东 南 大 学 考 试 卷（C 卷）

课程名称 数值分析 考试学期 14-15学年秋学期 得分____

适用专业 各专业工科研究生 考试形式 闭卷 考试时间长度 150分钟

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得分									

一． (11分) 已知$\sqrt{2015} \approx 44.8888, \sqrt{2014} \approx 44.8776$,且两个近似值均为有效数.试设计算法求$\sqrt{2015}-\sqrt{2014}$的近似值,使之具有不少于6位有效数字,并求出其绝对误差限和相对误差限.

参考答案:

设$x_1 = 44.8888, x_2 = 44.8776$,则$|e(x_1)| \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}, |e(x_2)| \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$. (1分)

$$\sqrt{2015}-\sqrt{2014} = \frac{1}{\sqrt{2015}+\sqrt{2014}} \approx \frac{1}{x_1+x_2} \approx 0.0111400257.(4分)$$

$$|e(\frac{1}{x_1+x_2})| \lesssim \frac{1}{(x_1+x_2)^2}(|e(x_1)|+|e(x_2)|) \lesssim 0.1241\times 10^{-7}.(3分)$$

$$|e_r(\frac{1}{x_1+x_2})| = \frac{e(\frac{1}{x_1+x_2})}{\frac{1}{x_1+x_2}} \le \frac{0.1241\times 10^{-7}}{0.0111400257} \approx 0.1114\times 10^{-5}.(3\ 分)$$

二． (11分) 用迭代法求方程$xe^x+6x-1=0$在[0,1]上的所有实根，精确至4位有效数.

参考答案:

令$f(x) = xe^x+6x-1$, 则$f(0)=-1, f(1)=5+e, f'(x)=(x+1)e^x+6>0, x\in[0,1]$,从而方程在[0,1]上有唯一实根.(3分)

以$x_0=0$为初值，采用牛顿法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{1+e^{x_k}x_k^2}{6+e^{x_k}(x_k+1)}, k=0,1,2,\cdots(4分)$$

计算结果如下：

$$x_0=0, x_1=0.142857, x_2=0.139859, x_3=0.139858, x_4=0.139858, (3\ 分)$$

因此具有4位有效数的根为$x^* \approx 0.1399$ (1分).

三． (11分) 用列主元Guass消去法求解下列线性方程组：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

参考答案：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0.5 & -1 & -2.5 \\ 0 & 1.75 & 0.5 & 3.25 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0.5 & -1 & -2.5 \\ 0 & 1.75 & 0.5 & 3.25 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1.75 & 0.5 & 3.25 \\ 0 & 0.5 & -1 & -2.5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1.75 & 0.5 & 3.25 \\ 0 & 0 & -8/7 & -24/7 \end{pmatrix}$$

以上8分.

由此得到$x_3 = 3, x_2 = 1, x_1 = -2$. (3分)

四． (11分) 给定线性方程组

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(1)写出求解此线性方程组的Gauss-Seidel迭代格式;

(2)讨论该迭代格式的收敛性;

(3)当a为何值时，该迭代格式收敛最快?

参考答案：

(1) Gauss-Seidel迭代格式为：

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = (6 - y^{(k)} - z^{(k)})/3, \\ y^{(k+1)} = (-1 - ax^{(k+1)})/2, \\ z^{(k+1)} = (7 - 2y^{(k+1)})/6. \end{cases} \quad (3\text{分})$$

(2) Gauss-Seidel特征方程为：

$$\begin{vmatrix} 3\lambda & 1 & 1 \\ a\lambda & 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda & 6\lambda \end{vmatrix} = 0, (3\text{分})$$

展开得$2\lambda^2(18\lambda - 2a) = 0$, 因此$\rho(G) = \dfrac{1}{9}|a|$.(1分)

因此当$|a| < 9$时,Gauss-Seidel迭代格式收敛(2分).

(3)当$a = 0$时，收敛最快(2分).

五． (11分)求一个三次多项式曲线$y = P_3(x)$, 使它经过两点$A(0,0), B(2,5)$,并且与圆周$x^2+y^2=2$在(1,1)处相切.

参考答案：

$P_3(x)$满足

$$P_3(0)=0, P_3(2)=5, P_3(1)=1, P_3'(1)=-1.(4分)$$

列表如下(4分)：

x_k	$f(x_k)$	1阶差商	2阶差商	3阶差商
0	0	1	-2	7/2
1	1	-1	5	
1	1	4		
2	5			

因此$P_3(x) = x - 2x(x-1) + \frac{7}{2}x(x-1)^2 = \frac{7x^3}{2} - 9x^2 + \frac{13x}{2}$.(3分)

六． (11分)求常数a, b,使得$\int_0^{\pi/2}(\cos x - a - bx)^2 dx$取最小值.

参考答案：

$\phi_0 = 1, \phi_1 = x, f = \cos x$(1分)

$$(\phi_0,\phi_0) = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}, (\phi_0,\phi_1) = \int_0^{\pi/2} x dx = \frac{\pi^2}{8},$$
$$(\phi_1,\phi_1) = \int_0^{\pi/2} x^2 dx = \frac{\pi^3}{24}, (\phi_0, f) = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1,$$
$$(\phi_1, f) = \int_0^{\pi/2} x\cos x dx = \frac{\pi-2}{2}.\ 5\text{ 分}$$

正规方程为：

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} \\ \frac{\pi^2}{8} & \frac{\pi^3}{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pi-2}{2} \end{pmatrix} \ 2分$$

解得：

$$a = -\frac{4(\pi-6)}{\pi^2} \approx 1.15847, b = \frac{24(-4+\pi)}{\pi^3} \approx -0.664439.\ 3\text{ 分}$$

七. (11分)用复化Simpson公式计算积分$I=\int_0^1 e^x dx$ 的近似值,精确至6位有效数字.

参考答案:

复化Simpson公式为

$$S_n(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{6}\left[f(x_k)+4f(x_{k+1/2})+f(x_{k+1})\right].\ 4分$$

计算得$S_1=1.71886, S_2=1.718319, S_3=1.718284, \frac{1}{15}|S_3-S_2|\le\frac{1}{2}10\times^{-5}$. 6分

因此答案为1.71828. (1分)

八. (12分)给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y),\ a\le x\le b, \\ y(a)=\eta. \end{cases}$$

取正整数n,记$h=(b-a)/n, x_i=a+ih, 0\le i\le n. y_0=\eta, y_i\approx y(x_i), 1\le i\le n$.试证明单步公式

$$\begin{cases} y_{i+1}=y_i+hk_2 \\ k_1=f(x_i,y_i) \\ k_2=f(x_i+\frac{1}{2}h, y_i+\frac{1}{2}hk_1) \end{cases}$$

是一个二阶公式.

参考答案:

局部截断误差为:

$$\begin{cases} R_{i+1}=y(x_{i+1})-y(x_i)-hK_2 \\ K_1=f(x_i,y(x_i)) \\ K_2=f(x_i+\frac{1}{2}h, y(x_i)+\frac{1}{2}hK_1) \end{cases} \qquad 4分$$

利用Taylor展开得到

$$\begin{aligned} K_1 &= y'(x_i), \\ K_2 &= f(x_i,y(x_i))+(\frac{1}{2}h\frac{\partial}{\partial x}+h\frac{1}{2}y'(x_i)\frac{\partial}{\partial y})f(x_i,y(x_i)) \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}h^2y'(x_i)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+(\frac{1}{2}hy'(x_i))^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]f(x_i,y(x_i))+O(h^3), \\ y(x_{i+1}) &= y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{1}{2}h^2y''(x_i)+\frac{1}{3!}h^3y'''(x_i)+O(h^4) \\ &= y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{1}{2}h^2\left[\frac{\partial f}{\partial x}+y'(x)\frac{\partial f}{\partial y}\right]+\frac{1}{6}y'''(x_i)+O(h^4)\ 4分 \end{aligned}$$

带入得到

$$R_{i+1}=h^3\left[\frac{1}{6}y'''(x_i)-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{2}y'(x_i)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{1}{4}y'(x_i)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big)\right]+O(h^4).\ 3分$$

因此是一个二阶公式(1分).

九. (11分)考虑如下椭圆方程边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^3 + y^4, \quad (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = x + y, \quad (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

其中$\Omega = \{(x,y)|0 < x < 1, 0 < y < 1\}$,$\partial\Omega$为$\Omega$的边界.试建立此问题的差分格式,并给出截断误差表达式.

参考答案:

取正整数$M, N, h_1 = 1/M, h_2 = 1/N, x_i = ih_1, 0 \le i \le M, y_j = jh_2, 0 \le j \le N$.(2分)

节点(x_i, y_j)处:$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = x_i^3 + y_j^4$, 1分

利用二阶导数公式

$$g''(x_0) = \frac{1}{h^2}[g(x_0 + h) - 2g(x_0) + g(x_0 - h)] - \frac{h^2}{12} g^{(4)}(\xi). \text{ 2分}$$

得到:

$$-\frac{1}{h_1^2}[u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)] - \frac{1}{h_2^2}[u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1})]$$
$$= x_i^3 + y_j^4 + \frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, y_j) + \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta), \xi_{ij} \in (x_{i-1}, x_{i+1}), \eta_{ij} \in (y_{j-1}, y_{j+1}). \text{ 2分}$$

加上边界条件,差分格式为:

$$\begin{cases} -\frac{1}{h_1^2}(u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}) - \frac{1}{h_2^2}(u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}) = x_i^3 + y_j^4 \\ (x_i, y_j) \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ u_{ij} = x_i + y_j, (x_i, y_j) \in \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{2分}$$

截断误差为:

$$R_{ij} = \frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, y_j) + \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta), \xi_{ij} \in (x_{i-1}, x_{i+1}), \eta_{ij} \in (y_{j-1}, y_{j+1}). \text{ 2分}$$