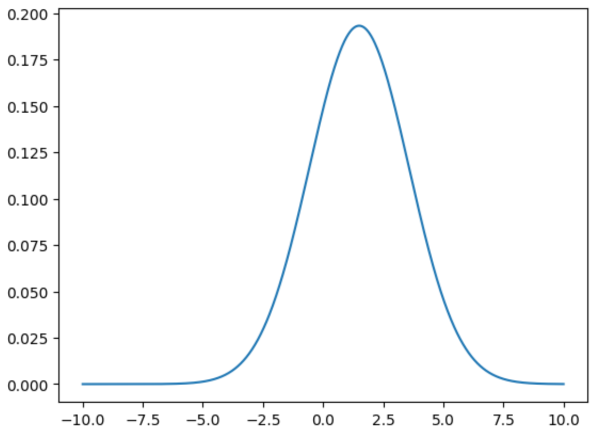

図1　1.1.(a) の描画結果

1.1 (a)

$$p(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2^2}} \exp\{\frac{(y-1)^2}{2 \cdot 2^2}\} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2^2}} \exp\{\frac{(y-2)^2}{2 \cdot 2^2}\} \tag{1}$$

```
#%%
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def norm_dist(x: np.ndarray, mu: float, sigma: float) -> np.ndarray:
    return 1 / (sigma * np.sqrt(2 * np.pi)) * np.exp(- 1./2 * ((x - mu) / sigma) **2)

#%%
x = np.linspace(-10, 10, 1000)
y1 = norm_dist(x, 1, 2)
y2 = norm_dist(x, 2, 2)

y = 1/2 * y1 + 1/2 * y2
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

1.1(b)

$$\Pr(\theta=1|\mathrm{y}=1) = \frac{\Pr(\theta=1)\Pr(\mathrm{y}=1|\theta=1)}{\Pr(\mathrm{y}=1)} \tag{2}$$

$$= \frac{\exp(-\frac{(1-1)^2}{2\cdot 2^2})}{\exp(-\frac{(1-1)^2}{2\cdot 2^2}) + \exp(-\frac{(1-2)^2}{2\cdot 2^2})} \tag{3}$$

$$= \frac{1}{1+\exp(-0.125)} = 0.531 \tag{4}$$

1.1(c)

1.1(b)同様の式展開により、

$$\Pr(\theta=1|\mathrm{y}) = \frac{\exp(-\frac{(\mathrm{y}-1)^2}{2\sigma^2})}{\exp(-\frac{(\mathrm{y}-1)^2}{2\sigma^2}) + \exp(-\frac{(\mathrm{y}-2)^2}{2\sigma^2})} \tag{5}$$

$$= \frac{1}{1+\exp(-\frac{-2y+3}{2\sigma^2})} \tag{6}$$

$f(x) = 1/(1+\exp(-\frac{x}{\sigma}))$ のグラフのスケールを変えて描画してみると、θの事後分布はσが小さくなるほど0か1の両極端な分布となり、大きくなるほど $\Pr(\theta=1|\mathrm{y}) = \Pr(\theta=2|\mathrm{y}) = 0.5$ と偏りのない分布に近づくことがわかる。

```
#%%
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def func(x: np.ndarray, sigma: float) -> np.ndarray:
    return 1 / (1 + np.exp(-x / sigma))

#%%
x = np.linspace(-10, 10, 1000)
y1 = func(x, 0.01)
y2 = func(x, 0.1)
y3 = func(x, 10)
y4 = func(x, 100)

plt.plot(x, y1, label="sigma=0.01")
plt.plot(x, y2, label="sigma=0.1")
plt.plot(x, y3, label="sigma=10")
plt.plot(x, y4, label="sigma=100")
plt.legend()
plt.show()
```

1.4

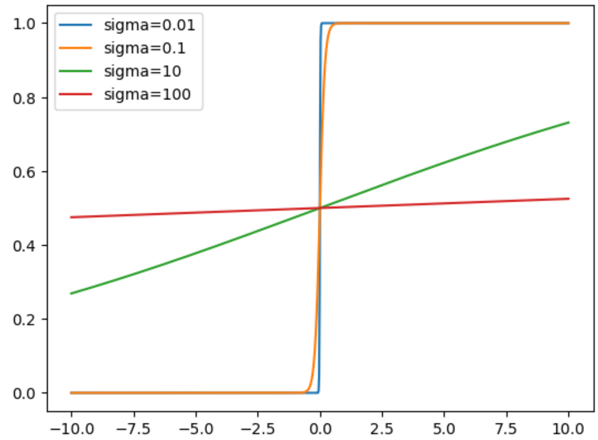

図2　1.1(c)の描画結果

(a) 1つ目の確率は $8/12 = 2/3$、2つ目は $5/12$、3つ目は $\frac{(8/12)^8+(8/12)^9+\cdots}{8/12} = 0.176$。

(b) (結果 − ポイントスプレッド)の観測値は $x = -15, -13, -11, -11, -7, -2, -1, 5, 7, 8, 12, 13$となるので、標本平均と標本分散はそれぞれ $\bar{x} = (-15-13-11-11-7-2-1+5+7+8+12+13)/12 = -1.25$, $s^2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2/11 = 102.0$ となるため、$\mathcal{N}(-1.25, 102)$ と近似できる。 1つ目の確率は、累積分布関数が-8より大きくなる確率なので

$$1 - \Phi\left(\frac{-8+1.25}{\sqrt{102}}\right) = 1 - \Phi(-0.668) = 0.748. \tag{7}$$

2つ目の確率は、累積分布関数が0より大きくなる確率なので

$$1 - \Phi\left(\frac{0+1.25}{\sqrt{102}}\right) = 1 - \Phi(0.1238) = 0.451. \tag{8}$$

3つ目の確率は、それぞれの試合の独立性を仮定すると、1つ目の確率を8乗すれば良いので $((0.748)^8 + (0.748)^9 + \cdots)/0.748 = 0.520$.

1.6

$$\mathrm{Pr}(\text{一卵性双生児}|\text{男同士の双子である}) = \frac{\mathrm{Pr}(\text{一卵性双生児かつ男同士である})}{\mathrm{Pr}(\text{男同士の双子である})} = \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{Pr}(\text{一卵性双生児かつ男同士である})}{\mathrm{Pr}(\text{一卵性双生児の男同士}) + \mathrm{Pr}(\text{二卵性双生児の男同士})} \tag{10}$$

$$= \frac{\mathrm{Pr}(\text{一卵性双生児}) \cdot 1/2}{\mathrm{Pr}(\text{一卵性双生児}) \cdot 1/2 + \mathrm{Pr}(\text{二卵性双生児}) \cdot 1/4} = \frac{1/300}{1/300 + 1/125 \cdot 1/2} = 0.455 \tag{11}$$

よって45.5%。

1.7

箱を変える場合は

$\mathrm{Pr}(\text{豪華な商品を得る}|\text{箱を変える}) = \frac{\mathrm{Pr}(\text{箱を変える、かつ豪華な商品を得る})}{\mathrm{Pr}(\text{箱を変える})} = 2/3.$

$\because$ 豪華な商品の箱への入り方3通りと最初の箱を選ぶ3通りを併せて合計9通りの組み合わせを考えると、豪華な商品を選ぶ確率は、最初に豪華な商品の箱を**選ばなかった**ときのみ $= (9-3)/9 = 6/9 = 2/3$.

箱を変えない場合は反対に、最初に豪華な商品の箱を選んだときのみ得られるため、

$\Pr(\text{豪華な商品を得る}|\text{箱を変えない}) = \frac{\Pr(\text{箱を変えない、かつ豪華な商品を得る})}{\Pr(\text{箱を変えない})} = 3/9 = 1/3.$

1.8

(a) Aが観察したサイコロの目の手順にたまたま6が多かったら、$P(E|I_A) > 1/6$ とするのが妥当だろう。しかし、Bは知識を持っていないので、$P(E|I_B) = 1/6$ と推定するだろう。

(b) Aは無知なので、ワールドカップの出場国数をNとすると $P(E|I_A) = 1/N$ と推定するが、一方でBはブラジルが過去に優れた戦績を挙げているという情報をもとに、$P(E|I_B)$を$1/N$ よりもはるかに大きい値に設定することが予想される。

1.9

(a)コード "1-9.py" を実行した結果、44人の患者が来院し、42人が待たないといけなかった。平均待ち時間は76.4分で、診療所は午前9時から586分後つまり午後6時46分に閉院した。

(b)コード "1-9.py" を実行した結果は下記の通り。

```
43.0  40.0  66.43857093736227  554.565324530271
        num_patients  num_wait_patients  mean_waiting_times  \
count     100.000000         100.000000          100.000000
mean       43.300000          40.570000           72.635895
std         7.165433           8.498669           39.271592
min        26.000000          17.000000            7.486453
25%        39.000000          36.000000           43.478445
50%        43.000000          40.000000           66.438571
75%        47.250000          46.000000           93.654827
max        66.000000          65.000000          207.551080

        total_consult_times
count            100.000000
mean             568.319741
std               78.700268
min              440.750080
25%              515.398373
50%              554.565325
75%              614.927855
max              860.047157
```