东南大学
2009 级研究生考试试卷 (A)

课程名称：数值分析　课程编号：S000112　考试历时：150 分钟　考核方式：闭卷

院 (系)________　学号 ________　姓名 ________　成绩 ________

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得分									

(**注意**：本试卷共有 8 页 9 大题，请考生检查自己的试卷.)

1. 填空 (每小题 3 分，共 18 分)

1) 设多项式 $f(x)=4x^4+6x^3+9x+1$, 则求 $f(x_0)$ 仅含有 4 次乘法运算的算法为

____________________.

2) 已知实对称矩阵 A 的全部特征值是 $3,2,1$, 则 $\mathrm{Cond}(A)_2=$________.

3) 设 $f(x)=x^3-3x+1$, 则 $f(x)$ 以 $0,1,2$ 为插值节点的 2 次牛顿插值多项式为

____________________.

4) 用 Simpson 公式计算积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}dx$ 的近似值 (保留小数点后 3 位小数) 是

________.

5) 求解初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y), & a\le x\le b, \\ y(a)=\eta \end{cases}$ 的改进的 Euler 公式是

____________________________.

6) 求解双曲型方程初边值问题的显格式稳定的条件是步长比 s________, 该差分格式关于空间步长 ________ 阶收敛, 关于时间步长 ________ 阶收敛.

2. (10 分) 分析方程 $x^5 - 5x + 1 = 0$ 有几个正根. 用迭代法求此方程的最大正根，精确到 4 位有效数字.

3. (10 分) 用列主元 Gauss 消去法求下面线性方程组的解

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

4. (10 分) 设有求解线性方程组 $Ax=b$ 的迭代格式

$$Bx^{(k+1)}+Cx^{(k)}=b,\quad k=0,1,\ldots, \tag{1}$$

其中

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&0&0\\\xi&0&0\\2&\eta&0\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\quad x^{(k)}=\begin{pmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\x_3^{(k)}\end{pmatrix}.$$

试确定实参数 ξ 和 η 的取值范围，使迭代格式 (1) 收敛.

5. (10 分) 设 $f \in C^4[a, a+2]$, 求一个 3 次多项式 $H(x)$, 使之满足

$$H(a) = f(a), \quad H(a+1) = f(a+1), \quad H(a+2) = f(a+2), \quad H'(a) = f'(a),$$

并写出插值余项 $f(x) - H(x)$ 的表达式.

6. (10 分) 用最小二乘法确定经验公式 $y = a + b\mathrm{e}^x$ 中的参数 a 和 b, 使该曲线拟合下面的数据:

x_i	-1	0	1	2
y_i	2	3	5	9

7. (12 分) 设 $f(x) \in C^2[a,b]$, $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, $h = (b-a)/n$, $x_k = a+kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + h/2$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

1) 写出计算积分 $I(f)$ 的一点 Gauss 公式 $G(f)$ 以及对应的复化求积公式 $G_n(f)$.

2) 设 $T_n(f)$ 是计算积分 $I(f)$ 的复化梯形公式，求参数 α, 使得

$$T_{2n}(f) = \frac{1}{2} T_n(f) + \alpha G_n(f).$$

8. (10 分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \quad a \le x \le b, \\ y(a) = \eta. \end{cases} \tag{2}$$

取正整数 n, 记 $h=(b-a)/n$, $x_i = a+ih, i=0,1,2,\cdots,n$. 给定求初值问题 (2) 的多步方法：

$$y_{i+1} = -4y_i + 5y_{i-1} + h[\beta_1 f(x_i,y_i) + \beta_2 f(x_{i+1},y_{i+1})]. \tag{3}$$

1) 试确定公式 (3) 中的参数 β_1, β_2, 使求解公式具有尽可能高的阶数，并写出局部截断误差表达式和阶数.

2) 利用 Euler 公式和公式 (3) 构造一个预测 – 校正公式.

9. (10 分) 给定初边值问题

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), \quad a < x < b,\ 0 < t \le T,\\
&u(x,0) = \varphi(x), \quad a \le x \le b,\\
&u(a,t) = \alpha(t), \quad u(b,t) = \beta(t), \quad 0 \le t \le T,
\end{aligned}
$$

其中 $\varphi(x), \alpha(t), \beta(t)$ 是光滑函数，且满足相容性条件. 取正整数 M, N, 记 $h = (b-a)/M$, $\tau = T/N$, $x_i = a + ih$, $(0 \le i \le M)$, $t_k = k\tau$, $(0 \le k \le N)$.

1) 写出求上述定解问题的古典隐格式.

2) 设 $f(x,t) \equiv 0, \alpha(t) = \beta(t) \equiv 0$, $\{u_i^k | 0 \le i \le M, 0 \le k \le N\}$ 是古典隐格式的解, 记 $r = \tau/h^2$, $\|u^k\|_\infty = \max\limits_{0 \le i \le M} |u_i^k|$, $k = 0, 1, \ldots, N$. 证明：对任意步长比 r 有

$$
\|u^k\|_\infty \le \|u^0\|_\infty, \quad k = 1, 2, \ldots, N.
$$