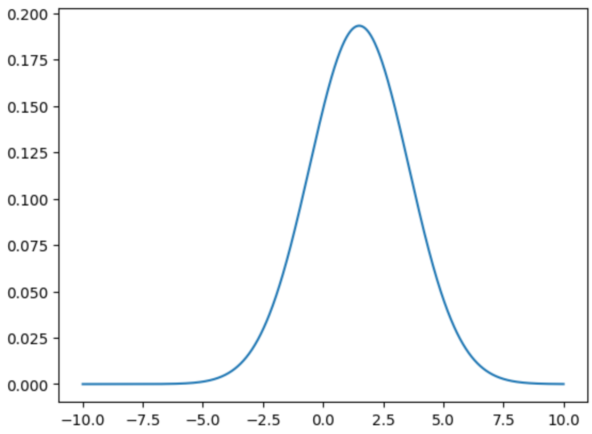

図1　1.1.(a) の描画結果

1.1 (a)

$$p(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2^2}} \exp\{\frac{(y-1)^2}{2 \cdot 2^2}\} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2^2}} \exp\{\frac{(y-2)^2}{2 \cdot 2^2}\} \tag{1}$$

```
#%%
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def norm_dist(x: np.ndarray, mu: float, sigma: float) -> np.ndarray:
    return 1 / (sigma * np.sqrt(2 * np.pi)) * np.exp(- 1./2 * ((x - mu) / sigma) **2)

#%%
x = np.linspace(-10, 10, 1000)
y1 = norm_dist(x, 1, 2)
y2 = norm_dist(x, 2, 2)

y = 1/2 * y1 + 1/2 * y2
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

1.1(b)

$$\Pr(\theta = 1|\mathrm{y} = 1) = \frac{\Pr(\theta = 1)\Pr(\mathrm{y} = 1|\theta = 1)}{\Pr(\mathrm{y} = 1)} \tag{2}$$

$$= \frac{\exp(-\frac{(1-1)^2}{2\cdot 2^2})}{\exp(-\frac{(1-1)^2}{2\cdot 2^2}) + \exp(-\frac{(1-2)^2}{2\cdot 2^2})} \tag{3}$$

$$= \frac{1}{1 + \exp(-0.125)} = 0.531 \tag{4}$$

1.1(c)

1.1(b)同様の式展開により、

$$\Pr(\theta = 1|\mathrm{y}) = \frac{\exp(-\frac{(\mathrm{y}-1)^2}{2\sigma^2})}{\exp(-\frac{(\mathrm{y}-1)^2}{2\sigma^2}) + \exp(-\frac{(\mathrm{y}-2)^2}{2\sigma^2})} \tag{5}$$

$$= \frac{1}{1 + \exp(-\frac{-2y+3}{2\sigma^2})} \tag{6}$$

$f(x) = 1/(1 + \exp(-\frac{x}{\sigma}))$ のグラフのスケールを変えて描画してみると、θの事後分布はσが小さくなるほど0か1の両極端な分布となり、大きくなるほど $\Pr(\theta = 1|\mathrm{y}) = \Pr(\theta = 2|\mathrm{y}) = 0.5$ と偏りのない分布に近づくことがわかる。

```
#%%
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def func(x: np.ndarray, sigma: float) -> np.ndarray:
    return 1 / (1 + np.exp(-x / sigma))

#%%
x = np.linspace(-10, 10, 1000)
y1 = func(x, 0.01)
y2 = func(x, 0.1)
y3 = func(x, 10)
y4 = func(x, 100)

plt.plot(x, y1, label="sigma=0.01")
plt.plot(x, y2, label="sigma=0.1")
plt.plot(x, y3, label="sigma=10")
plt.plot(x, y4, label="sigma=100")
plt.legend()
plt.show()
```

1.6

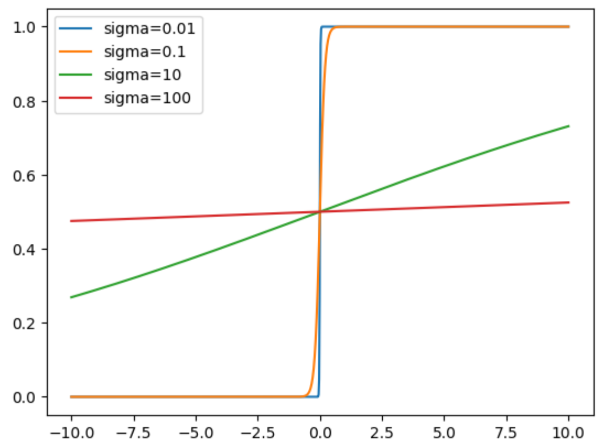

図2　1.1(c)の描画結果

$$\Pr(\text{一卵性双生児}|\text{男同士の双子である}) = \frac{\Pr(\text{一卵性双生児かつ男同士である})}{\Pr(\text{男同士の双子である})} = \tag{7}$$

$$\frac{\Pr(\text{一卵性双生児かつ男同士である})}{\Pr(\text{一卵性双生児の男同士}) + \Pr(\text{二卵性双生児の男同士})} \tag{8}$$

$$= \frac{\Pr(\text{一卵性双生児}) \cdot 1/2}{\Pr(\text{一卵性双生児}) \cdot 1/2 + \Pr(\text{二卵性双生児}) \cdot 1/4} = \frac{1/300}{1/300 + 1/125 \cdot 1/2} = 0.455 \tag{9}$$

よって45.5%。

1.7

箱を変える場合は

$\Pr(\text{豪華な商品を得る}|\text{箱を変える}) = \frac{\Pr(\text{箱を変える、かつ豪華な商品を得る})}{\Pr(\text{箱を変える})} = 2/3.$

$\because$ 豪華な商品の箱への入り方3通りと最初の箱を選ぶ3通りを併せて合計9通りの組み合わせを考えると、豪華な商品を選ぶ確率は、最初に豪華な商品の箱を**選ばなかった**ときのみ $= (9-3)/9 = 6/9 = 2/3$.

箱を変えない場合は反対に、最初に豪華な商品の箱を**選んだ**ときのみ得られるため、

$\Pr(\text{豪華な商品を得る}|\text{箱を変えない}) = \frac{\Pr(\text{箱を変えない、かつ豪華な商品を得る})}{\Pr(\text{箱を変えない})} = 3/9 = 1/3.$

1.8

(a) Aが観察したサイコロの目の手順にたまたま6が多かったら、$P(E|I_A) > 1/6$ とするのが妥当だろう。しかし、Bは知識を持っていないので、$P(E|I_B) = 1/6$ と推定するだろう。

(b) Aは無知なので、ワールドカップの出場国数をNとすると $P(E|I_A) = 1/N$ と推定するが、一方でBはブラジルが過去に優れた戦績を挙げているという情報をもとに、$P(E|I_B)$を$1/N$ よりもはるかに大きい値に設定することが予想される。

1.9

(a)コード "1-9.py" を実行した結果、44人の患者が来院し、42人が待たないといけなかった。平均待ち時間は76.4分で、診療所は午前9時から586分後つまり午後6時46分に閉院した。

(b)コード "1-9.py" を実行した結果は下記の通り。

```
43.0 40.0 66.43857093736227 554.565324530271
```

	num_patients	num_wait_patients	mean_waiting_times	\
count	100.000000	100.000000	100.000000	
mean	43.300000	40.570000	72.635895	
std	7.165433	8.498669	39.271592	
min	26.000000	17.000000	7.486453	
25%	39.000000	36.000000	43.478445	
50%	43.000000	40.000000	66.438571	
75%	47.250000	46.000000	93.654827	
max	66.000000	65.000000	207.551080	

	total_consult_times
count	100.000000
mean	568.319741
std	78.700268
min	440.750080
25%	515.398373
50%	554.565325
75%	614.927855
max	860.047157