

図1 1.1.(a) の描画結果

1.1 (a)

$$p(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2^2} \exp\left\{-\frac{(y-1)^2}{2 \cdot 2^2}\right\} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2^2} \exp\left\{-\frac{(y-2)^2}{2 \cdot 2^2}\right\} \quad (1)$$

```
#%%
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def norm_dist(x: np.ndarray, mu: float, sigma: float) -> np.ndarray:
    return 1 / (sigma * np.sqrt(2 * np.pi)) * np.exp(- 1./2 * ((x - mu) / sigma) **2)

#%%
x = np.linspace(-10, 10, 1000)
y1 = norm_dist(x, 1, 2)
y2 = norm_dist(x, 2, 2)

y = 1/2 * y1 + 1/2 * y2
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

1.1(b)

$$\Pr(\theta = 1|y = 1) = \frac{\Pr(\theta = 1)\Pr(y = 1|\theta = 1)}{\Pr(y = 1)} \quad (2)$$

$$= \frac{\exp(-\frac{(1-1)^2}{2 \cdot 2^2})}{\exp(-\frac{(1-1)^2}{2 \cdot 2^2}) + \exp(-\frac{(1-2)^2}{2 \cdot 2^2})} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{1 + \exp(-0.125)} = 0.531 \quad (4)$$

1.1(c)

1.1(b)同様の式展開により、

$$\Pr(\theta = 1|y) = \frac{\exp(-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2})}{\exp(-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}) + \exp(-\frac{(y-2)^2}{2\sigma^2})} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{1 + \exp(-\frac{-2y+3}{2\sigma^2})} \quad (6)$$

$f(x) = 1/(1 + \exp(-\frac{x}{\sigma}))$ のグラフのスケールを変えて描画してみると、 θ の事後分布は σ が小さくなるほど0か1の両極端な分布となり、大きくなるほど $\Pr(\theta = 1|y) = \Pr(\theta = 2|y) = 0.5$ と偏りのない分布に近づくことがわかる。

```
#%%
```

```
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def func(x: np.ndarray, sigma: float) -> np.ndarray:
```

```
    return 1 / (1 + np.exp(-x / sigma))
```

```
#%%
```

```
x = np.linspace(-10, 10, 1000)
```

```
y1 = func(x, 0.01)
```

```
y2 = func(x, 0.1)
```

```
y3 = func(x, 10)
```

```
y4 = func(x, 100)
```

```
plt.plot(x, y1, label="sigma=0.01")
```

```
plt.plot(x, y2, label="sigma=0.1")
```

```
plt.plot(x, y3, label="sigma=10")
```

```
plt.plot(x, y4, label="sigma=100")
```

```
plt.legend()
```

```
plt.show()
```

1.4

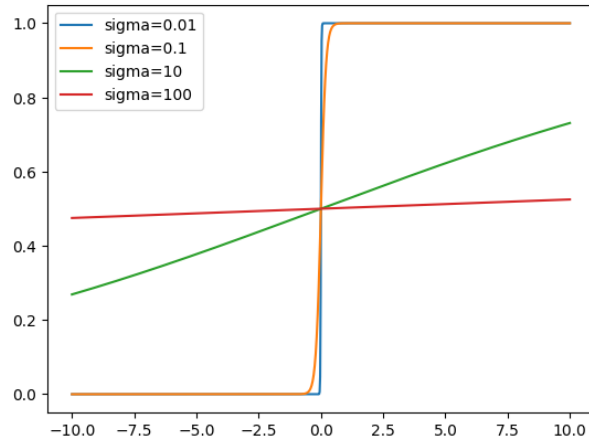


図2 1.1(c)の描画結果

(a) 1つ目の確率は $8/12 = 2/3$ 、2つ目は $5/12$ 、3つ目は $\frac{(8/12)^8 + (8/12)^9 + \dots + (8/12)^{12}}{8/12} = 0.160$ 。

(b) (結果 - ポイントスプレッド)の観測値は $x = -15, -13, -11, -11, -7, -2, -1, 5, 7, 8, 12, 13$ となるので、標本平均と標本分散はそれぞれ $\bar{x} = (-15 - 13 - 11 - 11 - 7 - 2 - 1 + 5 + 7 + 8 + 12 + 13)/12 = -1.25$, $s^2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 / 11 = 102.0$ となるため、 $\mathcal{N}(-1.25, 102)$ と近似できる。1つ目の確率は、累積分布関数が -8より大きくなる確率なので

$$1 - \Phi\left(\frac{-8 + 1.25}{\sqrt{102}}\right) = 1 - \Phi(-0.668) = 0.748. \quad (7)$$

2つ目の確率は、累積分布関数が0より大きくなる確率なので

$$1 - \Phi\left(\frac{0 + 1.25}{\sqrt{102}}\right) = 1 - \Phi(0.1238) = 0.451. \quad (8)$$

3つ目の確率は、 $\text{Bin}(12, 0.748)$ という二項分布で8以上の事象を観測する確率と考えればよく、

#%%

```
from scipy.stats import binom
print(1 - binom.cdf(k=7, n=12, p=0.748))
```

答えは 0.838 となった。

1.6

$$\Pr(\text{一卵性双生児}|\text{男同士の双子である}) = \frac{\Pr(\text{一卵性双生児かつ男同士である})}{\Pr(\text{男同士の双子である})} = \quad (9)$$

$$\frac{\Pr(\text{一卵性双生児かつ男同士である})}{\Pr(\text{一卵性双生児の男同士}) + \Pr(\text{二卵性双生児の男同士})} \quad (10)$$

$$= \frac{\Pr(\text{一卵性双生児}) \cdot 1/2}{\Pr(\text{一卵性双生児}) \cdot 1/2 + \Pr(\text{二卵性双生児}) \cdot 1/4} = \frac{1/300}{1/300 + 1/125 \cdot 1/2} = 0.455 \quad (11)$$

よって45.5%。

1.7

箱を変える場合は

$$\Pr(\text{豪華な商品を得る}|\text{箱を変える}) = \frac{\Pr(\text{箱を変える, かつ豪華な商品を得る})}{\Pr(\text{箱を変える})} = 2/3.$$

∴ 豪華な商品の箱への入り方3通りと最初の箱を選ぶ3通りを併せて合計9通りの組み合わせを考えると、豪華な商品を選ぶ確率は、最初に豪華な商品の箱を選ばなかったときのみ $= (9 - 3)/9 = 6/9 = 2/3$.

箱を変えない場合は反対に、最初に豪華な商品の箱を選んだときのみ得られるため、

$$\Pr(\text{豪華な商品を得る}|\text{箱を変えない}) = \frac{\Pr(\text{箱を変えない, かつ豪華な商品を得る})}{\Pr(\text{箱を変えない})} = 3/9 = 1/3.$$

1.8

(a) Aが観察したサイコロの目の手順にたまたま6が多かったら、 $P(E|I_A) > 1/6$ とするのが妥当だろう。しかし、Bは知識を持っていないので、 $P(E|I_B) = 1/6$ と推定するだろう。

(b) Aは無知なので、ワールドカップの出場国数を N とすると $P(E|I_A) = 1/N$ と推定するが、一方でBはブラジルが過去に優れた戦績を挙げているという情報をもとに、 $P(E|I_B)$ を $1/N$ よりもはるかに大きい値に設定することが予想される。

1.9

(a)コード "1-9.py" を実行した結果、44人の患者が来院し、42人が待たないといけなかった。平均待ち時間は76.4分で、診療所は午前9時から586分後つまり午後6時46分に閉院した。

(b)コード "1-9.py" を実行した結果は下記の通り。

43.0 40.0 66.43857093736227 554.565324530271

	num_patients	num_wait_patients	mean_waiting_times \
count	100.000000	100.000000	100.000000
mean	43.300000	40.570000	72.635895
std	7.165433	8.498669	39.271592
min	26.000000	17.000000	7.486453
25%	39.000000	36.000000	43.478445
50%	43.000000	40.000000	66.438571
75%	47.250000	46.000000	93.654827
max	66.000000	65.000000	207.551080

	total_consult_times
count	100.000000
mean	568.319741
std	78.700268
min	440.750080
25%	515.398373
50%	554.565325
75%	614.927855
max	860.047157