

DISTRIBUSI NORMAL

1

OBJEKTIF :

1. Mahasiswa Mampu Memahami Konsep Distribusi Normal
 2. Mahasiswa Mampu Memahami Penerapan Distribusi normal
-

1.1 DISTRIBUSI NORMAL

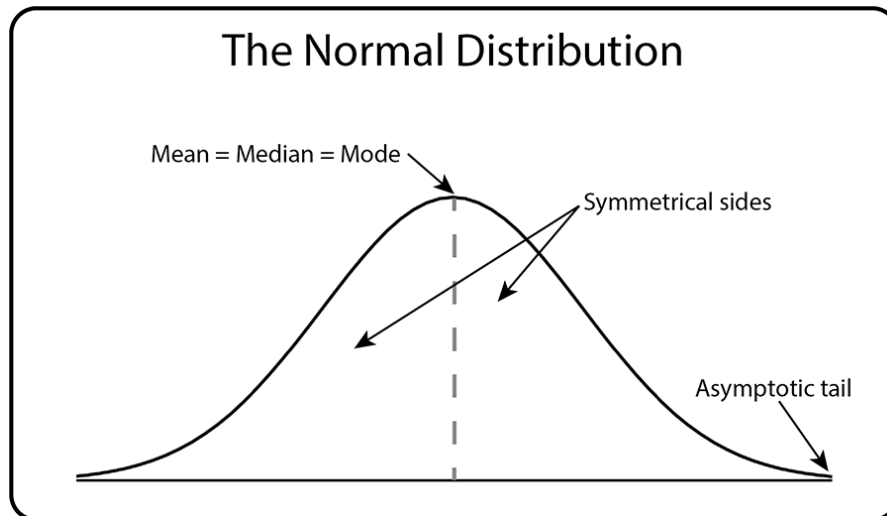
Sebaran peluang kontinu yang paling penting dalam bidang statistika adalah sebaran normal. Grafiknya, yang disebut **kurva normal** adalah kurva yang berbentuk genta seperti pada Gambar 1.1, yang dapat digunakan dalam banyak sekali gugusan data yang terjadi di alam, industri, dan penelitian. Sebaran normal sering disebut **sebaran Gauss**, untuk menghormati Gauss (1777-1855), yang juga berhasil mendapatkan persamaannya dari studi mengenai error dalam pengukuran yang berulang-ulang terhadap benda yang sama.

Definisi 1. Kurva Normal. Bila X adalah suatu variabel random dengan rata-rata μ dan varian σ^2 , maka persamaan kurva normalnya adalah

$$f(x; \mu, \sigma) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{untuk } -\infty < x < \infty$$

Dalam hal ini, $\pi = 3,14159 \dots$ dan $e = 2,71828 \dots$ Dimana μ = rata-rata dan σ = standar deviasi.

Gambar 1.1 Kurva Normal



Sifat-sifat kurva normal dapat digambarkan sebagai berikut:

- Modusnya, yaitu titik pada sumbu mendatar yang membuat fungsi mencapai maksimum, terjadi pada $x = \mu$
- Kurvanya setangkup terhadap suatu garis tegak yang melalui rata-rata μ
- Kurva ini mendekati sumbu mendatar secara asimtotik dalam kedua arah bila kita semakin menjauhi rata-ratanya
- Luas daerah yang terletak di bawah kurva sama dengan 1

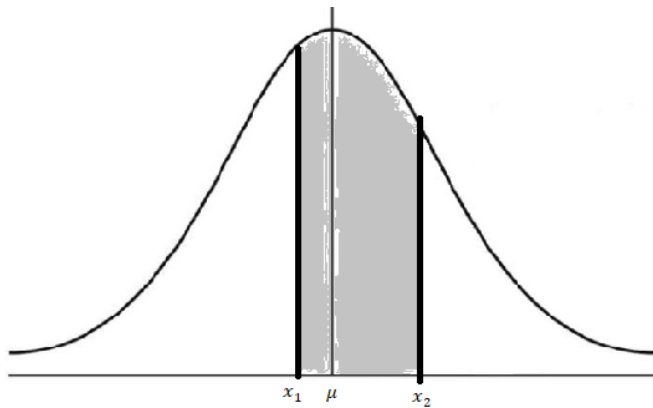
Ciri - ciri dari distribusi normal adalah sebagai berikut:

- Kurvanya mempunyai puncak tunggal.
- Kurvanya berbentuk seperti lonceng.
- Rata-rata terletak ditengah distribusi
- Kedua ekor kurva memanjang tak terbatas

Luas Daerah di Bawah Kurva Normal

Kurva sembarang sebaran peluang kontinu dibuat sedemikian rupa sehingga luas daerah di bawah kurva itu yang dibatasi oleh $x = x_1$ dan $x = x_2$ sama dengan peluang bahwa variabel random X bernilai di antara $x = x_1$ dan $x = x_2$. Sehingga untuk kurva normal dalam **Gambar 1.2**, $P(x_1 < X < x_2)$ dinyatakan oleh luas daerah yang berwarna gelap.

Gambar 1.2



Agar lebih mudah, kita dapat mengubah distribusi normal umum yang memiliki rata – rata (μ) dan standar deviasi (σ) menjadi bentuk distribusi normal baku yang memiliki rata – rata 0 ($\mu = 0$) dan standar deviasi 1 ($\sigma = 1$), dengan cara merubah X menjadi Z dengan transformasi sebagai berikut:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Keterangan :

Z : Variable normal baku

x : Nilai *variable random*

μ : Rata – rata *variable random*

σ : Standard deviasi *variable random*

Definisi 2. Sebaran Normal Baku. Sebaran variabel random normal dengan rata-rata nol dan standar deviasi 1 disebut sebaran normal baku.

Apabila semua nilai X yang diantara x_1 dan x_2 mempunyai nilai-nilai z padanannya antara z_1 dan z_2 , maka luas daerah di bawah kurva X yang berada pada Gambar 2.1 sama dengan luas daerah di bawah kurva Z antara nilai hasil transformasi $z = z_1$ dan $z = z_2$, dengan demikian

$$P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 < Z < z_2)$$

Untuk $P(z_1 < Z < z_2)$ dapat diubah menjadi $P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < z_1)$.

Dengan mentransformasi ke sebaran normal baku, kita dapat menggunakan tabel sebaran normal baku atau **Tabel Z**.

Untuk mengilustrasikan penggunaan tabel Z (anda dapat mengunduhnya di moodle praktikum), mari kita hitung peluang Z kurang dari 1,74. Pertama-tama, carilah nilai z yang sama dengan 1,7 pada kolom paling kiri dan kemudian sepanjang baris tersebut sampai kolom di bawah 0,04, dapat kita lihat 0,9591 menjadi $P(Z < 1,74) = 0,95907$.

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169

Contoh 1:

Untuk variabel random X yang berdistribusi normal dengan $\mu = 50$ dan $\sigma = 10$, hitunglah peluang bahwa:

- X bernilai di bawah 45
- X bernilai di atas 62
- X bernilai di antara 45 dan 62

Jawab: Nilai-nilai z padanan untuk $x_1 = 45$ dan $x_2 = 62$ adalah

$$Z = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{62 - 50}{10} = 1,2$$

Dengan demikian,

- X bernilai di bawah 45

$$P(X < 45) = P\left(Z < \frac{45-50}{10}\right) = P(Z < -0,5) = 0,3085$$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table

Z	.00	.01	.02	.03
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360
-0.3	.38293	.37908	.37544	.37190

b.) X bernilai di atas 62

$$\begin{aligned}
 P(X > 62) &= P\left(Z < \frac{62 - 50}{10}\right) \\
 &= P(Z > 1,2) = 1 - P(Z < 1,2) \\
 &= 1 - 0,8849 = 0,1154
 \end{aligned}$$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION

Z	.00	.01	.02
0.0	.5000	.5039	.5079
0.1	.5398	.5438	.5477
0.2	.5793	.5831	.5869
0.3	.6179	.6217	.6255
0.4	.6554	.6591	.6628
0.5	.6915	.6949	.6985
0.6	.7257	.7291	.7324
0.7	.7580	.7615	.7649
0.8	.7881	.7915	.7949
0.9	.8159	.8185	.8212
1.0	.8413	.8437	.8461
1.1	.8643	.8665	.8686
1.2	.8849	.8868	.8886
1.3	.9032	.9049	.9066
1.4	.9192	.9207	.9222

Perhatikan bahwa, tabel Z yang kita miliki adalah tabel Z untuk nilai peluang $P(Z < z)$. Sedangkan untuk $P(Z > z)$ dapat dicari dengan mengubahnya kebentuk $P(Z < z)$. Oleh karena luas daerah total dibawah kurva normal adalah 1 atau jumlah peluang adalah 1 maka $P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$.

c.) X bernilai di antara 45 dan 62

$$\begin{aligned}
 P(45 < X < 62) &= P(-0,5 < Z < 1,2) \\
 &= P(Z < 1,2) - P(Z < -0,5) \\
 &= 0,8849 - 0,3085 \\
 &= 0,58
 \end{aligned}$$

1.2 Penerapan Sebaran Normal

Beberapa dari masalah yang dapat diselesaikan dengan sebaran normal akan diuraikan dalam contoh soal berikut.

Contoh 2:

Suatu jenis aki mencapai umur rata-rata 3 tahun dengan standar deviasi 0,5 tahun. Bila umur aki itu menyebar normal, hitunglah peluang bahwa sebuah aki tertentu akan mencapai umur kurang dari 2,3 tahun.

Jawab:

Dari soal, kita dapat mengetahui bahwa

$$\mu = 3$$

$$\sigma = 0,5$$

Yang ditanyakan adalah $P(X < 2,3)$.

Ubah menjadi sebaran normal baku , untuk $x = 2,3$ padanannya adalah

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{2,3 - 3}{0,5} = -1,4$$

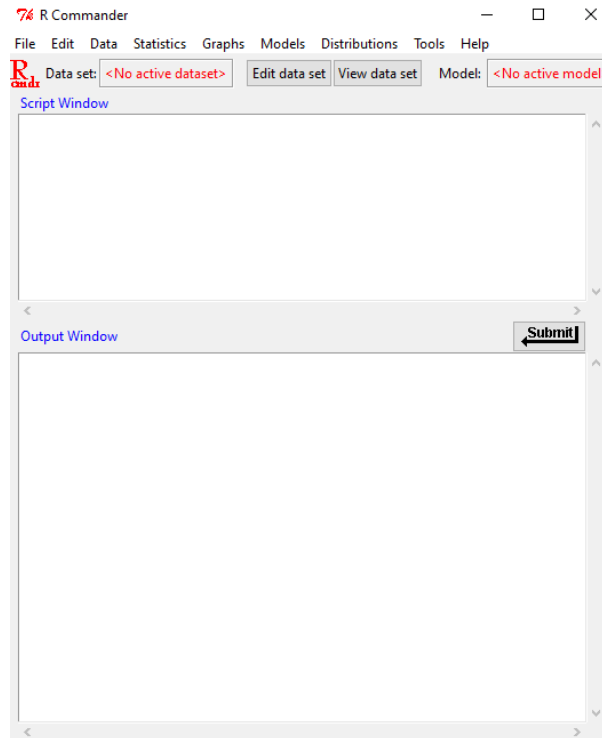
Sehingga,

$$P(X < 2,3) = P(Z < -1,4)^{**} = 0,08$$

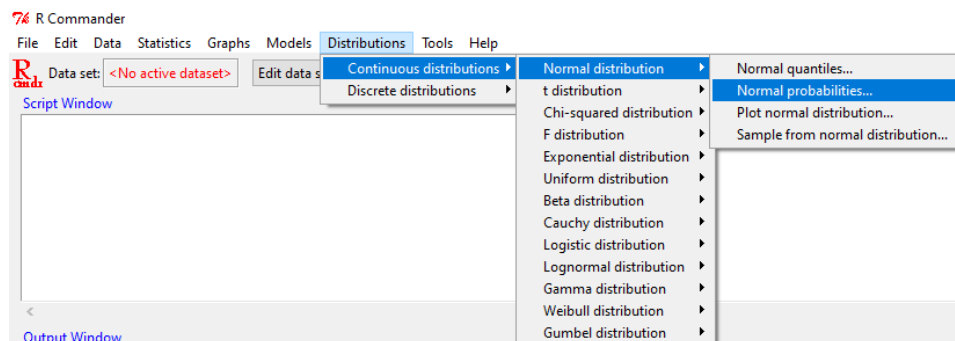
**) lihat tabel Z

Langkah – Langkah Menggunakan Software

1. Tekan icon R Commander pada desktop, kemudian akan muncul tampilan seperti gambar di bawah ini.

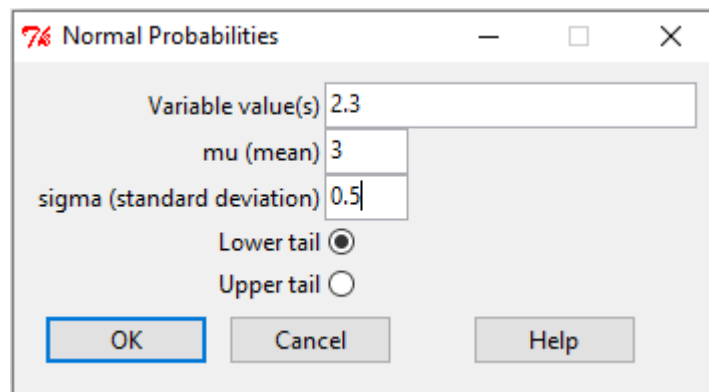


2. Pilih *Distributions, Continous Distributions, Normal Distributions, Normal Probabilities.*

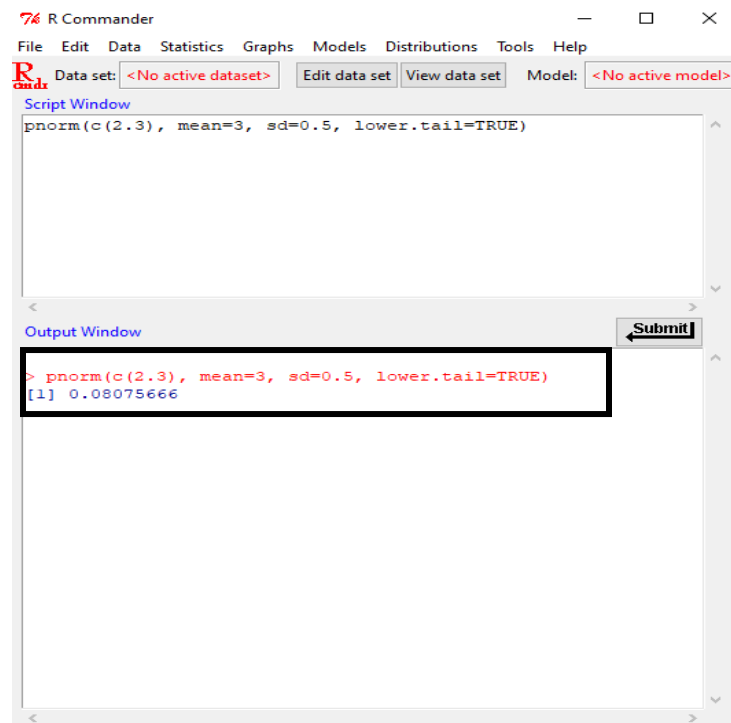


3. Muncul Kotak dialog Normal Probabilities.

- Input Variabel Value(s) = 2.3
- Input nilai Myu (Mean) = 3
- Input nilai Sigma (Standar Deviation) = 0.5
- Pilih **Lower tail** $P(X < 2.3)$ tekan ok.



4. Maka pada Output Window akan diperoleh $P(X < 2.3) = 0.08$



Contoh 3:

Nilai rata – rata hasil ujian suatu mata kuliah adalah 65, dengan standar deviasi 6. Bila diketahui sebaran nilai peserta ujian mendekati distribusi normal dan diambil seorang peserta ujian secara acak, tentukan probabilitas bahwa ia adalah peserta ujian yang mendapatkan nilai lebih dari 60.

Jawab:

Dari soal, kita dapat mengetahui bahwa

$$\mu = 65$$

$$\sigma = 6$$

Yang ditanyakan adalah $P(X > 60)$.

Ubah menjadi sebaran normal baku standar, untuk $x = 60$ padanannya adalah

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{60 - 65}{6} = -0,83$$

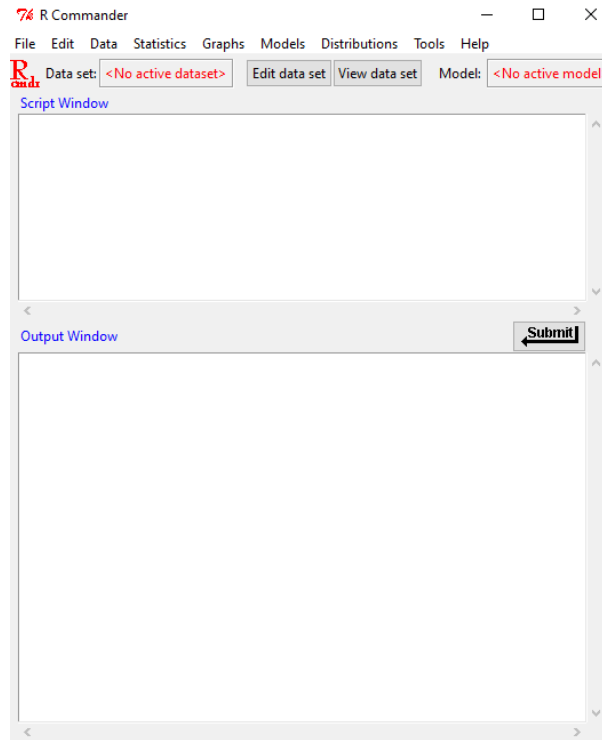
Sehingga,

$$\begin{aligned} P(X > 60) &= P(Z > -0,83) \\ &= 1 - P(Z < -0,83)^{**} \\ &= 1 - 0,21 \\ &= 0,79 \end{aligned}$$

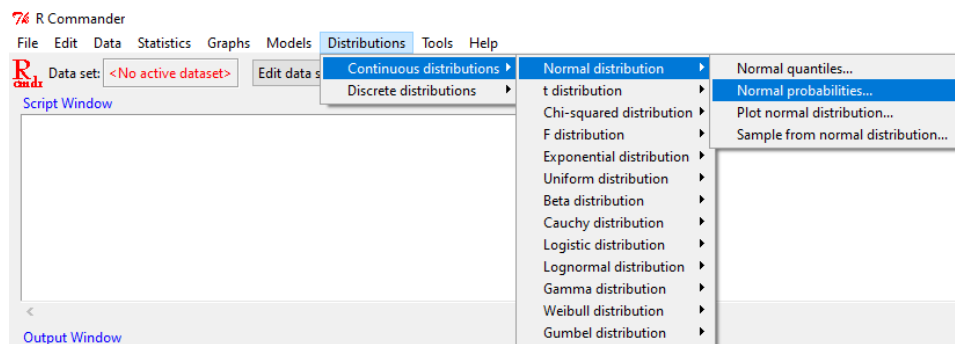
**) lihat tabel Z

Langkah – Langkah Menggunakan Software

1. Tekan icon R Commander pada desktop, kemudian akan muncul tampilan seperti gambar di bawah ini.

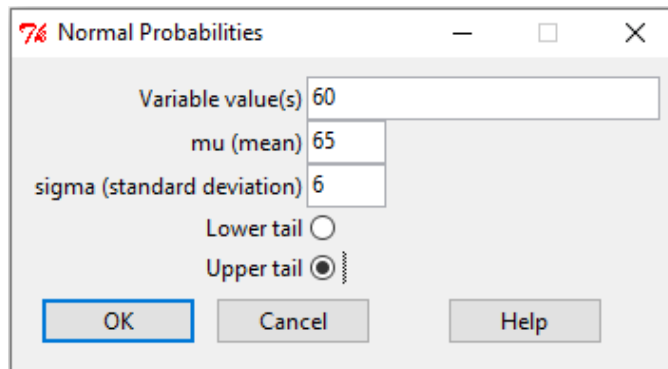


2. Pilih *Distributions, Continuous Distributions, Normal Distributions, Normal Probabilities*.



3. Muncul Kotak dialog Normal Probabilities.

- Input Variabel Value(s) = 60
- Input nilai Myu (Mean) = 65
- Input nilai Sigma (Standar Deviation) = 6
- Pilih **Upper tail** $P(X > 60)$ tekan ok.



4. Maka pada Output Window akan diperoleh $P(X > 60) = 0.79$



Contoh 4:

Sebuah mesin minuman ringan diatur sedemikian rupa sehingga mengeluarkan rata-rata 200 mililiter per gelas. Bila banyaknya minuman yang dikeluarkan menyebar normal dengan simpangan baku 15 mililiter. Berapa peluang sebuah gelas berisi antara 191 dan 209 mililiter?

Jawab:

Dari soal, kita dapat mengetahui bahwa

$$\mu = 200$$

$$\sigma = 15$$

Yang ditanyakan adalah $P(191 < X < 209)$

Ubah menjadi sebaran normal baku , untuk $X_1 = 191$, $X_2 = 209$

padanannya adalah

- $Z_1 = \frac{191-200}{15} = -0.6$

- $Z_2 = \frac{209-200}{15} = 0.6$

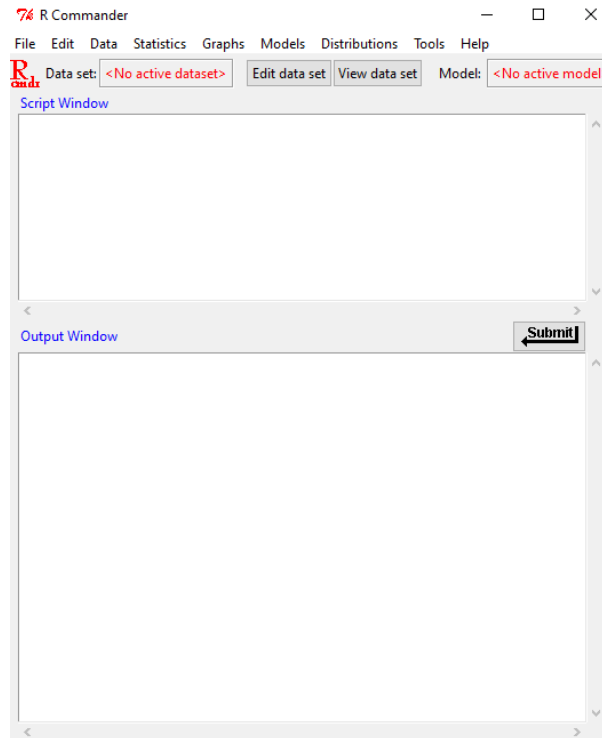
Sehingga,

$$\begin{aligned} P(191 < X < 209) &= P(-0.6 < Z < 0.6) \\ &= P(Z < 0.6) ** -P(Z < -0.6) ** \\ &= 0.72 - 0.27 \\ &= 0.45 \end{aligned}$$

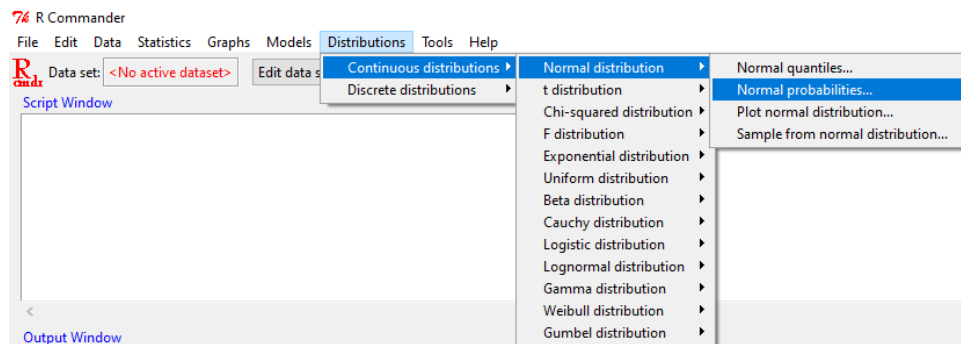
**) lihat tabel Z

Langkah – Langkah Menggunakan Software

1. Tekan icon R Commander pada desktop, kemudian akan muncul tampilan seperti gambar di bawah ini.

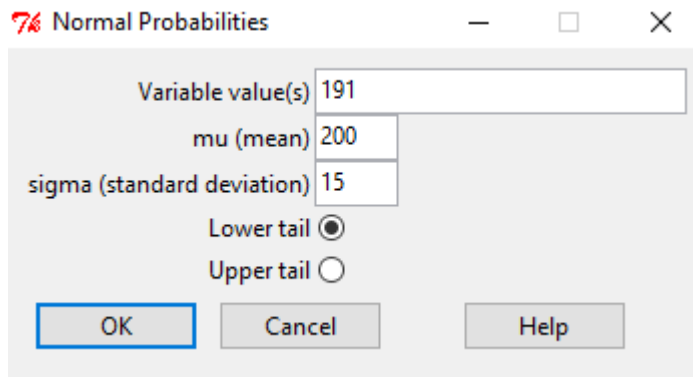


2. Pilih *Distributions, Continuous Distributions, Normal Distributions, Normal Probabilities.*

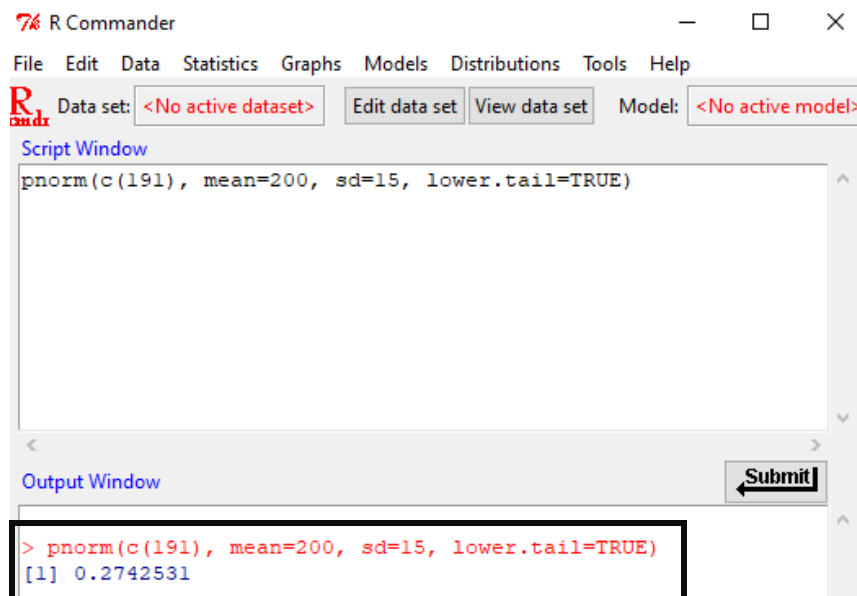


3. Muncul Kotak dialog Normal Probabilities.

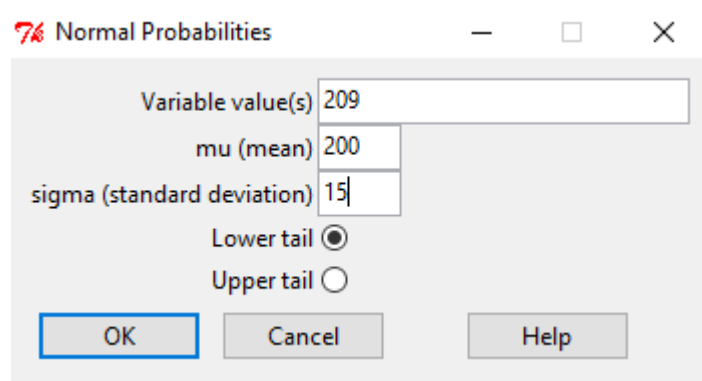
- Input Variabel Value(s) = 191
- Input nilai Myu (Mean) = 200
- Input nilai Sigma (Standar Deviation) = 15
- Pilih **Lower tail** $P(X < 191)$ tekan ok.



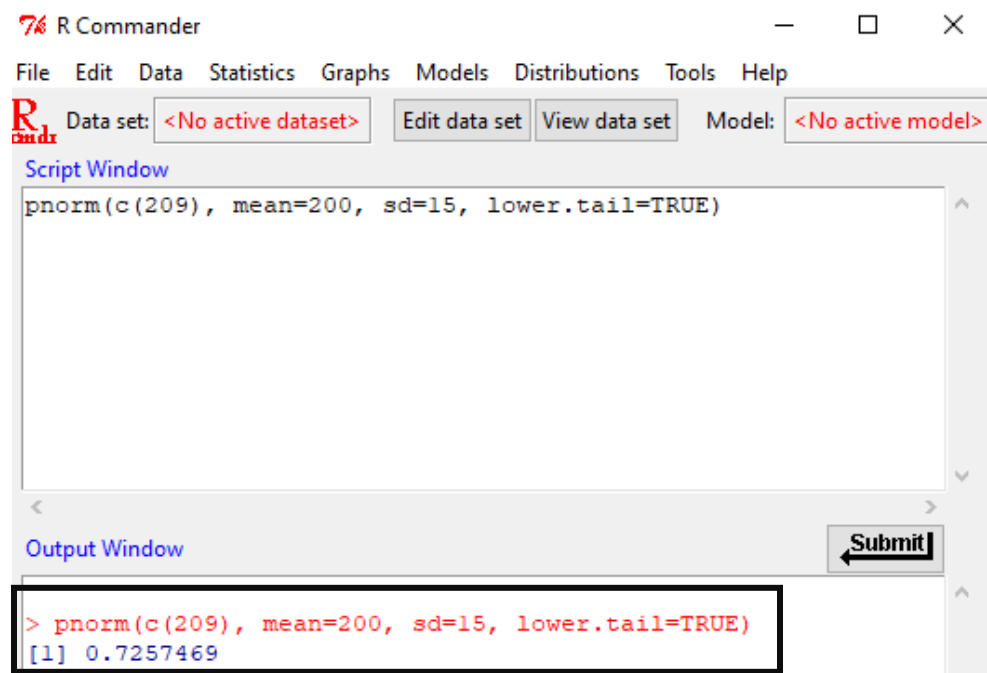
4. Maka pada Output Window akan diperoleh $P(X < 191) = 0.27$



5. Kemudian untuk mencari $P(X < 209)$ ulangi langkah 1 dan 2.
6. Setelah Muncul Kotak dialog Normal Probabilities.
 - Input Variabel Value(s) = 209
 - Input nilai Myu (Mean) = 200
 - Input nilai Sigma (Standar Deviation) = 15
 - Pilih **Lower tail** $P(X < 209)$ tekan ok.



7. Maka pada Output Window akan diperoleh $P(X < 209) = 0.72$



$$\begin{aligned}P(191 < X < 209) &= P(-0.6 < Z < 0.6) \\&= P(Z < 0.6) - P(Z < -0.6) \\&= 0.72 - 0.27 \\&= 0.45\end{aligned}$$

Tabel Z

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

Referensi :

- [1] Walpole, Ronald E. (1995). Pengantar Statistika. Jakarta: Gramedia
- [2] Harlan, J. (2004). *Metode Statistika 1* . Depok: Gunadarma .
- [3] Spiegel. R.M. (2004). Teori dan Soal - Soal Statistik. Jakarta: Erlangga.