APLIKASI TRANSFORMASI FOURIER

Farell Vernaldishafa Trusdy	(50422519)
Mochammad Rafly Rosyad	(50422891)
Muhammad Tarmidzi Bariq	(51422161)
Ryu Irfareyhan Agam	(51422489)

Kelompok : 3

**Kelas : **2IA11

Matematika Lanjut 2

Universitas Gunadarma

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Cuaca merupakan salah satu aspek penting yang memengaruhi berbagai sektor kehidupan manusia dalam kurun waktu singkat. Kondisi cuaca yang tidak dapat diprediksi secara tepat sering kali menjadi tantangan, terutama dalam konteks pertanian dan kegiatan luar ruangan lainnya. Kabupaten Seram Bagian Barat, Maluku, dikenal sebagai salah satu lumbung pangan di wilayah tersebut, khususnya dalam produksi sayuran dan beras. Sebagian besar penduduk setempat menggantungkan penghasilan mereka pada sektor pertanian ini. Oleh karena itu, pengetahuan tentang periode curah hujan menjadi krusial untuk menentukan waktu tanam yang tepat dan mengoptimalkan hasil pertanian.

Perkembangan teknologi telah memungkinkan penggunaan metode analisis yang lebih canggih untuk memprediksi cuaca, salah satunya adalah Transformasi Fourier. Dengan memanfaatkan teknik ini, diharapkan dapat diperoleh pemahaman yang lebih baik tentang pola curah hujan di Kabupaten Seram Bagian Barat. Informasi ini tidak hanya bermanfaat untuk sektor pertanian, tetapi juga untuk keselamatan masyarakat dan efisiensi berbagai sektor lainnya yang terkait dengan perubahan cuaca.

1.2. Tujuan dan Manfaat

1. Menerapkan Transformasi Fourier untuk menentukan periode curah hujan di Kabupaten Seram Bagian Barat.
2. Meningkatkan prediksi cuaca yang lebih akurat untuk mendukung kegiatan pertanian dan sektor lainnya.
3. Meningkatkan keselamatan masyarakat dengan memberikan informasi yang lebih handal tentang pola curah hujan.

4. Mengoptimalkan waktu tanam bagi petani untuk meningkatkan produktivitas pertanian.
5. Meningkatkan efisiensi berbagai sektor yang terkait dengan perubahan cuaca, seperti pelayanan publik dan transportasi.

1.3. Kajian Pustaka

1.3.1. Transformasi Fourier

Transformasi Fourier adalah teknik matematika yang digunakan untuk mentransformasikan representasi waktu-amplitudo menjadi representasi frekuensi-amplitudo. Representasi ini berguna untuk menganalisis pola-pola yang tersembunyi dalam data cuaca, termasuk periode curah hujan.

Bentuk Transformasi Fourier adalah :

$$\hat{f}(\mathrm{w}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}d.$$

1.3.2. Transformasi Fourier Diskrit

Transformasi Fourier Diskrit atau Discrete Fourier Transform (DFT) adalah model transformasi Fourier yang diterapkan pada fungsi diskrit. Hasilnya juga bersifat diskrit dan berguna dalam menganalisis sinyal digital. DFT didefinisikan sebagai:

Misalkan $f(x)$ periodik. Diasumsikan N merupakan bagian – bagian yang diukur dari $f(x)$ yang diambil pada interval $0 \le x \le 2\pi$ dengan jarak yang teratur dari titik-titik

$$x_k = \frac{2\pi k}{N}, k = 0,1..., N-1.$$

DFT didefinisikan dengan :

$$\hat{f}_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{ijx_k}, f_k = f(x_k), j = 0,..., N-1 \qquad \textbf{(1)}$$

Persamaan (1) inilah yang akan menghasilkan spektrum frekuensi dari sinyal. Misal diberikan

$$e_{jk} = e^{-ijx_k} = e^{-\frac{2\pi ijk}{N}} = w^{jk}, w = w_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}} \quad \textbf{(2)}$$

dimana j,k = 0,...,N - 1. DFT seperti pada Persamaan (1) dinamakan dengan DFT 1 dimensi, DFT semacam ini banyak digunakan dalam pengolahan sinyal digital.

1.3.3. Transformasi Fourier Cepat (FFT):

Transformasi Fourier Cepat atau Fast Fourier Transform (FFT) merupakan teknik yang memungkinkan perhitungan DFT dengan jumlah komputasi yang lebih sedikit. Ini menjadi penting dalam menganalisis jumlah data besar dengan efisien.

DFT akan menghasilkan jumlah komputasi sebesar N^2 sedangkan FFT akan menghasilkan jumlah komputasi sebesar (N) log2 (N). Sehingga FFT menjadi metode praktis DFT untuk N dalam jumlah yang besar.

BAB II
PEMBAHASAN

2.1. Pembahasan

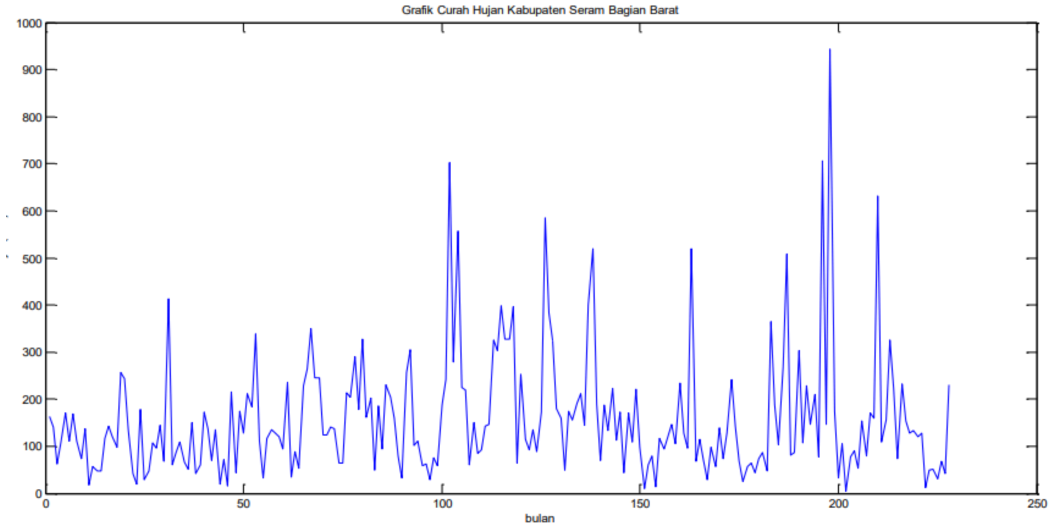
Pada bagian pembahasan dilakukan analisis fourier berdasarkan data curah hujan Kabupaten Seram Bagian Barat yang diperoleh dari Badan Meteorologi Klimatologi dan Geofisika Ambon selama 19 tahun sejak tahun 1991 sampai dengan tahun 2009.

Penentuan periode curah hujan pada penelitian ini dilakukan dengan menggunakan Transformasi Fourier. Gambar 1 merupakan bentuk sinyal dari data curah hujan pada Kabupaten Seram Bagian Barat. Sumbu x menyatakan bulan selama 19 tahun sedangkan sumbu y menyatakan data curah hujan yang dinyatakan dalam milimeter (mm). Seperti yang terlihat pada Gambar 1, diperoleh data curah hujan bulanan yang tertinggi mencapai 944 mm yaitu pada bulan Juni 2007 atau pada bulan ke-198, dan terendah adalah 5 mm yaitu pada bulan Oktober 2007 atau pada bulan ke-202.

Untuk memperoleh periode siklus curah hujan Kabupaten Seram Bagian Barat, mula – mula digunakan FFT dan setelah diperoleh frekuensi, digunakan kebalikan dari frekuensi. Untuk memperoleh frekuensi digunakan fungsi pada MATLAB, yaitu fungsi FFT.

Perhitungan FFT untuk 10 data pada penelitian ini yaitu untuk bulan Januari sampai dengan Mei untuk tahun 1991 dan 1992, dengan data seperti berikut:

$$A = [163\ 141\ 63\ 107\ 170\ 47\ 47\ 117\ 143\ 120]$$



Gambar 1. Data Curah Hujan Kabupaten Seram Bagian Barat

Dengan menggunakan perintah $y = FFT(A)$ pada program Matlab, diperoleh $y = 1\times 10^3$ dengan $y = \hat{f}_j$ merupakan hasil transformasi dari *A*, yaitu

$$\hat{f}_0 = 1.1180$$
$$\hat{f}_1 = 0.1460 + 0.0010\text{i}$$
$$\hat{f}_2 = 0.0098 + 0.1382\text{i}$$
$$\hat{f}_3 = 0.1170 - 0.1899\text{i}$$
$$\hat{f}_4 = -0.0438 - 0.0066i$$
$$\hat{f}_5 = 0.0540$$
$$\hat{f}_6 = -0.0438 + 0.0066\text{i}$$
$$\hat{f}_7 = 0.1170 + 0.1899\text{i}$$
$$\hat{f}_8 = 0.0098 - 0.1382\text{i}$$
$$\hat{f}_9 = 0.1460 - 0.0010i$$

Secara matematika dapat dilakukan perhitungan FFT dengan menggunakan Persamaan (7) dan Persamaan (8) seperti berikut :

$$N = 10,$$

$$M = \frac{N}{2} = \frac{10}{2} = 5,$$

$$w_N = w_{10} = e^{-\frac{2\pi i}{10}} = e^{-\frac{\pi i}{5}} = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos(36) - i\sin(36) = 0.8090 - 0.5878\text{i},$$

$$w_M = w_5 = e^{-\frac{2\pi i}{5}} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos(72) - i\sin(72) = 0.3090 - 0.9511\text{i}$$

$$dengan\ k, j = 0,1,\ldots,9.$$

Selanjutnya misalkan Persamaan (6) dan Persamaan (8) disederhanakan dengan variabel baru Ej untuk fungsi genap dan Oj untuk fungsi ganjil

$$\sum_{k=0}^{M-1} w_M^{kj} f_{2k} = E_j$$

dan

$$\sum_{k=0}^{M-1} w_M^{kj} f_{2k+1} = O_j$$

maka Persamaan (6) menjadi

$$\hat{f}_j = E_j + w_N^j O_j \tag{9}$$

dan Persamaan (8) menjadi

$$\hat{f}_{j+M} = E_j - w_N^j O_j. \tag{10}$$

Diperoleh untuk fungsi genap

$$E_j = \sum_{k=0}^{M-1} w_M^{kj} f_{2k} = \begin{bmatrix} w_5^0 & w_5^0 & w_5^0 & w_5^0 & w_5^0 \\ w_5^0 & w_5^1 & w_5^2 & w_5^2 & w_5^4 \\ w_5^0 & w_5^2 & w_5^4 & w_5^6 & w_5^8 \\ w_5^0 & w_5^2 & w_5^6 & w_5^9 & w_5^{12} \\ w_5^0 & w_5^4 & w_5^9 & w_5^{12} & w_5^{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_2 \\ f_4 \\ f_6 \\ f_8 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (0.3090-0.9511i)^0 & (0.3090-0.9511i)^0 & (0.3090-0.9511i)^0 & (0.3090-0.9511i)^0 & (0.3090-0.9511i)^0 \\ (0.3090-0.9511i)^0 & (0.3090-0.9511i)^1 & (0.3090-0.9511i)^2 & (0.3090-0.9511i)^2 & (0.3090-0.9511i)^4 \\ (0.3090-0.9511i)^0 & (0.3090-0.9511i)^2 & (0.3090-0.9511i)^4 & (0.3090-0.9511i)^6 & (0.3090-0.9511i)^8 \\ (0.3090-0.9511i)^0 & (0.3090-0.9511i)^2 & (0.3090-0.9511i)^6 & (0.3090-0.9511i)^9 & (0.3090-0.9511i)^{12} \\ (0.3090-0.9511i)^0 & (0.3090-0.9511i)^4 & (0.3090-0.9511i)^9 & (0.3090-0.9511i)^{12} & (0.3090-0.9511i)^{16} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}163\\63\\170\\47\\143\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (0.3090-0.9511i)^1 & (0.3090-0.9511i)^2 & (0.3090-0.9511i)^2 & (0.3090-0.9511i)^4 \\ 1 & (0.3090-0.9511i)^2 & (0.3090-0.9511i)^4 & (0.3090-0.9511i)^6 & (0.3090-0.9511i)^8 \\ 1 & (0.3090-0.9511i)^2 & (0.3090-0.9511i)^6 & (0.3090-0.9511i)^9 & (0.3090-0.9511i)^{12} \\ 1 & (0.3090-0.9511i)^4 & (0.3090-0.9511i)^9 & (0.3090-0.9511i)^{12} & (0.3090-0.9511i)^{16} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}163\\63\\170\\47\\143\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 586 \\ 51.10+3.79\text{i} \\ 63.40+164.00\text{i} \\ 63.40-164.00\text{i} \\ 51.10-3.79\text{i} \end{bmatrix}$$

Untuk fungsi ganjil

$$O_j=\sum_{k=0}^{M-1} w_M^{kj} f_{2k+1}=\begin{bmatrix} w_5^0 & w_5^0 & w_5^0 & w_5^0 & w_5^0 \\ w_5^0 & w_5^1 & w_5^2 & w_5^2 & w_5^4 \\ w_5^0 & w_5^2 & w_5^4 & w_5^6 & w_5^8 \\ w_5^0 & w_5^2 & w_5^6 & w_5^9 & w_5^{12} \\ w_5^0 & w_5^4 & w_5^9 & w_5^{12} & w_5^{16} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1\\f_3\\f_5\\f_7\\f_9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (0.3090-0.9511i)^0 & (0.3090-0.9511i)^0 & (0.3090-0.9511i)^0 & (0.3090-0.9511i)^0 & (0.3090-0.9511i)^0 \\ (0.3090-0.9511i)^0 & (0.3090-0.9511i)^1 & (0.3090-0.9511i)^2 & (0.3090-0.9511i)^2 & (0.3090-0.9511i)^4 \\ (0.3090-0.9511i)^0 & (0.3090-0.9511i)^2 & (0.3090-0.9511i)^4 & (0.3090-0.9511i)^6 & (0.3090-0.9511i)^8 \\ (0.3090-0.9511i)^0 & (0.3090-0.9511i)^2 & (0.3090-0.9511i)^6 & (0.3090-0.9511i)^9 & (0.3090-0.9511i)^{12} \\ (0.3090-0.9511i)^0 & (0.3090-0.9511i)^4 & (0.3090-0.9511i)^9 & (0.3090-0.9511i)^{12} & (0.3090-0.9511i)^{16} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}141\\107\\47\\117\\120\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (0.3090-0.9511i)^1 & (0.3090-0.9511i)^2 & (0.3090-0.9511i)^2 & (0.3090-0.9511i)^4 \\ 1 & (0.3090-0.9511i)^2 & (0.3090-0.9511i)^4 & (0.3090-0.9511i)^6 & (0.3090-0.9511i)^8 \\ 1 & (0.3090-0.9511i)^2 & (0.3090-0.9511i)^6 & (0.3090-0.9511i)^9 & (0.3090-0.9511i)^{12} \\ 1 & (0.3090-0.9511i)^4 & (0.3090-0.9511i)^9 & (0.3090-0.9511i)^{12} & (0.3090-0.9511i)^{16} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}141\\107\\47\\117\\120\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 532 \\ 78.47+53.51i \\ 8.03 -58.93i \\ 8.03+58.93i \\ 78.47 -53.51i \end{bmatrix}$$

Selanjutnya karena perhitungannya berulang *N*/2 maka dengan menggunakan Persamaan (9) dan Persamaan (10) diperoleh :

$$\begin{aligned} \hat{f}_0 &= E_0 + w_N^0 O_0 \\ &= 586 + ((0.8090 \ - \ 0.5878\mathrm{i})^0 \times 532) \\ &= 586 + (1 \times 532) \\ &= 586 + 532 \\ &= 1118 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 &= E_1 + w_N^1 O_1 \\ &= (51.1 \ + \ 3.79i) + \left((0.8090 \ - \ 0.5878\mathrm{i})^1 \times (78.47 \ + \ 53.51i)\right) \\ &= (51.1 \ + \ 3.79i) + \left((0.8090 \ - \ 0.5878\mathrm{i}) \times (78.47 \ + \ 53.51i)\right) \\ &= (51.1 \ + \ 3.79i) + (94.9354 - 2.8351i) \\ &= 146.0354 + 0.9549i \end{aligned}$$

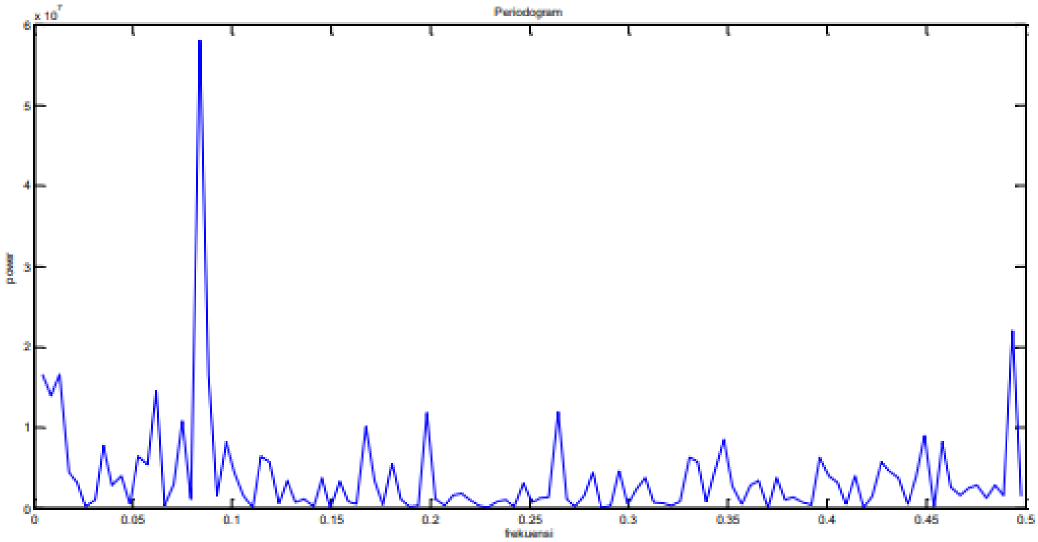
$$\begin{aligned} \hat{f}_2 &= E_2 + w_N^2 O_2 \\ &= (63.40 \ + \ 164.00\mathrm{i}) + ((0.8090 \ - \ 0.5878\mathrm{i})^2 \times (8.03 \ - \ 58.93\mathrm{i})) \\ &= (63.40 \ + \ 164.00\mathrm{i}) + \left((0.3090 \ - \ 0.9511i) \times (8.03 \ - \ 58.93\mathrm{i})\right) \\ &= (63.40 \ + \ 164.00\mathrm{i}) + (-53.5644 \ - 25.8474i) \\ &= 9.8356 + 138.1526i \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_9 &= E_4 - w_N^4 O_4 \\ &= (51.10 \ - \ 3.79\mathrm{i}) - \left((0.8090 \ - \ 0.5878\mathrm{i})^4 \times (78.47 \ - \ 53.51\mathrm{i})\right) \\ &= (51.10 \ - \ 3.79\mathrm{i}) - \left((-0.8090 - \ 0.5878i) \times (78.47 \ - \ 53.51\mathrm{i})\right) \\ &= (51.10 \ - \ 3.79\mathrm{i}) - (-94.9354 - \ 2.8351i) \\ &= 146.0354 - 0.9550i \end{aligned}$$

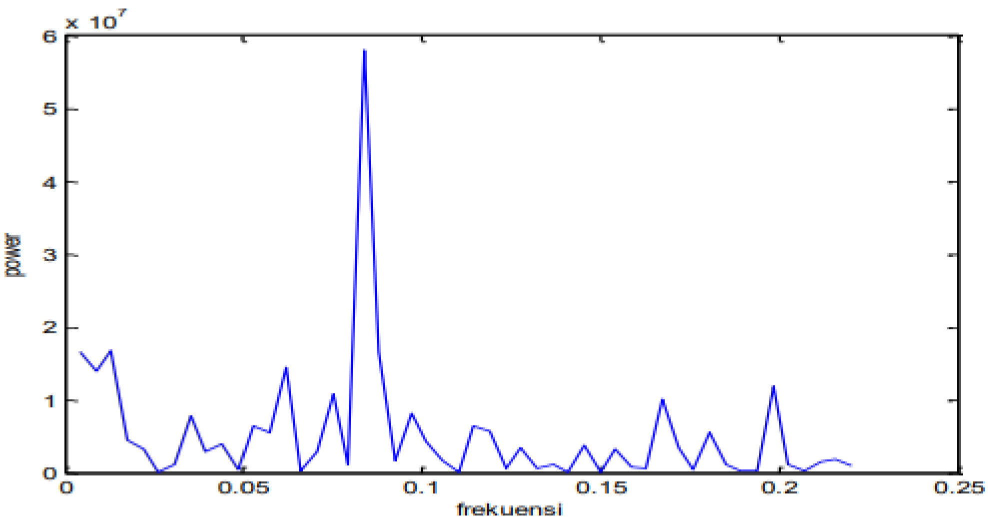
Hasil dari Transformasi Fourier menghasilkan bagian riil dan imajiner. Selanjutnya spektrum frekuensi Fourier diperoleh dari jarak (magnitude) koefisien Fourier tersebut. Besarnya magnitude dari sumbu *y* disebut power. Selanjutnya power ini diplot dengan frekuensi dan hasilnya disebut periodegram seperti yang terlihat pada Gambar 2.

Periodegram pada Gambar 2 merupakan hasil pemplotan frekuensi dan amplitudonya (power). Berbeda dengan Gambar 1, pada Gambar 1 data setiap bulan (waktu) diplot dengan besarnya curah hujan (amplitudo). Sedangkan, Gambar 2 merupakan hasil transformasi dari waktu menjadi frekuensi. Sehingga Gambar 2 memuat frekuensi dan besar amplitudo dari frekuensi tersebut.



Gambar 2. Periodegram

Untuk lebih mempermudah dalam menganalisis data, maka periodegram pada Gambar 2 tersebut dipotong dengan rentang yang memuat power yang besar (mencolok) yaitu dengan memperbesar skalanya menjadi rentang frekuensi antara 0 sampai dengan 0.2 Hertz, yang dapat dilihat pada Gambar 3

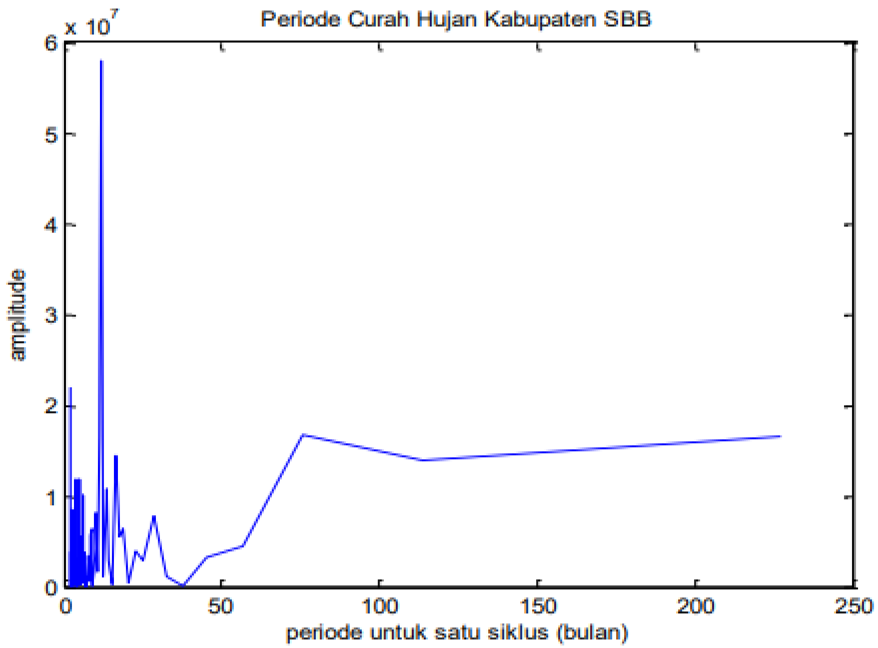


Gambar 3. Periodegram dengan skala 0 sampai dengan 0.2 Hertz.

Selanjutnya dengan menggunakan kebalikan dari frekuensi yaitu

$$T = \frac{1}{f}$$

Diperoleh periode dari curah hujan Kabupaten Seram Bagian Barat yang diperlihatkan pada Gambar 4.



Gambar 4. Periode Curah Hujan Kabupaten Seram Bagian Barat

Gambar 4 menghasilkan periode curah hujan Kabupaten Seram Bagian Barat untuk satu siklus. Karena gambar tersebut terlalu lebar, untuk memudahkan penganalisisan data, gambar tersebut dipersempit dan disajikan dalam Gambar 5. Berdasarkan Gambar 5 diperoleh bahwa periode curah hujan maksimum pada Kabupaten Seram Bagian barat terletak pada rentang waktu 10–15 bulan yang diketahui lebih detailnya menggunakan bantuan program Matlab.

Dari data tersebut diperoleh nilai periode maksimum curah hujan dalam kurun waktu 19 tahun sejak tahun 1991 sampai dengan tahun 2009 adalah

11,9474 bulan. Sehingga disimpulkan bahwa Kabupaten Seram Bagian Barat memiliki periode curah hujan maksimum yaitu sebesar 12 bulan.

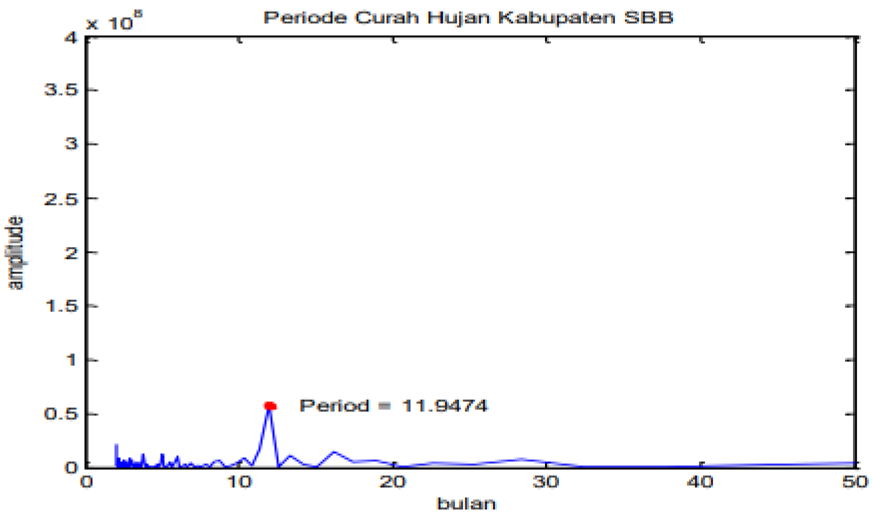
BAB III

PENUTUP

3.1. Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang dilakukan, dapat diambil kesimpulan yaitu:

1. Periode curah hujan maksimum pada Kabupaten Seram Bagian Barat adalah sebesar 12 bulan.
2. Penggunaan metode FFT pada persamaan $f\,j = Ej + wN\,j\ Oj$ dan $f\,j{+}M = Ej - wN\,j\ Oj$ sangat penting dalam menghitung frekuensi untuk menentukan periode curah hujan. Dengan menghitung FFT, diperoleh frekuensi yang menjadi dasar dalam menghitung periode curah hujan pada penelitian ini.



Gambar 6. Periode Maksimum Curah Hujan Kabupaten Seram Bagian Barat

DAFTAR PUSTAKA

1. Budiyanto, Setiyo., 2013., Telekomunikasi analog dan digital. Modul 1 – Sinyal dan Spektrum – Deret Fourier. Pusat Pengembangan Bahan Ajar Universitas Mercu Buana.
2. Febriani, Yeza., 2013., Jurnal Fisika. Analisis Transformasi Fourier dan Transformasi Wavelet Untuk Mengetahui Periode Curah Hujan Di Kabupaten Rokan Hulu Provinsi Riau. Universitas Pasir Pengaraian Riau, Vol. 1, No. 1.
3. Kreyszig, E.,2006., Advanced Engineering Mathematics (9th Edition)., United States: John Wiley & Sons, Inc.
4. La Dini, Budiani., 2009., Penentuan Periode Curah Hujan Kabupaten Manokwari Menggunakan Transformasi Fourier dan Wavelet. Skripsi. Jurusan Fisika FMIPA Universitas Negeri Papua Manokwari.
5. Mathews, J.H. & K.D. Fink., 1999., Numerical Methods Using Matlab Third Edition. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458.