 = 1000$
- Relasi rekurensinya adalah $a_n = 1,8a_{n-1} + 100$ dengan kondisi awal $a_0 = 0$

Contoh 6: (*Making Change*)

Tentukan relasi rekurensi untuk banyak cara membagikan permen karet (seharga 1 sen) atau permen (seharga 10 sen) atau donat (seharga 20 sen) dalam beberapa hari yang berturutan sampai makanan seharga n sen telah diberikan.

Jawab:

Persoalan ini mirip dengan *stair climbing problem*. Jika pada hari pertama dibagikan permen karet seharga 1 sen, maka akan tersisa makanan seharga $(n-1)$ sen pada hari berikutnya. Jika pada hari pertama dibagikan permen seharga 10 sen, maka akan tersisa makanan seharga $(n-10)$ sen pada hari berikutnya. Dan jika pada hari pertama dibagikan donat seharga 20 sen, maka akan tersisa makanan seharga $(n-20)$ sen pada hari berikutnya. Jadi relasi rekurensi yang terjadi adalah $a_n = a_{n-1} + a_{n-10} + a_{n-20}$ dengan $a_0 = 1$ (suatu cara untuk tidak memberikan satupun, atau nol buah untuk setiap jenis makanan), dan secara implisit dapat dikatakan $a_k = 0$ untuk $k < 0$

Contoh 7: (*Selection Without Repetition*)

Misal $a_{n,k}$ menyatakan banyaknya cara untuk memilih sebuah sub himpunan dari k objek dari himpunan n buah objek yang berbeda. Tentukan relasi rekurensi untuk $a_{n,k}$

Jawab:

Misalkan $a_{n,k}$ berarti $\binom{n}{k}$. Persoalan ini dpecah menjadi dua bagian tergantung apakah objek pertama digunakan atau tidak. Ada $a_{n-1,k}$ k-subhimpunan yang tidak menggunakan objek pertama, dan ada $a_{n-1,k-1}$ k-subhimpunan yang menggunakan objek pertama. Maka akan diperoleh $a_{n,k} = a_{n-1,k} + a_{n-1,k-1}$. Bentuk ini adalah formula segitiga pascal dengan kondisi awal $a_{n,0} = a_{n,n} = 1$ untuk semua $n \geq 0$ (dan $a_{n,k} = 0, k > n$)

Contoh 8: (*Distribution*)

Tentukan relasi rekurensi dari cara mendistribusikan n buah bola identik kedalam k kotak yang berbeda dimana setiap kotak akan berisi antara 2 dan 4 bola. Ulangi masalah yang sama untuk bola dengan 3 warna

Jawab:

Jika terdapat 2 bola dalam kotak pertama, maka akan ada $a_{n-2,k-1}$ cara untuk meletakkan $n-2$ sisa bola identik kedalam $k-1$ kotak. Teruskan pembahasan ini akan diperoleh $a_{n,k} = a_{n-2,k-1} + a_{n-3,k-1} + a_{n-4,k-1}$ dengan kondisi awal $a_{2,1} = a_{3,1} = a_{4,1} = 1$ dan $a_{n,1} = 0$

Untuk bola dengan 3 warna, terdapat $\binom{2+3-1}{2} = 6$ cara untuk meletakkan sebuah subhimpunan dari dua bola pada kotak pertama dengan 3 tipe warna dengan pengulangan. Dengan cara yang sama terdapat $\binom{3+3-1}{3} = 10$ cara untuk meletakkan 3 bola dengan 3 tipe warna dan $\binom{4+3-1}{4} = 15$ cara untuk meletakkan 4 bola dengan

3 tipe warna. Maka $a_{n,k} = 6a_{n-2,k-1} + 10a_{n-3,k-1} + 15a_{n-4,k-1}$ dengan kondisi awal $a_{2,1} = 6; a_{3,1} = 10; a_{4,1} = 15$ dan $a_{n,1} = 0$

Contoh 9: (*Placing Parentheses*)

Tentukan relasi rekurensi untuk a_n , banyaknya cara untuk meletakkan tanda kurung pada perkalian n bilangan $k_1 \times k_2 \times k_3 \times k_4 \times \dots \times k_n$ pada kalkulator

Jawab:

Terdapat satu cara untuk perkalian $(k_1 \times k_2)$; berarti $a_2 = 1$. Ada 2 cara untuk perkalian $k_1 \times k_2 \times k_3$, yaitu $[(k_1 \times k_2) \times k_3]$ dan $[k_1 \times (k_2 \times k_3)]$, berarti $a_3 = 2$. Tidak begitu jelas untuk kondisi a_0 dan a_1 , akan tetapi agar bentuk relasi rekurensi menjadi sederhana dapat ditetapkan $a_0 = 0$ dan $a_1 = 1$. Untuk menentukan relasi rekurensi a_n dapat dilihat pada bentuk berikut $(k_1 \times k_2 \times \dots \times k_i) \times (k_{i+1} \times k_{i+2} \times \dots \times k_n)$, dimana i bernilai dari 0 sampai $(n-1)$. Banyaknya cara untuk memberi tanda kurung dua subproblem tersebut adalah a_i dan a_{n-i} dan terdapat $a_i \times a_{n-i}$ cara untuk memberi tanda kurung pada kedua subproblem tersebut ($n \geq 2$)

SOLUSI DARI RELASI REKURENSI LINIER

Pada bagian ini akan dibahas cara menyelesaikan relasi rekurensi berbentuk

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r} \quad (1)$$

dengan c_i konstanta

Solusi umum untuk persamaan diatas akan melibatkan penjumlahan dari solusi individual berbentuk $a_n = \alpha^n$. Untuk menentukan α , subsitusikan $a_n = \alpha^n$ kedalam persamaan (1) diatas sehingga diperoleh

$$\alpha^n = c_1 \alpha^{n-1} + c_2 \alpha^{n-2} + \dots + c_r \alpha^{n-r} \quad (2)$$

Bagi persamaan (2) dengan α^{n-r} sehingga diperoleh

$$\alpha^r = c_1 \alpha^{r-1} + c_2 \alpha^{r-2} + \dots + c_r \quad (3)$$

Atau ekuivalen dengan

$$\alpha^r - c_1 \alpha^{r-1} - c_2 \alpha^{r-2} - \dots - c_r = 0 \quad (4)$$

Persamaan (4) disebut sebagai persamaan karakteristik dari relasi rekurensi pada persamaan (1).

Misalkan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ adalah r buah akar dari persamaan (4) maka $a_n = \alpha_i^n$ dengan $0 \leq i \leq n$ adalah solusi dari relasi rekurensi persamaan (1).

Kombinasi linier dari setiap solusi yang ada juga merupakan solusi dari relasi rekurensi persamaan (1), atau

$$a_n = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + A_3\alpha_3^n + \cdots A_r\alpha_r^n$$

Untuk setiap konstanta $A_i, 1 \leq i \leq r$

Untuk relasi rekurensi yang melibatkan $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-r}$ dibutuhkan r buah nilai awal a_0, a_1, \dots, a_{r-1} . Misalkan $a'_0, a'_1, \dots, a'_{r-1}$ adalah nilai awal yang diketahui, maka A_i dapat diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan linier dari

$$A_1\alpha_1^k + A_2\alpha_2^k + A_3\alpha_3^k + \cdots A_r\alpha_r^k = a'_k, \quad 0 \leq k \leq r-1$$

Contoh 1: (*Doubling Rabbit Population*)

Setiap tahun populasi kelinci Dr. Finch akan bertambah menjadi dua kali lipat. Dia mulai dengan 6 ekor kelinci. Berapa banyak kelinci yang dia miliki setelah 8 tahun? Setelah n tahun?

Jawab:

Jika a_n banyak kelinci, maka a_n akan memenuhi relasi rekurensi $a_n = 2a_{n-1}$.

Diketahui $a_0 = 6$. Substitusi $a_n = \alpha^n$, diperoleh:

$$\alpha^n = 2\alpha^{n-1} \rightarrow \alpha = 2$$

Sehingga diperoleh solusi individual:

$$a_n = 22^{n-1} \rightarrow a_n = 2^n$$

Solusi umumnya akan berbentuk $a_n = A2^n$

Diberikan kondisi awal $a_0 = 6$ berarti $a_0 = 6 = A2^0 \rightarrow A = 6$

Maka solusi untuk n tahun adalah $a_n = 6 \times 2^n$

Setelah 8 tahun banyak kelinci yang dimiliki Dr Finch adalah

$$a_8 = 6 \times 2^8 = 6 \times 256 = 1536 \text{ kelinci}$$

Contoh 2:

Selesaikan relasi rekurensi berbentuk $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ dengan $a_0 = a_1 = 1$

Jawab:

Ambil $a_n = \alpha^n$, maka diperoleh persamaan karakteristik

$$\alpha^n = 2\alpha^{n-1} + 3\alpha^{n-2}$$

$$\alpha^2 = 2\alpha + 3$$

$$\alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$$

Sehingga diperoleh akar-akar $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -1$

Solusi individual yang diperoleh adalah $a_n = 3^n$ dan $a_n = (-1)^n$

Solusi umumnya berbentuk:

$$a_n = A_1 3^n + A_2 (-1)^n$$

Diketahui $a_0 = a_1 = 1$, maka:

$$a_0 = A_1 3^0 + A_2 (-1)^0 = 1 \rightarrow A_1 + A_2 = 1$$

$$a_1 = A_1 3^1 + A_2 (-1)^1 = 1 \rightarrow 3A_1 - A_2 = 1$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan ini diperoleh $A_1 = \frac{1}{2}$ dan $A_2 = \frac{1}{2}$

Sehingga solusi dari relasi rekurensi ini adalah:

$$a_n = \frac{1}{2} \times 3^n + \frac{1}{2} \times (-1)^n$$

Contoh 3: (Fibonacci)

Diketahui relasi rekurensi barisan Fibonacci adalah $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ dengan kondisi awal $a_0 = a_1 = 1$

Jawab:

Ambil $a_n = \alpha^n$, maka persamaan karakteristiknya

$$\alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}$$

$$\alpha^2 = \alpha + 1$$

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

Sehingga diperoleh akar-akar $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Solusi individual yang diperoleh adalah $a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ dan $a_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Solusi umumnya berbentuk:

$$a_n = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Dengan kondisi awal diberikan $a_0 = a_1 = 1$, maka diperoleh

$$A_1 = \frac{1}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ dan } A_2 = \frac{1}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Sehingga solusinya menjadi

$$a_n = \frac{1}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$