

図1 1.1.(a) の描画結果

1.1 (a)

$$p(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2^2} \exp\left\{-\frac{(y-1)^2}{2 \cdot 2^2}\right\} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2^2} \exp\left\{-\frac{(y-2)^2}{2 \cdot 2^2}\right\} \quad (1)$$

```
#%%
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def norm_dist(x: np.ndarray, mu: float, sigma: float) -> np.ndarray:
    return 1 / (sigma * np.sqrt(2 * np.pi)) * np.exp(- 1./2 * ((x - mu) / sigma) **2)

#%%
x = np.linspace(-10, 10, 1000)
y1 = norm_dist(x, 1, 2)
y2 = norm_dist(x, 2, 2)

y = 1/2 * y1 + 1/2 * y2
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

1.1(b)

$$\Pr(\theta = 1|y = 1) = \frac{\Pr(\theta = 1)\Pr(y = 1|\theta = 1)}{\Pr(y = 1)} \quad (2)$$

$$= \frac{\exp(-\frac{(1-1)^2}{2 \cdot 2^2})}{\exp(-\frac{(1-1)^2}{2 \cdot 2^2}) + \exp(-\frac{(1-2)^2}{2 \cdot 2^2})} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{1 + \exp(-0.125)} = 0.531 \quad (4)$$

1.1(c)

1.1(b)同様の式展開により、

$$\Pr(\theta = 1|y) = \frac{\exp(-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2})}{\exp(-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}) + \exp(-\frac{(y-2)^2}{2\sigma^2})} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{1 + \exp(-\frac{-2y+3}{2\sigma^2})} \quad (6)$$

$f(x) = 1/(1 + \exp(-\frac{x}{\sigma}))$  のグラフのスケールを変えて描画してみると、 $\theta$ の事後分布は $\sigma$ が小さくなるほど0か1の両極端な分布となり、大きくなるほど  $\Pr(\theta = 1|y) = \Pr(\theta = 2|y) = 0.5$  と偏りのない分布に近づくことがわかる。

```
#%%
```

```
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def func(x: np.ndarray, sigma: float) -> np.ndarray:
```

```
    return 1 / (1 + np.exp(-x / sigma))
```

```
#%%
```

```
x = np.linspace(-10, 10, 1000)
```

```
y1 = func(x, 0.01)
```

```
y2 = func(x, 0.1)
```

```
y3 = func(x, 10)
```

```
y4 = func(x, 100)
```

```
plt.plot(x, y1, label="sigma=0.01")
```

```
plt.plot(x, y2, label="sigma=0.1")
```

```
plt.plot(x, y3, label="sigma=10")
```

```
plt.plot(x, y4, label="sigma=100")
```

```
plt.legend()
```

```
plt.show()
```

1.6

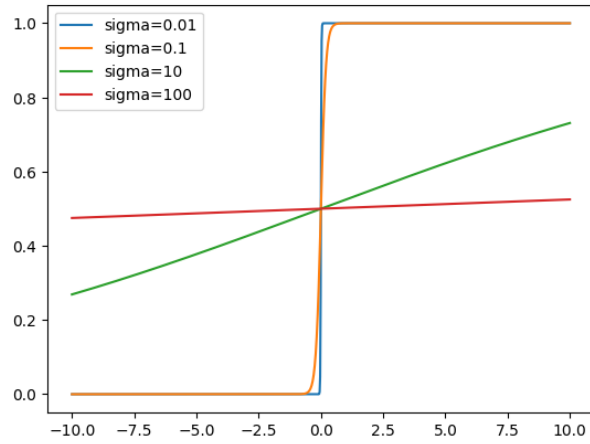


図2 1.1(c)の描画結果

$$\Pr(\text{一卵性双生児}|\text{男同士の双子である}) = \frac{\Pr(\text{一卵性双生児かつ男同士である})}{\Pr(\text{男同士の双子である})} = \quad (7)$$

$$\frac{\Pr(\text{一卵性双生児かつ男同士である})}{\Pr(\text{一卵性双生児の男同士}) + \Pr(\text{二卵性双生児の男同士})} \quad (8)$$

$$= \frac{\Pr(\text{一卵性双生児}) \cdot 1/2}{\Pr(\text{一卵性双生児}) \cdot 1/2 + \Pr(\text{二卵性双生児}) \cdot 1/4} = \frac{1/300}{1/300 + 1/125 \cdot 1/2} = 0.455 \quad (9)$$

よって45.5%。

1.8

(a) Aが観察したサイコロの目の手順にたまたま6が多かったら、 $P(E|I_A) > 1/6$  とするのが妥当だろう。しかし、Bは知識を持っていないので、 $P(E|I_B) = 1/6$  と推定するだろう。

(b) Aは無知なので、ワールドカップの出場国数を $N$ とすると  $P(E|I_A) = 1/N$  と推定するが、一方でBはブラジルが過去に優れた戦績を挙げているという情報をもとに、 $P(E|I_B)$ を $1/N$  よりもはるかに大きい値に設定することが予想される。