Metode Pembuktian

1. Metode Pembuktian Langsung (Direct Proof)
2. Metode Pembuktian Tak-Langsung (Indirect Proof)
   a. Proof by Contrapositive
   b. Proof by Contradiction

Metode Pembuktian Langsung

Definisi

Suatu bilangan bulat n disebut bilangan **GENAP** jika terdapat suatu bilangan bulat k, sehingga

$$n = 2k.$$

Contoh

6 adalah genap, sebab terdapat 3 sehingga

$6 = 2(3)$

-4 adalah genap, sebab terdapat (-2) sehingga

$-4 = 2(3)$

Metode Pembuktian Langsung

Definisi

Suatu bilangan bulat n disebut bilangan **GANJIL** jika terdapat suatu bilangan bulat k, sehingga

$$n = 2k + 1.$$

Contoh

3 adalah ganjil, sebab terdapat 1 sehingga

$3 = 2(1) + 1$

-3 adalah ganjil, sebab terdapat (-2) sehingga

$-3 = 2(-2) + 1$

Metode Pembuktian Langsung

Soal

Jika diketahui n adalah ganjil, maka buktikan bahwa n^2 adalah ganjil.

Metode Pembuktian Langsung

Jawab

Diketahui n adalah ganjil, artinya terdapat suatu bilangan bulat k sehingga $n = 2k + 1$.

Akan ditunjukkan bahwa n^2 ganjil.

$$
\begin{aligned}
n^2 &= (2k + 1)^2 \\
&= 4k^2 + 4k + 1 \\
&= 2(2k^2 + 2k) + 1.
\end{aligned}
$$

Perhatikan bahwa $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.

Karena k adalah bilangan bulat, maka $(2k^2 + 2k)$ juga pasti bilangan bulat, sehingga n^2 adalah ganjil.

Metode Pembuktian Langsung

Soal

Jika diketahui m, n adalah kuadrat sempurna, maka buktikan bahwa mn adalah juga kuadrat sempurna.

Metode Pembuktian Langsung

Jawab

Misalkan *m*, *n* adalah kuadrat sempurna, artinya

$m = k^2$, $n = p^2$, untuk suatu k, p suatu bilangan bulat.

$$mn = (k^2)(p^2)$$
$$= (kp)^2$$

Karena k, p

Metode Pembuktian Tak-Langsung

Pembuktian dengan Kontraposisi

Ingat bahwa

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

Sehingga untuk membuktikan pernyataan $p \rightarrow q$, cukup tunjukkan bahwa $\neg q$ akan mengakibatkan $\neg p$.

Metode Pembuktian Tak-Langsung

Proof by Contradiction

Misal ingin dibuktikan bahwa p benar.
Temukan suatu kontradiksi q sehingga $-p \rightarrow q$ bernilai benar.
Karena q salah, tapi $-p \rightarrow q$ benar, maka pasti $-p$ salah.
Itu artinya p pasti benar.
Masalahnya adalah menemukan kontradiksi q.

Karena pernyataan $r \wedge -r$ suatu kontradiksi, untuk setiap pernyataan r, maka dapat dibuktikan bahwa p selalu benar jika dapat ditunjukkan bahwa $-p \rightarrow (r \wedge -r)$ benar untuk suatu pernyataan r.

Metode Pembuktian Tak-Langsung

Contoh

Tunjukkan setidaknya ada 4 hari yang sama dari 22 hari.

Jawab

Misal p = “setidaknya 4 dari 22 hari adalah hari yang sama”

Andaikan –p bernilai benar, artinya paling banyak hanya ada 3 hari yang sama dari 22 hari.

Ada 7 hari dalam sepekan, itu artinya paling banyak 21 hari bisa dipilih karena untuk setiap hari dalam sepekan, paling banyak tiga hari yang dipilih bisa jatuh pada hari itu.

Ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa kita memiliki 22 hari.

Artinya jika r = “22 hari yang dipilih”, maka telah ditunjukkan bahwa –p → (r $\wedge$ -r).

Artinya p bernilai benar.

Induksi Matematika

Ide Awal

- Ada sebuah rahasia besar di kampus yang selama ini hanya diketahui oleh si A. A berkata pada B: “aku punya rahasia besar, aku akan memberitahumu, dgn syarat kamu harus jaga rahasia ini”. B kemudian berkata pada C: “aku punya sebuah rahasia besar, aku akan memberitahumu, dgn syarat kamu harus jaga rahasia ini, jika tidak, A bisa marah”. C berkata pada D: “aku punya sebuah rahasia besar, aku akan memberitahumu, dgn syarat kamu harus jaga rahasia ini, jika tidak, B bisa marah”, dst.
- Pada akhirnya satu kampus jadi tahu rahasia itu. Ini disebabkan karena dua hal:
  1. A tahu rahasia itu dan memulai menyebarkan
  2. Proses menyebarkan terus dilanjutkan.
- Jika salah satu dari 1 atau 2 tidak ada, maka rahasia tidak akan tersebar.

Induksi Matematika

Induksi Matematika

- Digunakan untuk memvalidasi suatu persamaan/pertidaksamaan yang bergantung pada bilangan asli.

Misalnya

- Jumlah dari *n* bilangan ganjil yang pertama adalah suatu bilangan kuadrat sempurna, yaitu

  $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Induksi Matematika

- Perhatikan bahwa

  Untuk $n = 1$; $1 = 1$

  Untuk $n = 2$; $1 + 3 = 4$

  Untuk $n = 3$; $1 + 3 + 5 = 9$

  Untuk $n = 4$; $1 + 3 + 5 + 7 = 16$, ... dst.
- Persamaan ini akan dibuktikan selalu benar untuk semua nilai n = anggota himpunan bilangan asli.

Induksi Matematika

- Ada dua langkah dalam induksi matematika:
  1. Langkah dasar, yaitu
     - Tunjukkan bahwa p(0) berlaku, yaitu untuk satu kasus, p(n) akan bernilai benar
  2. Langkah induksi
     - Tunjukkan p(k+1) bernilai benar jika diketahui p(k) benar
- Jika dua langkah di atas dapat ditunjukkan, maka pernyataan awal yaitu p(n) terbukti valid.