INTEGRAL FOURIER

MATEMATIKA LANJUT 2 *(TEKNIK INFORMATIKA)*

DOSEN : M. ABDUL RIVAI, M.SI

DEFINISI INTEGRAL FOURIER

Diasumsikan syarat-syarat berikut pada $f(x)$:

1. $f(x)$ memenuhi syarat Dirichlet pada setiap interval terhingga $(-L, L)$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ konvergen, yaitu $f(x)$ dapat diintegrasikan secara mutlak dalam $(-\infty, \infty)$.

Selanjutnya, *Teorema integral Fourier* menyatakan bahwa integral fourier dari suatu fungsi f adalah

$$f(x) = \int_0^{\infty} \{A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x\} dx \qquad (1)$$

Dimana

$$\begin{cases} A(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx \\ B(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\, dx \end{cases} \qquad (2)$$

$A(\alpha)$ dan $B(\alpha)$ dengan $-\infty < \alpha < \infty$ merupakan generalisasi dari koefisien Fourier a_n dan b_n. Ruas kanan dari persamaan (1) juga disebut ekspansi integral Fourier f. Hasil persamaan (1) berlaku jika x adalah titik kontinuitas dari $f(x)$. Jika x adalah titik diskontinuitas, maka harus menggantikan $f(x)$ dengan $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ sebagaimana dalam kasus deret Fourier. Perhatikan bahwa syarat di atas adalah syarat cukup tetapi bukan syarat perlu.

Dalam generalisasi koefisien Fourier terhadap integral Fourier, a_0 mungkin diabaikan, karena kapanpun $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ada, maka

$$|a_0| = \left|\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx\right| \to 0 \quad \text{pada saat} \quad L \to \infty$$

CONTOH

Tentukan integral fourier dari fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

Jawab:

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{-a} 0 \cos \alpha x \, dx + \int_{-a}^{a} 1 \cos \alpha x \, dx + \int_{a}^{\infty} 0 \cos \alpha x \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \cos \alpha x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha} \sin \alpha x \, \Big|_{-a}^{a} \right] = \frac{2 \sin(\alpha a)}{\alpha \pi}$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{-a} 0 \sin \alpha x \, dx + \int_{-a}^{a} 1 \sin \alpha x \, dx + \int_{a}^{\infty} 0 \sin \alpha x \, dx \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \sin \alpha x \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x \, \Big|_{-a}^{a} \right] = 0$$

Maka

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left[\left(\frac{2 \sin(\alpha a)}{\alpha} \right) \cos(\alpha x) \right] d\alpha$$

BENTUK EKUIVALEN DARI TEOREMA INTEGRAL FOURIER

Teorema integral Fourier dapat juga ditulis dalam bentuk

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=0}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha(x-u)\, du d\alpha \qquad (3)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}\, d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha u}\, du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha(u-x)}\, du d\alpha \qquad (4)$$

Di mana dipahami bahwa jika $f(x)$ tidak kontinu pada x, maka ruas kiri harus digantikan oleh $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

INTEGRAL COSINUS DAN INTEGRAL SINUS

Hasil-hasil ini masih dapat disederhanakan jika $f(x)$ adalah sebuah fungsi ganjil atau genap, dan diperoleh

Jika $f(x)$ adalah fungsi genap maka $B(\alpha) = 0$, maka integral cosinusnya

$$f(x) = \int_0^\infty A(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha \text{ , dengan } A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos \alpha x \, d\alpha \tag{5}$$

Jika $f(x)$ adalah fungsi ganjil maka $A(\alpha) = 0$, maka integral sinusnya

$$f(x) = \int_0^\infty B(\alpha) \sin \alpha x \, d\alpha \text{ , dengan } B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin \alpha x \, d\alpha \tag{6}$$

CONTOH

Tentukan integral cosinus dan integral sinus fourier dari

$$f(x) = e^{-x}, x > 0$$

Jawab:

Integral cosinus

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\,dx = \frac{2}{\pi}\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-x}\cos\alpha x\,dx = \frac{2}{\pi}\lim_{p\to\infty}\frac{e^{-x}}{1+\alpha^2}(-\cos\alpha x + \alpha\sin\alpha x)\Big|_0^p$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+\alpha^2}$$

Jadi

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+\alpha^2}\right)\cos\alpha x\,d\alpha$$

Integral sinus

$$B(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x\, dx = \frac{2}{\pi}\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-x}\sin\alpha x\, dx = \frac{2}{\pi}\lim_{p\to\infty}\frac{e^{-x}}{1+\alpha^2}(-\sin\alpha x - \alpha\cos\alpha x)\Big|_0^p$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

Jadi

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)\sin\alpha x\, d\alpha$$

TAMBAHAN

Suatu entitas yang penting dalam menghitung integral dan menyelesaikan persamaan diferensial dan integral akan diperkenalkan dalam paragraf berikutnya. Transformasi tersebut diringkas dari bentuk integral Fourier dari sebuah fungsi, sebagaimana dapat dilihat, dengan menempatkan persamaan (4) dalam bentuk

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha u} \, du \right\} d\alpha$$

Dan dengan mengamati pernyataan di dalam tanda kurung

LATIHAN SOAL

1. Carilah representasi integral Fourier fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika x} < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{jika x} = 0 \\ \pi e^{-x} & \text{jika x} > 0 \end{cases}$$

2. Carilah representasi Integral Cosinus Fourier fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } 0 < \text{x} < 1 \\ 0, & \text{jika x} > 1 \end{cases}$$

3. Carilah representasi Integral Sinus Fourier fungsi

$$f(x) = \begin{cases} e^{x}, & \text{jika } 0 < \text{x} < 1 \\ 0, & \text{jika x} > 1 \end{cases}$$

TERIMA KASIH