

# FUNGSI DISKRIT NUMERIK

## FUNGSI NUMERIK

Sebuah fungsi adalah sebuah relasi biner yang secara unik memetakan setiap anggota di domain ke tepat satu anggota di kodomain. Fungsi diskrit numerik, atau singkatnya disebut fungsi numerik, adalah sebuah fungsi dengan himpunan bilangan cacah sebagai domain dan himpunan bilangan riil sebagai kodomainnya. Fungsi numerik ini menjadi pokok bahasan yang menarik karena sering digunakan dalam komputasi digital.

Penyajian fungsi numerik pada prinsipnya bisa dilakukan dengan menuliskan daftar panjang harga-harganya, namun pada prakteknya dibutuhkan penyajian dalam bentuk yang tidak terlalu panjang. Contoh berikut menampilkan beberapa bentuk penyajian dari fungsi numerik.

### Contoh 1

$$a_n = 7n^3 + 1, n \geq 0; \quad b_n = \begin{cases} 2n & 0 \leq n \leq 11 \\ 3^n - 1 & n \geq 12 \end{cases}; \quad c_n = \begin{cases} 2+n & 0 \leq n \leq 5 \\ 2-n & n > 5, n \text{ ganjil} \\ 2/n & n > 5, n \text{ genap} \end{cases}$$

### Contoh 2

Seseorang menyimpan uang sejumlah Rp. 10.000.000,- pada bank dengan tingkat bunga 10% per tahun. Pada akhir dari tahun pertama, jumlah uang orang tersebut bertambah menjadi Rp. 11.000.000,-. Pada akhir tahun kedua, jumlah uangnya menjadi 12.100.000,- demikian seterusnya.

Jika  $a_r$  menyatakan jumlah uang pada akhir tahun ke- $r$ , maka fungsi  $a$  tersebut adalah  $a_r = 10.000.000 (1,1)^r$ ,  $r \geq 0$ .

Berapa jumlah uang orang tersebut setelah 30 tahun ?

## MANIPULASI FUNGSI NUMERIK

Jumlah dari dua fungsi numerik adalah sebuah fungsi numerik yang harganya pada  $n$  tertentu sama dengan jumlah harga-harga dari kedua fungsi numerik pada  $n$ .

### Contoh 3

Jika diketahui  $a_n = 2^n$ ,  $n \geq 0$ ,  $b_n = 5$ ,  $n \geq 0$  dan  $c_n = a_n + b_n$ ,  
maka  $c_n = 2^n + 5$ ,  $n \geq 0$ .

Hasil kali (produk) dari dua fungsi numerik adalah sebuah fungsi numerik yang harganya pada  $n$  tertentu sama dengan hasil kali harga-harga dari kedua fungsi numerik pada  $n$ .

### Contoh 4

Jika diketahui  $a_n = 2^n$ ,  $n \geq 0$ ,  $b_n = 5$ ,  $n \geq 0$  dan  $d_n = a_n \cdot b_n$ ,  
maka  $d_n = 5(2^n)$ ,  $n \geq 0$ .

### Contoh 5

Misalkan  $p_n = \begin{cases} 2n & 0 \leq n \leq 11 \\ 3^n - 1 & n \geq 12 \end{cases}$ ,  $q_n = \begin{cases} 0 & 0 \leq n \leq 8 \\ 3^n & n \geq 9 \end{cases}$ .

Tentukan  $t_n = p_n + q_n$ , dan  $v_n = p_n \cdot q_n$ .

Jawab :

$$t_n = \begin{cases} 2n & 0 \leq n \leq 8 \\ 2n + 3^n - 1 & 9 \leq n \leq 11 \\ 2(3^n) - 1 & n \geq 12 \end{cases} \quad v_n = \begin{cases} 0 & 0 \leq n \leq 8 \\ 2^n \cdot 3^n & 9 \leq n \leq 11 \\ 3^{2n} - 1 & n \geq 12 \end{cases}$$

Misalkan  $a_n$  adalah sebuah fungsi numerik dan  $i$  adalah sebuah integer positif. Kita gunakan  $S^i a$  untuk menyatakan fungsi numerik yang nilainya 0 pada  $n = 0, 1, \dots, (i-1)$  dan nilainya sama dengan  $a_{n-i}$  pada  $n \geq i$ .

$$S^i a = \begin{cases} 0 & 0 \leq n \leq (i-1) \\ a_{n-i} & n \geq i \end{cases}$$

### Contoh 6

Misalkan  $b_n = 2^n, n \geq 0$  dan  $c_n = S^4 b$ , maka

$$c_n = \begin{cases} 0 & 0 \leq n \leq 3 \\ 2^{n-4} & n \geq 4 \end{cases}$$

Misalkan  $a_n$  adalah sebuah fungsi numerik dan  $i$  adalah sebuah integer positif. Kita gunakan  $S^{-i} a$  untuk menyatakan fungsi numerik yang nilainya sama dengan  $a_{n+i}$  pada  $n \geq 0$ .

$$S^{-i} a = a_{n+i}, n \geq 0$$

### Contoh 7

Misalkan  $b_n = 2^n, n \geq 0$  dan  $d_n = S^{-5} b$ , maka  $d_n = 2^{n+5}, n \geq 0$ .

Beda maju (*forward difference*) dari sebuah fungsi numerik  $a_n$  adalah sebuah fungsi numerik yang dinyatakan dengan  $\Delta a$ , dimana harga  $\Delta a$  pada  $n$  sama dengan harga  $a_{n+1} - a_n$ .

$$\Delta a = a_{n+1} - a_n, n \geq 0.$$

Beda ke belakang (*backward difference*) dari sebuah fungsi numerik  $a_n$  adalah sebuah fungsi numerik dinyatakan dengan  $\nabla a$ , dimana harga  $\nabla a$  pada  $n = 0$  sama dengan harga  $a_0$  dan harga  $\nabla a$  pada  $n \geq 1$  sama dengan  $a_n - a_{n-1}$ .

$$\nabla a = \begin{cases} 0 & n=0 \\ a_n - a_{n-1} & n \geq 1 \end{cases}.$$

### Contoh 8

Misalkan  $b_n = 2^n, n \geq 0$  dan  $e_n = \Delta b$ , maka  $e_n = 2^n, n \geq 0$

### Contoh 9

Misalkan  $b_n = 2^n, n \geq 0$  dan  $f_n = \nabla b$ , maka  $f_n = \begin{cases} 0 & n=0 \\ 2^{n-1} & n \geq 1 \end{cases}.$