

# Relasi Rekursi

## Definisi Relasi Rekursi

Relasi rekursi adalah sebuah formula rekursif dimana setiap bagian dari suatu barisan dapat ditentukan menggunakan satu atau lebih bagian sebelumnya.

Jika  $a_k$  adalah banyak cara untuk menjalankan prosedur dengan  $k$  objek, untuk  $k = 0, 1, 2, \dots$ , maka relasi rekursi adalah sebuah persamaan yang menyatakan  $a_n$  sebagai sebuah fungsi dari  $a_k$  untuk  $k < n$ .

*Contoh:*

1.  $a_n = 2a_{n-1}$
2.  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r}$  dengan  $c_i$  konstanta
3.  $a_n = c a_{n-1} + f(n)$  dengan  $f(n)$  sembarang fungsi dari  $n$
4.  $a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \dots + a_{n-1} a_0$
5.  $a_{n,m} = a_{n-1,m} + a_{n-1,m-1}$

Nilai  $a_n$  tidak akan pernah dapat dicari jika suatu nilai awal tidak diberikan.

Jika suatu relasi rekursi melibatkan  $r$  buah  $a_k$ , maka  $r$  buah nilai awal

$a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$  harus diketahui. Sebagai contoh, pada relasi rekursi  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ,

tidak cukup hanya diketahui sebuah nilai  $a_0 = 2$ , akan tetapi butuh sebuah nilai lagi yaitu misal  $a_1 = 3$ . Dengan demikian  $a_2 = a_1 + a_0 = 3 + 2 = 5$ ;

$a_3 = a_2 + a_1 = 5 + 3 = 8$ ;  $a_4 = a_3 + a_2 = 8 + 5 = 13$ ; dan seterusnya dapat diketahui.

## Barisan Fibonacci

Relasi rekursi yang paling terkenal dan sering digunakan yaitu barisan Fibonacci.

Relasi rekursi ini merupakan salah satu relasi rekursi yang paling tua di dunia, dibahas pada buku Liber Abbaci yang ditulis oleh Leonardo of Pisa atau yang lebih dikenal dengan nama Fibonacci pada tahun 1202.

Pada saat itu dicoba untuk menghitung jumlah pasangan kelinci yang ada, jika setiap pasangan kelinci setiap bulan dapat menghasilkan sepasang anak kelinci baru.

Jika syarat awal diberikan dengan harga  $a_0 = 1$  dan  $a_1 = 1$ , maka bilangan yang diperoleh dengan rumus rekursi  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  untuk  $n = 2, 3, 4, \dots$  disebut *barisan Fibonacci* dan suku  $a_0$  disebut *bilangan Fibonacci*.

Jadi, barisan Fibonacci sebagai berikut:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

## Pemodelan Masalah Dalam Relasi Rekursi

### *Contoh 1: (Arrangements)*

Tentukan relasi rekursi untuk menentukan banyaknya cara menyusun  $n$  buah objek yang berbeda dalam suatu barisan. Tentukan banyaknya cara untuk menyusun 8 buah objek.

*Penyelesaian:*

Misalkan  $a_n$  menyatakan banyaknya cara menyusun  $n$  objek yang berbeda, maka ada  $n$  cara meletakkan  $n$  objek pada urutan pertama di barisan. Dengan cara yang sama untuk  $a_{n-1}$ , maka ada  $n-1$  cara. Oleh karena itu formula relasi rekursi dapat dinyatakan sebagai  $a_n = n a_{n-1}$ .

$$a_n = n a_{n-1} = n[(n-1)a_{n-2}] = \cdots = n(n-1)(n-2) \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

Jadi  $a_8 = 8!$

### **Contoh 2:** (*Climbing Stairs*)

Sebuah rumah memiliki tangga dengan  $n$  buah anak tangga untuk dinaiki. Setiap langkah dapat melewati satu atau dua anak tangga. Tentukan relasi rekursi untuk  $a_n$ , banyaknya cara berbeda seseorang dapat menaiki  $n$  buah anak tangga.

*Penyelesaian:*

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 2, \text{ yaitu } 1,1 \text{ atau } 2$$

$$a_3 = 3, \text{ yaitu } 1,1,1 \text{ atau } 1,2 \text{ atau } 2,1$$

$$a_4 = 5, \text{ yaitu } 1,1,1,1 \text{ atau } 1,2,1 \text{ atau } 1,1,2 \text{ atau } 2,2 \text{ atau } 2,1,1$$

Sangat jelas terlihat bahwa ketika sebuah langkah dijalankan, maka akan ada tiga atau kurang anak tangga lagi yang tersisa untuk dinaiki. Dengan demikian setelah langkah pertama menaiki sebuah anak tangga, akan ada  $a_3$  cara untuk meneruskan menaiki tiga anak tangga berikutnya. Jika langkah pertama menaiki dua anak tangga, maka akan ada  $a_2$  cara untuk meneruskan menaiki dua anak tangga yang tersisa. Dengan demikian  $a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2$ .

### **Contoh 3:** (*Dividing the Plane*)

Misalkan akan digambarkan  $n$  buah garis pada selembar kertas demikian sehingga setiap pasang garis berpotongan (tetapi tidak boleh ada tiga garis

berpotongan pada titik yang sama). Berapa daerah yang dapat dibuat jika  $n$  buah garis membagi bidang datar dengan cara tersebut?

*Penyelesaian:*

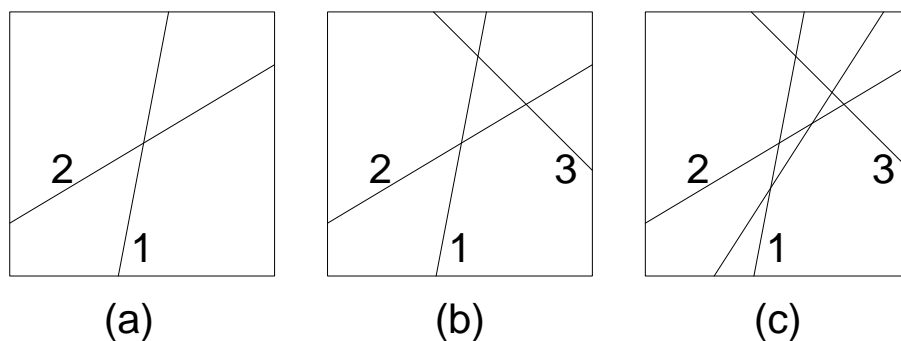
Seperti sebelumnya, akan dicoba menggunakan kasus  $n$  kecil.

Dengan satu garis, kertas tadi dapat dibagi menjadi dua daerah, berarti  $a_1 = 2$ .

Dengan dua garis, kertas tadi dapat dibagi menjadi empat daerah, berarti  $a_2 = 4$ .

Pada gambar (b) terlihat menggunakan tiga garis dapat dibuat tujuh daerah, berarti  $a_3 = 7$ . Pertanyaannya adalah apakah dengan menggunakan tiga garis selalu diperoleh tujuh daerah?

Jawabnya adalah, karena garis ketiga harus memotong kedua garis yang lain dan tidak boleh memotong pada titik yang sama, berarti garis ketiga tadi akan selalu membagi tiga daerah yang terbentuk dari dua garis sebelumnya. Oleh karena itu dapat dipastikan bahwa garis ketiga akan selalu membentuk tiga daerah baru, berarti  $a_3 = a_2 + 3 = 4 + 3 = 7$ .



Dengan cara yang sama, garis ke empat akan membentuk empat daerah baru setelah memotong tiga garis tidak pada satu titik yang sama. Dapat dilihat pada gambar (c). Sehingga diperoleh  $a_4 = a_3 + 4 = 7 + 4 = 11$ .

Secara umum diperoleh relasi rekursi  $a_n = a_{n-1} + n$ .

#### **Contoh 4:** (*Tower of Hanoi*)

*Tower of Hanoi* adalah sebuah permainan yang terdiri dari  $n$  buah lingkaran dengan berbagai ukuran dan terdapat tiga buah pasak/tiang tempat meletakkan lingkaran-lingkaran tadi. Pada awalnya seluruh lingkaran diletakan pada salah satu pasak dengan lingkaran terbesar berada pada posisi terbawah baru diikuti oleh lingkaran lain yang lebih kecil secara terurut. Lingkaran-lingkaran pada pasak pertama akan dipindahkan ke pasak ketiga dengan susunan yang sama. Persoalannya adalah ketika lingkaran tadi akan dipindahkan, maka susunan lingkaran harus selalu terurut dari besar ke kecil (dari bawah ke atas). Tentukan relasi rekursi untuk  $a_n$ , yaitu banyak langkah minimum yang dibutuhkan untuk memindahkan  $n$  buah lingkaran. Berapa banyak langkah yang dibutuhkan untuk bermain dengan 6 buah lingkaran?

#### **Penyelesaian:**

Ke enam lingkaran yang ada pada pasak pertama akan dipindahkan seluruhnya pada pasak ketiga dengan aturan mula-mula mainkan "permainan *Tower of Hanoi* untuk lima lingkaran terkecil" dimana lima lingkaran terkecil dipindahkan dari pasak pertama ke pasak kedua. Kemudian lingkaran keenam dipindahkan dari pasak pertama ke pasak ketiga. Permainan yang sama dilakukan ketika akan memindahkan lima linkaran terkecil yang ada pada pasak kedua ke pasak ketiga. Jadi ketika akan memindahkan  $n$  buah lingkaran dari pasak pertama ke pasak ketiga, mula-mula pindahkan  $(n-1)$  lingkaran terkecil dari pasak pertama ke pasak kedua, kemudian memindahkan lingkaran terbesar (ke- $n$ ) dari pasak pertama ke pasak ketiga, baru  $(n-1)$  lingkaran terkecil yang ada pada pasak kedua dipindahkan seluruhnya ke pasak ketiga.

Jika  $a_n$  adalah banyaknya langkah yang dibutuhkan untuk memindahkan lingkaran dari satu pasak ke pasak yang lain, maka relasi rekursi yang terbentuk adalah  $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$ . Dengan kondisi awal  $a_1 = 1$ , maka  $a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ ;  $a_3 = 2a_2 + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$ ;  $a_4 = 2a_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$ ;  $a_5 = 2a_4 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$ ; dan  $a_6 = 2a_5 + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = 63$ ;

Jadi untuk memindahkan enam buah lingkaran dibutuhkan minimal 63 langkah.

Formula eksplisit untuk relasi rekursi ini adalah  $a_n = 2^n - 1$ .

### **Contoh 5:** (*Money Growing in a Savings Account*)

Sebuah Bank membayar 8 persen bunga setiap tahun untuk uang yang tersimpan di setiap *account*. Tentukan relasi rekursi untuk jumlah uang yang diterima setelah  $n$  tahun jika strategi investasinya sebagai berikut:

- Investasi \$ 1000 dan menyimpannya di Bank selama  $n$  tahun
- Investasi \$ 100 pada setiap akhir tahun

*Jawab:*

Jika sebuah *account* berisi \$  $x$  pada awal tahun, maka pada akhir tahun (pada awal tahun berikutnya) akan menjadi \$  $x$  ditambah bunga dari \$  $x$ , dengan asumsi tidak ada uang yang ditambahkan ataupun diambil dari *account* tersebut selama setahun.

- Relasi rekursinya adalah  $a_n = a_{n-1} + 0,8a_{n-1} = 1,8a_{n-1}$  dengan kondisi awal  $a_0 = 1000$
- Relasi rekursinya adalah  $a_n = 1,8a_{n-1} + 100$  dengan kondisi awal  $a_0 = 0$

## Relasi Rekursi Linier Berkoefisien Konstan

Sebuah relasi rekursi linier berkoefisien konstan dari sebuah fungsi numerik  $a$ , secara umum ditulis sebagai berikut

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \dots + C_k a_{n-k} = f(n)$$

dimana  $C_i$ , untuk  $i = 0, 1, 2, \dots, k$  adalah konstan dan  $f(n)$  adalah sebuah fungsi numerik dengan variabel  $n$ .

Relasi rekursi tersebut dikatakan relasi rekursi linier berderajat  $k$ , jika  $C_0$  dan  $C_k$  keduanya tidak bernilai 0 (nol).

### Contoh 1

$2 a_n + 2 a_{n-1} = 3^n$  adalah sebuah relasi rekursi linier berderajat 1

$t_n = 7 t_{n-1}$  adalah sebuah relasi rekursi linier berderajat 1

$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$  adalah sebuah relasi rekursi linier berderajat 2

$b_{n-3} - 3b_n = n+3$  adalah sebuah relasi rekursi linier berderajat 3

Untuk sebuah relasi rekursi dengan koefisien konstan derajat  $k$ , jika diberikan  $k$  buah harga  $a_j$  yang berurutan  $a_{m-k}, a_{m-k+1}, \dots, a_{m-1}$  untuk suatu nilai  $m$  tertentu, maka setiap nilai  $a_m$  yang lain dapat dicari dengan rumus

$$a_m = -\frac{1}{C_0} (C_1 a_{m-1} + C_2 a_{m-2} + \dots + C_k a_{m-k} - f(m))$$

dan selanjutnya, harga  $a_{m+1}$  juga dapat dicari dengan cara

$$a_{m+1} = -\frac{1}{C_0} (C_1 a_m + C_2 a_{m-1} + \dots + C_k a_{m-k+1} - f(m+1))$$

demikian pula untuk nilai  $a_{m+2}, a_{m+3}$  dan seterusnya. Di lain pihak, harga  $a_{m-k-1}$  dapat pula dihitung dengan

$$a_{m-k-1} = -\frac{1}{C_k} (C_1 a_{m-1} + C_2 a_{m-2} + \dots + C_{k-1} a_{m-k} - f(m-1))$$

dan  $a_{m-k-2}$  dapat dicari dengan

$$a_{m-k-2} = -\frac{1}{C_k} (C_1 a_{m-2} + C_2 a_{m-3} + \dots + C_{k-1} a_{m-k-1} - f(m-2)).$$

Harga  $a_{m-k-3}$  dan seterusnya dapat dicari dengan cara yang sama. Jadi, untuk sebuah relasi rekursi linier berkoefisien konstan derajat  $k$ , bila harga  $k$  buah  $a_j$  yang berurutan diketahui, maka harga  $a_j$  yang lainnya dapat ditentukan secara unik. Dengan kata lain,  $k$  buah harga  $a_j$  yang diberikan merupakan himpunan syarat batas (kondisi batas) yang harus dipenuhi oleh relasi rekursi tersebut untuk dapat memperoleh harga yang unik.

## Solusi Homogen Dari Relasi Rekursi

Seperti telah disebutkan pada bagian sebelumnya, sebuah relasi rekursi linier berkoefisien konstan dapat dinyatakan dalam bentuk  $C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + \dots + C_k a_{n-k} = f(n)$ . Bila nilai  $f(n) = 0$ , maka diperoleh relasi rekursi yang memenuhi

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \dots + C_k a_{n-k} = 0.$$

Relasi rekursi demikian disebut dengan relasi rekursi homogen dan solusi dari relasi rekursi homogen ini dinamakan solusi homogen atau jawab homogen.

Dalam usaha mencari solusi dari sebuah relasi rekursi perlu dicari dua macam solusi, yaitu :

1. Solusi homogen (jawab homogen) yang diperoleh dari relasi rekursi linier dengan mengambil harga  $f(n) = 0$ .
2. Solusi khusus/partikuler (jawab khusus) yang memenuhi relasi rekursi sebenarnya.

Solusi total atau jawab keseluruhan dari sebuah relasi rekursi adalah jumlah dari solusi homogen dan solusi partikuler. Misalkan  $a_n^{(h)} = (a_0^{(h)}, a_1^{(h)}, \dots)$



adalah solusi homogen yang diperoleh dan misalkan  $a_n^{(p)} = (a_0^{(p)}, a_1^{(p)}, \dots)$  adalah solusi partikuler yang diperoleh, maka solusi total dari relasi rekursi yang dimaksud adalah

$$a_n = a^{(h)} + a^{(p)}$$

Solusi homogen dari sebuah relasi rekursi linier dapat dicari dengan mengambil harga  $f(n)=0$ . Solusi homogen dari sebuah persamaan diferensial linier dengan koefisien konstan dinyatakan dalam bentuk  $A\alpha^n$ , dimana  $\alpha$  adalah akar karakteristik dan  $A$  adalah konstanta yang harganya akan ditentukan kemudian untuk memenuhi syarat batas yang diberikan. Dengan substitusi bentuk  $A\alpha^n$  kepada  $a_n$  pada persamaan homogen  $C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \dots + C_k a_{n-k} = 0$ , maka diperoleh

$$C_0 A\alpha^n + C_1 A\alpha^{n-1} + C_2 A\alpha^{n-2} + \dots + C_k A\alpha^{n-k} = 0.$$

Dengan penyederhanaan pada persamaan tersebut, maka diperoleh

$$C_0 \alpha^n + C_1 \alpha^{n-1} + C_2 \alpha^{n-2} + \dots + C_k \alpha^{n-k} = 0$$

Persamaan ini merupakan persamaan karakteristik dari persamaan diferensial yang diberikan. Jika,  $\alpha$  adalah akar karakteristik dari persamaan karakteristik ini, maka  $A\alpha^n$  akan memenuhi persamaan homogen. Jadi, solusi homogen yang dicari akan berbentuk  $A\alpha^n$ .

Bila persamaan karakteristik memiliki sebanyak  $k$  akar karakteristik berbeda  $(\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_k)$ , maka solusi homogen dari relasi rekursi yang dimaksud dinyatakan dalam bentuk

$$a_n^{(h)} = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n + \dots + A_k \alpha_k^n$$

dimana  $\alpha_i$  adalah akar karakteristik dari persamaan karakteristik yang diperoleh, sedangkan  $A_i$  adalah konstanta yang akan dicari untuk memenuhi kondisi batas yang ditentukan.

### Contoh 2

Tentukan solusi homogen dari relasi rekursi  $b_n + b_{n-1} - 6 b_{n-2} = 0$  dengan kondisi batas  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = 1$ .

### Penyelesaian :

Relasi rekursi tersebut adalah relasi rekursi homogen, karena  $f(n)=0$ .

Persamaan karakteristik dari relasi rekursi  $b_n + b_{n-1} - 6 b_{n-2} = 0$  adalah

$$\alpha^2 + \alpha - 6 = 0 \quad \text{atau} \quad (\alpha + 3) (\alpha - 2) = 0$$

hingga diperoleh akar-akar karakteristik  $\alpha_1 = -3$  dan  $\alpha_2 = 2$ .

Oleh karena akar-akar karakteristiknya berbeda, maka solusi homogennya berbentuk  $b_n^{(h)} = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n \Rightarrow b_n^{(h)} = A_1 (-3)^n + A_2 \cdot 2^n$ .

Dengan kondisi batas  $b_0 = 0$  dan  $b_1 = 1$ , maka

$$b_0^{(h)} = A_1 (-3)^0 + A_2 \cdot 2^0 \Rightarrow 0 = A_1 + A_2.$$

$$b_1^{(h)} = A_1 (-3)^1 + A_2 \cdot 2^1 \Rightarrow 1 = -3 A_1 + 2 A_2.$$

bila diselesaikan maka akan diperoleh harga  $A_1 = (-1/5)$  dan  $A_2 = 1/5$ , sehingga jawab homogen dari relasi rekursi  $b_n + b_{n-1} - 6 b_{n-2} = 0$  adalah

$$b_n^{(h)} = -\frac{1}{5} (-3)^n + \frac{1}{5} \cdot 2^n.$$

Jika akar karakteristik  $\alpha_1$  dari persamaan karakteristik merupakan akar ganda yang berulang sebanyak  $m$  kali, maka bentuk solusi homogen yang sesuai untuk akar ganda tersebut adalah

$$(A_1 \cdot n^{m-1} + A_2 \cdot n^{m-2} + \dots + A_{m-2} n^2 + A_{m-1} \cdot n + A_m) \alpha_1^n$$

dimana  $A_i$  adalah konstanta yang nantinya akan ditentukan untuk memenuhi kondisi batas yang ditentukan.

### Contoh 3

Tentukan solusi dari relasi rekursi  $a_n + 4 a_{n-1} + 4 a_{n-2} = 2^n$ .

#### Penyelesaian :

Relasi rekursi homogen :  $a_n + 4 a_{n-1} + 4 a_{n-2} = 0$ .

Persamaan karakteristiknya adalah  $\alpha^2 + 4 \alpha + 4 = 0$

$$(\alpha + 2) (\alpha + 2) = 0$$

hingga diperoleh akar-akar karakteristik  $\alpha_1 = \alpha_2 = -2$ ,  $m = 2$ ,

Oleh karena akar-akar karakteristiknya ganda,

maka solusi homogenya berbentuk  $a_n^{(h)} = (A_1 n^{m-1} + A_2 n^{m-2}) \alpha_1^n$ ,

$$a_n^{(h)} = (A_1 n + A_2) (-2)^n.$$

### Contoh 4

Tentukan solusi homogen dari relasi rekursi

$$4 a_n - 20 a_{n-1} + 17 a_{n-2} - 4 a_{n-3} = 0.$$

#### Penyelesaian :

Persamaan karakteristiknya :  $4 \alpha^3 - 20 \alpha^2 + 17 \alpha - 4 = 0$

akar-akar karakteristiknya  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$  dan  $4$

solusi homogenya berbentuk  $a_n^{(h)} = (A_1 n + A_2) (\frac{1}{2})^n + A_3 \cdot 4^n$ .

## Solusi Khusus dari Relasi Rekursi

Pada dasarnya tidak ada satu metode yang dapat menentukan solusi khusus dari sebuah relasi rekursi linier yang tidak homogen. Untuk menentukan solusi khusus dari sebuah relasi rekursi linier dengan  $f(n) \neq 0$ , akan diberikan beberapa model solusi yang disesuaikan dengan bentuk  $f(n)$ . Model yang sering digunakan adalah model polinomial atau model eksponensial.

1. Secara umum, jika  $f(n)$  berbentuk polinomial derajat  $t$  dalam  $n$  :

$$F_1 n^t + F_2 n^{t-1} + \dots + F_t n + F_{t+1} ,$$

maka bentuk dari solusi khusus yang sesuai adalah :

$$P_1 n^t + P_2 n^{t-1} + \dots + P_t n + P_{t+1}$$

2. Jika  $f(n)$  berbentuk  $\beta^n$  dan  $\beta$  bukan akar karakteristik dari persamaan homogen, maka jawab khusus berbentuk

$$P \beta^n$$

3. Jika  $f(n)$  berbentuk  $(F_1.n^t + F_2.n^{t-1} + \dots + F_t.n + F_{t+1}).\beta^n$  dan  $\beta$  bukan akar karakteristik dari persamaan homogen, maka bentuk dari solusi khusus yang sesuai adalah :

$$(P_1 n^t + P_2 n^{t-1} + \dots + P_t n + P_{t+1}) \beta^n$$

4. Jika  $f(n)$  berbentuk  $(F_1.n^t + F_2.n^{t-1} + \dots + F_t.n + F_{t+1}).\beta^n$  dan  $\beta$  akar karakteristik yang berulang sebanyak  $(m-1)$  kali, maka bentuk dari solusi khusus yang sesuai adalah :

$$n^{m-1}. (P_1 n^t + P_2 n^{t-1} + \dots + P_t n + P_{t+1}) \beta^n$$

## Contoh-contoh Soal

1).  $2b_n - b_{n-1} - 6b_{n-2} = 0$

$$2a^2 - a - 6 = 0$$

$$(2a + 3)(a - 2) = 0$$

$$a_1 = -\frac{3}{2} \quad a_2 = 2$$

solusi homogen :  $b_n^{(h)} = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n$

$$b_n^{(h)} = A_1 \left(-\frac{3}{2}\right)^n + A_2 \cdot 2^n$$

2.  $4b_n - 8b_{n-1} + 3b_{n-2} = 0$

$$4a^2 - 8a + 3 = 0$$

$$(2a - 1)(2a - 3) = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \quad \alpha_2 = \frac{3}{2}$$

solusi homogen :  $b_n^{(h)} = A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2 \left(\frac{3}{2}\right)^n$

$b_0 = 0$  dan  $b_1 = 1$ , maka

$$b_0^{(h)} = A_1 + A_2 \rightarrow A_1 + A_2 = 0$$

$$b_1^{(h)} = \frac{1}{2}A_1 + \frac{3}{2}A_2 \rightarrow \frac{1}{2}A_1 + \frac{3}{2}A_2 = 1$$

$$A_1 + A_2 = 0$$

$$A_1 + 3A_2 = 2$$

$$2A_2 = 2$$

$$A_2 = 1$$

$$A_1 = -1$$

$$b_n^{(h)} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$3. \quad 4b_n - 12b_{n-1} + 9b_{n-2} = 0$$

$$4\alpha^2 - 12\alpha + 9 = 0$$

$$(2\alpha - 3)^2 = 0$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{3}{2}$$

$$b_n^{(h)} = (A_1 n + A_2) \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$4. \quad b_n - 8b_{n-1} + 16b_{n-2} = 0$$

$$\alpha^2 - 8\alpha + 16 = 0$$

$$(\alpha - 4)^2 = 0$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 4$$

$$b_n^{(h)} = (A_1 n + A_2) (4)^n$$

$$b_0^{(h)} = A_2 = 4$$

$$b_1^{(h)} = (A_1 + A_2)4 = 4A_1 + 4A_2 = 16$$

$$4A_1 + 16 = 16$$

$$4A_1 = 0$$

$$A_1 = 0$$

$$b_n^{(h)} = (0 \cdot n + 4) 4^n = 4^{n+1}$$

$$5. \quad b_n + 5b_{n-1} + 8b_{n-2} - 4b_{n-3} = 0$$

$$\alpha^3 + 5\alpha^2 + 8\alpha - 4 = 0$$

$$(\alpha - 1)(\alpha^2 - 4\alpha + 4) = 0$$

$$(\alpha - 1)(\alpha - 2)^2 = 0$$

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 2$$

$$b_n^{(h)} = A_1 (1)^n + (A_2 n + A_3) (2)^n$$

$$= A_1 + (A_2 n + A_3) 2^n$$

$$1. \quad 2a_r - a_{r-1} - 6a_{r-2} = 5r^2 - 6r + 3$$

$$a_r = P_1 r^2 + P_2 r + P_3$$

$$2(P_1 r^2 + P_2 r + P_3) - (P_1 (r-1)^2 + P_2 (r-1) + P_3) - 6(P_1 (r-2)^2 + P_2 (r-2) + P_3) = 5r^2 - 6r + 3$$

$$2(P_1 r^2 + P_2 r + P_3) - (P_1 (r^2 - 2r + 1) + P_2 r - P_2 + P_3) - 6(P_1 (r^2 - 4r + 4) + P_2 r - 2P_2 + P_3) = 5r^2 - 6r + 3$$

$$2P_1 r^2 + 2P_2 r + 2P_3 - P_1 r^2 + 2P_1 r - P_1 - P_2 r + P_2 - P_3 - 6P_1 r^2 + 24P_1 r - 24P_1 - 6P_2 r + 12P_2 - 6P_3 = 5r^2 - 6r + 3$$

$$\begin{aligned} \diamond 2P_1 - P_1 - 6P_1 &= 5 & \diamond 2P_2 + 2P_1 - P_2 + 24P_1 - 6P_2 &= -6 \\ -5P_1 &= 5 & -5P_2 + 26P_1 &= -6 \\ \boxed{P_1 = -1} & & -5P_2 + 26(-1) &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond 2P_3 - P_1 + P_2 - P_3 - 24P_1 + 12P_2 - 6P_3 &= 3 & -5P_2 &= 20 \\ -5P_3 + 13P_2 - 25P_1 &= 3 & \boxed{P_2 = -4} \\ -5P_3 + 13(-4) - 25(-1) &= 3 \\ -5P_3 - 52 + 25 &= 3 \\ -5P_3 &= 30 \\ \boxed{P_3 = -6} \end{aligned}$$

solusi non-homogen

$$\therefore a_r^{(p)} = -r^2 - 4r - 6$$

solusi homogen

$$2\alpha^2 - \alpha - 6 = 0$$

$$(2\alpha + 3)(\alpha - 2) = 0$$

$$\alpha_1 = -\frac{3}{2} \quad \alpha_2 = 2$$

$$\therefore a_r^{(h)} = \left(-\frac{3}{2}\right)^r A_1 + 2^r A_2$$

solusi total:

$$a_r = a_r^{(p)} + a_r^{(h)}$$

$$= -r^2 - 4r - 6 +$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^r A_1 + 2^r A_2$$

$$2 \quad a_r - 7a_{r-1} + 10a_{r-2} = 3^r, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

$$a_r = P 3^r$$

$$P 3^r - 7P 3^{r-1} + 10P 3^{r-2} = 3^r$$

$$P 3^r - \frac{7}{3} P 3^r + \frac{10}{9} P 3^r = 3^r$$

$$\left(P - \frac{7}{3}P + \frac{10}{9}P\right) 3^r = 3^r$$

$$-\frac{2}{9}P \cdot 3^r = 3^r$$

$$-\frac{2}{9}P = 1$$

$$P = -\frac{9}{2} //$$

\* Solusi Non-Homogen

$$a_r^{(p)} = -\frac{9}{2} 3^r$$

\* Solusi Homogen

$$\alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0$$

$$(\alpha - 5)(\alpha - 2) = 0$$

$$\alpha = 5 \quad \alpha = 2$$

$$a_r^{(h)} = 5^r A_1 + 2^r A_2$$

\* Solusi Total

$$a_r = a^{(h)} + a^{(p)}$$

$$= 5^r A_1 + 2^r A_2 - \frac{9}{2} 3^r$$

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$A_1 + A_2 - \frac{9}{2} = 0$$

$$5A_1 + 2A_2 - \frac{27}{2} = 1$$

$$2A_1 + 2A_2 = 9$$

$$10A_1 + 4A_2 = 28$$

$$4A_1 + 4A_2 = 18$$

$$10A_1 + 4A_2 = 28$$

$$-6A_1 = -10$$

$$A_1 = \frac{5}{3} //$$

$$2A_1 + 2A_2 = 9$$

$$\frac{10}{3} + 2A_2 = 9$$

$$2A_2 = \frac{17}{3}$$

$$A_2 = \frac{17}{6} //$$

$$a_r = \frac{5}{3} 5^r + \frac{17}{6} 2^r - \frac{9}{2} 3^r$$



$$3. \quad 4a_r - 12a_{r-1} + 9a_{r-2} - 2a_{r-3} = (25r+10) \cdot 3^r$$

$$a_r = (P_1 r + P_2) \cdot 3^r$$

$$4(P_1 r + P_2) \cdot 3^r - 12(P_1(r-1) + P_2) \cdot 3^{r-1} + 9(P_1(r-2) + P_2) \cdot 3^{r-2} - 2(P_1(r-3) + P_2) \cdot 3^{r-3} = (25r+10) \cdot 3^r$$

$$4P_1 r \cdot 3^r + 4P_2 \cdot 3^r - 4P_1 r \cdot 3^r + 4P_1 \cdot 3^r - 4P_2 \cdot 3^r + P_1 r \cdot 3^r - 2P_1 \cdot 3^r + P_2 \cdot 3^r - \frac{2}{27} P_1 r \cdot 3^r + \frac{2}{9} P_1 \cdot 3^r - \frac{2}{27} P_2 \cdot 3^r = (25r+10) \cdot 3^r$$

$$(4P_1 - 4P_1 + P_1 - \frac{2}{27} P_1) r \cdot 3^r = 25 \cdot r \cdot 3^r$$

$$\frac{25}{27} P_1 = 25$$

$$\boxed{P_1 = 27}$$

$$\cancel{4P_2} + 4P_1 - \cancel{4P_2} - 2P_1 + P_2 + \frac{2}{9} P_1 - \frac{2}{27} P_2 = 10$$

$$\frac{20}{9} P_1 + \frac{25}{27} P_2 = 10$$

$$\frac{20}{9} (27) + \frac{25}{27} P_2 = 10$$

$$60 + \frac{25}{27} P_2 = 10$$

$$\frac{25}{27} P_2 = -50$$

$$\boxed{P_2 = -54}$$

\* solusi non-homogen

$$\therefore a_r^{(p)} = (27r - 54) \cdot 3^r$$

\* solusi homogen

$$4\alpha^3 - 12\alpha^2 + 9\alpha - 2 = 0$$

$$(\alpha - 2)(2\alpha - 1)^2 = 0$$

$$\alpha_1 = 2 \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$$

$$a_r^{(h)} = 2^r \cdot A_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^r A_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^r \cdot r A_3$$

solusi total :

$$a_r = a_r^{(p)} + a_r^{(h)}$$

$$= (27r - 54) \cdot 3^r +$$

$$2^r A_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^r A_2 +$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^r \cdot r A_3$$