

Muhammad Tarmidzi Bariq
51422161

Tugas M-3

1. Misalkan himpunan bilangan asli N , didefinisikan operasi biner

$$x * y = x + y - xy$$

a. Apakah $(N, *)$ adalah suatu semigrup

b. Apakah $(N, *)$ adalah suatu monoid

2. Misalkan $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ adalah merupakan himpunan dari \mathbb{Z}_6 . Tunjukkan bahwa G adalah suatu grup abel terhadap penjumlahan $(G, +)$

3. Cari subgroup normal dari G

4. Tentukan group kausien dari G

Jawab

1) a.

1) ambil sembarang $x, y \in N$

$$a) \quad x * y = x + y - xy$$

Jadi N tertutup terhadap operasi biner

ambil sembarang $x, y, z \in N$

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x + y - xy) * z = a + z - az \\ &= (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z \\ &= x + y - xy + z - xz - yz + xyz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * (y + z - yz) = x + a - xa \\ &= x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) \\ &= x + y + z - xy - xz + xyz \end{aligned}$$

$(N, *)$ merupakan Semigroup

$$e = 1$$

$$b) \quad x * 1 = x + 1 - x1 \\ = 1$$

$$1 * x = 1 + x - 1x$$

$$= 1 \quad (\text{tidak memiliki identitas})$$

Jadi $(N, *)$ tidak monoid

2) $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\mathbb{Z}_6 =$$

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$(G, +)$

a) tertutup

$$1 + 1 = 2$$

$$2 + 5 = 1$$

Karena $1 + 1 = 2 \in \mathbb{Z}_6$ maka tertutup

b) Asosiatif

ambil sembarang dari nilai G

$$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 3 \in G$$

$$\begin{aligned} (a+b)+c &= (1+2)+3 \\ &= 3+3 = 0 \in G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+(b+c) &= 1+(2+3) \\ &= 1+5 = 0 \in G \end{aligned}$$

$(G, +)$ Asosiatif

Untuk setiap $a, b, c \in G$, karena operasi Penjumlahan maka asosiatif terpenuhi

c) Identitas

$e = 0 \in G$ dengan $a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a \in G$
Jadi $(G, +)$ memiliki identitas

d) Invers

• $0 \in \mathbb{Z}_6$	$0^{-1} = 0$	} $\in \mathbb{Z}_6$
• $1 \in \mathbb{Z}_6$	$1^{-1} = 5$	
• $2 \in \mathbb{Z}_6$	$2^{-1} = 4$	
• $3 \in \mathbb{Z}_6$	$3^{-1} = 3$	
• $4 \in \mathbb{Z}_6$	$4^{-1} = 2$	
• $5 \in \mathbb{Z}_6$	$5^{-1} = 1$	

Karena semua Properti grup terpenuhi. Maka $(G, +)$ adalah grup Abel

e) komutatif

ambil sembarang $a, b \in G$
 $a + b = b + a \quad \bullet \in G$

$$1 + 2 = 2 + 1 = 3 \in G$$

3) Cari subgrup normal dari G

Jawab

$$G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Koset kiri dari G adalah $a+G, \forall a \in \mathbb{Z}_6 (\mathbb{Z}_6, +)$

$$0+G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$1+G = \{1, 2, 3, 4, 5, 0\}$$

$$2+G = \{2, 3, 4, 5, 0, 1\}$$

$$3+G = \{3, 4, 5, 0, 1, 2\}$$

$$4+G = \{4, 5, 0, 1, 2, 3\}$$

$$5+G = \{5, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

4.) Tentukan grup koesien G

(x)	$0+G$	$1+G$	$2+G$	$3+G$	$4+G$	$5+G$
$0+G$	$0+G$	$1+G$	$2+G$	$3+G$	$4+G$	$5+G$
$1+G$	$1+G$	$2+G$	$3+G$	$4+G$	$5+G$	$0+G$
$2+G$	$2+G$	$3+G$	$4+G$	$5+G$	$0+G$	$1+G$
$3+G$	$3+G$	$4+G$	$5+G$	$0+G$	$1+G$	$2+G$
$4+G$	$4+G$	$5+G$	$0+G$	$1+G$	$2+G$	$3+G$
$5+G$	$5+G$	$0+G$	$1+G$	$2+G$	$3+G$	$4+G$