2001 年工程硕士研究生学位考试数值分析试题

1. 设 $x \approx 80.128$, $y \approx 80.115$ 均具有 5 位有效数字，试分别估计由这些数据计算如下两表达式的绝对误差并指出相应的有效位数：

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2) \approx \frac{1}{2}(80.128^2+80.115^2)$$

$$\frac{1}{2}(x^2-y^2) \approx \frac{1}{2}(80.128^2-80.115^2)$$

2. 给定方程 $x+\ln x=2$,

   (a) 分析该方程存在几个实根；

   (b) 用简单迭代法求出该方程的所有实根，精确到 4 位有效数；

   (c) 用 Newton 方法求出该方程的所有实根，精确到 4 位有效数.

3. 用列主元 Gauss 消去法解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 12 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

4. 给定线性方程组

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 8 \\ 2 & -3 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix},$$

   写出 Gauss-Seidel 迭代格式并分析其收敛性.

5. 给定数据

x	0	2	3	5
$f(x)$	1	-3	-4	2

   (a) 写出 $f(x)$ 的 3 次 Lagrange 插值多项式 $L_3(x)$;

   (b) 写出 $f(x)$ 的 3 次 Newton 插值多项式 $N_3(x)$.

6. 给定数据

x	0	2	3	5
$f(x)$	4	1	1	9

试求 2 次拟合多项式.

7. 选取求积节点 x_0 和 x_1 ，使得求积公式

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$$

具有尽可能高的代数精度，并指出所达到的最高代数精度的次数.

8. 给定积分

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

并记 $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$.

(a) 写出复化梯形公式 $T_n(f)$ 和复化 Simpson 公式 $S_n(f)$;

(b) 证明

$$S_n(f) = \frac{4}{3}T_{2n}(f) - \frac{1}{3}T_n(f).$$

9. 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)),\ a \le x \le b, \\ y(a) = \eta, \end{cases}$$

取正整数 n, 并记 $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$, $0 \le i \le n$. 试证明下列数值求解公式是 3 阶公式:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\Big[5f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 8f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})\Big]$$

2002 年工程硕士研究生学位考试数值分析试题

1. 假设测得一个圆柱体容器的底面半径和高分别为 50.00m, 100.00m, 且已知其测量误差为 0.005m. 试估计由此算得容积的绝对误差和相对误差.

2. 证明如下迭代过程收敛：

$$\begin{cases} x_{k+1} = \sqrt{1+1/x_k}, & k = 0,1,2,\cdots \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

3. 给定方程

$$x^3 - x + 0.5 = 0$$

试用 Newton 方法求出该方程的所有实根，精确到 4 位有效数.

4. 用列主元 Gauss 消去法解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 12 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

5. 给定线性方程组

$$\begin{bmatrix} 15 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 8 \\ 2 & -3 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix},$$

   (a) 分别写出 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式;

   (b) 分析 Gauss-Seidel 迭代格式的收敛性.

6. 设

$$f(x) = \ln x, \quad x \in [3,6]$$

且 $L_n(x)$ 为 $f(x)$ 以 $(n+1)$ 个等距节点 $x_i = 3(1+i/n)$, $i = 0,1,2,\cdots,n$ 为插值节点的 n 次插值多项式，证明

$$\lim_{n\to\infty} \max_{3\le x\le 6} |f(x) - L_n(x)| = 0$$

7. 作一个 5 次多项式 $H(x)$ 使得

$$H(1) = 3, \quad H(2) = -1, \quad H(4) = 3$$

$$H'(1) = 2, \quad H'(2) = 1, \quad , H'(4) = 2.$$

8. 给定积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx$$

并记 $h=(b-a)/n$, $x_i=a+ih$, $i=0,1,2,\cdots,n$.

(a) 写出复化梯形公式 $T_n(f)$ 和复化 Simpson 公式 $S_n(f)$;

(b) 证明：

$$S_n(f)=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n(f).$$

9. 已知

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx \frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}g(0)+\frac{5}{9}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

为 Gauss 求积公式.

(a) 试给出计算积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的 3 点 Gauss 求积公式;

(b) 应用所构造的求积公式计算积分 $\int_3^6 \mathrm{e}^{-x}dx$ 的近似值.

10. 考虑微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(x)=f(x,y(x)),\ a\le x\le b, \\ y(a)=\eta, \end{cases}$$

取正整数 n, 并记 $h=(b-a)/n$, $x_i=a+ih$, $0\le i\le n$. 试求参数 α 和 λ 使得求解公式

$$y_{i+1}=y_i+h\Big[\alpha f(x_i,y_i)+(1-\alpha)f(x_i+\lambda h,y_i+\lambda hf(x_i,y_i))\Big]$$

为一个 2 阶公式.

2003 年工程硕士研究生学位考试数值分析试题

1. 设 $x_1 \approx 6.1025$, $x_2 \approx 80.115$ 均具有 5 位有效数字，试估计由这些数据计算 $x_1 x_2$ 的绝对误差限和相对误差限.

2. 给定方程

$$\sin x + x^2 - 2x - 3 = 0$$

   (a) 分析该方程存在几个实根；

   (b) 用适当的迭代法求出这些根，精确到 3 位有效数字.

3. 用列主元 Gauss 消去法解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 12 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

4. 给定线性方程组

$$\begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 \\ 12 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \\ -15 \end{bmatrix},$$

   (a) 写出 Gauss-Seidel 迭代格式；

   (b) 分析该迭代格式的收敛性.

5. 设

$$f(x) = \mathrm{e}^x, \quad x \in [0, 1]$$

   又 $N_n(x)$ 为 $f(x)$ 以 $(n+1)$ 个等距节点 $x_i = i/n$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ 为插值节点的 n 次 Newton 插值多项式，证明

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0 \le x \le 1} |f(x) - N_n(x)| = 0$$

6. 设

$$f(x) = \sin x, \quad x \in [0, \pi/2]$$

   试求：

   (a) $f(x)$ 以 $x_0 = 0$ 和 $x_1 = \pi/2$ 为插值节点的 1 次插值多项式；

(b) $f(x)$ 在区间 $[0, \pi/2]$ 上的 1 次最佳平方逼近多项式.

7. 考虑积分

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

(a) 写出计算积分 $I(f)$ 的 Simpson 公式 $S(f)$ ，并证明其代数精度为 3;

(b) 写出计算积分 $I(f)$ 的复化 Simpson 公式 $S_n(f)$.

8. 考虑微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \ a \le x \le b, \\ y(a) = \eta, \end{cases}$$

取正整数 n, 并记 $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$, $0 \le i \le n$. 试证明下列求解公式为一个 2 阶公式:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\Big[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))\Big]$$

.

2004 年 10 月工程硕士研究生学位考试数值分析试题

1. (12 分) 给定方程

$$x^2 = \ln x - 2 = 0,$$

   (a) 分析该方程存在几个实根;

   (b) 用迭代法求出该方程的所有实根，精确到 4 位有效数.

2. (13 分) 用列主元 Gauss 消去法解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ -8 & -6 & 3 \\ 9 & 6 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

3. (13 分)

   (a) 设

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

   试求 $\|x\|_1$,$\|x\|_2$,$\|A\|_\infty$, $\|Ax\|_\infty$.

   (b) 设 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 且 $\|A\|_1 < 1$, 试证明线性方程组

$$(E - A)x = b$$

   存在唯一解，其中 E 为 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中的单位矩阵.

4. (12 分) 设 $f(x) \in C^2[a,b]$. 作一个 3 此多项式 $H(x)$ 使得

$$H(a) = f(a), \quad H''(a) = f''(a), \quad H(b) = f(b), \quad H''(b) = f''(b).$$

5. (13 分) 设 $f(x) \in C[0,1]$. 试求 a 和 b 使得

$$\int_0^1 [f(x) - (ax + bx^2)]^2 dx$$

   达到最小.

6. (12 分) 用复化 Simpson 公式计算积分 $\int_0^1 e^x dx$ 具有 4 位有效数字的近似值.

7. (13 分)

(a) 验证求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

具有 3 次代数精度.

(b) 试给出一个仅含 2 个求积节点且具有 3 次代数精度的计算积分

$$I(g) = \int_a^b g(x)dx$$

的求积公式，并证明你的结论.

8. (14 分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \ a \le x \le b, \\ y(a) = \eta, \end{cases}$$

取正整数 n, 并记 $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$, $0 \le i \le n$. 试证明以下两个求解公式均是 2 阶公式:

(a)

$$y_{i+1} = y_i = \frac{1}{2}\Big[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))\Big].$$

(b)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}\Big[3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})\Big].$$

2005 年 4 月工程硕士研究生学位考试数值分析试题

1. (15 分)

   (a) 设由四舍五入得到的近似数 $x = 1.4684$, $y = 0.047154$, 分析下列两个算式各具有几位有效数字：

   $$x + y = 1.4684 + 0.047154, \quad x^2 y = 1.4684^2 \times 0.047154.$$

   (b) 用 Newton 法求方程

   $$5x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 3x + 1 = 0$$

   在某点附近的根 x^*, 为了减少运算次数，应将 Newton 计算格式改写为什么形式？

2. (14 分) 给定方程

   $$3x - \sin x - \cos x = 0,$$

   (a) 分析该方程存在几个实根；

   (b) 用迭代法求出该方程的所有实根，精确到 4 位有效数；

   (c) 说明使用的迭代格式为什么是收敛的.

3. (14 分) 用列主元 Gauss 消去法解线性方程组

   $$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{15} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

4. (14 分) 写出用 Gauss-Seidel 迭代法解线性方程组

   $$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   的迭代格式，并判别该迭代格式是否收敛.

5. (14 分) 设

   $$S(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

   给定数据表

x	0.2	0.4	0.6
$S(x)$	0.19956	0.39616	0.58813

试用多项式插值理论回答当 x 取何值时 $S(x)=0.44$.

6. (15 分) 设 $f(x)\in C^2[a,b]$,

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx,$$

且 $b-a$ 足够小. 考虑梯形公式

$$T(f)=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

和中矩形公式

$$Q(f)=(b-a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)$$

的截断误差. 利用这两个公式导出具有更高精度的求积公式, 并给出其截断误差的表达式.

7. (14 分) 给定微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(x)=f(x,y(x)),\ a\le x\le b, \\ y(a)=\eta, \end{cases}$$

取正整数 n, 并记 $h=(b-a)/n$, $x_i=a+ih$, $0\le i\le n$. 试确定两步公式

$$y_{i+1}=A(y_i+y_{i-1})+h\Big[Bf(x_i,y_i)+Cf(x_{i-1},y_{i-1})\Big]$$

中的参数 A,B,C, 使其具有尽可能高的精度，并指出能达到的阶数.

2005 年 10 月工程硕士研究生学位考试数值分析试题

1. (12 分) 已知 $A=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 8 & 9\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$. 试求

   (a) $\|x\|_\infty$, $\|A\|_\infty$, 并估计 $\|Ax\|_\infty$.

   (b) $\mathrm{Cond}(A)_2$.

2. (13 分) 给定方程

$$x+\ln^2 x-2=0$$

   (a) 分析该方程存在几个实根;

   (b) 用 Newton 迭代法求出该方程的所有实根，精确到 4 位有效数.

3. (13 分) 用列主元 Gauss 消去法解线性方程组

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 3\\ 12 & -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 6\\ 9\end{pmatrix}$$

4. (12 分) 给定线性方程组

$$\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ -1 & \alpha & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 6\\ 2\end{pmatrix}$$

   其中 α 为某常数.

   (a) 写出 Gauss-Seidel 迭代格式;

   (b) 分析 α 在什么范围内取值， Gauss-Seidel 迭代格式收敛?

   (c) 当 α 为何值时， Gauss-Seidel 格式收敛最快?

5. (13 分) 已知平面上四点 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(3,0)$, $D(4,1)$. 试作一条 3 次多项式曲线 $p(x)$ 连接 B 和 C 两点，要求该三次曲线与直线段 AB 相交相切，同时也与直线段 CD 相交相切.

6. (12 分) 试求函数

$$f(x)=\sin x,\quad x\in[0,\pi]$$

   的二次最佳平方逼近多项式 $p_2(x)$.

7. (12 分) 用复化 Simpson 公式计算积分

$$\int_0^1 e^x dx$$

的近似值，精确到 4 位有效数.

8. (13 分) 给定微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \ a \le x \le b, \\ y(a) = \eta, \end{cases}$$

取正整数 n, 并记 $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$, $0 \le i \le n$. 试确定两步公式

$$y_{i+1} = \alpha y_{i-1} + h\Big[\beta_0 f(x_{i+1}, y_{i+1}) + \beta_1 f(x_i, y_i) + \beta_2 f(x_{i-1}, y_{i-1})\Big]$$

中的参数 $\alpha, \beta_0, \beta_1, \beta_2$, 使其具有尽可能高的精度，并指出能达到的阶数.

2006 年 10 月工程硕士研究生学位考试数值分析试题

1. (12′)

   (a) 设 $x_1 \approx 8.1055$, $x_2 \approx 80.119$ 均具有 5 位有效数字，试估计由这些数据计算 x_1x_2 具有几位有效数字.

   (b) 利用秦九韶算法计算多项式

   $$p(x) = 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

   在 $x = 2$ 处的值.

2. (13′)

   (a) 试用简单迭代法的理论证明对于任意 $x_0 \in [0,4]$ 由迭代格式

   $$x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

   得到的序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 均收敛于同一个数 x^*.

   (b) 你能否断定对于任意 $x_0 \in [0, \infty)$ 由上述迭代得到的序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 也收敛于数 x^*.

3. (13′)　用列主元 Gauss 消去法解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 10 & -4 & 6 \\ 4 & 18 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

4. (12′)　给定线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

   (a) 写出 Gauss-Seidel 迭代格式;

   (b) 分析此迭代格式的收敛性.

5. (13′)　设 $f(x) \in C^1[a,b]$. 作一个 3 次多项式 $H(x)$ 使得

$$H(a) = f(a),\ H\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right),\ H(b) = f(b),\ H'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

6. (12') 设 $f(x) \in C[0,1]$. 试求常数 a 和 b 使得

$$\int_0^1 [f(x) - (a + bx)]^2 dx$$

达到最小.

7. $(13')$

(a) 写出计算积分 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ 的两点 Gauss 公式.

(b) 用两点 Gauss 公式计算积分 $\int_0^1 e^{-x}dx$, 计算结果保留 4 位小数.

8. $(12')$ 给定微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \ a \le x \le b, \\ y(a) = \eta, \end{cases}$$

取正整数 n, 并记 $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$, $0 \le i \le n$. 求参数 α 使得下列数值求解公式

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{3}[f(x_i, y_i) + 2f(x_i + \alpha h, y_i + \alpha h f(x_i, y_i))], \quad 0 \le i \le n-1, \\ y_0 = \eta \end{cases}$$

是一个二阶公式，并给出此时局部截断误差的表达式.

2007 年 10 月工程硕士研究生学位考试数值分析试题

1.$(15')$ 给定非线性方程

$$e^{-x} - 2x = 0.$$

(1) 判断该方程存在几个实根。

(2) 用适当的迭代法求出上述方程的根，精确至三位有效数。

(3) 验证所用迭代法满足的收敛性条件，说明所用迭代格式是收敛的。

2.$(15')$ 用列主元 Gauss 消去法解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. $(15')$ 给定线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(1) 写出 Gauss-Seidel 迭代格式;

(2) 分析此迭代格式的收敛性.

4. $(15')$ 设

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 10, \qquad x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = 0.$$

(1) 求 $f(x)$ 以 x_0, x_1, x_2, x_3 为节点的 3 次 Lagrange 插值多项式 $L_3(x)$.

(2) 求 $f(x)$ 以 x_0, x_1, x_2, x_3 为节点的 3 次 Newton 插值多项式 $N_3(x)$.

(3) 给出以上插值多项式的插值余项表达式.

5. $(10')$ 求方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的最小二乘解.

6.$(15')$ 考虑积分 $I(f)=\int_a^b f(x)dx$.

(1) 写出计算 $I(f)$ 的 Simpson 公式 $S(f)$.

(2) 用多项式插值的思想推导出 $S(f)$.

(3) 写出复化梯形公式和复化 Simpson 公式之间的关系式.

7.$(15')$ 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y), \quad a<x\le b \\ y(a)=\eta \end{cases}$$

取正整数 n, 并记 $h=(b-a)/n,\ x_i=a+ih, \quad f_i=f(x_i,y_i),\ 0\le i\le n$. 证明求解公式

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{24}(55f_i-59f_{i-1}+37f_{i-2}-9f_{i-3})$$

是一个 4 阶公式，并给出局部截断误差的表达式.