21世纪高等学校教材

孙志忠 编著

数值分析全真试题解析

SHUZHI FENXI QUANZHEN SHITI JIEXI

东南大学出版社

SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

封面设计 顾晓阳

ISBN 7-81089-629-6

ISBN 7-81089-629-6
O · 49 定价：16.00元

数值分析全真试题解析

孙志忠　编著

东 南 大 学 出 版 社
·南 京·

内容简介

本书对东南大学近5年来工科硕士研究生、工程硕士研究生学位课程以及工科博士研究生入学考试"数值分析"试题作了详细的解答,部分题目还给出了多种解法.内容包括误差分析,非线性方程求根,线性方程组数值解法,函数插值与逼近,数值微分与数值积分,常微分方程初值问题的数值解法以及求矩阵特征值的幂法.

本书可作为理工科研究生、本科生学习数值分析课程或计算方法课程的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数值分析全真试题解析/孙志忠编著. —南京:东南大学出版社,2004.4

ISBN 7-81089-629-6

Ⅰ.数… Ⅱ.孙… Ⅲ.数值计算—研究生—入学考试—解题 Ⅳ.O241-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第011255号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼2号 邮编:210096)
出版人:宋增民
江苏省新华书店经销 　 姜堰市晨光印刷有限公司印刷
开本:700mm×1000mm 1/16 　 印张:11.25 　 字数:220千
2004年7月第1版 　 2004年7月第1次印刷
印数:1—5000 　 定价:16.00元
(凡因印装质量问题,可直接向发行科调换。电话:025-83795801)

前　　言

计算机的迅速发展为人类提供了强有力的计算工具.使用计算机进行科学计算已成为科学研究、工程设计中越来越不可缺少的一个环节,它有时甚至代替或超过了实验所起的作用.因此,科学计算应该成为高级科技人员的一个基本功.作为科学计算的核心——数值分析(Advanced Numerical Analysis)课程或计算方法(Elementary Numerical Analysis)课程,已被许多的理工科专业研究生、本科生作为必修课程.

本书对东南大学近5年来工科硕士研究生、工程硕士研究生学位课程以及工科博士研究生入学考试"数值分析"试题作了详细的解答,部分题目还给出了多种解法.内容包括误差分析,非线性方程求根,线性方程组数值解法,函数插值与逼近,数值微分与数值积分,常微分方程初值问题的数值解法以及求矩阵特征值的幂法.硕士生学位课程考试时间为150分钟,博士生入学考试时间为180分钟.

虽然本书仅选用东南大学试卷,但对所有学习这门课程的学生都有重要的参考价值.

工科硕士研究生学位课程部分8个题目是袁慰平教授、吴宏伟博士、石佩虎博士等同事提供的(在引用处以 * 标注),也有少量题目是大家共同讨论确定的(未作特殊说明).在此,作者向他们表示谢意.

作者衷心地期望使用本书的老师、同学以及广大读者对本书提出宝贵意见.电子邮箱:zzsun@seu.edu.cn.

作　者
2004年1月

目　　录

试题部分 1

1999 年工科硕士研究生学位课程考试试题

1. (1) 证明 $10-\sqrt{99}=\dfrac{1}{10+\sqrt{99}}$.

   (2) 取$\sqrt{99}$ 的 6 位有效数 9.94987,则以下两种算法各有几位有效数字?

$$10-\sqrt{99}\approx 10-9.94987=0.05013 \qquad ①$$

$$\frac{1}{10+\sqrt{99}}\approx\frac{1}{10+9.94987}=\frac{1}{19.94987}=0.0501256399\cdots \qquad ②$$

(12′)

2. 证明迭代格式

$$x_{n+1}=\mathrm{e}^{-x_n},\qquad n=0,1,2,\cdots \qquad ①$$

对于任意的 $x_0\in\mathbf{R}$ 均收敛于同一极限,并求出该极限.(提示:先考虑 $x_0\in[\mathrm{e}^{-1},1]$,再考虑 $x_0\in[0,\infty)$,最后考虑 $x_0\in\mathbf{R}$) (12′)

3. 说明用 Gauss 消去法解线性方程组

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}$$

时为什么要选主元(其中系数矩阵为非奇异矩阵). (12′)

4. 对线性方程组

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix},\qquad a_{11}a_{22}\neq 0$$

用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解,证明这两种方法要么同时收敛,要么同时发散. (13′)

5. 设 $f(x)=\sin x,x\in[0,\pi]$.求一个 4 次多项式 $H(x)$ 使得

$$H(0)=f(0),\qquad H\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right),\qquad H(\pi)=f(\pi)$$

$$H'(0) = f'(0), \qquad H'(\pi) = f'(\pi)$$

并写出插值余项 $f(x) - H(x)$ 的表达式. (13′)

6. 求 $f(x) = x^3 + 2x^2$ 在区间[2,4]上的2次最佳一致逼近多项式,并估计误差. (13′)

7*. 已知

$$\int_{-1}^{1} g(t)\mathrm{d}t \approx \frac{1}{9}\left[5g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8g(0) + 5g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]$$

为 Gauss 求积公式,且其截断误差为

$$\frac{g^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-1}^{1}\left[\left(t+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)t\left(t-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]^2\mathrm{d}t \equiv c_0 g^{(6)}(\xi), \qquad \xi \in (-1,1)$$

(1) 设 $f(x) \in C^6[a,b]$,给出在区间$[a,b]$上积分

$$I(f) \doteq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

的3点 Gauss 求积公式及截断误差.

(2) 将$[a,b]$分为 n 等分,记 $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $0 \leqslant i \leqslant n$, $x_{i+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. 试对 $I(f)$ 构造复化的3点 Gauss 公式,记为 $G_n^{(3)}(f)$.

(3) 证明当 h 充分小时,有

$$I(f) - G_n^{(3)}(f) \approx ch^6$$

并求出 c. (13′)

8. 对常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & a \leqslant x \leqslant b \\ y(a) = \eta \end{cases}$$

使用预测校正公式

$$\begin{cases} \bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{12}[5f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}) + 8f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})] \end{cases}$$

求其局部截断误差,并指出该公式是一个几阶公式. (12′)

---

* 袁老师提供.

2000 年工科硕士研究生学位课程考试试题

1*. 简答题.

(1) 要求计算圆面积 S 的相对误差限为 0.04,问测量其半径 r 的相对误差限最大可为多少?

(2) 已知 $f(x)=2x^6-2x^5+6x^2-2x+1$,求 $f[0,1]$ 及 $f[0,1,2,3,4,5,6]$.

(3) 求积公式 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}[f(0)+f(1)]+\frac{1}{12}[f'(0)-f'(1)]$ 的代数精度为多少? (12′)

2. 给定方程 $x-2\cos x=0$.

(1) 分析该方程存在几个根.

(2) 用迭代法求出这些根,精确至 4 位有效数. (11′)

3. 给定线性代数方程组

$$\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 5\end{bmatrix}$$

(1) 写出 Gauss-Seidel 迭代格式.

(2) 分析该迭代格式是否收敛. (11′)

4*. 给定线性代数方程组

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 9\end{bmatrix} \qquad ①$$

将 ① 的第 1 个方程乘以 $\lambda(\lambda\neq 0)$ 后,得到

$$\begin{bmatrix}2\lambda & \lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\lambda\\ 9\end{bmatrix} \qquad ②$$

记 ② 的系数矩阵为 $A(\lambda)$.

---

* 袁老师提供.

(1) 求 $\mathrm{cond}(A(\lambda))_\infty$;

(2) 求 λ 使得 $\mathrm{cond}(A(\lambda))_\infty$ 取最小值;

(3) 说明你所得的结果有何意义. (11′)

5. 设 $f(x) \in C^5[0,1]$.

(1) 求 4 次插值多项式 $H(x)$,使得

$$H(0)=f(0),\quad H'(0)=f'(0),\quad H''(0)=f''(0)$$
$$H(1)=f(1),\quad H'(1)=f'(1)$$

(2) 写出插值余项 $f(x)-H(x)$ 的表达式. (11′)

6. 设 $f(x)=x^2, x\in[0,1]$.

(1) 求 $f(x)$ 的 1 次最佳一致逼近多项式 $p_1(x)=a_0+a_1x$;

(2) 求 $f(x)$ 的 1 次最佳平方逼近多项式 $q_1(x)=b_0+b_1x$. (11′)

7. 给定数据

x	1.30	1.32	1.34	1.36	1.38
$f(x)$	3.60210	3.90330	4.25560	4.67344	5.17744

用复化 Simpson 公式计算 $I=\int_{1.30}^{1.38} f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值,并估计误差. (11′)

8. 设 $f(x)\in C^4[a,b]$,对积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(1) 构造具有 3 次代数精度的 Gauss 公式 $G(f)$;

(2) 证明

$$I(f)-G(f)=\frac{1}{135}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi),\qquad \xi\in(a,b);$$

(3) 构造 2 点复化 Gauss 公式 $G_n(f)$. (11′)

9. 考虑微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & a \leqslant x \leqslant b \quad ① \\ y(a) = \eta & \quad ② \end{cases}$$

记 $x_i = a + ih$,其中 $i = 0,1,\cdots,n$, $h = \dfrac{b-a}{n}$.

(1) 写出 $f(x,y(x))$ 以 x_{i-1},x_i,x_{i+1} 为插值节点的 Lagrange 插值多项式 $L_2(x)$.

(2) 将方程 ① 在区间$[x_i,x_{i+1}]$上积分,得

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y(x))\mathrm{d}x$$

试导出 2 步 Adams 隐式公式.

(3) 求出 2 步 Adams 隐式公式的局部截断误差,并指出该公式是几阶的.(11′)

2001 年工科硕士研究生学位课程考试试题

1. 已测得某圆柱体底面半径 R^* 的近似值 $R = 100$ mm，高 h^* 的近似值 $h = 50$ mm. 若已知 $|R^* - R| \leqslant 0.5$ mm，$|h^* - h| \leqslant 0.5$ mm，则求体积 $V = \pi R^2 h$ 的绝对误差限和相对误差限各为多少？ (10′)

2. 分析方程

$$x^2 - \ln x - 4 = 0 \qquad ①$$

存在几个根；用迭代法求出这些根（精确至 5 位有效数），并说明所用迭代格式为什么是收敛的. (14′)

3. 给定线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

(1) 用列主元三角分解法求解所给线性方程组.

(2) 写出 Gauss-Seidel 迭代格式，并分析该迭代格式是否收敛. (20′)

4*. 设 $f(x) = x^4$.

(1) 求以 $-1,0,1,2$ 为插值节点的 3 次插值多项式 $p_3(x)$，并写出余项表达式.

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的 3 次最佳一致逼近多项式 $q_3(x)$，并估计误差.

(3) 验证 $\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - p_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - q_3\left(\frac{1}{2}\right)\right|$. 这与最佳一致逼近的定义矛盾吗？ (14′)

* 袁老师提供.

5*. 设 $f(x) \in C^2[a,b], I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(1) 确定中点求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad ①$$

的代数精度.

(2) 证明截断误差

$$I(f) - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi), \qquad \xi \in (a,b)$$

(3) 将 $[a,b]$ 作 n 等分,构造计算 $I(f)$ 的复化中点公式,给出其截断误差.该复化求积公式是一个几阶的公式? (14′)

6. 考虑常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & a \leqslant x \leqslant b \\ y(a) = \eta \end{cases}$$

应用数值积分的有关理论导出2步 Adams 显式公式

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[3f(x_i,y_i) - f(x_{i-1},y_{i-1})] \qquad ①$$

给出局部截断误差的表达式,并指出该公式是几阶的. (14′)

7. 试在区间$[0,3]$上构造一个具有2阶连续导数的分段3次多项式 $H(x)$,使满足

$$H(0) = 3, \qquad H(3) = -2$$
$$H'(0) = 1, \quad H'(1) = 2, \quad H'(3) = 3$$

注:用下列方法不得分.设 (14′)

$$H(x) = \begin{cases} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, & x \in [0,1] \\ b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3, & x \in [1,3] \end{cases}$$

得到含8个参数的线性方程组,再去确定8个参数.

* 袁老师提供.

2002 年工科硕士研究生学位课程考试试题

1. 填空.

(1) 设 $f(x)=3x^6+6x^4-5x^2+1$,则 $f[-1,0,1]=$ ________________,
$f[-3,-2,-1,0,1,2,3]=$ ________________. $(2'+2')$

(2) 求解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 \\ -1 & 9 & 4 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

的 Gauss-Seidel 迭代格式为________________. $(1'+1'+1')$

(3) 设 $f(x)\in C^5[a,b]$,且 3 次多项式 $H(x)$ 满足

$$H(a)=f(a),\qquad H\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right),\qquad H(b)=f(b)$$
$$H'\left(\frac{a+b}{2}\right)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

则 $f(x)-H(x)=$ ________________. $(3')$

(4) 设 $f(x)\in C^3[a,b]$,则

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}. \qquad (3')$$

(5) 设

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_2=$ ______, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty=$ ______, $\|\boldsymbol{A}\|_1=$ ______.

$(1'+1'+1')$

(6) 设 $f,g\in C[a,b]$,则 $\|f\|_1=$ ________,$\|f\|_2=$ ________,$\|f\|_\infty=$ ________,$(f,g)=$ ________. $(4')$

(7) 求解常微分方程初值问题的改进 Euler 公式为________________,它是________阶的. $(3'+1')$

2. 取$\sqrt{2003}$和$\sqrt{2001}$的6位有效数分别为44.7549和44.7325.试分析如下两个算法各具有几位有效数字： (12′)

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2003}-\sqrt{2001})\approx\frac{1}{2}(44.7549-44.7325)=0.0112 \quad ①$$

$$\frac{1}{\sqrt{2003}+\sqrt{2001}}\approx\frac{1}{44.7549+44.7325}=\frac{1}{89.4874}=0.01117475756\cdots \quad ②$$

3. 给定方程

$$e^x-x-2=0 \quad ①$$

(1) 分析该方程存在几个实根；

(2) 用迭代法求出这些根，精确到4位有效数. (12′)

4. 用列主元Gauss消去法解线性方程组

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 12 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 2\\ 9\end{bmatrix} \quad (12′)$$

5. 设$f(x)=\ln(1+x),x\in[0,1]$，$p_n(x)$为$f(x)$以$(n+1)$个等距节点$x_i=\frac{i}{n}$，$i=0,1,2,\cdots,n$为插值节点的n次插值多项式，证明

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-p_n(x)|=0 \quad (12′)$$

6. 设$f(x)\in C^3[0,1]$.考虑求积公式

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\approx Af(x_0)+Bf(1) \quad ①$$

(1) 选取求积系数A,B和求积节点x_0，使得求积公式具有尽可能高的代数精度，并指出所达到的最高代数精度的次数；

(2) 将所得到的求积公式的截断误差表示成$c\cdot f^{(p)}(\xi)$的形式. (16′)

7. 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & c \leqslant x \leqslant d \\ y(c) = \eta \end{cases}$$

取正整数 n，并记 $h = (d-c)/n, x_i = c + ih, 0 \leqslant i \leqslant n$。确定常数 a 和 b 使得下列线性多步公式具有尽可能高的精度，并求其局部截断误差：

$$y_{i+1} = y_{i-2} + a(y_i - y_{i-1}) + bh(f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_{i-1})) \qquad ①$$

(12′)

2003 年工科硕士研究生学位课程考试试题

1*. 设

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx, \qquad n = 0,1,2,\cdots,20$$

(1) 证明有如下递推关系式

$$\begin{cases} I_n = \dfrac{1}{2}(e^2 - nI_{n-1}), & n = 1,2,\cdots,20 \\ I_0 = \dfrac{1}{2}(e^2 - 1) \end{cases}$$

(2) 构造一个数值稳定的递推算法,并证明其稳定性. (12′)

2**. 设 $n \geqslant 2$ 为正整数,c 为正数.记 $x^* = \sqrt[n]{c}$.

(1) 说明不能用下面的迭代格式

$$x_{k+1} = cx_k^{1-n}, \qquad k = 0,1,2,\cdots \qquad ①$$

求 x^* 的近似值.

(2) 构造一个可以求 x^* 的迭代格式,证明所构造的迭代格式的收敛性,并指出收敛阶数. (12′)

3. 用列主元三角分解法解线性方程组 (12′)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ -5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4. 给定线性方程组

$$\begin{bmatrix} a & c & 0 \\ c & b & a \\ 0 & a & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

---

* 袁老师提供.
** 吴老师提供.

其中 a,b,c,d_1,d_2,d_3 均为已知常数，且 $abc \neq 0$.

(1) 写出 Gauss-Seidel 迭代格式；

(2) 分析该迭代格式的收敛性. (12′)

5. 设 $f(x) \in C^2[a,b]$. 作一个 3 次多项式 $H(x)$ 使得

$$H(a) = f(a), \qquad H''(a) = f''(a)$$
$$H(b) = f(b), \qquad H''(b) = f''(b)$$ (13′)

注：用如下方法不得分：设 $H(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$，由插值条件得出关于 c_0,c_1,c_2 和 c_3 的线性方程组；然后解出 c_0,c_1,c_2,c_3，得出 $H(x)$.

6. 选取常数 a 和 b 使得

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 3} |x^3 - (a + bx)|$$

达到最小，最小值为多少? (13′)

7*. 设有计算积分

$$I(f) = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

的一个求积公式

$$I(f) \approx af\left(\frac{1}{5}\right) + bf(1)$$

(1) 求 a,b 使以上求积公式的代数精度尽可能高，并指出所达到的最高代数精度.

(2) 如果 $f(x) \in C^3[0,1]$，试给出该求积公式的截断误差. (13′)

8. (1) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & a \leqslant x \leqslant b \\ y(a) = \eta \end{cases}$$

取正整数 n，并记 $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$, $0 \leqslant i \leqslant n$. 分析求解公式

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left[f(x_i,y_i) + 3f\left(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}hf(x_i,y_i)\right)\right]$$

---

* 石老师提供.

的局部截断误差,并指出它是几阶公式.

(2) 设$\{y_i\}_{i=0}^{n}$为用上述公式计算初值问题

$$\begin{cases} y' = -y, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的数值解,证明

$$\lim_{h \to 0} \frac{y(1) - y_n}{h^2} = -\frac{1}{6e}$$ (13′)

2001 年工程硕士研究生学位课程考试试题

1. 设 $x \approx 80.128$，$y \approx 80.115$ 均具有 5 位有效数字，试分别估计由这些数据计算如下两表达式的绝对误差限并指出相应的有效位数：

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \approx \frac{1}{2}(80.128^2 + 80.115^2) \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}(x^2 - y^2) \approx \frac{1}{2}(80.128^2 - 80.115^2) \qquad ②$$

(8′)

2. 给定方程

$$x + \ln x = 2$$

(1) 分析该方程存在几个实根；

(2) 用简单迭代法求出该方程的所有实根，精确到 4 位有效数；

(3) 用 Newton 方法求出该方程的所有实根，精确到 4 位有效数. (12′)

3. 用列主元 Gauss 消去法解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 12 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad (11')$$

4. 给定线性方程组

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 8 \\ 2 & -3 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

试写出 Gauss-Seidel 迭代格式并分析其收敛性. (11′)

5. 给定数据

x	0	2	3	5
$f(x)$	1	-3	-4	2

(1) 写出 $f(x)$ 的 3 次 Lagrange 插值多项式 $L_3(x)$；

(2) 写出 $f(x)$ 的 3 次 Newton 插值多项式 $N_3(x)$. (12′)

6. 给定数据

x	0	2	3	5
$f(x)$	4	1	1	9

试求 2 次拟合多项式. (10′)

7. 选取求积节点 x_0 和 x_1,使得求积公式

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}[f(x_0)+f(x_1)]$$

具有尽可能高的代数精度,并指出所达到的最高代数精度的次数. (12′)

8. 给定积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

并记 $h=(b-a)/n, x_i=a+ih, i=0,1,2,\cdots,n$.

(1) 写出复化梯形公式 $T_n(f)$ 和复化 Simpson 公式 $S_n(f)$；

(2) 证明

$$S_n(f)=\frac{4}{3}T_{2n}(f)-\frac{1}{3}T_n(f)$$ (12′)

9. 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y), & a\leqslant x\leqslant b \\ y(a)=\eta \end{cases}$$

取正整数 n,并记 $h=(b-a)/n, x_i=a+ih, 0\leqslant i\leqslant n$. 试证明下列数值求解公式是 3 阶公式：

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{12}[5f(x_{i+1},y_{i+1})+8f(x_i,y_i)-f(x_{i-1},y_{i-1})]$$ (12′)

2002 年工程硕士研究生学位课程考试试题

1. 假设测得一个圆柱体容器的底面半径和高分别为 50.00m,100.00m,且已知其测量误差为 0.005m.试估计由此算得的容积的绝对误差和相对误差. (10′)

2. 证明如下迭代过程收敛:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \sqrt{1 + 1/x_k}, & k = 0,1,2,\cdots \\ x_0 = 2 \end{cases} \qquad (10')$$

3. 给定方程

$$x^3 - x + 0.5 = 0$$

试用 Newton 方法求出该方程的所有实根,精确到 4 位有效数字. (10′)

4. 用列主元 Gauss 消去法解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 12 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad (10')$$

5. 给定线性方程组

$$\begin{bmatrix} 15 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 8 \\ 2 & -3 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

(1) 试分别写出 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式;

(2) 分析 Gauss-Seidel 迭代格式的收敛性. (10′)

6. 设

$$f(x) = \ln x, \qquad x \in [3,6]$$

且 $L_n(x)$ 为 $f(x)$ 以 $(n+1)$ 个等距节点 $x_i = 3\left(1+\frac{i}{n}\right), i = 0,1,2,\cdots,n$ 为插值节点的 n 次插值多项式,证明

$$\lim_{n\to\infty}\max_{3\leqslant x\leqslant 6}\left|f(x)-L_n(x)\right| = 0 \qquad (10')$$

7. 作一个 5 次多项式 $H(x)$ 使得

$$H(1)=3,\quad H(2)=-1,\quad H(4)=3$$
$$H'(1)=2,\quad H'(2)=1,\quad H'(4)=2 \qquad (10')$$

8. 给定积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

并记 $h=(b-a)/n, x_i = a+ih, i=0,1,2,\cdots,n$.

(1) 写出复化梯形公式 $T_n(f)$ 和复化 Simpson 公式 $S_n(f)$;

(2) 证明

$$S_n(f)=\frac{4}{3}T_{2n}(f)-\frac{1}{3}T_n(f) \qquad (10')$$

9. 已知

$$\int_{-1}^{1} g(t)\mathrm{d}t \approx \frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}g(0)+\frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

为 Gauss 求积公式.

(1) 试给出计算积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的 3 点 Gauss 求积公式;

(2) 应用所构造的求积公式计算积分 $\int_3^6 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 的近似值. (10′)

10. 考虑微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & a\leqslant x\leqslant b \\ y(a)=\eta \end{cases}$$

取正整数 n,并记 $h=(b-a)/n, x_i = a+ih, 0\leqslant i\leqslant n$. 试求参数 α 和 λ 使得求解公式

$$y_{i+1} = y_i + h[\alpha f(x_i,y_i)+(1-\alpha)f(x_i+\lambda h, y_i+\lambda h f(x_i,y_i))]$$

为一个 2 阶公式. (10′)

2003 年工程硕士研究生学位课程考试试题

1. 设 $x_1 \approx 6.1025, x_2 \approx 80.115$ 均具有 5 位有效数字,试估计由这些数据计算 x_1x_2 的绝对误差限和相对误差限. (9′)

2. 给定方程

$$\sin x + x^2 - 2x - 3 = 0$$

(1) 分析该方程存在几个根;

(2) 用适当的迭代法求出这些根,精确至 3 位有效数字. (13′)

注:用二分法不给分.

3. 用列主元 Gauss 消去法解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 12 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad (13′)$$

4. 给定线性方程组

$$\begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 \\ 12 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \\ -15 \end{bmatrix}$$

(1) 写出 Gauss-Seidel 迭代格式;

(2) 分析该迭代格式的收敛性. (13′)

5. 设 $f(x) = e^x, x \in [0,1]$,又 $N_n(x)$ 为 $f(x)$ 以 $(n+1)$ 个等距节点 $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0,1,2,\cdots,n$ 为插值节点的 n 次 Newton 插值多项式,证明

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - N_n(x)| = 0 \qquad (13′)$$

6. 设

$$f(x) = \sin x, \qquad x \in [0, \pi/2]$$

试求：

(1) $f(x)$ 以 $x_0 = 0$ 和 $x_1 = \pi/2$ 为插值节点的 1 次插值多项式；

(2) $f(x)$ 在区间$[0, \pi/2]$上的 1 次最佳平方逼近多项式. (13′)

7. 考虑积分

$$I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(1) 写出计算积分 $I(f)$ 的 Simpson 公式 $S(f)$,并证明其代数精度为 3；

(2) 写出计算积分 $I(f)$ 的复化 Simpson 公式 $S_n(f)$. (13′)

8. 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & a \leqslant x \leqslant b \\ y(a) = \eta \end{cases}$$

取正整数 n,并记 $h = (b-a)/n, x_i = a + ih, 0 \leqslant i \leqslant n$. 试证明下列数值求解公式是 2 阶公式：

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))] \qquad (13')$$

1999 年秋季攻读博士学位研究生入学考试试题

1. 已知 $y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4x+1}\mathrm{d}x$，试建立一个具有较好数值稳定性的求 $y_n(n = 1,2,3,\cdots)$ 的递推算法. (11′)

2. 证明：若 $f(x)$ 在其零点 ξ 的某邻域中有 2 阶连续导数，且 $f'(\xi) \neq 0$，则 Newton 法至少是 2 阶局部收敛的. (11′)

3. 给出计算下列三对角线性方程组的“追赶法”算法，并分析其运算量.

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

其中 $|b_i| > |a_i| + |c_i|$，$1 \leqslant i \leqslant n$，$a_1 = 0$，$c_n = 0$. (11′)

4. 给定方程组

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \qquad ①$$

其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}$，且 $\|\boldsymbol{B}\| < 1$. 证明

(1) ① 有唯一的 $\boldsymbol{x}^*$.

(2) 给定迭代格式

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c}, \qquad k = 0,1,2,\cdots \qquad ②$$

则有

$$\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^*\| \leqslant \|\boldsymbol{B}\| \cdot \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\|, \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

(3) 任取 $x_0 \in \mathbf{R}^n$，则迭代格式 ② 收敛. (11′)

5. 设 $f(x) \in C^2[a,b]$，$x_i = a + ih, 0 \leqslant i \leqslant n, h = \dfrac{b-a}{n}$. 已知 $f(x_i), 0 \leqslant i \leqslant n$.

(1) 写出 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的分段线性插值函数 $S_1(x)$.

(2) 证明当 $x \in [a,b]$ 时有

$$|f(x) - S_1(x)| \leqslant \frac{1}{8} h^2 \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)| \qquad (11')$$

6. 求 $f(x) = e^x$ 在 $[0,1]$ 上的 1 次最佳一致逼近多项式，并给出最大误差.(11′)

7. 给定积分 $I(f) = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$. 将区间 $[a,b]$ 作 4 等分，并记 $x_i = a + ih, 0 \leqslant i \leqslant 4, h = \dfrac{b-a}{4}$. 写出 $T_1(f), T_2(f), T_4(f), S_1(f), S_2(f)$ 和 $C_1(f)$，并指出它们之间的关系. 这里 $T_m(f), S_m(f), C_m(f)$ 分别表示将 $[a,b]$ 作 m 等分时的复化梯形公式、复化 Simpson 公式、复化 Cotes 公式. (11′)

8. 给定积分 $I(f) = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$.

(1) 构造计算积分 $I(f)$ 的 2 点 Gauss 公式，并给出截断误差的表达式.

(2) 构造计算积分 $I(f)$ 的复化 2 点 Gauss 公式，并给出截断误差的表达式.

(11′)

9. 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & a \leqslant x \leqslant b \\ y(a) = \eta \end{cases}$$

(1) 试证

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{4}(k_1 + 3k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f\left(x_n + \dfrac{2}{3}h, y_n + \dfrac{2}{3}hk_1\right) \end{cases}$$

是一个 2 阶方法.

(2) 应用以上方法求

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

的解 $y(x)$ 在 $x = 0.1$ 处的近似值. (12′)

2000年春季攻读博士学位研究生入学考试试题

1. 设有一长方体的水池，由测量知其长为(50 ± 0.01)m，宽为(25 ± 0.01)m，深为(20 ± 0.01)m. 试按所给数据求出该水池的容积，并分析所得近似值的绝对误差和相对误差，给出绝对误差限和相对误差限. (10′)

2. 给定方程 $f(x)=(x-1)e^{x^2}-1=0$.
   (1) 分析该方程存在几个根；
   (2) 用迭代法求出这些根，精确至四位有效数；
   (3) 证明所使用的迭代格式是收敛的. (15′)

3. 用列主元三角分解法解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(15′)

4. 已知函数 $y=f(x)$ 的数据如下：

x	1	2	4	-5
y	3	4	1	0

   (1) 求 y 的 3 次 Lagrange 插值多项式；
   (2) 求 y 的 3 次 Newton 插值多项式；
   (3) 写出插值余项. (15′)

5. (1) 证明求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

是 Gauss 公式.

(2) 利用(1)的结果对区间 $[a,b]$ 上的积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 构造2点复化 Gauss 公式.

(15′)

6. 现有求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & a \leqslant x \leqslant b \\ y(a) = \eta \end{cases}$$

的两个求解公式

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i,y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i,y_i))] \qquad ①$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[3f(x_i,y_i) - f(x_{i-1},y_{i-1})] \qquad ②$$

其中 $x_i = a + ih, \quad i = 0,1,2,\cdots, \quad h = \frac{b-a}{n}$.

(1) 试从局部截断误差和计算量两方面进行比较.

(2) 这两个公式各是几步公式?如何选取初值? (15′)

7. 给定矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 99 & 3 \\ 33 & 0.9 \end{bmatrix}$$

试用幂法求出 A 的按模最大的特征值,精确至5位有效数. (15′)

2000 年秋季攻读博士学位研究生入学考试试题

1. 给定方程

$$9x^2 = 1 + \sin x$$

(1) 分析该方程存在几个根.

(2) 用迭代法求出这些根,并证明所用迭代法是收敛的(计算精确至 3 位有效数). (16′)

2. 用列主元三角分解法解线性方程组

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (14')$$

3. 设 $f(x) \in C^{(4)}[a,b]$.

(1) 作一个 3 次多项式 $p_3(x)$ 使得

$$p_3(a) = f(a), \quad p_3(c) = f(c), \quad p_3(b) = f(b)$$
$$p_3{}'(c) = f'(c)$$

其中 $a < c < b$.

(2) 证明 $f(x) - p_3(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)(x-c)^2(x-b), \xi \in (a,b)$.

(14′)

4. 设 $M_2 = \mathrm{Span}\{1, x^2\}$. 试在 M_2 中求 $f(x) = |x|$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最佳平方逼近元. (12′)

5. (1) 证明 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{9}\left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]$ 是 Gauss 求积公式.

(2) 利用 3 点 Gauss 求积公式计算$\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 的近似值. (14′)

6. 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x > a \\ y(a) = \eta \end{cases}$$

并记 $x_i = a + ih, i = 0,1,2,\cdots$. 分析求解公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_1\right) \end{cases}$$

的局部截断误差,该公式是几阶的? (14′)

7. 给定线性方程组 $Ax = b$,其中 $\det A \neq 0, b \neq 0$. 设 x^* 和 $\tilde{x}$ 分别是其精确解和近似解,证明

$$\frac{\|x^* - \tilde{x}\|}{\|x^*\|} \leqslant \mathrm{Cond}(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}$$

其中 $r = b - A\tilde{x}, \mathrm{Cond}(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$. (8′)

8. 考虑积分方程

$$y(x) = \int_a^b k(x,s)y(s)ds + f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b \qquad ①$$

其中 $k(x,s)$ 和 $f(x)$ 为已知函数, $y(x)$ 为未知函数,且

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b}\int_a^b |k(x,s)|ds \leqslant \rho < 1$$

试利用数值积分的有关理论给出求解 ① 的数值方法,并分析可解性. (8′)

2001年春季攻读博士学位研究生入学考试试题

1. 设有一长方体水池，由测量知其长为(50 ± 0.01)m，宽为(25 ± 0.01)m，深为(20 ± 0.01)m. 试按所给数据求出该水池的容积，并分析所得近似值的绝对误差和相对误差，给出绝对误差限和相对误差限. (10′)

2. 设初始值 x_0 充分靠近 $x^* = \sqrt{a}$，其中 a 为正常数，证明迭代公式

$$x_{k+1} = \frac{x_k(x_k^2 + 3a)}{3x_k^2 + a}, \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

是计算 x^* 的 3 阶公式，并求

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x_{k+1} - \sqrt{a}}{(x_k - \sqrt{a})^3} \tag{15′}$$

3. 写出求解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

的 Gauss-Seidel 迭代格式，并讨论其敛散性. (15′)

4. 求函数 $f(x) = x^3$ 在区间$[1,3]$上的 1 次最佳一致逼近多项式 $p_1(x)$. (15′)

5. (1) 证明求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{①}$$

是 Gauss 公式.

(2) 利用①的结果对区间$[a,b]$上的积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$构造两点复化 Gauss 公式.

(15′)

6．给定微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & a \leqslant x \leqslant b \\ y(a) = \eta \end{cases} \qquad ①$$

假设对任意 $\tilde{y},\bar{y} \in (-\infty,\infty)$ 有

$$|f(x,\tilde{y}) - f(x,\bar{y})| \leqslant L|\tilde{y} - \bar{y}|, \qquad x \in [a,b] \qquad ②$$

其中 L 为常数，且 ① 的解 $y(x)$ 在$[a,b]$上有连续的二阶导数．

(1) 写出求解 ① 的 Euler 公式；

(2) 证明 Euler 公式的解收敛于 ① 的解． (15′)

7．设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$有两个互异的特征值 λ_1 和 λ_2，且$|\lambda_1| > |\lambda_2|$．写出用幂法计算 λ_1 的算法，并证明算法的收敛性． (15′)

2001 年秋季攻读博士学位研究生入学考试试题

1. 考虑积分

$$E_n = \int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x$$

由分步积分可得如下递推公式

$$\begin{cases} E_n = e - nE_{n-1}, & n = 2,3,4,\cdots \\ E_1 = 1 \end{cases}$$

取 e 的 6 位有效数.用计算器从 E_1 出发,依次计算出 $E_2, E_3, \cdots, E_{13}$.观察所得结果,并加以分析. (12′)

2. 给定方程

$$x - \ln x - 2 = 0 \qquad ①$$

(1) 分析该方程存在几个根,找出每个根所在的区间.

(2) 用迭代法求出所有根,精确至 4 位有效数.(不用迭代法不给分) (14′)

3. 用列主元 Gauss 消去法或列主元三角分解法解线性方程组

$$\begin{cases} 12x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 15 \\ -18x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -15 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases} \qquad (12')$$

4. 设 $\boldsymbol{x}^{(k)} \in \mathbf{R}^n, k = 0,1,2,\cdots, \boldsymbol{x}^* \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}$.

(1) 给出向量序列 $\boldsymbol{x}^{(k)} (k = 0,1,2,\cdots)$ 收敛于向量 $\boldsymbol{x}^*$ 的定义.

(2) 设 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}^*$,证明 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^*$. (8′)

5. 设 $x_i = x_0 + ih, 0 \leqslant i \leqslant 2, f(x) \in C^{(3)}[x_0, x_2]$.

(1) 写出以 x_0, x_1, x_2 为插值节点的 2 次 Lagrange 插值多项式 $L_2(x)$ 及其插值余项 $f(x) - L_2(x)$.

(2) 利用 $L_2(x)$ 导出求 $f'(x_1)$ 的求导公式及其截断误差. (10′)

6. 设 $f(x)=x^2, x\in[0,1]$.

(1) 求 $f(x)$ 的 1 次最佳平方逼近多项式;

(2) 求 $f(x)$ 的 1 次最佳一致逼近多项式. (14′)

7. 给定积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(1) 写出复化梯形公式 $T_n(f)$ 和复化 Simpson 公式 $S_n(f)$;

(2) 验证 $S_n(f)=\frac{4}{3}T_{2n}(f)-\frac{1}{3}T_n(f)$. ①

(10′)

8. 设有计算积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

的求积公式

$$I_N(f)=\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i) \quad ①$$

(1) 给出 Gauss 求积公式的定义;

(2) 设 $a=0, b=1$, 试由定义导出 2 点 Gauss 求积公式. (10′)

9. 设有常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y), & a\leqslant x\leqslant b \\ y(a)=\eta \end{cases}$$

及其求解公式

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{12}[23f(x_i,y_i)-16f(x_{i-1},y_{i-1})+5f(x_{i-2},y_{i-2})] \quad ①$$

试导出该求解公式的局部截断误差,并指出其阶数. (10′)

2002 年春季攻读博士学位研究生入学考试试题

1. 已知$\sqrt{201}$和$\sqrt{200}$的 6 位有效数的近似值分别为 14.1774 和 14.1421,试按 $A=\sqrt{201}-\sqrt{200}$ 和 $A=\dfrac{1}{\sqrt{201}+\sqrt{200}}$ 两种算法求出 A 的近似值,并分别求出两种算法所得 A 的近似值的绝对误差限,问这两种结果各具有几位有效数字. (12′)

2. 给定方程

$$x^2-6x-\ln x+8=0$$

(1) 分析该方程存在几个根.

(2) 用适当的迭代法求出全部根,精确至 4 位有效数. (15′)

3. 给定线性方程组

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$$

(1) 用列主元 Gauss 消去法解上述方程组.

(2) 写出 Gauss-Seidel 迭代格式,并判断其收敛性. (18′)

4. 设 $f(x)\in C^5[a,b]$,作一个 4 次多项式 $H(x)$ 使其满足

$$H(a)=f(a),\qquad H(c)=f(c),\qquad H(b)=f(b)$$
$$H'(a)=f'(a),\qquad\qquad H'(b)=f'(b)$$

并写出插值余项 $f(x)-H(x)$ 的表达式,其中 $a<c<b$. (15′)

5. 设有求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)\qquad ①$$

其中 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 互异.

(1) 给出该求积公式为 Gauss 公式的定义.

(2) 根据定义,确定 x_0, x_1, A_0 和 A_1 使得

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) \qquad ②$$

为 Gauss 公式. (16′)

6. 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & a \leqslant x \leqslant b \\ y(a) = \eta \end{cases}$$

分析下列预测校正公式

$$\begin{cases} \bar{y}_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{2}h\left[3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})\right] \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{12}h\left[5f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}) + 8f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})\right] \end{cases}$$

的局部截断误差,并指出该公式是几阶的. (16′)

7. 用幂法求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$ 按模最大的特征值,精确至 4 位有效数. (8′)

2002 年秋季攻读博士学位研究生入学考试试题

1. 设

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x, \qquad n = 0,1,2,\cdots,10000$$

(1) 证明

$$I_n = e - nI_{n-1}, \qquad n = 1,2,3,\cdots,10000$$

(2) 给出一个数值稳定的递推算法,并证明算法的稳定性. (9′)

2. (1) 写出用 Newton 法求方程

$$x^2 - 6 = 0$$

正根 x^* 的迭代格式;

(2) 设 x_k 是 x^* 的一个近似值且具有 $n(n \geqslant 1)$ 位有效数字,证明用 Newton 迭代格式所求的新近似值 x_{k+1} 具有 $(2n-1)$ 位有效数字. (9′)

3. 分析方程

$$(x-1)e^x - 1 = 0$$

存在几个根,用简单迭代法求出这些根(精确到 4 位有效数),并说明所用迭代格式是收敛的. (9′)

4. 用列主元 Gauss 消去法解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 12 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 15 \end{bmatrix} \qquad (9')$$

5. 给定线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

并设$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$.

(1) 写出 Jacobi 迭代格式;

(2) 设

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

证明 Jacobi 迭代格式收敛. (8′)

6. 设 $L_n(x)$ 为

$$f(x) = e^x, \qquad x \in [0,2]$$

以$(n+1)$个等距节点

$$x_i = \frac{2i}{n}, \qquad i = 0,1,2,\cdots,n$$

为插值节点的 n 次插值多项式,证明

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant 2} |f(x) - L_n(x)| = 0$$ (8′)

7. 作一个 5 次多项式 $H(x)$ 使得

$$H(1) = 3, \qquad H(2) = -1, \qquad H(4) = 3$$

$$H'(1) = 2, \qquad H'(2) = 1,$$

$$H''(2) = 2$$ (8′)

8. 考虑计算积分 $I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的求积公式

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \qquad ①$$

(1) 当求积系数 $A_i(i = 0,1,\cdots,n)$ 为何值时,称 ① 为插值型求积公式;

(2) 证明 ① 至少具有 n 次代数精度的充分必要条件是 ① 为插值型的. (9′)

9. 已知

$$\int_{-1}^{1} g(t) \approx \frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

为 Gauss 求积公式.

(1) 试给出计算积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的 3 点 Gauss 求积公式.

(2) 应用所构造的求积公式计算积分$\int_3^6 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 的近似值. (9′)

10. 记 $C[a,b]=\{f(x)\mid f(x)$ 为$[a,b]$上的连续函数$\}$.

(1) 设 $f(x)\in C[a,b]$,则 $\|f\|_\infty=$ ________, $\|f\|_2=$ ________.

(2) 设 $f(x)\in C[a,b]$,当 n 次多项式$p_n^*(x)$满足什么条件时,称 $p_n^*(x)$为 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式?当 n 次多项式$q_n^*(x)$满足什么条件时,称 $q_n^*(x)$为 $f(x)$ 的 n 次最佳平方逼近多项式? (8′)

11. 考虑常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y), & a\leqslant x\leqslant b \\ y(a)=\eta \end{cases}$$

取正整数 n,并记 $h=(b-a)/n$, $x_i=a+ih$, $0\leqslant i\leqslant n$.试分析下列 3 个求解公式的局部截断误差,并指出它们各是几阶的:

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}[3f(x_i,y_i)-f(x_{i-1},y_{i-1})] \qquad ①$$

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}[f(x_{i+1},y_{i+1})+f(x_i,y_i)] \qquad ②$$

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(p)}=y_i+\dfrac{h}{2}[3f(x_i,y_i)-f(x_{i-1},y_{i-1})] \\ y_{i+1}^{(c)}=y_i+\dfrac{h}{2}[f(x_{i+1},y_{i+1}^{(p)})+f(x_i,y_i)] \\ y_{i+1}=\dfrac{1}{6}y_{i+1}^{(p)}+\dfrac{5}{6}y_{i+1}^{(c)} \end{cases} \qquad ③$$

(14′)

2003 年春季攻读博士学位研究生入学考试试题

1. 给定方程组
$$\begin{cases} x = \sin\frac{1}{2}y & ① \\ y = \cos x & ② \end{cases}$$
(1) 证明该方程组存在惟一一组解；
(2) 用适当的迭代法求出其解，精确至 3 位有效数. (12′)

2. 给定线性方程组
$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ & a_2 & c_2 & & & \\ & & a_3 & c_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$
其中 $a_i \neq 0, 1 \leqslant i \leqslant n-1$ 且系数矩阵是非奇异的. 试根据其系数矩阵稀疏性的特点给出一个追赶算法，并指出所给出算法的乘除法运算次数和加减法运算次数. (12′)

3. 给定线性方程组
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$
(1) 分别写出 Jacobi 迭代格式，Gauss-Seidel 迭代格式和 SOR 迭代格式；
(2) 分析 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式的收敛性. (14′)

4. 设
$$f(x) \in C^4[x_0 - h, x_0 + h], \qquad h > 0$$

(1) 作一个 3 次多项式 $H(x)$ 使其满足

$$H(x_0 - h) = f(x_0 - h), \qquad H(x_0) = f(x_0)$$
$$H(x_0 + h) = f(x_0 + h), \qquad H'(x_0) = f'(x_0)$$

(2) 写出插值余项 $f(x) - H(x)$ 的表示式.

(3) 求出 $H''(x_0)$,并证明

$$f''(x_0) - H''(x_0) = -\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in (x_0 - h, x_0 + h) \quad (14')$$

5. 设已知一组实验数据

x	2	3	4	6
y	0.760	0.340	0.190	0.085

试用最小二乘法确定拟合公式 $y = ax^b$ 中的参数 a 和 b. (12′)

6. 求 3 个不同的求积节点 x_0, x_1 和 x_2,使求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t \approx \frac{1}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)]$$

具有尽可能高的代数精度. (12′)

7. 设 $f(x) \in C^2[a,b], I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,则其梯形公式为

$$T(f) = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

且

$$I(f) - T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi), \qquad \xi \in (a,b)$$

(1) 试写出计算积分 $I(f)$ 的复化梯形公式 $T_n(f)$ 及相应的截断误差 $I(f) - T_n(f)$ 的表达式;

(2) 将以上计算积分 $I(f)$ 的方法应用于二重积分

$$J(g) = \iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

的数值计算,写出计算公式.设 $g(x,y) \in C^2(D)$,试给出其截断误差的表达式.

(14′)

8. 考虑常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & a \leqslant x \leqslant b \\ y(a) = \eta \end{cases}$$

取正整数 n，并记 $h = (b-a)/n$，$x_i = a + ih$，$0 \leqslant i \leqslant n$. 试分析下列求解公式

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 4f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_{i-1})\right]$$

的局部截断误差，并指出它是几步几阶公式. (10′)

2003 年秋季攻读博士学位研究生入学考试试题

1. 已知

$$(10-\sqrt{99})^6=\frac{1}{(10+\sqrt{99})^6}$$

且$\sqrt{99}$ 的 6 位有效数为 9.94987. 分析如下两种算法各具有几位有效数字：

$$(10-\sqrt{99})^6 \approx (10-9.94987)^6 = 0.158703399\times 10^{-7}$$

$$\frac{1}{(10+\sqrt{99})^6} \approx \frac{1}{(10+9.94987)^6} = 0.158620597\times 10^{-7} \qquad (11')$$

2. 给定方程

$$\sin x + x^2 - 2x - 3 = 0$$

(1) 分析该方程存在几个根；

(2) 用适当的迭代法求出这些根，精确至 3 位有效数. (12′)

3. 用列主元 Gauss 消去法解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & -3 & 3 \\ -18 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ -15 \end{bmatrix} \qquad (10')$$

4. 给定线性方程组

$$\begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 \\ 12 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \\ -15 \end{bmatrix}$$

(1) 写出 Gauss-Seidel 迭代格式；

(2) 分析该迭代格式的收敛性. (10′)

5. 设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是 $n+1$ 个不同的点，证明

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{x_i^k}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}=\begin{cases}0, & 0\leqslant k\leqslant n-1\\1, & k=n\end{cases}\qquad (7')$$

6. 设 $f(x)\in C^4[a,b]$,考虑其积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(1) 写出计算积分 $I(f)$ 的 Simpson 公式 $S(f)$,并指出其代数精度.

(2) 写出计算积分 $I(f)$ 的复化 Simpson 公式 $S_n(f)$.

(3) 已知 Simpson 公式 $S(f)$ 的截断误差为

$$I(f)-S(f)=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi),\qquad \xi\in(a,b)$$

试推导出复化 Simpson 公式 $S_n(f)$ 截断误差的表达式.

(4) 给出应用 Simpson 公式 $S(f)$ 计算二重积分

$$J(g)=\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$$

的近似值的计算公式. (13′)

7. 考虑常微分方程初值问题

$$\begin{cases}y'=f(x,y), & a\leqslant x\leqslant b\\ y(a)=\eta\end{cases}$$

(1) 试构造一个 2 阶 2 步显式公式,并推导出其局部截断误差;

(2) 写出一个 2 阶单步显式公式,并就其计算量和(1)中所构造的 2 阶 2 步显式公式进行比较. (13′)

8. 设 $f(x)=\sin x, x\in[0,\pi/2]$.

(1) 试求 $f(x)$ 的 1 次最佳平方逼近多项式;

(2) 试求 $f(x)$ 的 1 次最佳一致逼近多项式. (12′)

9. 设 $f(x,y)$ 定义在区域 $[0,1]\times[0,1]$ 上,且足够光滑. 已知 $f(0,0)$, $f(1,0)$, $f(0,1)$ 和 $f(1,1)$. 试利用已给数据求 $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ 的近似值,并给出误差表达式. (12′)

2004 年春季攻读博士学位研究生入学考试试题

1. 填空.

(1) 求解方程 $f(x)=0$ 的 Newton 迭代公式为________________,割线公式为________________. $(3'+2')$

(2) 设有矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 4 & 6\end{bmatrix}$,则 $\|A\|_\infty=$ ________,$\|A\|_2=$ ________. $(2'+3')$

(3) 设有数据

x	-1	1	2
y	0	3	2

则其 2 次 Lagrange 插值多项式为________________,2 次拟合多项式为________________. $(3'+3')$

(4) 设 $I(f)=\int_0^1\sqrt{1+e^x}\,dx$,则用 Simpson 公式所得近似值为____________,用 2 点 Gauss 公式所得近似值为____________.(计算结果保留 7 位有效数字) $(3'+3')$

(5) 求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases}y'=f(x,y), & a\leqslant x\leqslant b\\ y(a)=\eta\end{cases}$$

的改进 Euler 公式为____________,它是________阶的. $(3'+1')$

2. 设有一台舍入机,字长 $n=4$,基 $\beta=10$,阶码下界 $L=-4$,阶码上界 $U=4$,$x=1.6278$,$y=0.1845$,$z=0.04263$.试模拟在此计算机上计算 $u=(x+y)+z$ 和 $v=x+(y+z)$.你从计算结果能得出什么结论? $(8')$

3. 用简单迭代法计算出方程

$$400x^3+12x-3=0$$

的所有实根(精确至 3 位有效数),并证明所用迭代法是收敛的. $(10')$

4. 用列主元 Gauss 消去法解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 13 \\ 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 45 \\ 4x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases} \qquad (10')$$

5. 写出求解线性方程组

$$\begin{cases} 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 45 \\ 4x_2 + 3x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 13 \end{cases}$$

的 Gauss-Seidel 迭代格式，并判断其敛散性. (8′)

6. 设 $f(x) = \dfrac{1}{a - x}$，且 $a, x_0, x_1, \cdots, x_n$ 互不相同. 证明

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{1}{\prod_{j=0}^{k}(a - x_j)}, \qquad k = 0, 1, \cdots, n \qquad ①$$

并写出 $f(x)$ 的 n 次 Newton 插值多项式. (10′)

7. 给定求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx Af\left(-\frac{1}{2}\right) + Bf(0) + Cf\left(\frac{1}{2}\right) \qquad ①$$

试决定 A、B 和 C 使其具有尽可能高的代数精度，并指出所达到的代数精度的次数. (10′)

8. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，证明计算积分

$$I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

的复化梯形公式 $T_n(f)$，有

$$\lim_{n \to \infty} T_n(f) = I(f) \qquad (8')$$

9. 考虑初值问题

$$\begin{cases} y' = x^4, & x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad ①$$

其准确解为 $y(x) = 1 + x^5/5$. 记 $x_i = ih, i = 0,1,2,\cdots$. 设 $\{y_i\}_{i=0}^{\infty}$ 为用经典 Runge-Kutta 公式所得近似解,证明

$$y(x_i) - y_i = -\frac{x_i}{120}h^4, \qquad i = 0,1,2,\cdots \qquad ②$$

(10′)

参考答案及评分标准部分 2

1999 年工科硕士研究生学位课程考试

1. 解　(1) $\because (10-\sqrt{99})(10+\sqrt{99}) = 100-99 = 1$

$$\therefore 10-\sqrt{99} = \frac{1}{10+\sqrt{99}} \qquad (1')$$

(2) 记 $x^* = \sqrt{99}, x = 9.94987, e(x) = x^* - x$,则

$$|e(x)| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-5} \qquad (1')$$

由 $e(10-x) \approx -e(x)$ 得

$$|e(10-x)| \approx |e(x)| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

因而算式 ①

$$10-\sqrt{99} \approx 0.05013$$

至少具有 4 位有效数字. (4′)

又由

$$e(10+x) \approx e(x),\quad |e(10+x)| \approx |e(x)| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-5} \qquad (2')$$

和

$$e\left(\frac{1}{10+x}\right) \approx -\frac{e(10+x)}{(10+x)^2} \approx -\frac{e(x)}{(10+x)^2}$$

得

$$\left|e\left(\frac{1}{10+x}\right)\right| \approx \frac{|e(x)|}{(10+x)^2} \leqslant \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-5}}{(10+9.94987)^2} = 0.1256\times 10^{-7} \qquad (2')$$

因而算式 ②

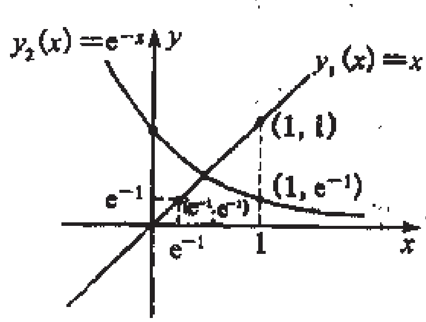
$$\frac{1}{10+\sqrt{99}} \approx 0.0501256399\cdots$$

至少具有 6 位有效数字,即 $\frac{1}{10+\sqrt{99}} = 0.0501256.$ (2′)

2. 解　考虑方程

$$x = e^{-x} \qquad ②$$

作 $y_1(x) = x, y_2(x) = e^{-x}$ 的图像知方程 ② 有惟一根 $x^* \in [e^{-1}, 1]$. (2′)



取 $x_0 = 1$,由所给迭代格式迭代得到

$x_1 = 0.36788,\qquad x_2 = 0.69220$

$x_3 = 0.50047,\quad x_4 = 0.60624,\quad x_5 = 0.54540,\quad x_6 = 0.57961$

$x_7 = 0.56012,\quad x_8 = 0.57114,\quad x_9 = 0.56488,\quad x_{10} = 0.56843$

$x_{11} = 0.56641\quad x_{12} = 0.56576,\quad x_{13} = 0.56691\quad x_{14} = 0.56728$

因而 $x^* \approx 0.567$. (2′)

(1) 记 $\varphi(x) = e^{-x}$,则当 $x \in [e^{-1},1]$ 时

$$\varphi(x) \in [\varphi(1),\varphi(e^{-1})] = [e^{-1},e^{-e^{-1}}] \subset [e^{-1},1]$$
$$|\varphi'(x)| = |e^{-x}| \leqslant e^{-1} < 1$$

∴ 对任意 $x_0 \in [e^{-1},1]$时由迭代格式

$$x_{n+1} = e^{-x_n},\qquad n = 0,1,2,\cdots$$

产生的迭代序列均收敛于 x^*. (4′)

(2) 设 $x_0 \in [0,\infty)$,则有 $x_1 = e^{-x_0} \in [0,1]$,$x_2 = e^{-x_1} \in [e^{-1},1]$.若令 x_2 为迭代初值,则转化为(1) 中所讨论的情况.因而当 $x_0 \in [0,\infty)$ 时迭代格式收敛. (2′)

(3) 当 $x_0 \in (-\infty,0)$ 时,$x_1 = e^{-x_0} > 0$.若令 x_1 为迭代初值,则转化为(2) 所讨论情况.因而当 $x_0 \in (-\infty,0)$ 时迭代格式收敛.

综上,对一切 $x_0 \in \mathbf{R}$,迭代均是收敛的,且迭代序列收敛到方程 ① 的惟一根.

(2′)

3. **解** 设 $a_{11} \neq 0$.记 $l = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}$,则 Gauss 消去法如下:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - lr_1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{22} - la_{12} & b_2 - lb_1 \end{bmatrix}$$

如果 a_{12} 有一个误差 ε,则

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}+\varepsilon & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - lr_1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{22} - la_{12} - l\varepsilon & b_2 - lb_1 \end{bmatrix}$$

a_{12} 的误差 ε 放大了 l 倍传到第 2 行第 2 列元素.如果 $|l| > 1$,则误差放大了,且有可能造成"大数"吃掉"小数"现象.如果 $|l| \leqslant 1$,则误差不放大.所以在消元过程中,我们要设法使得 $|l| \leqslant 1$.具体来说,我们在消元之前,计算 $l = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}$,如果 $|l| > 1$,将所给方程组的第一行和第二行相交换,交换之后即有 $|l| \leqslant 1$,再进行消元法. (12′)

4. **解** Jacobi 迭代矩阵 J 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2')$$

将行列式展开,得到

$$a_{11}a_{22}\lambda^2 = a_{12}a_{21}, \qquad \lambda^2 = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \equiv c$$

当 $c > 0$ 时,$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{c}$;当 $c = 0$ 时,$\lambda_{1,2} = 0$;当 $c < 0$ 时,$\lambda = \pm\sqrt{-c}\,\mathrm{i}$.
综上有

$$\rho(J) = \sqrt{|c|}$$

Jacobi 迭代法收敛的充分必要条件为

$$\rho(J) < 1$$

即

$$|c| < 1 \qquad ①(3')$$

Gauss-Seidel 迭代矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2')$$

将行列式展开,得到

$$\lambda(a_{11}a_{22}\lambda - a_{12}a_{21}) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} = c, \qquad \rho(G) = |c|$$

Gauss-Seidel 迭代法收敛的充分必要条件为

$$\rho(G) < 1$$

即

$$|c| < 1 \qquad ②(3')$$

由 ① 及 ② 知,当 $|c| < 1$ 时两种方法同时收敛;当 $|c| \geqslant 1$ 时两种方法同时发散. (2′)

5. 解

$$f(x) = \sin x, \qquad x \in [0, \pi]$$

$$f'(x) = \cos x, \qquad f''(x) = -\sin x, \qquad f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x, \qquad f^{(5)}(x) = \cos x$$

$$f(0) = 0, \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad f(\pi) = 0$$

$$f'(0) = 1, \qquad f'(\pi) = -1$$

构造差商表

0	0				
		1			
0	0		$\frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}-1\right)=\frac{4-2\pi}{\pi^2}$		
		$\frac{2}{\pi}$		$\left(-\frac{8}{\pi^2}+\frac{2}{\pi}\right)\frac{1}{\pi}=\frac{2\pi-8}{\pi^3}$	
$\frac{\pi}{2}$	1		$-\frac{4}{\pi^2}$		$\left(\frac{16}{\pi^2}-\frac{4}{\pi}\right)\frac{1}{\pi^2}=\frac{16-4\pi}{\pi^4}$
		$-\frac{2}{\pi}$		$\left(\frac{8}{\pi^2}-\frac{2}{\pi}\right)\frac{1}{\pi}=\frac{8-2\pi}{\pi^3}$	
π	0		$\frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}-1\right)=\frac{4-2\pi}{\pi^2}$		
		-1			
π	0				

(7′)

$$
\begin{aligned}
H(x) &= 1\cdot(x-0)+\frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}-1\right)(x-0)^2+\frac{2}{\pi^2}\left(1-\frac{4}{\pi}\right)(x-0)^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\\
&\quad+\frac{4}{\pi^3}\left(\frac{4}{\pi}-1\right)(x-0)^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)\\
&= x+(-0.2313)x^2+(-0.05537)x^2(x-1.571)\\
&\quad+0.03525x^2(x-1.571)(x-3.141)
\end{aligned} \tag{3′}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x)-H(x) &= \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-0)^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)^2\\
&= \frac{\cos\xi}{120}(x-0)^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)^2,\qquad \xi\in(0,\pi)
\end{aligned} \tag{2′}
$$

$$
\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}|f(x)-H(x)|\leqslant\frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6\cdot\frac{4}{27}=0.0185453 \tag{1′}
$$

6. **解** 令

$$
x=\frac{4+2}{2}+\frac{4-2}{2}t=3+t
$$

则

$$
f(x)=(3+t)^3+2(3+t)^2\equiv g(t)
$$

注意到 $T_3(t)=4t^3-3t$ 在 $[-1,1]$ 上关于 0 有 4 个交错偏差点，令

$$
p_2(t)=g(t)-\frac{1}{4}T_3(t)
$$

则

$$
g(t)-p_2(t)=\frac{1}{4}T_3(t)
$$

关于 0 有四个交错偏差点，所以 $p_2(t)$ 为 $g(t)$ 在 $[-1,1]$ 上的 2 次最佳一致逼近多项式. 于是 $p_2(x-3)$ 为 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上的 2 次最佳一致逼近多项式.

(6′)

$$
\begin{aligned}
p_2(x-3) &= g(x-3)-\frac{1}{4}T_3(x-3)=f(x)-\frac{1}{4}T_3(x-3)\\
&= x^3+2x^2-\frac{1}{4}[4(x-3)^3-3(x-3)]
\end{aligned}
$$

$$= x^3 - (x-3)^3 + 2x^2 + \frac{3}{4}(x-3)$$

$$= 11x^2 - \left(26\frac{1}{4}\right)x + \left(24\frac{3}{4}\right)$$

$$= 11x^2 - \frac{105}{4}x + \frac{99}{4}$$

$f(x)$ 在[2,4]上的 2 次最佳一致逼近多项式为

$$p_2^*(x) = 11x^2 - \frac{105}{4}x + \frac{99}{4} = 11x^2 - 26.25x + 24.75 \qquad (4')$$

$$\max_{2\leqslant x\leqslant 4}\left|f(x) - p_2^*(x)\right| = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1}\left|g(t) - p_2(t)\right| = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1}\left|\frac{1}{4}T_3(t)\right| = \frac{1}{4}$$

$$(3')$$

7. 解　(1) 作变换 $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$，则

$$I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{b-a}{2} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)\mathrm{d}t$$

应用[-1,1]上的 3 点 Gauss 公式可得

$$\begin{aligned}
I(f) &\approx \frac{1}{9}\left[5\cdot\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8\cdot\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right.\\
&\quad \left. + 5\cdot\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]\\
&= \frac{b-a}{18}\left[5f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right.\\
&\quad \left. + 5f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]\\
&\equiv G^{(3)}(f) \qquad (3')
\end{aligned}$$

其截断误差为

$$\begin{aligned}
I(f) - G^{(3)}(f) &= c_0 \frac{\mathrm{d}^6}{\mathrm{d}t^6}\left[\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)\right]\Bigg|_{t=\xi}\\
&= c_0\left(\frac{b-a}{2}\right)^7 f^{(6)}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi\right)\\
&= c_0\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^7 f^{(6)}(\eta), \qquad \eta \in (a,b) \qquad (2')
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
I(f) &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x\\
&\approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{18}\left[5f\left(x_{i+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + 5f\left(x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]\\
&\equiv G_n^{(3)}(f) \qquad (4')
\end{aligned}$$

(3) $$I(f)-G_n^{(3)}(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\mathrm{d}x-\frac{h}{18}\left[5f\left(x_{i+\frac{1}{2}}-\frac{h}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+8f(x_{i+\frac{1}{2}})+5f\left(x_{i+\frac{1}{2}}+\frac{h}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]\right\}$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}c_0\left(\frac{h}{2}\right)^7 f^{(6)}(\eta_i),\qquad \eta_i\in(x_i,x_{i+1})\tag{2'}$$

方法 1:

$$\frac{I(f)-G_n^{(3)}(f)}{h^6}=c_0\cdot\frac{1}{2^7}h\sum_{i=0}^{n-1}f^{(6)}(\eta_i)\longrightarrow c_0\frac{1}{2^7}\int_a^b f^{(6)}(x)\mathrm{d}x$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{I(f)-G_n^{(3)}(f)}{h^6}=\frac{1}{2^7}c_0[f^{(5)}(b)-f^{(5)}(a)]\equiv c$$

所以当 h 充分小时,有

$$\frac{I(f)-G_n^{(3)}(f)}{h^6}\approx c$$

即

$$I(f)-G_n^{(3)}(f)\approx ch^6$$

其中 $c=\frac{1}{2^7}c_0[f^{(5)}(b)-f^{(5)}(a)]$. (2′)

方法 2:

$$I(f)-G_n^{(3)}(f)=\sum_{i=0}^{n-1}c_0\left(\frac{h}{2}\right)^7 f^{(6)}(\eta_i)$$

取 $f^{(6)}(\eta)$ 为 $f^{(6)}(\eta_i), i=0,1,2,\cdots,n-1$ 平均值,则

$$I(f)-G_n^{(3)}(f)=c_0\left(\frac{h}{2}\right)^7\cdot nf^{(6)}(\eta)=c_0\frac{(b-a)}{2^7}h^6 f^{(6)}(\eta)$$
$$=ch^6,\qquad \eta\in(a,b)$$

其中 $c=c_0\frac{(b-a)}{2^7}f^{(6)}(\eta)$. (2′)

8. 解　方法 1:预测公式的局部截断误差

$$R_{i+1}^{(1)}=y(x_{i+1})-[y(x_i)+hf(x_i,y_i)]$$
$$=y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)+O(h^3)-[y(x_i)+hy'(x_i)]$$
$$=\frac{h^2}{2}y''(x_i)+O(h^3)\tag{3'}$$

校正公式的局部截断误差

$$R_{i+1}^{(2)}=y(x_{i+1})-y(x_i)-\frac{h}{12}[5f(x_{i+1},y(x_{i+1}))+8f(x_i,y(x_i))-f(x_{i-1},y(x_{i-1}))]$$

$$= y(x_{i+1}) - y(x_i) - \frac{h}{12}[5y'(x_{i+1}) + 8y'(x_i) - y'(x_{i-1})]$$

$$= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(x_i) + O(h^5)$$

$$- y(x_i) - \frac{5h}{12}\left[y'(x_i) + hy''(x_i) + \frac{h^2}{2}y'''(x_i) + \frac{h^3}{6}y^{(4)}(x_i) + O(h^4)\right]$$

$$- \frac{8h}{12}y'(x_i) + \frac{h}{12}\left[y'(x_i) - hy''(x_i) + \frac{h^2}{2}y'''(x_i) - \frac{h^3}{6}y^{(4)}(x_i) + O(h^4)\right]$$

$$= -\frac{h^4}{24}y^{(4)}(x_i) + O(h^5) \tag{3'}$$

预测校正公式的局部截断误差

$$R_{i+1} = y(x_{i+1}) - y(x_i) - \frac{h}{12}[5f(x_{i+1}, y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)))$$

$$+ 8f(x_i, y(x_i)) - f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))]$$

$$= y(x_{i+1}) - y(x_i)$$

$$- \frac{h}{12}[5f(x_{i+1}, y(x_i) + hy'(x_i)) + 8y'(x_i) - y'(x_{i-1})]$$

$$= y(x_{i+1}) - y(x_i)$$

$$- \frac{h}{12}[5f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) + 8y'(x_i) - y'(x_{i-1})]$$

$$+ \frac{5h}{12}[f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) - f(x_{i+1}, y(x_i) + hy'(x_i))]$$

$$= R_{i+1}^{(2)} + \frac{5h}{12}\frac{\partial f(x_{i+1}, \eta_i)}{\partial y}[y(x_{i+1}) - (y(x_i) + hy'(x_i))]$$

$$= R_{i+1}^{(2)} + \frac{5h}{12}\frac{\partial f(x_{i+1}, \eta_i)}{\partial y}R_{i+1}^{(1)}$$

$$= -\frac{h^4}{24}y^{(4)}(x_i) + O(h^5) + \frac{5h}{12}\frac{\partial f(x_{i+1}, \eta_i)}{\partial y}\left[\frac{1}{2}h^2y''(x_i) + O(h^3)\right]$$

$$= \frac{5}{24}h^3\frac{\partial f(x_{i+1}, \eta_i)}{\partial y}y''(x_i) + O(h^4),$$

η_i 介于 $y(x_{i+1})$ 与 $y(x_i) + hy'(x_i)$ 之间(4′)

该公式是一个 2 阶公式. (2′)

方法 2:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + y'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))$$

$$y'''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + y'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y(x))$$

$$+ y'(x)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y(x)) + y'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y(x))\right)$$

$$+ y''(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))$$

$$R_{i+1} = y(x_{i+1}) - y(x_i) - \frac{h}{12}[5f(x_i + h, y(x_i) + hy'(x_i)) + 8y'(x_i) - y'(x_{i-1})] \quad (2')$$

$$= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + O(h^4) - y(x_i) \quad (1')$$

$$- \frac{h}{12}\Big\{5\Big[f(x_i, y(x_i)) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + hy'(x_i)\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i)) + \frac{1}{2}\Big(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y(x_i)) + 2h^2y'(x_i)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_i, y(x_i)) + h^2(y'(x_i))^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_i, y(x_i))\Big) + O(h^3)\Big] + 8y'(x_i) \quad (3')$$

$$- \Big(y'(x_i) - hy''(x_i) + \frac{h^2}{2}y'''(x_i) + O(h^3)\Big)\Big\} \quad (1')$$

$$= hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + O(h^4) - \frac{h}{12}\Big\{5\Big[y'(x_i) + hy''(x_i) + \frac{1}{2}h^2\Big(y'''(x_i) - y''(x_i)\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i))\Big) + O(h^3)\Big] + 7y'(x_i) + hy''(x_i) - \frac{h^2}{2}y'''(x_i) + O(h^3)\Big\}$$

$$= \frac{5}{24}h^3y''(x_i)\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i)) + O(h^4) \quad (3')$$

该公式是一个 2 阶公式. (2′)

2000 年工科硕士研究生学位课程考试

1. **解** (1) 记半径为 R,面积为 S,则

$$S = \pi R^2, |e_r(S)| \leqslant 0.04, dS = 2\pi R dR$$

$$\frac{dS}{S} = \frac{2\pi R dR}{\pi R^2} = 2\frac{dR}{R}$$

$$e_r(R) \approx \frac{1}{2}e_r(S)$$

$$|e_r(R)| \approx \frac{1}{2}|e_r(S)| \leqslant \frac{1}{2} \times 0.04 = 0.02 \quad (4')$$

(2) $f(0) = 1,\quad f(1) = 2 - 2 + 6 - 2 + 1 = 5$

$$f[0,1] = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 5 - 1 = 4$$

$$f[0,1,2,3,4,5,6] = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} = \frac{2 \times 6!}{6!} = 2 \quad (4')$$

(3) 当 $f(x)=1$ 时,左 $=1$,右 $=\frac{1}{2}(1+1)+\frac{1}{12}(0-0)=1$,左 = 右;

当 $f(x)=x$ 时,左 $=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$,右 $=\frac{1}{2}(0+1)+\frac{1}{12}(1-1)=\frac{1}{2}$,左 = 右;

当 $f(x)=x^2$ 时,左 $=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$,右 $=\frac{1}{2}(0+1)+\frac{1}{12}(2\times 0-2\times 1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$,左 = 右;

当 $f(x)=x^3$ 时,左 $=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$,右 $=\frac{1}{2}(0+1^3)+\frac{1}{12}(3\times 0^2-3\times 1^2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$,左 = 右;

当 $f(x)=x^4$ 时,左 $=\int_0^1 x^4\mathrm{d}x=\frac{1}{5}$,右 $=\frac{1}{2}(0^4+1^4)+\frac{1}{12}(4\times 0^3-4\times 1^3)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$,左 $\neq$ 右.

所求代数精度为 3. (4′)

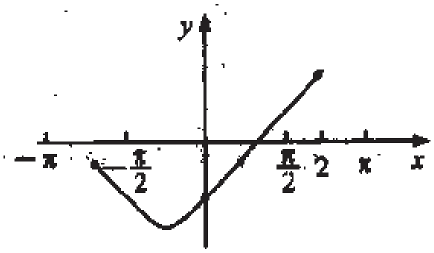
2. 解 (1) 如果有根 x^*,则

$$x^*=2\cos x,\ |x^*|=2|\cos x^*|\leqslant 2$$

即 $x^*\in[-2,2]$.

记 $f(x)=x-2\cos x$,则

$$f'(x)=1+2\sin x$$



在$[-2,2]$内求 $f'(x)=0$ 的根,得 $x=-\frac{\pi}{6}$.

于是当 $x\in\left[-2,-\frac{\pi}{6}\right)$时,$f'(x)<0$,

当 $x\in\left(-\frac{\pi}{6},2\right]$时,$f'(x)>0$.

$$f(-2)=-2-2\cos(-2)=-2-2\cos 2<0$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{6}-2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{6}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}<0$$

$$f(0)=-2$$

$$f(2)=2-2\cos 2>0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-2\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ 方程有惟一根 $x^*\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. (4′)

(2) 牛顿迭代法

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \dfrac{x_k - 2\cos x_k}{1 + 2\sin x_k}, \quad k = 0,1,2,\cdots \\ x_0 = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \tag{3'}$$

迭代得

$$x_1 = 1.04586, \quad x_2 = 1.02991, \quad x_3 = 1.02987$$

$$\therefore x^* \approx 1.030 \tag{4'}$$

3．解　Gauss-Seidel 迭代格式为

(1)
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (3 + x_2^{(k)})/3 \\ x_2^{(k+1)} = (4 - 3x_3^{(k)})/2 \\ x_3^{(k+1)} = (5 - 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)})/4 \end{cases} \tag{4'}$$

或

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(2) 迭代矩阵 G 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 3\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 3 \\ 2\lambda & \lambda & 4\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3'}$$

按第 1 列展开

$$3\lambda(8\lambda^2 - 3\lambda) + 2\lambda(-3) = 0$$

$$\lambda(24\lambda^2 - 9\lambda - 6) = 0, \quad \lambda(8\lambda^2 - 3\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 8 \times (-2)}}{2 \times 8} = \frac{3 \pm \sqrt{73}}{16} \tag{2'}$$

$$\rho(G) = \frac{3 + \sqrt{73}}{16} = 0.7215 < 1$$

$\therefore$ Gauss-Seidel 迭代格式收敛. (2′)

4．解　(1)
$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda & \lambda \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A(\lambda)| = 2\lambda - \lambda = \lambda, \quad A^{-1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ -1 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

$$\|A(\lambda)\|_\infty = \max\{3|\lambda|,2\}$$

$$\|A^{-1}(\lambda)\|_\infty = \frac{1}{|\lambda|}(1+2|\lambda|) = 2+\frac{1}{|\lambda|}$$

$$\mathrm{Cond}(A(\lambda))_\infty = \|A(\lambda)\|_\infty\|A^{-1}(\lambda)\|_\infty = \left(2+\frac{1}{|\lambda|}\right)\max\{3|\lambda|,2\}$$

(4′)

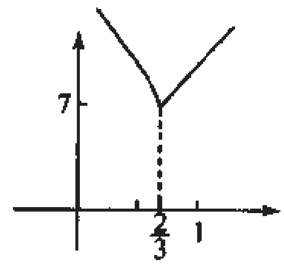
(2) $$\mathrm{Cond}(A(\lambda))_\infty = \begin{cases} \left(2+\frac{1}{|\lambda|}\right)\times 3|\lambda| = 6|\lambda|+3, & |\lambda| \geqslant \frac{2}{3} \text{ 时} \\ 2\left(2+\frac{1}{|\lambda|}\right), & |\lambda| \leqslant \frac{2}{3} \text{ 时} \end{cases}$$ (2′)

$\mathrm{Cond}(A(\lambda))_\infty$ 为 λ 的偶函数，仅需考虑 $\lambda > 0$ 的情况.

当 $0 < \lambda < \frac{2}{3}$ 时，$\mathrm{Cond}(A(\lambda))_\infty$ 为减函数；

当 $\lambda > \frac{2}{3}$ 时，$\mathrm{Cond}(A(\lambda))_\infty$ 为增函数.

所以，当 $\lambda = \pm\frac{2}{3}$ 时，$\mathrm{Cond}(A(\lambda))_\infty$ 达到最小值 7.



(2′)

(3) 注意到 $\mathrm{Cond}(A(1)) = 9$. 本题结果说明对方程作变形可改变方程组的性态. (3′)

5. 解 (1) 构造差商表

$$\begin{array}{llllll}
0 & f(0) & & & & \\
 & & f'(0) & & & \\
0 & f(0) & & \frac{1}{2}f''(0) & & \\
 & & f'(0) & & f[0,0,0,1] & \\
0 & f(0) & & f[0,0,1] & & f[0,0,0,1,1] \\
 & & f[0,1] & & f[0,0,1,1] & \\
1 & f(1) & & f[0,1,1] & & \\
 & & f'(1) & & & \\
1 & f(1) & & & &
\end{array}$$

其中

$$f[0,1] = f(1) - f(0) \qquad (1')$$

$$f[0,0,1] = f[0,1] - f[0,0] = f(1) - f(0) - f'(0) \qquad (1')$$

$$f[0,1,1] = f[1,1] - f[0,1] = f'(1) - f(1) + f(0)$$

$$f[0,0,0,1] = f[0,0,1] - f[0,0,0] = f(1) - f(0) - f'(0) - \frac{1}{2}f''(0)$$

(2′)

$$\begin{aligned} f[0,0,1,1] &= f[0,1,1] - f[0,0,1] \\ &= [f'(1) - f(1) + f(0)] - [f(1) - f(0) - f'(0)] \\ &= f'(1) - 2f(1) + 2f(0) + f'(0) \end{aligned}$$

$$f[0,0,0,1,1] = f[0,0,1,1] - f[0,0,0,1]$$

$$= [f'(1) - 2f(1) + 2f(0) + f'(0)]$$

$$- \left[f(1) - f(0) - f'(0) - \frac{1}{2}f''(0)\right]$$

$$= f'(1) - 3f(1) + 3f(0) + 2f'(0) + \frac{1}{2}f''(0) \qquad (3')$$

$$H(x) = f(0) + f[0,0]x + f[0,0,0]x^2 + f[0,0,0,1]x^3 + f[0,0,0,1,1]x^3(x-1)$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \left[f(1) - f(0) - f'(0) - \frac{1}{2}f''(0)\right]x^3 + \left[f'(1) - 3f(1) + 3f(0) + 2f'(0) + \frac{1}{2}f''(0)\right]x^3(x-1)$$

(2′)

(2) $f(x) - H(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^3(x-1)^2, \qquad \xi \in (0,1)$ (3′)

6. **解** (1) 方法 1：$f'(x) = 2x, f''(x) = 2$.

由于 $f''(x) > 0$，所以 $p_1(x)$ 与 $f(x)$ 有 3 个交错偏差点 $0, x_1, 1$.

$$f(0) - p_1(0) = -[f(x_1) - p_1(x_1)] = f(1) - p_1(1) \qquad (3')$$

$$f'(x_1) - p_1'(x_1) = 0$$

即

$$0^2 - (a_0 + a_1 \cdot 0) = -[x_1^2 - (a_0 + a_1x_1)] = 1^2 - (a_0 + a_1)$$

$$2x_1 - a_1 = 0$$

解得

$$a_1 = 1, \qquad x_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_0 = -\frac{1}{8} \qquad (2')$$

所以

$$p_1(x) = -\frac{1}{8} + x \qquad (1')$$

方法 2：令 $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, \quad t \in [-1,1]$.

$$f(x) = x^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t\right)^2 \equiv g(t) \qquad (1')$$

设 $p_1^*(t)$ 为 $g(t)$ 的 1 次最佳一致逼近式，则

$$g(t) - p_1^*(t) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}T_2(t)$$

$$\therefore p_1^*(t) = g(t) - \frac{1}{8}T_2(t) = g(t) - \frac{1}{8}[2t^2 - 1] \qquad (3')$$

将 $t=2x-1$ 代入,得所求的1次最佳一致逼近多项式为

$$\begin{aligned} p_1(x) &= p_1^*(2x-1) \\ &= f(x) - \frac{1}{4}(2x-1)^2 + \frac{1}{8} \\ &= x^2 - \left[x^2 - x + \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{8} \\ &= x - \frac{1}{8} \end{aligned} \qquad (2')$$

(2) $\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x$

$$(\varphi_0,\varphi_0) = \int_0^1 1^2 \mathrm{d}x = 1, \qquad (\varphi_0,\varphi_1) = \int_0^1 1\cdot x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$(\varphi_1,\varphi_1) = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}, \qquad (\varphi_0,f) = \int_0^1 1\cdot x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

$$(\varphi_1,f) = \int_0^1 x\cdot x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$$

正规方程组为

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad (3')$$

解得 $b_0 = -\frac{1}{6}, b_1 = 1.$ (1′)

$\therefore q_1(x) = -\frac{1}{6} + x$ (1′)

7. 解 $x_0 = 1.30, \quad x_1 = 1.32, \quad x_2 = 1.34, \quad x_3 = 1.36, \quad x_4 = 1.38$

$f(x_0) = 3.60210, \quad f(x_1) = 3.90330, \quad f(x_2) = 4.25560$

$f(x_3) = 4.67344, \quad f(x_4) = 5.17744$

方法1:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{x_4 - x_0}{6}[f(x_0) + 4f(x_2) + f(x_4)] \\ &= \frac{1.38-1.30}{6}[3.60210 + 4\times 4.25560 + 5.17744] = 0.3440259 \end{aligned}$$

(3′)

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{x_2 - x_0}{6}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \\ &\quad + \frac{x_4 - x_2}{6}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] \\ &= \frac{0.04}{6}[f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + 2f(x_2) + f(x_4)] \end{aligned}$$

$$= 0.3439846$$

$$I \approx S_2 = 0.3439846 \qquad (4')$$

$$I - S_2 \approx \frac{1}{15}(S_2 - S_1) = -0.27 \times 10^{-5} \qquad (4')$$

方法 2:

$$T_1 = \frac{1.38 - 1.30}{2}(3.60210 + 5.17744) = 0.351182 \qquad (1')$$

$$T_2 = \frac{T_1}{2} + \frac{0.08}{2}f(1.34) = 0.345814 \qquad (1')$$

$$T_4 = \frac{T_2}{2} + \frac{0.04}{2}[f(1.32) + f(1.36)] = 0.3444418 \qquad (2')$$

$$S_1 = \frac{4}{3}T_2 - \frac{1}{3}T_1 = 0.3440259 \qquad (1')$$

$$S_2 = \frac{4}{3}T_4 - \frac{1}{3}T_2 = 0.3439846 \qquad (2')$$

$$I \approx S_2 = 0.3439846$$

$$I - S_2 \approx \frac{1}{15}(S_2 - S_1) = -0.27 \times 10^{-5} \qquad (4')$$

8. 解　(1) 具有 3 次代数精度的求积公式为

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)\mathrm{d}t \\ &\approx \frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) \\ &\equiv G(f) \end{aligned} \qquad (4')$$

(2)
$$x_0 = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}, \qquad x_1 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} I(f) - G(f) &= \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2\mathrm{d}x \qquad (2') \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_a^b (x - x_0)^2(x - x_1)^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_{-1}^1 \left[\frac{b-a}{2}\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]^2\left[\frac{b-a}{2}\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]^2 \frac{b-a}{2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5\int_{-1}^1\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2\mathrm{d}t \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \cdot 2\int_0^1\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{135}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi), \qquad a \leqslant \xi \leqslant b \qquad (2') \end{aligned}$$

(3) 将$[a,b]$分成 n 等分,记 $h=\dfrac{b-a}{n}$,$x_i=a+ih$,$0\leqslant i\leqslant n$.

$$I(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\mathrm{d}x \tag{1'}$$
$$\approx\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left[f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}-\frac{h}{2\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}+\frac{h}{2\sqrt{3}}\right)\right]$$

即两点复化 Gauss 公式为

$$G_n(f)=\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}-\frac{h}{2\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}+\frac{h}{2\sqrt{3}}\right)\right] \tag{2'}$$

9. 解 (1) $$L_2(x)=f(x_{i-1},y(x_{i-1}))\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}$$
$$+f(x_i,y(x_i))\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}$$
$$+f(x_{i+1},y(x_{i+1}))\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)} \tag{3'}$$

方法 1:

(2) $$R_2(x)=f(x,y(x))-L_2(x)$$
$$=\frac{\left.\dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}f(x,y(x))\right|_{x=\xi_i}}{3!}(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})$$
$$=\frac{1}{3!}y^{(4)}(\xi_i)(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1}) \tag{1'}$$

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x,y(x))\mathrm{d}x$$
$$=y(x_i)+\int_{x_i}^{x_{i+1}}L_2(x)\mathrm{d}x+\int_{x_i}^{x_{i+1}}R_2(x)\mathrm{d}x \tag{1'}$$

作变换 $x=x_i+th$,则

$$x-x_i=th,\qquad x-x_{i+1}=(t-1)h,\qquad x-x_{i-1}=(t+1)h$$

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+\frac{1}{2h^2}f(x_{i-1},y(x_{i-1}))\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i)(x-x_{i+1})\mathrm{d}x$$
$$+\frac{1}{(-h^2)}f(x_i,y(x_i))\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\mathrm{d}x$$
$$+\frac{1}{2h^2}f(x_{i+1},y(x_{i+1}))\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_{i-1})(x-x_i)\mathrm{d}x$$
$$+\frac{1}{3!}y^{(4)}(\eta_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})\mathrm{d}x$$
$$=y(x_i)+\frac{1}{2}hf(x_{i-1},y(x_{i-1}))\int_0^1 t(t-1)\mathrm{d}t$$

$$+(-h)f(x_i,y(x_i))\int_0^1(t+1)(t-1)\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{2}hf(x_{i+1},y(x_{i+1}))\int_0^1(t+1)t\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{3!}y^{(4)}(\eta_i)h^4\int_0^1(t+1)t(t-1)\mathrm{d}t$$

$$=y(x_i)-\frac{1}{12}hf(x_{i-1},y(x_{i-1}))+\frac{2}{3}hf(x_i,y(x_i))$$

$$+\frac{5}{12}hf(x_{i+1},y(x_{i+1}))-\frac{1}{24}y^{(4)}(\eta_i)h^4$$

$$=y(x_i)+\frac{h}{12}[5f(x_{i+1},y(x_{i+1})+8f(x_i,y(x_i))$$

$$-f(x_{i-1},y(x_{i-1}))]-\frac{1}{24}y^{(4)}(\eta_i)h^4 \qquad (2')$$

2 步 Adams 隐式公式为

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{12}[5f(x_{i+1},y_{i+1})+8f(x_i,y_i)-f(x_{i-1},y_{i-1})] \qquad (1')$$

(3) 2 步 Adams 隐式公式的局部截断误差为

$$R_{i+1}=-\frac{1}{24}y^{(4)}(\eta_i)h^4$$

该公式是一个 3 阶公式. (3′)

方法 2:

(2)
$$y(x_{i+1})=y(x_i)+\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x,y(x))\mathrm{d}x$$

$$\approx y(x_i)+\int_{x_i}^{x_{i+1}}L_2(x)\mathrm{d}x$$

$$=y(x_i)+\frac{h}{12}[5f(x_{i+1},y(x_{i+1}))+8f(x_i,y(x_i))$$

$$-f(x_{i-1},y(x_{i-1}))] \qquad (3')$$

2 步 Adams 公式为

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{12}[5f(x_{i+1},y_{i+1})+8f(x_i,y_i)-f(x_{i-1},y_{i-1})] \qquad (1')$$

(3)
$$R_{i+1}=y(x_{i+1})-y(x_i)-\frac{h}{12}[5y'(x_{i+1})+8y'(x_i)-y'(x_{i-1})] \qquad (1')$$

$$=hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)+\frac{1}{6}h^3y'''(x_i)+\frac{h^4}{24}y^{(4)}(x_i)+O(h^5)$$

$$-\frac{h}{12}\Big[5\Big(y'(x_i)+hy''(x_i)+\frac{1}{2}h^2y'''(x_i)+\frac{1}{6}h^3y^{(4)}(x_i)+O(h^4)\Big)$$

$$+8y'(x_i)-\Big(y'(x_i)-hy''(x_i)+\frac{1}{2}h^2y'''(x_i)$$

$$-\frac{1}{6}h^3y^{(4)}(x_i)+O(h^4)\Big)\Big]$$

$$=-\frac{1}{24}h^4y^{(4)}(x_i)+O(h^5) \qquad (3')$$

该公式是一个 3 阶公式.

2001 年工科硕士研究生学位课程考试

1. **解** $|e(R)|\leqslant 0.5\text{mm}, \quad |e(h)|\leqslant 0.5\,\text{mm} \qquad (2')$

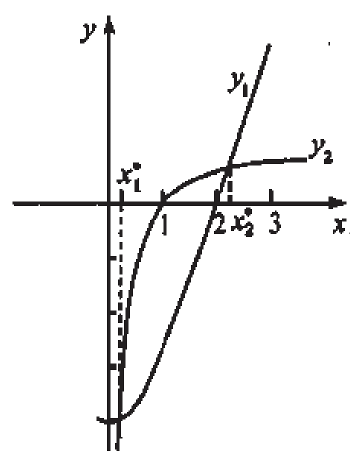
$$V=\pi R^2h=\pi\times 100^2\times 50=500000\pi \qquad (1')$$

$$e(V)\approx 2\pi Rh\,e(R)+\pi R^2e(h) \qquad (1')$$

$$\begin{aligned}|e(V)|&\approx|2\pi Rh\,e(R)+\pi R^2e(h)|\\&\leqslant 2\pi Rh\,|e(R)|+\pi R^2|e(h)|\\&\leqslant \pi R(2h\,|e(R)|+R\,|e(h)|)\\&\leqslant \pi\times 100\times(2\times 50\times 0.5+100\times 0.5)\\&=10000\pi\end{aligned} \qquad (3')$$

$$|e_r(V)|=\frac{|e(V)|}{|V|}\leqslant\frac{10000\pi}{500000\pi}=\frac{1}{50} \qquad (3')$$

2. **解** 将所给方程①改写为 $x^2-4=\ln x$.作曲线 $y_1=x^2-4$ 和 $y_2=\ln x$.可知方程①存在两个根 $x_1^*\in(0,1)$,$x_2^*\in(2,3)$. (2′)



(1) 在区间(0,1)内将方程①改写为 $x=e^{x^2-4}$.构造迭代格式

$$x_{k+1}=e^{x_k^2-4},\qquad k=0,1,2,\cdots \qquad ②(2')$$

记 $\varphi(x)=e^{x^2-4}$,则 $\varphi'(x)=2xe^{x^2-4}$.

当 $x\in[0,1]$ 时

$$\varphi(x)\in[\varphi(0),\varphi(1)]=[e^{-4},e^{-3}]\subset[0,1]$$

$$|\varphi'(x)|\leqslant 2e^{1^2-4}=2e^{-3}<1$$

∴ 迭代格式②对任意初值 $x_0\in[0,1]$ 均收敛于 x_1^*. (2′)

取 $x_0=0.5$,迭代得

$$x_1=0.0235177,\qquad x_2=0.0183258,\qquad x_3=0.0183218,$$

$$x_4=0.0183218$$

$\therefore x_1^* = 0.018322$ (2′)

(2) 在区间[2,3]内将方程①改写为

$$x = \sqrt{4+\ln x}$$

构造迭代格式

$$x_{k+1} = \sqrt{4+\ln x_k}, \qquad k = 0,1,\cdots \qquad ③(2')$$

记 $\varphi(x) = \sqrt{4+\ln x}$,则

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{4+\ln x}}$$

当 $x \in [2,3]$ 时

$$\varphi(x) \in [\varphi(2),\varphi(3)] = \left[\sqrt{4+\ln 2},\sqrt{4+\ln 3}\right] \subset [2,3]$$

$$|\varphi'(x)| \leqslant \frac{1}{2\times 2\times\sqrt{4+\ln 2}} = \frac{1}{4\sqrt{4+\ln 2}} < 1$$

$\therefore$ 迭代格式③对任意初值 $x_0 \in [2,3]$ 均收敛. (2′)

取 $x_0 = 2.5$,迭代得

$x_1 = 2.21727, \quad x_2 = 2.19004, \quad x_3 = 2.18722,$

$x_4 = 2.18692, \quad x_5 = 2.18689$

$\therefore x_2^* = 2.1869$ (2′)

3. 解 (1)

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 12 \\ -4 & 2 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{s_3=1 \\ r_2\leftrightarrow r_1}]{\substack{s_1=-2 \\ s_2=-4}} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 12 \\ -2 & 2 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 12 \\ \frac{1}{2} & 2 & 3 & 12 \\ -\frac{1}{4} & 2 & 3 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{s_3=\frac{5}{2} \\ r_3\leftrightarrow r_2}]{s_1=1} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 12 \\ -\frac{1}{4} & 2 & 3 & 16 \\ \frac{1}{2} & 2 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 12 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} & \frac{13}{4} & 19 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & 3 & 12 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 12 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} & \frac{13}{4} & 19 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{8}{5} \end{bmatrix} \qquad (8')$$

等价的三角方程组为

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ \frac{5}{2}x_2 + \frac{13}{4}x_3 = 19 \\ \frac{6}{5}x_3 = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

回代得 $x_3=-\frac{4}{3}, x_2=\frac{28}{3}, x_1=\frac{4}{3}$. (3′)

(2) Gauss-Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (12-2x_2^{(k)}-3x_3^{(k)})/(-2) \\ x_2^{(k+1)} = (12+4x_1^{(k+1)}-x_3^{(k)})/2 \\ x_3^{(k+1)} = (16-x_1^{(k+1)}-2x_2^{(k+1)})/3 \end{cases} \quad (3')$$

迭代矩阵 G 为的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -2\lambda & 2 & 3 \\ -4\lambda & 2\lambda & 1 \\ \lambda & 2\lambda & 3\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2')$$

即

$$2\lambda(-6\lambda^2-\lambda+1)=0$$

解得 $\lambda_1=0, \lambda_2=-\frac{1}{2}, \lambda_3=\frac{1}{3}$. (2′)

$\therefore \rho(G)=\frac{1}{2}<1$, Gauss-Seidel 迭代法收敛. (2′)

4. **解** (1) 方法 1: Newton 型

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
-1	1	-1	1	2
0	0	1	7	
1	1	15		
2	16			

$$p_3(x)=1-(x+1)+(x+1)x+2(x+1)x(x-1) \quad (3')$$

余项表达式

$$\begin{aligned} f(x)-p_3(x) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x+1)(x-0)(x-1)(x-2) \\ &= (x+1)x(x-1)(x-2) \end{aligned} \quad (2')$$

方法 2: Lagrange 型

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 1\times\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)}+0\times\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} \\ &\quad +1\times\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)}+16\times\frac{(x+1)(x+0)(x-1)}{(2+1)(2+0)(2-1)} \\ &= -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)-\frac{1}{2}(x+1)x(x-2)+\frac{8}{3}(x+1)x(x-1) \end{aligned}$$

(3′)

余项表达式

$$f(x)-p_3(x)=(x+1)x(x-1)(x-2) \qquad (2')$$

方法 3：　余项表达式

$$f(x)-p_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x+1)x(x-1)(x-2)$$
$$=(x+1)x(x-1)(x-2) \qquad (3')$$

$$\therefore p_3(x)=f(x)-(x+1)x(x-1)(x-2)$$
$$=x^4-x(x-2)(x^2-1)$$
$$=2x^3+x^2-2x \qquad (2')$$

(2) 令 $x=\frac{-1+2}{2}+\frac{2-(-1)}{2}t=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t, t=\frac{2x-1}{3}$,则

$$f(x)=x^4=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t\right)^4\equiv\varphi(t),\quad t\in[-1,1] \qquad (1')$$

设 $p_3^*(t)$ 为 $\varphi(t)$ 的 3 次最佳一致逼近多项式,则

$$\varphi(t)-p_3^*(t)=\left(\frac{3}{2}\right)^4\frac{1}{2^3}T_4(t)=\frac{81}{16}\times\frac{1}{8}\times(8t^4-8t^2+1) \quad (2')$$

$$p_3^*(t)=\varphi(t)-\frac{81}{16}\left(t^4-t^2+\frac{1}{8}\right)$$
$$=x^4-\frac{81}{16}\left[\left(\frac{2x-1}{3}\right)^4-\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2+\frac{1}{8}\right]$$
$$=x^4-\left(x-\frac{1}{2}\right)^4+\frac{9}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{81}{128}$$
$$=\left[x^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[x^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]+\frac{9}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{81}{128}$$
$$=\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(2x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{9}{4}\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{81}{128}$$
$$=2x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{7}{4}x-\frac{17}{128}\equiv q_3(x) \qquad (2')$$

(3)
$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 2}\left|f(x)-q_3(x)\right|=\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}\left|\varphi(t)-p_3^*(t)\right|=\frac{81}{16}\times\frac{1}{8}$$
$$=\frac{81}{128}=\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-q_3\left(\frac{1}{2}\right)\right|$$

$$p_3\left(\frac{1}{2}\right)=(2x^3+x^2-2x)\big|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-1=-\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$$

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-p_3\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}=\frac{9}{16}=\frac{72}{128}$$
$$<\frac{81}{128}=\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-q_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| \qquad (1')$$

$q_3(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的 3 次最佳一致逼近多项式；而 $p_3(x)$ 不是 $f(x)$ 的 3 次最佳一致逼近多项式，尽管在点 $x=\frac{1}{2}$ 处有

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-p_3\left(\frac{1}{2}\right)\right|<\|f-q_3\|_\infty$$

但一定有

$$\|f-p_3\|_\infty>\|f-q_3\|_\infty$$

事实上

$$\begin{aligned}\|f-p_3\|_\infty &\geqslant \left|f\left(-\frac{1}{2}\right)-p_3\left(-\frac{1}{2}\right)\right| \\ &=\left|(x+1)x(x-1)(x-2)\big|_{x=-\frac{1}{2}}\right| \\ &=\frac{15}{16}=\frac{120}{128}>\frac{81}{128} \\ &=\|f-q_3\|_\infty \end{aligned} \qquad (3')$$

5\. 解　(1) 当 $f(x)=1$ 时，左 $=\int_a^b 1\mathrm{d}x=b-a$，右 $=(b-a)\times 1=b-a$，左 $=$ 右；　(1′)

当 $f(x)=x$ 时，左 $=\int_a^b x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$，右 $=(b-a)\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$，左 $=$ 右；　(1′)

当 $f(x)=x^2$ 时，左 $=\int_a^b x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$，右 $=(b-a)\times\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，左 $\neq$ 右.　(1′)

$\therefore$ 中点公式 ① 的代数精度为 1.　(1′)

(2) 方法 1：

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &=\int_a^b\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x \\ &=\int_a^b\left[f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\eta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}x \qquad (2') \\ &=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+\frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x \\ &=\frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3,\qquad \xi\in(a,b) \qquad (2')\end{aligned}$$

方法 2：求积公式 ① 具有 1 次代数精度，作 1 次多项式 $H(x)$ 满足

$$H\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right),\qquad H'\left(\frac{a+b}{2}\right)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

则 $H(x)$ 是存在且惟一的，且有

$$f(x)-H(x)=\frac{1}{2}f''(\eta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,\eta\in(a,b)$$

$$\int_a^b H(x)\mathrm{d}x=(b-a)H\left(\frac{a+b}{2}\right)=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\qquad(2')$$

于是

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b H(x)\mathrm{d}x=\int_a^b[f(x)-H(x)]\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\frac{1}{2}f''(\eta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3\qquad(2')\end{aligned}$$

(3) 将 $[a,b]$ 作 n 等分，并记

$$h=\frac{b-a}{n}$$

$$x_i=a+ih,\qquad 0\leqslant i\leqslant n$$

$$x_{i+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(x_i+x_{i+1}),\qquad 0\leqslant i\leqslant n-1$$

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\mathrm{d}x\qquad(1')$$

对于每一个小区间上的积分 $\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\mathrm{d}x$，应用中点公式，即得复化中点求积公式

$$\int_a^b f(x)\approx\sum_{i=0}^{n-1}hf(x_{i+\frac{1}{2}})\qquad(2')$$

截断误差为

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum_{i=0}^{n-1}hf\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\mathrm{d}x-hf(x_{i+\frac{1}{2}})\right]\qquad(1')\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{24}f''(\xi_i)h^3=\frac{nh^3}{24}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f''(\xi_i)\qquad(1')\\&=\frac{b-a}{24}h^2f''(\xi)\qquad(1')\end{aligned}$$

其中 $\xi_i\in(x_i,x_{i+1}),\xi\in(a,b)$.

6. **解** 记 $h=\frac{b-a}{n}, x_i=a+ih, 0\leqslant i\leqslant n$.

将方程在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上积分,得

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x,y(x))\mathrm{d}x \quad ②$$

以 x_i 和 x_{i-1} 为插值节点作 $f(x,y(x))$ 的 1 次插值多项式,则有

$$L_1(x)=f(x_i,y(x_i))\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}+f(x_{i-1},y(x_{i-1}))\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i} \quad ③(4')$$

方法 1:由插值多项式的余项估计式有

$$f(x,y(x))=L_1(x)+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x,y(x))\bigg|_{x=\xi_i}(x-x_i)(x-x_{i-1})$$

$$=L_1(x)+\frac{1}{2}y'''(\xi_i)(x-x_i)(x-x_{i-1}) \quad ④(1')$$

将上式代入 ② 得

$$\begin{aligned}y(x_{i+1})&=y(x_i)+\int_{x_i}^{x_{i+1}}L_1(x)\mathrm{d}x+\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{1}{2}y'''(\xi_i)(x-x_i)(x-x_{i-1})\mathrm{d}x\\&=y(x_i)+f(x_i,y(x_i))\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\mathrm{d}x\\&\quad+f(x_{i-1},y(x_{i-1}))\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}\mathrm{d}x\\&\quad+\frac{1}{2}y'''(\eta_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i)(x-x_{i-1})\mathrm{d}x,\qquad x_{i-1}<\eta_i<x_{i+1}\end{aligned}$$

⑤(3′)

令 $x=x_i+th$,则 $x-x_i=th, x-x_{i-1}=(t+1)h, \mathrm{d}x=h\mathrm{d}t$.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\mathrm{d}x=h\int_0^1(t+1)\mathrm{d}t=\frac{3}{2}h$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}\mathrm{d}x=-h\int_0^1 t\mathrm{d}t=-\frac{h}{2}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i)(x-x_{i-1})\mathrm{d}x=h^3\int_0^1 t(t+1)\mathrm{d}t=\frac{5}{6}h^3$$

将上面 3 式代入到 ⑤,得

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+\frac{h}{2}[3f(x_i,y(x_i))-f(x_{i-1},y(x_{i-1}))]+\frac{5}{12}h^3y'''(\eta_i)$$

⑥(3′)

在 ⑤ 中略去 $O(h^3)$,并用 y_i 代替 $y(x_i)$,得到 2 步 Adams 显式公式

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}[3f(x_i,y_i)-f(x_{i-1},y_{i-1})] \quad (1')$$

由 ⑥ 可知公式 ① 的局部截断误差为

$$R_{i+1} = y(x_{i+1}) - \left\{y(x_i) + \frac{h}{2}[3f(x_i, y(x_i)) - f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))]\right\}$$

$$= \frac{5}{12}h^3 y'''(\eta_i) \qquad (1')$$

由局部截断误差的表达式可知公式 ① 是 2 阶收敛的. (1′)

方法 2:将 $L_1(x)$ 代入到 ② 有

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_1(x)\mathrm{d}x$$

$$= y(x_i) + f(x_i, y(x_i))\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\mathrm{d}x$$

$$+ f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}\mathrm{d}x \qquad (2')$$

$$= y(x_i) + \frac{h}{2}[3f(x_i, y(x_i)) - f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))] \qquad (2')$$

将 $y(x_i)$ 用 y_i 代替,并将"≈"换为"=",得到 2 步 Adams 显式公式

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})] \qquad (1')$$

局部截断误差

$$R_{i+1} = y(x_{i+1}) - \left\{y(x_i) + \frac{h}{2}[3f(x_i, y(x_i)) - f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))]\right\}$$

(1′)

$$= y(x_{i+1}) - y(x_i) - \frac{h}{2}[3y'(x_i) - y'(x_{i-1})] \qquad (1')$$

$$= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + O(h^4) - y(x_i)$$

$$- \frac{3}{2}hy'(x_i) + \frac{h}{2}\left[y'(x_i) - hy''(x_i) + \frac{h^2}{2}y'''(x_i) + O(h^3)\right] \qquad (2')$$

$$= \frac{5}{12}h^3 y'''(x_i) + O(h^4) \qquad (1')$$

公式 ① 是 2 阶的.

7. **解** 设 $H(1) = c$. 在区间[0,1]和[1,3]上分别构造 3 次 Hermite 插值多项式 $H(x)$,并要求 $H(x)$ 在 $x = 1$ 处 2 阶导数连续,即

$$H''(1-0) = H''(1+0) \qquad ①$$

(1) 在区间[0,1]上构造 3 次 Hermite 插值多项式. 由

$$H(0) = 3, \qquad H(1) = c$$
$$H'(0) = 1, \qquad H'(1) = 2$$

构造差商表

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 3 & & & \\
 & & 1 & & \\
0 & 3 & & c-4 & \\
 & & c-3 & & 9-2c \\
1 & c & & 5-c & \\
 & & 2 & & \\
1 & c & & &
\end{array}$$

于是

$$H(x) = 3 + x + (c-4)x^2 + (9-2c)x^2(x-1), \qquad x \in [0,1] \quad ②$$

$$H''(x) = 2(c-4) + (9-2c)[2(x-1)+4x]$$

$$H''(1-0) = 2(c-4) + 4 \times (9-2c) = 28 - 6c \qquad ③(5')$$

(2) 在区间[1,3]上构造3次Hermite插值多项式.由

$H(1) = c, \qquad H(3) = -2$

$H'(1) = 2, \qquad H'(3) = 3$

构造差商表

$$\begin{array}{cccccc}
1 & c & & & \\
 & & 2 & & \\
1 & c & & -\frac{3}{2}-\frac{c}{4} & \\
 & & -1-\frac{c}{2} & & \frac{7}{4}+\frac{c}{4} \\
3 & -2 & & 2+\frac{c}{4} & \\
 & & 3 & & \\
3 & -2 & & &
\end{array}$$

于是

$$H(x) = c + 2(x-1) + \left(-\frac{3}{2}-\frac{c}{4}\right)(x-1)^2$$

$$+ \left(\frac{7}{4}+\frac{c}{4}\right)(x-1)^2(x-3), \qquad x \in [1,3] \quad ④$$

$$H''(x) = 2\left(-\frac{3}{2}-\frac{c}{4}\right) + \left(\frac{7}{4}+\frac{c}{4}\right)[2(x-3)+4(x-1)]$$

$$H''(1+0) = -3 - \frac{c}{2} + \left(\frac{7}{4}+\frac{c}{4}\right) \times (-4) = -10 - \frac{3}{2}c \qquad ⑤(5')$$

(3) 确定 c.

由①③⑤得

$$28 - 6c = -10 - \frac{3}{2}c$$

解得 $c = \frac{76}{9}$.

将此 c 代入到②和④,得到

$$H(x) = \begin{cases} 3 + x + \frac{40}{9}x^2 - \frac{71}{9}x^2(x-1), & x \in [0,1] \\ \frac{76}{9} + 2(x-1) - \frac{65}{18}(x-1)^2 + \frac{139}{36}(x-1)^2(x-3), & x \in (1,3] \end{cases}$$

(4′)

2002 年工科硕士研究生学位课程考试

1．解　(1) 4,3

(2) $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (9 + 3x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)})/12 \\ x_2^{(k+1)} = (6 + x_1^{(k+1)} - 4x_3^{(k)})/9 \\ x_3^{(k+1)} = (3 - 2x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)})/(-6) \end{cases}$

(3) $\dfrac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-a)\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)^2(x-b),\qquad \xi\in(a,b)$

(4) $-\dfrac{1}{6}h^2f''(\xi),\qquad h=\dfrac{b-a}{2},\qquad \xi\in(a,b)$

(5) $\sqrt{30}$,　　5,　　10

(6) $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x,\quad \sqrt{\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x},\quad \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|,\quad \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$

(7) $y_{i+1}=y_i+\dfrac{h}{2}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_i+hf(x_i,y_i))]$,　2

2．解　记 $x_1^*=\sqrt{2003}, x_2^*=\sqrt{2001}, x_1=44.7549, x_2=44.7325$,则

$$|e(x_1)|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-4},\qquad |e(x_2)|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-4}\qquad\qquad (2')$$

算法 ①:由

$$e\left(\frac{1}{2}(x_1-x_2)\right)=\frac{1}{2}e(x_1-x_2)=\frac{1}{2}[e(x_1)-e(x_2)]$$

得

$$\begin{aligned}\left|e\left(\frac{1}{2}(x_1-x_2)\right)\right| &= \frac{1}{2}|e(x_1)-e(x_2)| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(|e(x_1)|+\frac{1}{2}|e(x_2)|\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times10^{-4}+\frac{1}{2}\times10^{-4}\right)=\frac{1}{2}\times10^{-4}\end{aligned}$$

所以算法 ① 具有 3 位有效数字.　　(5′)

算法 ②:由

$$e\left(\frac{1}{x_1+x_2}\right)\approx-\frac{e(x_1+x_2)}{(x_1+x_2)^2}=-\frac{e(x_1)+e(x_2)}{(x_1+x_2)^2}$$

得

$$\begin{aligned}\left|e\left(\frac{1}{x_1+x_2}\right)\right| &\approx \frac{|e(x_1)+e(x_2)|}{(x_1+x_2)^2}\leqslant\frac{|e(x_1)|+|e(x_2)|}{(x_1+x_2)^2} \\ &\leqslant \frac{\frac{1}{2}\times10^{-4}+\frac{1}{2}\times10^{-4}}{(44.7549+44.7325)^2}\end{aligned}$$

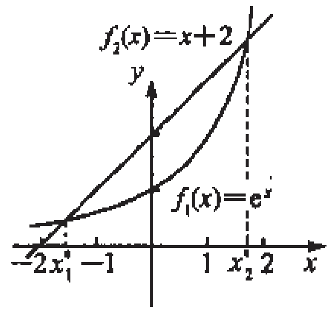
$$= \frac{10^{-4}}{89.4874^2} = 1.2488 \times 10^{-8}$$

$$= 0.12488 \times 10^{-7} < \frac{1}{2} \times 10^{-7} \qquad (5')$$

所以算法 ② 具有 6 位有效数字.

3. 解 (1) $e^x = x + 2$,令 $f_1(x) = e^x$,$f_2(x) = x + 2$. 作 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的图像知方程 ① 存在两个根

$$x_1^* \in (-2, -1), \qquad x_2^* \in (1,2) \qquad (2')$$



(2) 改写方程 ① 为

$$x = e^x - 2$$

构造迭代格式

$$x_{k+1} = e^{x_k} - 2, \qquad k = 0,1,2,\cdots \qquad (2')$$

取 $x_0 = -1.5$,计算得

$x_1 = -1.77687$, $x_2 = -1.83083$

$x_3 = -1.83972$, $x_4 = -1.84114$, $x_5 = -1.84136$

$\therefore x_1^* = -1.841$ (3′)

(3) 改写方程 ① 为

$$x = \ln(x + 2)$$

构造迭代格式

$$x_{k+1} = \ln(x_k + 2), \qquad k = 0,1,2,\cdots \qquad (2')$$

取 $x_0 = 1.5$,计算得

$x_1 = 1.25276$, $x_2 = 1.17950$, $x_3 = 1.15672$

$x_4 = 1.14953$, $x_5 = 1.14725$, $x_6 = 1.14653$

$x_7 = 1.14630$

$\therefore x_2^* = 1.146$ (3′)

4. 解

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 12 & -3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_1} \begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - \frac{1}{4}r_1]{r_2 - \frac{1}{12}r_1} \begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & \frac{11}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

(5′)

$$\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{11}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - \frac{1}{11} r_2} \begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{11}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & \frac{8}{11} & \frac{12}{11} \end{bmatrix} \qquad (3')$$

等价三角方程组为

$$\begin{cases} 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 9 \\ \frac{11}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{7}{4} \\ \frac{8}{11}x_3 = \frac{12}{11} \end{cases}$$

回代得 $x_3 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{1}{2}$. (4′)

5. 解 $f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \qquad \xi \in (\min\{x,0\}, \max\{x,1\})$

(4′)

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2!}{(x+1)^3}, \qquad \cdots, \qquad f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$$

当 $x \in [0,1]$ 时，$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant n!$; (3′)

当 $x \in [0,1]$ 时，$|x - x_i| \leqslant 1, i = 0,1,2,\cdots,n$. (1′)

于是当 $x \in [0,1]$ 时，有

$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

因而

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - p_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - p_n(x)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \qquad (4')$$

6. 解 (1) 当 $f(x) = 1$ 时，左 $= \int_0^1 1\mathrm{d}x = 1$，右 $= A + B$;

当 $f(x) = x$ 时，左 $= \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$，右 $= Ax_0 + B$;

当 $f(x) = x^2$ 时，左 $= \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$，右 $= Ax_0^2 + B$.

要使所给求积公式至少具有 2 次代数精度，充分必要条件为 A、B 和 x_0 满足

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ Ax_0 + B = \dfrac{1}{2} \\ Ax_0^2 + B = \dfrac{1}{3} \end{cases} \tag{3'}$$

解以上方程组得

$$A = \frac{3}{4}, B = \frac{1}{4}, x_0 = \frac{1}{3} \tag{2'}$$

代入 ① 得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}f(1) \qquad ②(1')$$

当 $f(x) = x^3$ 时，左 $= \int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$，右 $= \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{4} = \frac{1}{36} + \frac{1}{4} \neq$ 左，所以求积公式 ② 具有 2 次代数精度.

综上得到当 $A = \frac{3}{4}, B = \frac{1}{4}, x_0 = \frac{1}{3}$ 时，求积公式 ① 具有最高代数精度 2.

(2′)

(2) 作 2 次多项式 $H(x)$ 使其满足

$$H\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right), \quad H'\left(\frac{1}{3}\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right), \quad H(1) = f(1)$$

则

$$f(x) - H(x) = \frac{1}{3!}f'''(\xi)\left(x - \frac{1}{3}\right)^2(x - 1),$$

$$\xi \in \left(\min\left\{\frac{1}{3}, x\right\}, \max\{1, x\}\right)$$

且

$$\int_0^1 H(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{4}H\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}H(1) = \frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}f(1) \tag{4'}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \left[\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}f(1)\right] \\
&= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 H(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 [f(x) - H(x)]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{6}f'''(\xi)\left(x - \frac{1}{3}\right)^2(x - 1)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} f'''(\eta) \int_0^1 \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 (x-1) \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{216} f'''(\eta), \qquad \eta \in (0,1) \qquad (4')$$

7. **解**　局部截断误差为

$$R_{i+1} = y(x_{i+1}) - \{y(x_{i-2}) + a[y(x_i) - y(x_{i-1})] + bh[f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))]\}$$

$$= y(x_{i+1}) - y(x_{i-2}) - ay(x_i) + ay(x_{i-1}) - bhy'(x_i) - bhy'(x_{i-1})$$

$$= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_i) + \frac{1}{6}h^3 y'''(x_i) + \frac{1}{24}h^4 y^{(4)}(x_i) + \frac{1}{120}h^5 y^{(5)}(x_i) + O(h^6) - \Big[y(x_i) - 2hy'(x_i) + \frac{1}{2}(-2h)^2 y''(x_i) + \frac{1}{6}(-2h)^3 y'''(x_i) + \frac{1}{24}(-2h)^4 y^{(4)}(x_i) + \frac{1}{120}(-2h)^5 y^{(5)}(x_i) + O(h^6)\Big] - ay(x_i) + a\Big[y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{1}{2}(-h)^2 y''(x_i) + \frac{1}{6}(-h)^3 y'''(x_i) + \frac{1}{24}(-h)^4 y^{(4)}(x_i) + \frac{1}{120}(-h)^5 y^{(5)}(x_i) + O(h^6)\Big] - bhy'(x_i) - bh\Big[y'(x_i) - hy''(x_i) + \frac{1}{2}(-h)^2 y'''(x_i) + \frac{1}{6}(-h)^3 y^{(4)}(x_i) + \frac{1}{24}(-h)^4 y^{(5)}(x_i) + O(h^5)\Big]$$

$$= (3 - a - 2b)hy'(x_i) - \frac{1}{2}(3 - a - 2b)h^2 y''(x_i) + \frac{1}{6}(9 - a - 3b)h^3 y'''(x_i) + \frac{1}{24}(-15 + a + 4b)h^4 y^{(4)}(x_i) + \frac{1}{120}(33 - a - 5b)h^5 y^{(5)}(x_i) + O(h^6) \qquad ②(8')$$

要使所给求解公式为 3 阶的，当且仅当 a 和 b 满足

$$\begin{cases} 3 - a - 2b = 0 \\ 9 - a - 3b = 0 \end{cases}$$

解得

$$a = -9, b = 6 \qquad (2')$$

将此代人 ② 得

$$R_{i+1} = \frac{1}{10} h^5 y^{(5)}(x_i) + O(h^6) \qquad ③$$

综上取 $a = -9, b = 6$ 所得公式精度最高，局部截断误差为 ③.　　(2′)

2003 年工科硕士研究生学位课程考试

1．解 (1) $I_n=\int_0^1 x^n e^{2x}dx=\int_0^1 x^n d\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)$

$$=\frac{1}{2}x^n e^{2x}\Big|_{x=0}^{1}-\int_0^1\frac{1}{2}e^{2x}\cdot nx^{n-1}dx$$

$$=\frac{1}{2}(e^2-nI_{n-1}),\qquad n=1,2,3,\cdots,20 \qquad (3')$$

$$I_0=\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{x=0}^{1}=\frac{1}{2}(e^2-1) \qquad (1')$$

(2)
$$I_n=\frac{1}{2}(e^2-nI_{n-1}),\qquad n=N,N-1,\cdots,2$$

$$I_N=\int_0^1 x^N e^{2x}dx=e^{2\xi}\int_0^1 x^N dx=\frac{1}{N+1}e^{2\xi},\qquad 0<\xi<1$$

现取 $N\geqslant 20$，构造如下递推公式

$$\begin{cases}\tilde{I}_{n-1}=\frac{1}{n}(e^2-2\tilde{I}_n), & n=N,N-1,\cdots,2,1\\ \tilde{I}_N=\frac{1}{2}(e^2+1)\cdot\frac{1}{N+1}\end{cases} \qquad ①(4')$$

则有

$$|I_N-\tilde{I}_N|\leqslant\frac{1}{2}(e^2-1)\cdot\frac{1}{N+1}$$

$$|I_{n-1}-\tilde{I}_{n-1}|=\left(-\frac{2}{n}\right)(I_n-\tilde{I}_n),\qquad n=N,N-1,\cdots,2,1$$

由此可得

$$|I_k-\tilde{I}_k|\leqslant|I_N-\tilde{I}_N|,\qquad k=0,1,2,\cdots,N$$

因而递推公式 ① 稳定. (4′)

2．解 方法 1：

(1) 记 $\varphi(x)=cx^{1-n}$，则 $\varphi'(x)=c(1-n)x^{-n}$，$\varphi'(x^*)=1-n$.

a) 当 $n\geqslant 3$ 时，$|\varphi'(x^*)|=n-1\geqslant 2$，迭代格式发散. (4′)

b) 当 $n=2$ 时，

$$x_{k+1}=\frac{c}{x_k},\qquad k=0,1,2,\cdots$$

设 $x_0\neq x^*$. 则有 $x_1=\frac{c}{x_0}\neq x^*$ 且 $x_kx_{k+1}=c$，$k=0,1,2,\cdots$，

$$x_{k+1}-\sqrt{c}=\frac{c}{x_k}-\sqrt{c}=-\frac{\sqrt{c}}{x_k}(x_k-\sqrt{c})$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{c}}{x_k}\right)\left(-\frac{\sqrt{c}}{x_{k-1}}\right)(x_{k-1}-\sqrt{c})$$
$$= x_{k-1}-\sqrt{c}, \qquad k=1,2,\cdots$$

即

$$x_{k+1}=x_{k-1}, \qquad k=0,1,2,\cdots$$

于是

$$x_{2m}\equiv x_0, \qquad x_{2m+1}\equiv x_1, \qquad m=0,1,2,\cdots$$

迭代格式不收敛. (4′)

(2) 考虑方程 $f(x)\equiv x^n-c=0$,则 x^* 为其单根.用 Newton 迭代格式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=\left(1-\frac{1}{n}\right)x_k+\frac{c}{n}x_k^{1-n}, \qquad k=0,1,2,\cdots \quad ②$$

求解.由于 Newton 迭代格式对单根是 2 阶局部收敛的,所以迭代格式 ② 当 x_0 比较靠近 x^* 时是收敛的,且收敛阶数为 2. (4′)

方法 2:

(1) 由迭代格式

$$x_{k+1}=cx_k^{1-n}, \qquad k=0,1,2,\cdots \quad ①$$

递推可得

$$x_{k+1}=cx_k^{1-n}=c\left(cx_{k-1}^{1-n}\right)^{1-n}=c^{1+(1-n)}x_{k-1}^{(1-n)^2}$$
$$=c^{1+(1-n)}\left(cx_{k-2}^{1-n}\right)^{(1-n)^2}=c^{1+(1-n)+(1-n)^2}\cdot x_{k-2}^{(1-n)^3}$$
$$=\cdots$$
$$=c^{1+(1-n)+(1-n)^2+\cdots+(1-n)^k}\cdot x_0^{(1-n)^{k+1}}$$
$$=c^{\frac{1}{n}[1-(1-n)^{k+1}]}\cdot x_0^{(1-n)^{k+1}}$$
$$=x^*\cdot\left(\frac{x_0}{x^*}\right)^{(1-n)^{k+1}}$$

因而

$$x_k=x^*\cdot\left(\frac{x_0}{x^*}\right)^{(1-n)^k}, \quad k=0,1,2,\cdots$$

设 $x_0\neq x^*$.由于

$$\frac{x_0}{x^*}^{(1-n)^k}\neq 1 \quad (k\to\infty)$$

所以

$x_k\neq x_0 \quad (k\to\infty)$

所以不能用迭代格式 ① 求 x^*.

(2) 由 $x^n = c$ 得 $x^{2n} = cx^n$. 因而 $x = (c^{\frac{1}{n}}x)^{\frac{1}{2}}$. 构造如下递推格式

$$x_{k+1} = (c^{\frac{1}{n}}x_k)^{\frac{1}{2}}, \qquad k = 0,1,2,\cdots \tag{②}$$

递推可得

$$x_k = x^* \cdot \left(\frac{x_0}{x^*}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^k}, \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

当 x_0 为任意非负值时, 上式的极限均为 x^*, 即可用迭代格式 ② 求 x^*, 且该迭代格式是收敛的. (4′)

3. 解 $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \\ -5 & -2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{s_3=-5 \\ r_3 \leftrightarrow r_1}]{\substack{s_1=2 \\ s_2=4}} \begin{bmatrix} -5 & -2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (2′)

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -5 & -2 & 3 & 3 \\ -\frac{4}{5} & 5 & 3 & 5 \\ -\frac{2}{5} & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[s_3=\frac{6}{5}]{s_2=\frac{17}{5}} \begin{bmatrix} -5 & -2 & 3 & 3 \\ -\frac{4}{5} & \frac{17}{5} & \frac{27}{5} & \frac{37}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{6}{17} & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{5′}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -5 & -2 & 3 & 3 \\ -\frac{4}{5} & \frac{17}{5} & \frac{27}{5} & \frac{37}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{6}{17} & \frac{5}{17} & \frac{10}{17} \end{bmatrix} \tag{2′}$$

等价三角方程组为

$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ \frac{17}{5}x_2 + \frac{27}{5}x_3 = \frac{37}{5} \\ \frac{5}{17}x_3 = \frac{10}{17} \end{cases}$$

回代得 $x_3 = 2, x_2 = -1, x_1 = 1$. (3′)

4. 解 (1) Gauss-Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (d_1 - cx_2^{(k)})/a \\ x_2^{(k+1)} = (d_2 - cx_1^{(k+1)} - ax_3^{(k)})/b \\ x_3^{(k+1)} = (d_3 - ax_2^{(k+1)})/c \end{cases} \tag{6′}$$

(2) Gauss-Seidel 迭代矩阵 G 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} a\lambda & c & 0 \\ c\lambda & b\lambda & a \\ 0 & a\lambda & c\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3'}$$

$$\lambda^2(abc\lambda - a^3 - c^3) = 0$$

3 个根为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \dfrac{a^3 + c^3}{abc}$,

$$\rho(\boldsymbol{G}) = \left|\frac{a^3 + c^3}{abc}\right|$$

$\therefore$ Gauss-Seidel 迭代格式收敛的充分必要条件为 $|a^3 + c^3| < |abc|$.　　(3′)

5. **解**　方法 1:

$$H''(x) = f''(a)\frac{x-b}{a-b} + f''(b)\frac{x-a}{b-a} \tag{3'}$$

$$H'(x) = \frac{1}{2}f''(a)\frac{(x-b)^2}{a-b} + \frac{1}{2}\cdot f''(b)\frac{(x-a)^2}{b-a} + \bar{c}$$

$$H(x) = \frac{1}{6}f''(a)\frac{(x-b)^3}{a-b} + \frac{1}{6}f''(b)\frac{(x-a)^3}{b-a} + c(x-b) + d(x-a)$$

(3′)

由

$$H(a) = \frac{1}{6}f''(a)(a-b)^2 + c(a-b) = f(a)$$

得

$$c = \frac{f(a) - \frac{1}{6}f''(a)(a-b)^2}{a-b} \tag{3'}$$

由

$$H(b) = \frac{1}{6}f''(b)(b-a)^2 + d(b-a) = f(b)$$

得

$$d = \frac{f(b) - \frac{1}{6}f''(a)(b-a)^2}{b-a} \tag{3'}$$

因而

$$\begin{aligned} H(x) = {} & \frac{1}{6}f''(a)\frac{(x-b)^3}{a-b} + \frac{1}{6}f''(b)\frac{(x-a)^3}{b-a} \\ & + \left[f(a) - \frac{1}{6}f''(a)(a-b)^2\right]\frac{x-b}{a-b} \\ & + \left[f(b) - \frac{1}{6}f''(a)(b-a)^2\right]\frac{x-a}{b-a} \end{aligned} \tag{1'}$$

方法 2:

设 $H'(a) = m$. 作 3 次多项式 $H(x)$ 满足

$$H(a) = f(a), \quad H'(a) = m, \quad H''(a) = f''(a), \quad H(b) = f(b) \tag{2'}$$

构造差商表如下:

$$\begin{array}{cccccc}
a & f(a) & & & \\
 & & m & & \\
a & f(a) & & \frac{1}{2}f''(a) & \\
 & & m & & f[a,a,b,b] \\
a & f(a) & & f[a,a,b] & \\
 & & f[a,b] & & \\
a & f(b) & & &
\end{array}$$

$$f[a,a,b] = \frac{f[a,b] - m}{b - a}$$

$$f[a,a,h,b] = \frac{f[a,a,b] - \frac{1}{2}f''(a)}{b - a} = \frac{f[a,b] - m - \frac{1}{2}(b - a)f''(a)}{(b - a)^2}$$

$$H(x) = f(a) + m(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + \frac{f[a,b] - m - \frac{1}{2}(b - a)f''(a)}{(b - a)^2}(x - a)^3 \tag{5'}$$ ①

$$H''(x) = f''(a) + 6 \cdot \frac{f[a,b] - m - \frac{1}{2}(b - a)f''(a)}{(b - a)^2}(x - a)$$

由 $H''(b) = f''(b)$, 得

$$f''(a) = \frac{6}{b - a}\left\{f[a,b] - m - \frac{1}{2}(b - a)f''(a)\right\} = f''(b)$$

解得

$$\frac{1}{(b - a)^2}\left\{f[a,b] - m - \frac{1}{2}(b - a)f''(a)\right\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{f''(b) - f''(a)}{b - a}$$

$$\begin{aligned} m &= f[a,b] - \frac{1}{2}(b - a)f''(a) - \frac{1}{6}(b - a)^2 \cdot \frac{f''(b) - f''(a)}{b - a} \\ &= f[a,b] - \frac{1}{6}(b - a)(2f''(a) + f''(b)) \end{aligned} \tag{4'}$$

代入 ① 得

$$H(x) = f(a) + \left\{f[a,b] - \frac{1}{6}(b - a)(2f''(a) + f''(b))\right\}(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{f''(b) - f''(a)}{b - a}(x - a)^3 \tag{2'}$$

易知上式满足题目所要求的条件,即为所要求的 3 次多项式.

方法 3:

作一次多项式 $p_1(x)$ 使得 $p_1(a) = f(a), p_1(b) = f(b)$,则有

$$p_1(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} \qquad (2')$$

$$[H(x) - p_1(x)]\big|_{x=a} = 0, \qquad [H(x) - p_1(x)]\big|_{x=b} = 0$$

故可设

$$H(x) - p_1(x) = [c_0(x-a) + c_1(x-b)](x-a)(x-b)$$

即

$$H(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} + [c_0(x-a) + c_1(x-b)](x-a)(x-b). \qquad ②(4')$$

对 $H(x)$ 求 2 阶导数,得

$$H''(x) = c_0[2(x-b) + 4(x-a)] + c_1[4(x-b) + 2(x-a)]$$

由插值条件 $H''(a) = f''(a)$ 和 $H''(b) = f''(b)$ 得

$$\begin{cases} 2(a-b)c_0 + 4(a-b)c_1 = f''(a) \\ 4(b-a)c_0 + 2(b-a)c_1 = f''(b) \end{cases}$$

解得

$$c_0 = \frac{1}{6(b-a)}[f''(a) + 2f''(b)]$$

$$c_1 = -\frac{1}{6(b-a)}[2f''(a) + f''(b)] \qquad (6')$$

将 c_0 和 c_1 代入 ②,得所求 3 次多项式为

$$H(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} + \frac{1}{6(b-a)}[(f''(a) + 2f''(b))(x-a) - (2f''(a) + f''(b))(x-b)]\cdot(x-a)(x-b) \qquad (1')$$

方法 4:

设 $f'(a) = m$.作 2 次多项式 $p_2(x)$ 使得 $p_2(a) = f(a), p_2'(a) = f'(a), p_2''(a) = f''(a)$,则

$$p_2(x) = f(a) + m(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 \qquad (3')$$

$$[H(x) - p_2(x)]\big|_{x=a} = 0, \qquad [H(x) - p_2(x)]'\big|_{x=a} = 0$$

$$[H(x) - p_2(x)]''\big|_{x=a} = 0$$

故可设

$$H(x) - p_2(x) = c_2(x-a)^3$$

即

$$H(x) = f(a) + m(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + c_2(x-a)^3 \qquad (3')$$

对 $H(x)$ 求 2 阶导数，得

$$H''(x) = f''(a) + 6c_2(x-a)$$

由插值条件 $H''(b) = f''(b)$，得

$$f''(a) + 6c_2(b-a) = f''(b)$$

解得

$$c_2 = \frac{1}{6(b-a)}[f''(b) - f''(a)]$$

于是

$$H(x) = f(a) + m(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6(b-a)}[f''(b) - f''(a)](x-a)^3 \qquad ③(3')$$

再由插值条件 $H(b) = f(b)$，得到

$$f(a) + m(b-a) + \frac{1}{2}f''(a)(b-a)^2 + \frac{1}{6(b-a)}[f''(b) - f''(a)](b-a)^3 = f(b)$$

解得

$$m = f[a,b] - \frac{b-a}{6}[2f''(a) + f''(b)] \qquad (3')$$

将 m 的值代入 ③，得所有 3 次多项式为

$$H(x) = f(a) + \left\{f[a,b] - \frac{b-a}{6}[2f''(a) + f''(b)]\right\}(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6(b-a)}[f''(b) - f''(a)](x-a)^3 \qquad (1')$$

方法 5：

(1) 设 $H'(a) = m, H'(b) = n$. 作 3 次多项式 $H(x)$ 满足

$$H(a) = f(a), \quad H'(a) = m, \quad H(b) = f(b), \quad H'(b) = n$$

则有

$$H(x) = H(a) + H[a,a](x-a) + H[a,a,b](x-a)^2 + H[a,a,b,b](x-a)^2(x-b)$$

其中

$$H(a) = f(a)$$
$$H[a,a] = m$$
$$H[a,a,b] = \frac{H[a,b] - H[a,a]}{b-a} = \frac{f[a,b] - m}{b-a}$$

$$H[a,b,b]=\frac{H[b,b]-H[a,b]}{b-a}=\frac{n-f[a,b]}{b-a}$$

$$H[a,a,b,b]=\frac{H[a,b,b]-H[a,a,b]}{b-a}=\frac{n-2f[a,b]+m}{(b-a)^2}$$

即

$$H(x)=f(a)+m(x-a)+\frac{f[a,b]-m}{b-a}(x-a)^2+\frac{n-2f[a,b]+m}{(b-a)^2}(x-a)^2(x-b) \qquad ④(6')$$

(2) 选取 m 和 n 使得

$$H''(a)=f''(a),\qquad H''(b)=f''(b) \qquad ⑤$$

对 $H(x)$ 求导得

$$H''(x)=2\times\frac{f[a,b]-m}{b-a}+\frac{n-2f[a,b]+m}{(b-a)^2}\times[2(x-b)+4(x-a)]$$

由⑤得

$$\begin{cases}2m+n=3f[a,b]-\dfrac{1}{2}f''(a)(b-a)\\ m+2n=3f[a,b]+\dfrac{1}{2}f''(b)(b-a)\end{cases}$$

解得

$$m=f[a,b]-\frac{1}{6}(b-a)[2f''(a)+f''(b)]$$

$$n=f[a,b]+\frac{1}{6}(b-a)[f''(a)+2f''(b)] \qquad (6')$$

将 m 和 n 代入④,得所求 3 次多项式为

$$H(x)=f(a)+\left[f[a,b]-\frac{b-a}{6}(2f''(a)+f''(b))\right](x-a)+\frac{1}{6}[2f''(a)+f''(b)](x-a)^2+\frac{1}{6(b-a)}[f''(b)-f''(a)](x-a)^2(x-b) \qquad (1')$$

6. **解** 题转化为求 $f(x)=x^3$ 在[0,3]上的 1 次最佳一致逼近多项式

$$p_1(x)=a+bx \qquad (2')$$

由于 $f''(x)=6x$,当 $x\in(0,3)$ 时 $f''(x)>0$,所以 $f(x)-p_1(x)$ 恰有 3 个交错偏差点 $x_0=0,x_1\in(0,3),x_2=3$. 于是

$$[f(x)-p_1(x)]\big|_{x=0}=-[f(x)-p_1(x)]\big|_{x=x_1}$$

$$= [f(x) - p_1(x)]\big|_{x=3}$$
$$[f'(x) - p_1'(x)]\big|_{x=x_1} = 0 \qquad (5')$$

即

$$-a = -[x_1^3 - (a + bx_1)] = 27 - (a + 3b)$$
$$3x_1^2 - b = 0$$

解得 $b = 9, x_1 = \sqrt{3}, a = -3\sqrt{3}$. (4′)

综上,当 $a = -3\sqrt{3}, b = 9$ 时,$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 3}|x^3 - (a + bx)|$ 达到最小值,最小值为 $3\sqrt{3}$. (2′)

7. 解 (1) 当 $f(x) = 1$ 时,左 $= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$,右 $= a + b$;

当 $f(x) = x$ 时,左 $= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}$,右 $= \frac{1}{5}a + b$.

要使求积公式至少具有 1 次代数精度,当且仅当

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ \frac{1}{5}a + b = \frac{2}{3} \end{cases}$$

解得 $a = \frac{5}{3}, b = \frac{1}{3}$.

于是得到求积公式

$$I(f) \approx \frac{5}{3}f\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{3}f(1) \qquad ①(4')$$

当 $f(x) = x^2$ 时,左 $= \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{5}$,右 $= \frac{5}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{3} \times 1^2 = \frac{2}{5}$,左 $=$ 右;

当 $f(x) = x^3$ 时,左 $= \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{7}$,右 $= \frac{5}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{3} \times 1^3 = \frac{26}{75}$,左 $\neq$ 右.

所以当 $a = \frac{5}{3}, b = \frac{1}{3}$,所得求积公式 ① 具有最高代数精度,最高代数精度为 2. (3′)

(2) 作 2 次多项式 $H(x)$ 满足 $H\left(\frac{1}{5}\right) = f\left(\frac{1}{5}\right), H'\left(\frac{1}{5}\right) = f'\left(\frac{1}{5}\right), H(1) = f(1)$,则有

$$f(x) - H(x) = \frac{1}{3!}f'''(\xi)\left(x - \frac{1}{5}\right)^2(x - 1)$$

$$\int_0^1 \frac{H(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{5}{3}H\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}H(1) = \frac{5}{3}f\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}f(1) \qquad (3')$$

于是求积公式 ① 的截断误差为

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x - \left[\frac{5}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f(1)\right] \\
&= \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{H(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 [f(x) - H(x)]\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{6}f'''(\xi)\left(x-\frac{1}{5}\right)^2(x-1)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{6}f'''(\eta)\int_0^1\left(x-\frac{1}{5}\right)^2(x-1)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{3}f'''(\eta)\int_0^1\left(t^2-\frac{1}{5}\right)^2(t^2-1)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{16}{1575}f'''(\eta), \qquad \eta\in(0,1) \qquad (3')
\end{aligned}$$

8. **解** (1)

$$\begin{aligned}
R_{i+1} &= y(x_{i+1}) - \left\{y(x_i)+\frac{h}{4}\left[f(x_i,y(x_i))\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+3f\left(x_i+\frac{2}{3}h, y(x_i)+\frac{2}{3}hf(x_i,y(x_i))\right)\right]\right\} \qquad (2') \\
&= y(x_i+h)-y(x_i)-\frac{h}{4}y'(x_i) \\
&\quad -\frac{3}{4}hf\left(x_i+\frac{2}{3}h, y(x_i)+\frac{2}{3}hy'(x_i)\right) \\
&= y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)+\frac{1}{6}h^3y'''(x_i)+O(h^4)-y(x_i) \\
&\quad -\frac{1}{4}hy'(x_i)-\frac{3}{4}h\left[f(x_i,y(x_i))+\frac{2}{3}h\frac{\partial f(x_i,y(x_i))}{\partial x}\right. \\
&\quad +\frac{2}{3}hy'(x_i)\frac{\partial f(x_i,y(x_i))}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}h\right)^2\frac{\partial^2 f(x_i,y(x_i))}{\partial x^2}\right. \\
&\quad +2\times\left(\frac{2}{3}h\right)\times\frac{2}{3}hy'(x_i)\frac{\partial^2 f(x_i,y(x_i))}{\partial x\partial y} \\
&\quad \left.\left.+\left(\frac{2}{3}hy'(x_i)\right)^2\frac{\partial^2 f(x_i,y(x_i))}{\partial y^2}\right)+O(h^3)\right] \qquad (3')
\end{aligned}$$

利用

$$y''(x) = \frac{\partial f(x,y(x))}{\partial x}+y'(x)\frac{\partial f(x,y(x))}{\partial y}$$

$$y'''(x)=\frac{\partial^2 f(x,y(x))}{\partial x^2}+2y'(x)\frac{\partial^2 f(x,y(x))}{\partial x\partial y}$$
$$+(y'(x))^2\frac{\partial^2 f(x,y(x))}{\partial y^2}+y''(x)\frac{\partial f(x,y(x))}{\partial y}$$

得到

$$R_{i+1}=\frac{1}{6}h^3y''(x_i)\frac{\partial f(x_i,y(x_i))}{\partial y}+O(h^4) \qquad (2')$$

所给公式为 2 阶公式.

(2) $\begin{cases} y'=-y \\ y(0)=1 \end{cases}$ 的精确解为 $y(x)=e^{-x}$. $\qquad (1')$

注意到 $f(x,y)=-y$, 由

$$\begin{cases} y_{i+1}=y_i+\frac{h}{4}\left[f(x_i,y_i)+3f\left(x_i+\frac{2}{3}h,y_i+\frac{2}{3}hf(x_i,y_i)\right)\right] \\ \qquad =\left(1-h+\frac{h^2}{2}\right)y_i, \qquad 0\leqslant i\leqslant n-1 \\ y_0=1 \end{cases}$$

递推得

$$y_n=\left(1-h+\frac{h^2}{2}\right)^n=\left(1-h+\frac{h^2}{2}\right)^{\frac{1}{h}} \qquad (2')$$

记

$$g(h)=\frac{y(1)-y_n}{h^2}$$

则

$$g(h)=\frac{e^{-1}-\left(1-h+\frac{h^2}{2}\right)^{\frac{1}{h}}}{h^2}$$
$$=\frac{e^{-1}-e^{\frac{1}{h}\ln\left(1-h+\frac{h^2}{2}\right)}}{h^2}$$
$$=\frac{1}{h^2}\left\{e^{-1}-e^{\frac{1}{h}\left[\left(-h+\frac{h^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(-h+\frac{h^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(-h+\frac{h^2}{2}\right)^3+O(h^4)\right]}\right\}$$
$$=\frac{1}{h^2}\left[e^{-1}-e^{\frac{1}{h}\left(-h+\frac{1}{6}h^3+O(h^4)\right)}\right]$$
$$=\frac{1}{h^2}\left[e^{-1}-e^{-1+\frac{1}{6}h^2+O(h^3)}\right]$$
$$=\frac{1}{h^2}e^{-1}\left[1-e^{\frac{1}{6}h^2+O(h^3)}\right]$$
$$=\frac{1}{h^2}e^{-1}\left[1-\left(1+\frac{1}{6}h^2+O(h^3)\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{6e} + O(h)$$

因而

$$\lim_{h\to 0} g(h) = -\frac{1}{6e} \qquad (3')$$

2001 年工程硕士研究生学位课程考试

1. 解

$$x = 80.128, \qquad y = 80.115$$

$$|e(x)| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-3}, \qquad |e(y)| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \approx \frac{1}{2}(80.128^2 + 80.115^2) = 6419.4548045$$

$$\frac{1}{2}(x^2 - y^2) \approx \frac{1}{2}(80.128^2 - 80.115^2) = 1.0415795 \qquad (2')$$

算法 ①:由

$$e\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) \approx \frac{1}{2}e(x^2 + y^2) \approx \frac{1}{2}[e(x^2) + e(y^2)]$$
$$\approx xe(x) + ye(y)$$

知

$$\left|e\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)\right| \approx |xe(x) + ye(y)| \leqslant x|e(x)| + y|e(y)|$$
$$\leqslant 80.128 \times \frac{1}{2}\times 10^{-3} + 80.115 \times \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$
$$= 160.243 \times \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\times 10^{0}$$

∴ 算法 ① 至少具有 4 位有效数字. (3′)

算法 ②:由

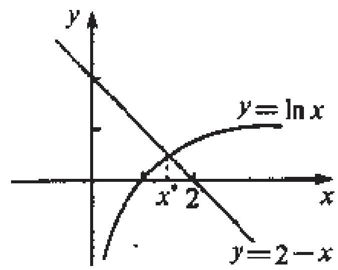
$$e\left(\frac{1}{2}(x^2 - y^2)\right) \approx \frac{1}{2}(e(x^2 - y^2)) \approx xe(x) - ye(y)$$

知

$$\left|e\left(\frac{1}{2}(x^2 - y^2)\right)\right| \approx |xe(x) - ye(y)| \leqslant x|e(x)| + y|e(y)|$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\times 10^{0}$$

∴ 算法 ② 至少具有 1 位有效数字. (3′)

2. 解 (1) 作 $y=2-x$ 和 $y=\ln x$ 的图像可知所给方程有惟一根 $x^*\in(1,2)$. (2′)



(2) 迭代格式

$$\begin{cases} x_{k+1}=2-\ln x_k, & k=0,1,2,\cdots \\ x_0=1.5 \end{cases} \quad (2')$$

计算得

k	0	1	2	3	4	5
x_k	1.5	1.594535	1.533418	1.572501	1.547333	1.563467

k	6	7	8	9	10	11
x_k	1.553094	1.559751	1.555474	1.558220	1.556456	1.557589

k	12	13	14
x_k	1.556861	1.557328	1.557028

$\therefore x^*\approx 1.557$ (3′)

(3) 迭代格式

$$\begin{cases} x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k+\ln x_k-2}{1+\dfrac{1}{x_k}}, & k=0,1,\cdots \\ x_0=1.5 \end{cases} \quad (2')$$

计算得

k	0	1	2
x_k	1.5	1.556721	1.557146

$\therefore x^*\approx 1.557$ (3′)

3. 解 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 8 \\ 12 & -3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_1} \begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 9 \\ 4 & 0 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-\frac{1}{4}r_1]{r_2-\frac{1}{3}r_1} \begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad (5')$$

$$\xrightarrow{r_3-\frac{4}{7}r_2}\begin{bmatrix}12 & -3 & 3 & 9\\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4}\\ 0 & 0 & 4 & 4\end{bmatrix} \qquad (3')$$

等价三角方程组为

$$\begin{cases}12x_1-3x_2+3x_3=9\\ \frac{7}{4}x_2-\frac{7}{4}x_3=\frac{7}{4}\\ 4x_3=4\end{cases} \qquad (3')$$

回代得 $x_3=1,x_2=2,x_1=1$.

4. **解** (1) Gauss-Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=(4+3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)})/5\\ x_2^{(k+1)}=(1-x_1^{(k+1)}-8x_3^{(k)})/(-1)\\ x_3^{(k+1)}=(-7-2x_1^{(k+1)}+3x_2^{(k+1)})/20\end{cases} \qquad (6')$$

(2) 迭代矩阵 G 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix}5\lambda & -3 & 2\\ \lambda & -\lambda & 8\\ 2\lambda & -3\lambda & 20\lambda\end{vmatrix}=0$$

按第一列展开,得

$$\lambda[5(-20\lambda^2+24\lambda)+3(20\lambda-16)+2(-3\lambda+2\lambda)]=0$$

$$\lambda[-100\lambda^2+178\lambda-48]=0$$

解得

$$\lambda_1=0,\lambda_2=\frac{8.9+\sqrt{8.9^2-48}}{10},\lambda_3=\frac{8.9-\sqrt{8.9^2-48}}{10}$$

$\because \rho(G)=\lambda_2>1,\therefore$ 迭代格式发散. (3')

5. **解** (1) 由题意知 $x_0=0,x_1=2,x_2=3,x_3=5$.

$$f(x_0)=1,f(x_1)=-3,f(x_2)=-4,f(x_3)=2$$

$$\begin{aligned}L_3(x)=&f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}\\ &+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\\ &+f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= 1\times\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)} \\
&\quad + (-3)\times\frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)} \\
&\quad + (-4)\times\frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)} \\
&\quad + 2\times\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)} \\
&= -\frac{1}{30}(x-2)(x-3)(x-5)-\frac{1}{2}(x-0)(x-3)(x-5) \\
&\quad + \frac{2}{3}(x-0)(x-2)(x-5)+\frac{1}{15}(x-0)(x-2)(x-3)
\end{aligned}
$$

(6′)

(2) 构造差商表

$$
\begin{array}{ccccc}
0 & 1 & & & \\
 & & -2 & & \\
2 & -3 & & \frac{1}{3} & \\
 & & -1 & & \frac{1}{5} \\
3 & -4 & & \frac{4}{3} & \\
 & & 3 & & \\
5 & 2 & & &
\end{array}
$$

$$N_3(x) = 1-2(x-0)+\frac{1}{3}(x-0)(x-2)+\frac{1}{5}(x-0)(x-2)(x-3)$$

(6′)

6. 解

$$x_1=0, x_2=2, x_3=3, x_4=5$$
$$y_1=4, y_2=1, y_3=1, y_4=9$$
$$\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x, \varphi_2(x)=x^2$$

法方程组为

$$
\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_0,\varphi_2)\\(\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2)\\(\varphi_2,\varphi_0) & (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(y,\varphi_0)\\(y,\varphi_1)\\(y,\varphi_2)\end{bmatrix} \qquad ①(4')
$$

将

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=1}^{4}[\varphi_0(x_i)]^2=4, \qquad (\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{4}x_i=10$$
$$(\varphi_0,\varphi_2)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2=38, \qquad (\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2=38$$
$$(\varphi_1,\varphi_2)=\sum_{i=1}^{4}x_i^3=160, \qquad (\varphi_2,\varphi_2)=\sum_{i=1}^{4}x_i^4=722$$

$$(y,\varphi_0)=\sum_{i=1}^{4}y_i=15,\qquad (y,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{4}x_iy_i=50$$

$$(y,\varphi_2)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2y_i=238$$

代入 ① 得

$$\begin{bmatrix}4&10&38\\10&38&160\\38&160&722\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\50\\238\end{bmatrix}\qquad(3')$$

用列主元 Gauss 消去法求解上述方程组

$$\begin{bmatrix}4&10&38&15\\10&38&160&50\\38&160&722&238\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_1}\begin{bmatrix}38&160&722&238\\10&38&160&50\\4&10&38&15\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-\frac{4}{38}r_1]{r_2-\frac{10}{38}r_1}\begin{bmatrix}38&160&722&238\\0&-4.1053&-30&-12.6316\\0&-6.8421&-38&-10.0526\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}38&160&722&238\\0&-6.8421&-38&-10.0526\\0&-4.1053&-30&-12.6316\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-\frac{4.1053}{6.8421}r_2}\begin{bmatrix}38&160&722&238\\0&-6.8421&-38&-10.0526\\0&0&-7.1998&-6.59998\end{bmatrix}$$

解得 $c_2=0.91669, c_1=-3.62198, c_0=4.09649$.

∴ 二次拟合多项式为 $4.09649-3.62198x+0.91669x^2$. (3′)

7. 解 $$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{1}{2}[f(x_0)+f(x_1)]$$

不妨假设 $x_0\leqslant x_1$.

当 $f(x)=1$ 时,左 $=\int_0^1 1\mathrm{d}x=1$,右 $=\frac{1}{2}(1+1)=1$;

当 $f(x)=x$ 时,左 $=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$,右 $=\frac{1}{2}(x_0+x_1)$;

当 $f(x)=x^2$ 时,左 $=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$,右 $=\frac{1}{2}(x_0^2+x_1^2)$.

要使求积公式至少具有 2 次代数精度,当且仅当 x_0 和 x_1 满足

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(x_0+x_1)=\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}(x_0^2+x_1^2)=\frac{1}{3}\end{cases}\qquad(6')$$

解得 $x_0=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right),x_1=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

得到求积公式

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right)+f\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right)\right] \qquad (2')$$

当 $f(x)=x^3$ 时,左 $=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$,

右 $=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right]^3+\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right]^3\right\}=\frac{1}{4}$,左 = 右;

当 $f(x)=x^4$ 时,左 $=\int_0^1 x^4\mathrm{d}x=\frac{1}{5}$,

右 $=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right]^4+\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right]^4\right\}=\frac{7}{36}$,左 $\neq$ 右.

综上,当取 $x_0=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right),x_1=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$时所得公式的代数精度达到最高次数 3. (4′)

8. 解 (1)

$$T_n(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})] \qquad (3')$$

$$S_n(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{6}\left[f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})\right]$$

其中 $x_{i+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(x_i+x_{i+1})$. (3′)

(2)

$$\begin{aligned}T_{2n}(f)&=\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\frac{h}{4}[f(x_i)+f(x_{i+\frac{1}{2}})]+\frac{h}{4}[f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})]\right\}\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{4}\left[f(x_i)+2f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_n(f)&=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{6}\left[f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})\right]\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\frac{4}{3}\times\frac{h}{4}\left[f(x_i)+2f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})\right]\right.\\&\qquad\left.-\frac{1}{3}\times\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]\right\}\\&=\frac{4}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{4}\left[f(x_i)+2f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})\right]\\&\qquad-\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]\\&=\frac{4}{3}T_{2n}(f)-\frac{1}{3}T_n(f)\end{aligned} \qquad (6')$$

9．解　局部截断误差

$$R_{i+1}=y(x_{i+1})-y(x_i)$$

$$-\frac{h}{12}[5f(x_{i+1},y(x_{i+1}))+8f(x_i,y(x_i))-f(x_{i-1},y(x_{i-1}))]$$

(2′)

$$=y(x_{i+1})-y(x_i)-\frac{h}{12}[5y'(x_{i+1})+8y'(x_i)-y'(x_{i-1})] \quad (2')$$

$$=y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)+\frac{h^3}{6}y'''(x_i)+\frac{1}{24}h^4y^{(4)}(x_i)+O(h^5)$$

$$-y(x_i)-\frac{5}{12}h\Big[y'(x_i)+hy''(x_i)+\frac{h^2}{2}y'''(x_i)$$

$$+\frac{1}{6}h^3y^{(4)}(x_i)+O(h^4)\Big]-\frac{2}{3}hy'(x_i)$$

$$+\frac{1}{12}h\Big[y'(x_i)-hy''(x_i)+\frac{h^2}{2}y'''(x_i)-\frac{1}{6}h^3y^{(4)}(x_i)+O(h^4)\Big]$$

$$=-\frac{1}{24}h^4y^{(4)}(x_i)+O(h^5) \quad (6')$$

∴ 所给公式为 3 阶公式.　(2′)

2002 年工程硕士研究生学位课程考试

1．解　记底面半径为 R，高为 H，则

$$R=50.00\text{m},H=100.00\text{m},|e(R)|\leqslant 0.005,|e(H)|\leqslant 0.005$$

容积 $V=\pi R^2H$，则

$$dV=\pi H(2RdR)+\pi R^2dH=\pi R(2HdR+RdH) \quad (1')$$

$$\frac{dV}{V}=\frac{\pi R(2HdR+RdH)}{\pi R^2H}=2\frac{dR}{R}+\frac{dH}{H} \quad (1')$$

$$|e(V)|\approx|\pi R(2He(R)+Re(H))|$$

$$\leqslant \pi R\cdot(2H|e(R)|+R|e(H)|)$$

$$\leqslant \pi\times 50.00\times(2\times 100.00\times 0.005+50.00\times 0.005)$$

$$=\pi\times 50.00\times 1.25$$

$$=196.35 \quad (4')$$

$$|e_r(V)|\approx\left|2\frac{e(R)}{R}+\frac{e(H)}{H}\right|\leqslant 2\left|\frac{e(R)}{R}\right|+\left|\frac{e(H)}{H}\right|$$

$$=2\times\frac{0.005}{50.00}+\frac{0.005}{100}=0.00025 \quad (4')$$

综上，容积的绝对误差不超过 196.35，相对误差不超过 0.025% .

2. 解　记

$$\varphi(x)=\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

则

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}(-x^{-2})=-\frac{1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

当 $x\in[1,2]$ 时

$$\varphi(x)\in[\varphi(2),\varphi(1)]=\left[\sqrt{1+\frac{1}{2}},\sqrt{1+\frac{1}{1}}\right]=[\sqrt{1.5},\sqrt{2}]\subset[1,2]$$

(4′)

$$|\varphi'(x)|=\frac{1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}<\frac{1}{2}<1$$ (4′)

所以迭代格式

$$x_{k+1}=\sqrt{1+\frac{1}{x_k}},\qquad k=0,1,2,\cdots$$

对任意 $x_0\in[1,2]$ 均收敛. (2′)

3. 解　$f(x)=x^3-x+0.5=x(x^2-1)+0.5$

$$f'(x)=3x^2-1=3\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

当 $|x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时, $f'(x)<0$; 当 $|x|>\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时, $f'(x)>0$.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}-1\right)+0.5=-\frac{2}{3\sqrt{3}}+0.5=0.115$$

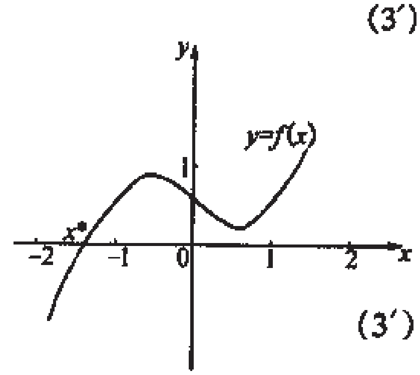
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}-1\right)+0.5=0.885$$

$f(0)=0.5,\ f(1)=0.5,\ f(-1)=0.5,\ f(-2)=-8+2+0.5=-5.5$

方程 $f(x)=0$ 有惟一实根 $x^*\in(-2,-1)$. (3′)

Newton 迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k(x_k^2-1)+0.5}{3x_k^2-1}=\frac{2x_k^3-0.5}{3x_k^2-1},\qquad k=0,1,2,\cdots$$



(3′)

取 $x_0 = \ 1.5$,迭代可得

$$x_1 = -1.2609, \quad x_2 = -1.19623, \quad x_3 = -1.1915$$

$$x_4 = -1.191487, \quad x_5 = -1.191487$$

$\therefore x^* \approx -1.191$ (4′)

4. 解

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 12 & -3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_1} \begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 + \left(-\frac{1}{12}\right) r_1]{r_2 + \left(-\frac{1}{4}\right) r_1} \begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \quad (3')$$

$$\xrightarrow{r_3 + \left(-\frac{1}{7}\right) r_2} \begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2')$$

等价的三角方程组为

$$\begin{cases} 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 9 \\ \frac{7}{4}x_2 - \frac{7}{4}x_3 = \frac{7}{4} \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

回代得 $x_3 = 1, x_2 = 2, x_1 = 1.$ (5′)

5. 解 (1) Jacobi 迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (4 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)})/15 \\ x_2^{(k+1)} = (1 - x_1^{(k)} - 8x_3^{(k)})/(-1) \\ x_3^{(k+1)} = (-7 - 2x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)})/20 \end{cases} \quad (3')$$

Gauss-Seidel 迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (4 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)})/15 \\ x_2^{(k+1)} = (1 - x_1^{(k+1)} - 8x_3^{(k)})/(-1) \\ x_3^{(k+1)} = (-7 - 2x_1^{(k+1)} + 3x_2^{(k+1)})/20 \end{cases} \quad (3')$$

(2) Gauss-Seidel 迭代格式的迭代矩阵 G 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 15\lambda & -3 & 2 \\ \lambda & -\lambda & 8 \\ 2\lambda & -3\lambda & 20\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda(300\lambda^2 - 418\lambda^2 + 48) = 0$$

解得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \dfrac{418 + 342.234}{600} > 1, \lambda_3 = = \dfrac{418 - 342.234}{600}$. (2′)

$\because \rho(\boldsymbol{G}) = \lambda_2 > 1$,

$\therefore$ Gauss-Seidel 迭代格式发散. (2′)

6. **解** 记 $f(x) = \ln x$,则

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -x^2, \quad f'''(x) = (-1)\times(-2)x^{-3}, \quad \cdots,$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)\times(-2)\times\cdots\times(-n)x^{-(n+1)}$$

$$|f^{(n+1)}(x)| = n!x^{-(n+1)} \qquad (2')$$

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \qquad (3')$$

当 $x \in [3,6]$ 时,$|x - x_i| \leqslant 3$

$$\max_{3\leqslant x\leqslant 6}|f(x) - L_n(x)| \leqslant 3 = \max_{3\leqslant x\leqslant 6}\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|$$

$$\leqslant \frac{n!}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}\times 3^{n+1} = \frac{1}{n+1} \qquad (3')$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\max_{3\leqslant x\leqslant 6}|f(x) - L_n(x)| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 \qquad (2')$$

7. **解** 构造差商表

1	3					
1	3	2				
2	−1	−4	−6			
2	−1	1	5	11		
4	3	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{25}{6}$	
4	3	2	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{55}{36}$

(7′)

$$H(x) = 3 + 2(x-1) - 6(x-1)^2 + 11(x-1)^2(x-2)$$
$$- \frac{25}{6}(x-1)^2(x-2)^2 + \frac{55}{36}(x-1)^2(x-2)^2(x-4) \qquad (3')$$

8. **解** 记 $x_{i+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$,则

(1) $$T_n(f)=\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})] \qquad (2')$$

$$S_n(f)=\frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})] \qquad (2')$$

(2) $$T_{2n}(f)=\frac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)+2f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})]$$

$$\begin{aligned}&\frac{4}{3}T_{2n}(f)-\frac{1}{3}T_n(f)\\&=\frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)+2f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})]-\frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})]\\&=\frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}[2f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{2}})+2f(x_{i+1})-f(x_i)-f(x_{i+1})]\\&=\frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})] \qquad (6')\end{aligned}$$

9．解 (1) 令 $x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$，则

$$\begin{aligned}I(f)&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)\mathrm{d}t\\&\approx\frac{5}{9}\cdot\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\frac{b-a}{2}\right)\\&\quad+\frac{8}{9}\cdot\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{5}{9}\cdot\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2}+\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\frac{b-a}{2}\right)\\&=\frac{b-a}{18}\left[5f\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\frac{b-a}{2}\right)+8f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right.\\&\quad\left.+5f\left(\frac{a+b}{2}+\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\frac{b-a}{2}\right)\right] \qquad (5')\end{aligned}$$

(2) $$f(x)=\mathrm{e}^{-x}$$

$$\begin{aligned}\int_3^6\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x&\approx\frac{6-3}{18}\left[5f\left(\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{3}{5}}\times\frac{3}{2}\right)+8f\left(\frac{9}{2}\right)+5f\left(\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{3}{5}}\times\frac{3}{2}\right)\right]\\&=\frac{1}{6}\left[5\mathrm{e}^{-\left(\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{3}{5}}\times\frac{3}{2}\right)}+8\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}}+5\mathrm{e}^{-\left(\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{3}{5}}\times\frac{3}{2}\right)}\right]\\&=\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}}\left[5\left(\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{3}{5}}\times\frac{3}{2}}+\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{3}{5}}\times\frac{3}{2}}\right)+8\right]\\&=0.0472954 \quad (\text{精确解 } 0.0473083) \qquad (5')\end{aligned}$$

10．解 所给公式的局部截断误差为

$$\begin{aligned}R_{i+1}=y(x_{i+1})-y(x_i)-h[&\alpha f(x_i,y(x_i))\\&+(1-\alpha)f(x_i+\lambda h,y(x_i)+\lambda hf(x_i,y(x_i)))] \qquad (2')\end{aligned}$$

$$= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + O(h^3) - y(x_i)$$
$$- h[\alpha y'(x_i) + (1-\alpha)f(x_i + \lambda h, y(x_i) + \lambda h y'(x_i))]$$
$$= hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + O(h^3)$$
$$- h\left[\alpha y'(x_i) + (1-\alpha)\left(f(x_i, y(x_i)) + \lambda h \frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial x}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \lambda h y'(x_i)\frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial y} + O(h^2)\right)\right] \qquad (5')$$
$$= hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - h[y'(x_i) + (1-\alpha)\lambda h y''(x_i)] + O(h^3)$$
$$= h^2\left(\frac{1}{2} - (1-\alpha)\lambda\right)y''(x_i) + O(h^3) \qquad (2')$$

当$(1-\alpha)\lambda = \frac{1}{2}$时，$R_{i+1} = O(h^3)$，所给公式为 2 阶公式. (1′)

2003 年工程硕士研究生学位课程考试

1. 解 $x_1 \approx 6.1025, \qquad x_2 \approx 80.115$

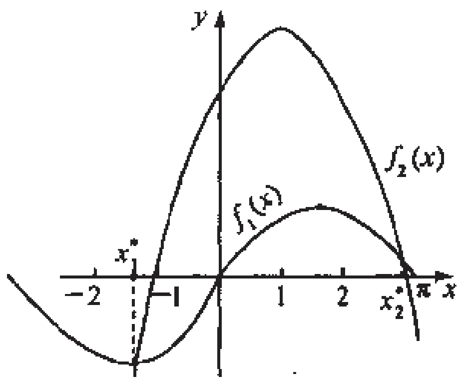
$$|e(x_1)| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-4}, \qquad |e(x_2)| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-3} \qquad (1')$$

$$e(x_1x_2) \approx x_2 e(x_1) + x_1 e(x_2)$$
$$|e(x_1x_2)| \approx |x_2 e(x_1) + x_1 e(x_2)|$$
$$\leqslant x_2|e(x_1)| + x_1|e(x_2)|$$
$$\leqslant 80.115 \times \frac{1}{2}\times 10^{-4} + 6.1025 \times \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$
$$= (8.015 + 6.1025) \times \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$
$$= 7.057 \times 10^{-3} \qquad (4')$$

$$e_r(x_1x_2) \approx e_r(x_1) + e_r(x_2)$$
$$|e_r(x_1x_2)| \approx |e_r(x_1) + e_r(x_2)|$$
$$\leqslant |e_r(x_1)| + |e_r(x_2)|$$
$$\leqslant \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-4}}{6.1025} + \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-3}}{80.115}$$
$$= \left(\frac{1}{6.1025} + \frac{1}{8.0115}\right)\times \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$
$$= 0.144344 \times 10^{-4} \qquad (4')$$

2. 解 (1) $\sin x = -(x^2-2x-3)$

$f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = -(x^2-2x-3) = -(x+1)(x-3)$



作 $y = f_1(x)$ 和 $y = f_2(x)$ 的图像知方程 $f(x)=0$ 有且仅有两根

$$x_1^* \in [-2,-1], \qquad x_2^* \in [2,3] \qquad (3')$$

(2) 原方程可改写为

$$x^2 = 2x + 3 - \sin x$$

当 $x \in [2,3]$ 时,原方程与方程 $x = \sqrt{2x+3-\sin x}$ 同解.取迭代格式

$$\begin{cases} x_{k+1} = \sqrt{2x_k + 3 - \sin x_k}, & k = 0,1,2,\cdots \\ x_0 = 2.5 \end{cases} \qquad (2')$$

当 $x \in [-2,-1]$ 时,原方程与方程 $x = -\sqrt{2x+3-\sin x}$ 同解.

计算得

$x_1 = 2.7206$, $x_2 = 2.8342$, $x_3 = 2.7444$, $x_4 = 2.8464$

$x_5 = 2.8986$, $x_6 = 2.9252$, $x_7 = 2.9387$, $x_8 = 2.9455$

$x_9 = 2.9489$, $x_{10} = 2.9506$

$\therefore x_2^* = 2.95$ (3′)

(3) 当原方程与方程 $x = -\sqrt{2x+3-\sin x}$ 同解.当 $x \in [-2,-1]$ 时,取迭代格式

$$\begin{cases} x_{k+1} = -\sqrt{3 - \sin x_k + 2x_k}, & k = 0,1,2,\cdots \\ x_0 = -1.5 \end{cases} \qquad (2')$$

令 $x_k = -y_k$,则

$$\begin{cases} y_{k+1} = \sqrt{3 + \sin y_k - 2y_k}, & k = 0,1,2,\cdots \\ y_0 = 1.5 \end{cases}$$

计算得

$y_1 = 0.99875$, $y_2 = 1.3577$, $y_3 = 1.1234$, $y_4 = 1.2864$

$y_5 = 1.1777$, $y_6 = 1.2523$, $y_7 = 1.2021$, $y_8 = 1.2364$

$y_9 = 1.2132$, $y_{10} = 1.2290$, $y_{11} = 1.2183$, $y_{12} = 1.2255$

$y_{13} = 1.2206$, $y_{14} = 1.2240$, $y_{15} = 1.2217$

$\therefore x_1^* = -1.22$ (3′)

3. 解 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 12 & -3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_1} \begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3 - \frac{1}{4}r_1]{r_2 - \frac{1}{12}r_1} \begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \quad (6')$$

$$\xrightarrow{r_3 - \frac{1}{7}r_2} \begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4')$$

等价三角方程组为

$$\begin{cases} 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 9 \\ \frac{7}{4}x_2 - \frac{7}{4}x_3 = \frac{7}{4} \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

回代得 $x_3 = 1, x_2 = 2, x_1 = 1$. (3′)

4. 解 (1) Gauss-Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (15 - 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)})/(-18) \\ x_2^{(k+1)} = (6 - 12x_1^{(k+1)} - 3x_3^{(k)})/(-3) \\ x_3^{(k+1)} = (-15 - x_1^{(k+1)} - 4x_2^{(k+1)})/10 \end{cases} \quad (6')$$

(2) 迭代矩阵 G 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -18\lambda & 3 & -1 \\ 12\lambda & -3\lambda & 3 \\ \lambda & 4\lambda & 10\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3')$$

$$\lambda[-18(-30\lambda^2 - 12\lambda) - 12(30\lambda + 4\lambda) + 9 - 3\lambda] = 0$$

解得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.30678, \lambda_3 = 0.05433$.

$\therefore \rho(G) = 0.30678 < 1$, 故 Gauss-Seidel 迭代格式收敛. (3′)(1′)

5. 解 $f(x)-N_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$

$$=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),\qquad \xi\in(0,1) \qquad (7')$$

当 $x\in[0,1]$ 时

$$|f(x)-N_n(x)|\leqslant\frac{e}{(n+1)!} \qquad (3')$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-N_n(x)|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{e}{(n+1)!}=0 \qquad (3')$$

6. 解 (1) 由题意知 $f(0)=0, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

$f(x)$ 以 $x_0=0, x_1=\frac{\pi}{2}$ 为节点的 1 次插值多项式为

$$L_1(x)=f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$=0\times\frac{x-\frac{\pi}{2}}{0-\frac{\pi}{2}}+1\times\frac{x-0}{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{2}{\pi}x=0.63662x \qquad (5')$$

(2) 记 1 次最佳平方逼近多项式为 $p(x)=c_0+c_1x$.

$$\varphi_0(x)=1,\qquad \varphi_1(x)=x$$

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\qquad (\varphi_0,\varphi_1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}\pi^2$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{24}$$

$$(\varphi_0,f)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=1,\qquad (\varphi_1,f)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x=1$$

正规方程组为

$$\begin{bmatrix}\frac{\pi}{2} & \frac{1}{8}\pi^2\\ \frac{1}{8}\pi^2 & \frac{1}{24}\pi^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \qquad (5')$$

解得 $c_0=\dfrac{8}{\pi}\left(1-\dfrac{3}{\pi}\right)=0.11477,\qquad c_1=\dfrac{96}{\pi^3}\left(1-\dfrac{1}{4}\pi\right)=0.66444$

$\therefore p(x)=0.11477+0.66444x$ (3′)

7. 解 (1) $I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

$$S(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right] \qquad (4')$$

当 $f(x) = 1$ 时

$$S(f) = \frac{b-a}{6}(1 + 4 \times 1 + 1) = b - a$$

$$I(f) = \int_a^b 1\mathrm{d}x = b - a \qquad (1')$$

$$S(f) = I(f)$$

当 $f(x) = x$ 时

$$S(f) = \frac{b-a}{6}\left(a + 4 \times \frac{b+a}{2} + b\right) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$I(f) = \int_a^b x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$S(f) = I(f) \qquad (1')$$

当 $f(x) = x^2$ 时

$$S(f) = \frac{b-a}{6}\left[a^2 + 4 \times \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 + b^2\right]$$

$$= \frac{b-a}{6}[a^2 + (a+b)^2 + b^2]$$

$$= \frac{b-a}{3}(a^2 + ab + b^2) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

$$I(f) = \int_a^b x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

$$S(f) = I(f) \qquad (1')$$

当 $f(x) = x^3$ 时

$$S(f) = \frac{b-a}{6}\left[a^3 + 4 \times \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right]$$

$$= \frac{1}{4}(b^2 - a^2)(b^2 + a^2)$$

$$I(f) = \int_a^b x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(b^4 - a^4)$$

$$S(f) = I(f) \qquad (1')$$

当 $f(x) = x^4$ 时

$$S(f) = \frac{b-a}{6}\left[a^4 + 4 \times \left(\frac{a+b}{2}\right)^4 + b^4\right]$$

$$I(f) = \int_a^b x^4\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(b^5 - a^5)$$

$S(f)$ 的 b^5 的系数为$\frac{5}{24}$,而 $I(f)$ 的 b^5 的系数为$\frac{1}{5}$,

$$S(f) \neq I(f) \tag{1'}$$

$\therefore$ Simpson 公式具有 3 次代数精度.

(2) $$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = a + ih, \qquad x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$$

复化 Simpson 公式为

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{6}[f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})] \tag{4'}$$

8. **解** 局部截断误差为

$$R_{i+1} = y(x_{i+1}) - y(x_i) - \frac{h}{2}[f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)))]$$

$$= y(x_{i+1}) - y(x_i) - \frac{h}{2}[y'(x_i) + f(x_{i+1}, y(x_i) + hy'(x_i))] \tag{3'}$$

$$y''(x) = \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x} + y'(x)\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y}$$

$$y'''(x) = \frac{\partial^2 f(x, y(x))}{\partial x^2} + 2y'(x)\frac{\partial^2 f(x, y(x))}{\partial x \partial y} + [y'(x)]^2 \frac{\partial^2 f(x, y(x))}{\partial y^2} + y''(x)\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y}$$

方法 1:

$$R_{i+1} = y(x_i + h) - y(x_i) - \frac{h}{2}[y'(x_i) + f(x_i + h, y(x_i) + hy'(x_i))]$$

$$= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + O(h^4) - y(x_i) - \frac{h}{2}y'(x_i) \tag{2'}$$

$$- \frac{h}{2}\Big[f(x_i, y(x_i)) + h\frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial x} + hy'(x_i)\frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial y} + \frac{1}{2}\Big(h^2 \frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial x^2} + 2h^2 y'(x_i)\frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial x \partial y} + h^2[y'(x_i)]^2 \frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial y^2}\Big) + O(h^3)\Big] \tag{3'}$$

$$= h^3\Big[\frac{y'''(x_i)}{6} - \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial x^2} + 2y'(x_i)\frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial x \partial y} + [y'(x_i)]^2 \frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial y^2}\Big)\Big] + O(h^4)$$

$$= h^3\Big[\frac{1}{6}y'''(x_i) - \frac{1}{4}\Big(y'''(x_i) - y''(x_i)\frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial y}\Big)\Big] + O(h^4) \tag{3'}$$

$$= \left[-\frac{1}{12}y'''(x_i) + \frac{1}{4}y''(x_i)\frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial y} \right] h^3 + O(h^4) \qquad (1')$$

方法 2：

$$R_{i+1} = y(x_{i+1}) - y(x_i) - \frac{h}{2}[y'(x_i) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))]$$

$$+ \frac{h}{2}[f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) - f(x_{i+1}, y(x_i) + hy'(x_i))] \qquad (2')$$

$$= y(x_i + h) - y(x_i) - \frac{h}{2}[y'(x_i) + y'(x_{i+1})]$$

$$+ \frac{h}{2}\frac{\partial f(x_{i+1}, \eta_i)}{\partial y}[y(x_{i+1}) - y(x_i) - hy'(x_i)]$$

$$= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(\xi_i) - y(x_i) \qquad (2')$$

$$- \frac{h}{2}y'(x_i) - \frac{h}{2}\left[y'(x_i) + hy''(x_i) + \frac{h^2}{2}y'''(\bar{\xi}_i) \right] \qquad (2')$$

$$- \frac{h}{2}\frac{\partial f(x_{i+1}, \eta_i)}{\partial y}\left[y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(\bar{\xi}_i) - y(x_i) - hy'(x_i) \right]$$

$$(2')$$

$$= \frac{h^3}{6}y'''(\xi_i) - \frac{h^3}{4}y'''(\bar{\xi}_i) - \frac{h^3}{4}\frac{\partial f(x_{i+1}, \eta_i)}{\partial y}y''(\bar{\xi}_i)$$

$$= O(h^3) \qquad (1')$$

∴ 所给数值求解公式是 2 阶公式. (1′)

1999 年秋季攻读博士学位研究生入学考试

1. **解** $y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^{n-1}(4x+1-1)}{4x+1}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{4x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{4n} - \frac{1}{4}y_{n-1}, \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

$$y_0 = \int_0^1 \frac{1}{4x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln(4x+1)\Big|_{x=0}^{1}$$

$$= \frac{1}{4}(\ln 5 - \ln 1) = \frac{1}{4}\ln 5$$

按如下递推可计算出 $y_n, n = 1,2,3,\cdots$.

$$\begin{cases} y_n = \dfrac{1}{4n} - \dfrac{1}{4}y_{n-1}, & n = 1,2,3,\cdots \\ y_0 = \dfrac{1}{4}\ln 5 \end{cases} \qquad ①(5')$$

若 y_0 有一个误差 ε，则实际计算的值为

$$\begin{cases}\tilde{y}_n = \dfrac{1}{4n} - \dfrac{1}{4}\tilde{y}_{n-1}, & n = 1,2,3,\cdots \\ \tilde{y}_0 = \dfrac{1}{4}\ln 5 + \varepsilon\end{cases} \qquad ②$$

将 ① 和 ② 相减得

$$\begin{cases}\tilde{y}_n - y_n = -\dfrac{1}{4}(\tilde{y}_{n-1} - y_{n-1}), & n = 1,2,\cdots \\ \tilde{y}_0 - y_0 = \varepsilon\end{cases}$$

递推可得

$$\tilde{y}_n - y_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n(\tilde{y}_0 - y_0)$$

$$|\tilde{y}_n - y_n| \leqslant \frac{1}{4^n}|\tilde{y}_0 - y_0| = \frac{1}{4^n}\varepsilon \to 0 \quad (n \to \infty)$$

因而递推过程 ① 是数值稳定的. (6′)

2. 解　Newton 迭代格式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0,1,2,\cdots \qquad (2')$$

迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

求导,得

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

易知 $\varphi'(\xi) = 0$,又在解的邻域内 $\varphi(x)$ 有 2 阶连续导数,所以 Newton 迭代格式至少是 2 阶局部收敛的. (5′)

对 $\varphi'(x)$ 再求一次导数得

$$\varphi''(x) = f'(x)\cdot\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} + f(x)\left(\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\right)'$$

易知

$$\varphi''(\xi) = \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \qquad (4')$$

当 $f''(\xi) \neq 0$ 时 Newton 迭代格式是 2 阶收敛的.

3. 解　记 $u_1 = b_1, y_1 = d_1$.

对 $i = 2,3,\cdots,n$ 作如下计算:

$$\begin{bmatrix} u_{i-1} & c_{i-1} & & y_{i-1} \\ a_i & b_i & c_i & d_i \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} u_{i-1} & c_{i-1} & & y_{i-1} \\ 0 & u_i & c_i & y_i \end{bmatrix}$$

其中

$$l_i = \frac{a_i}{u_{i-1}}, \qquad u_i = b_i - l_i c_{i-1}, \qquad y_i = d_i - l_i y_{i-1}$$

经过上述 $n-1$ 步原三对角方程组变为如下同解的二对角方程组

$$\begin{bmatrix} u_1 & c_1 & & & & y_1 \\ & u_2 & c_2 & & & y_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & u_{n-1} & c_{n-1} & y_{n-1} \\ & & & & u_n & y_n \end{bmatrix}$$

回代得到

$$x_n = \frac{y_n}{u_n}, \qquad x_i = (y_i - c_i x_{i+1})/u_i, \qquad i = n-1, n-2, \cdots, 1$$

上述过程可归纳为:

追过程

①$u_1 = b_1, y_1 = d_1$.

② 对 $i = 2,3,\cdots,n$ 依次计算

$$l_i = a_i/u_{i-1}, \qquad u_i = b_i - l_i c_{i-1}, \qquad y_i = d_i - l_i y_{i-1} \qquad (5')$$

赶过程

①$x_n = y_n/u_n$.

② 对 $i = n-1, n-2, \cdots, 2, 1$ 依次计算

$$x_i = (y_i - c_i x_{i+1})/u_i \qquad (3')$$

计算量

追过程,乘除次数 $M_1 = 3(n-1) = 3n-3$,加减次数 $S_1 = 2(n-1)$.

赶过程,乘除次数 $M_2 = 1 + 2(n-1) = 2n-1$,加减次数 $S_2 = n-1$.

追赶过程总次数,乘除 $M = 5n-4$,加减 $3n-3$. (3′)

4. 解 (1) 只需证明 ① 的齐次方程组

$$x = Bx \qquad ③$$

只有零解.若 ③ 有非零解 $\bar{x}$,则

$$\bar{x} = B\bar{x}$$

两边取范数得

$$\|\bar{x}\| \leqslant \|B\| \cdot \|\bar{x}\|$$

因为 $\|x\| \neq 0$ 得 $\|B\| \geqslant 1$ 与条件 $\|B\| < 1$ 矛盾,因而 ① 有惟一解 x^*,即存在惟一的 x^* 使得

$$x^* = Bx^* + c \qquad ④(3')$$

(2) 将 ② 和 ④ 相减得

$$x^{(k+1)} - x^* = B(x^{(k)} - x^*)$$

两边取范数得

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leqslant \|B\| \cdot \|x^{(k)} - x^*\|, \qquad k = 0,1,2,\cdots \qquad ⑤(4')$$

(3) 由 ⑤ 递推得

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leqslant \|B\|^k \cdot \|x^{(0)} - x^*\|, \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

对任意固定的 $x^{(0)}$ 有

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x^*\| = 0$$

因而迭代格式 ② 是收敛的. (4')

5. 解 $$[a,b] = \bigcup_{i=0}^{n-1}[x_i, x_{i+1}]$$

(1) $$S_1(x) = f(x_i)\frac{x_{i+1} - x}{h} + f(x_{i+1})\frac{x - x_i}{h}, x \in [x_i, x_{i+1}],$$
$$i = 0,1,\cdots,n-1 \qquad (4')$$

(2) 当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 时

$$\begin{aligned} |f(x) - S_1(x)| &= \left|\frac{f''(\xi_i)}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1})\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\max_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}}|f''(x)| \max_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}}|(x - x_i)(x - x_{i+1})| \\ &\leqslant \frac{h^2}{8}\max_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}}|f''(x)| \leqslant \frac{h^2}{8}\max_{a \leqslant x \leqslant b}|f''(x)| \qquad (4') \end{aligned}$$

应用上式得

$$\begin{aligned} \max_{a \leqslant x \leqslant b}|f(x) - S_1(x)| &= \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1}\max_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}}|f(x) - S_1(x)| \\ &\leqslant \frac{h^2}{8}\max_{a \leqslant x \leqslant b}|f''(x)| \qquad (3') \end{aligned}$$

6. 解 记 $f(x) = e^x$ 在 $[0,1]$ 上的 1 次最佳一致逼近多项式为 $p(x) = a_0 + a_1 x$.

$\because f''(x) = e^x > 0$,

$\therefore f(x) - p(x)$ 有 3 个交错偏差点 $0, \bar{x}, 1 (0 < \bar{x} < 1)$.

因而有如下方程组

$$\begin{cases} f(0) - p(0) = -[f(\bar{x}) - p(\bar{x})] = f(1) - p(1) \\ f'(\bar{x}) - p'(\bar{x}) = 0 \end{cases} \qquad ①$$

$$f(x) - p(x) = e^x - (a_0 + a_1 x)$$
$$f'(x) - p'(x) = e^x - a_1$$

由 ① 得

$$\begin{cases} 1 - a_0 = -[e^{\bar{x}} - (a_0 + a_1\bar{x})] = e - (a_0 + a_1) \\ e^{\bar{x}} - a_1 = 0 \end{cases} \tag{6'}$$

解得

$$a_1 = e - 1 \approx 1.718, \bar{x} = \ln a_1 = \ln(e-1) \approx 0.5412$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}[1 + a_1(1 - \bar{x})] \\ &= \frac{1}{2}[1 + (e-1)(1 - \ln(e-1))] \\ &= \frac{1}{2}[e - (e-1)\ln(e-1)] \approx 0.8942 \end{aligned} \tag{3'}$$

因而 1 次最佳一致逼近多项式为

$$p(x) = 0.8942 + 1.718x$$

最大误差为

$$\| f - p \|_\infty = |f(0) - p(0)| = 1 - a_0 \approx 0.1058 \tag{2'}$$

7. 解 $\quad x_0 = a, \quad x_1 = a + h = a + \frac{b-a}{4} = \frac{3a+b}{4}$

$$x_2 = \frac{a+b}{2}, \quad x_3 = \frac{a+3b}{2}, \quad x_4 = b$$

$$\begin{aligned} T_1(f) &= \frac{x_4 - x_0}{2}[f(x_0) + f(x_4)] = \frac{4h}{2}[f(x_0) + f(x_4)] \\ &= 2h[f(x_0) + f(x_4)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(f) &= \frac{2h}{2}[f(x_0) + f(x_2)] + \frac{2h}{2}[f(x_2) + f(x_4)] \\ &= h[f(x_0) + 2f(x_2) + f(x_4)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_4(f) &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] \\ &\quad + \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \frac{h}{2}[f(x_3) + f(x_4)] \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)] \end{aligned}$$

$$S_1(f) = \frac{4h}{6}[f(x_0) + 4f(x_2) + f(x_4)]$$

$$\begin{aligned} S_2(f) &= \frac{2h}{6}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{2h}{6}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] \\ &= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] \end{aligned}$$

$$C_1(f) = \frac{16}{15}S_2(f) - \frac{1}{15}S_1(f)$$

$$= \frac{2h}{45}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] \quad (6')$$

关系：

$$T_2(f) = \frac{1}{2}[T_1(f) + 4hf(x_2)]$$

$$T_4(f) = \frac{1}{2}\{T_2(f) + 2h[f(x_1) + f(x_3)]\}$$

$$S_1(f) = \frac{4}{3}T_2(f) - \frac{1}{3}T_1(f)$$

$$S_2(f) = \frac{4}{3}T_4(f) - \frac{1}{3}T_2(f)$$

$$C_1(f) = \frac{16}{15}S_2(f) - \frac{1}{15}S_1(f) \quad (5')$$

8. **解** (1) $[-1,1]$ 上的 2 点 Gauss 公式为

$$\int_{-1}^{1} g(t)\mathrm{d}t \approx g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

作变换 $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$ 可得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{b-a}{2} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)\mathrm{d}t$$

$\therefore$ 计算 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的 2 点 Gauss 公式为

$$I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\approx \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$\equiv G(f) \quad (2')$$

记 $x_0 = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}, x_1 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$,则 $G(f)$ 的截断误差为

$$I(f) - G(f)$$

$$= \int_a^b \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)(x - x_0)^2(x - x_1)^2\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4!} f^{(4)}(\eta)\int_a^b (x - x_0)^2(x - x_1)^2\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4!} f^{(4)}(\eta)\int_{-1}^{1}\left[\frac{b-a}{2\sqrt{3}}(t+1)\right]^2\left[\frac{b-a}{2\sqrt{3}}(t-1)\right]^2 \frac{b-a}{2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4!}f^{(4)}(\eta)\frac{(b-a)^5}{32\times 9}\int_{-1}^{1}(t+1)^2(t-1)^2\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{24\times 18\times 15}f^{(4)}(\eta)(b-a)^5$$

$$= \frac{f^{(4)}(\eta)}{6480}(b-a)^5, \qquad \xi\in(a,b),\eta\in(a,b) \qquad (3')$$

(2) 将$[a,b]$分成 n 等份,记

$$h=\frac{b-a}{n}, \qquad x_i = a+ih, \qquad 0\leqslant i\leqslant n$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} = a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h, \qquad 0\leqslant i\leqslant n-1$$

则

$$I(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left[f\left(x_{i+\frac{1}{2}}-\frac{h}{2\sqrt{3}}\right)+f\left(x_{i+\frac{1}{2}}+\frac{h}{2\sqrt{3}}\right)\right]$$

∴ 复化 2 点 Gauss 公式为

$$G_n(f)=\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(x_{i+\frac{1}{2}}-\frac{h}{2\sqrt{3}}\right)+f\left(x_{i+\frac{1}{2}}+\frac{h}{2\sqrt{3}}\right)\right] \qquad (3')$$

$G_n(f)$ 的截断误差为

$$I(f)-G_n(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(4)}(\eta_i)}{6480}h^5$$

$$=\frac{b-a}{6480}f^{(4)}(\eta)h^4, \qquad \eta\in(a,b) \qquad (3')$$

9. 解 (1) 局部截断误差

$$R_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)$$

$$-\frac{h}{4}\left[f(x_n,y(x_n))+3f\left(x_n+\frac{2}{3}h,y(x_n)+\frac{2}{3}hf(x_n,y(x_n))\right)\right]$$

$$(2')$$

$$= y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+O(h^3)-y(x_n)$$

$$-\frac{h}{4}\left[y'(x_n)+3f\left(x_n+\frac{2}{3}h,y(x_n)+\frac{2}{3}hy'(x_n)\right)\right] \qquad (2')$$

$$= hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+O(h^3)$$

$$-\frac{h}{4}\left[y'(x_n)+3\left(f(x_n,y(x_n))+\frac{2}{3}h\frac{\partial f(x_n,y(x_n))}{\partial x}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2}{3}hy'(x_n)\frac{\partial f(x_n,y(x_n))}{\partial y}+O(h^2)\right)\right] \qquad (2')$$

反

$$= hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)$$

$$- \frac{h}{4}[4y'(x_n) + 2hy''(x_n) + O(h^2)]$$

$$= O(h^3) \qquad (1')$$

∴ 所给方法是 2 阶的. (1′)

(2) 取 $h = 0.1, f(x,y) = x^2 + y^2, y_0 = 0, x_0 = 0$,

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2)$$

$$k_1 = f(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2 = 0 + 0$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{2}{3}k_1\right) = f\left(\frac{2}{3}h, \frac{2}{3}k_1\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}h\right)^2 + 0^2 = \frac{4}{9} \times 0.01$$

$$\therefore y(0,1) \approx y_1 = 0 + \frac{h}{4}\left(0 + 3 \times \frac{4}{9} \times 0.01\right)$$

$$= \frac{1}{3} \times 0.001 = 0.00033 \qquad (4')$$

2000 年春季攻读博士学位研究生入学考试

1. **解** $L = 50, |e(L)| \leqslant 0.01; W = 25, |e(W)| \leqslant 0.01; H = 20, |e(H)| \leqslant 0.01$.

容积

$$V(L,W,H) = LWH = 50 \times 25 \times 20 = 25000(\mathrm{m}^3) \qquad (2')$$

由

$$\begin{aligned} e(V) &= V(L^*, W^*, H^*) - V(L,W,H) \\ &\approx \frac{\partial V}{\partial L}(L^* - L) + \frac{\partial V}{\partial W}(W^* - W) + \frac{\partial V}{\partial H}(H^* - H) \\ &= WHe(L) + LHe(W) + LWe(H) \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} |e(V)| &\approx |WHe(L) + LHe(W) + LWe(H)| \\ &\leqslant WH|e(L)| + LH|e(W)| + LW|e(H)| \\ &\leqslant 25 \times 20 \times 0.01 + 50 \times 20 \times 0.01 + 50 \times 25 \times 0.01 = 27.50(\mathrm{m}^3) \end{aligned}$$

(5′)

由 $e_r(V) = \frac{e(V)}{V}$, 得 $|e_r(V)| \leqslant \frac{27.50}{25000} = 1.1 \times 10^{-3} = 0.11\%$. (3′)

或由

$$e_r(V) \approx e_r(L) + e_r(W) + e_r(H)$$

得

$$|e_r(V)| \leqslant |e_r(L)| + |e_r(W)| + |e_r(H)|$$
$$\leqslant \frac{0.01}{50} + \frac{0.01}{25} + \frac{0.01}{20} = 0.11\%$$

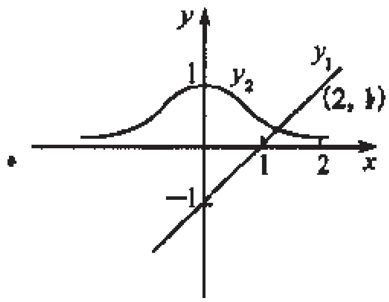
2. 解　$(x-1)e^{x^2} = 1$，　$x - 1 = e^{-x^2}$

记 $y_1 = x - 1$，$y_2 = e^{-x^2}$，作 y_1 和 y_2 的图像，y_1 严格单调上升.

当 $x \leqslant 0$ 时，$y_1 < 0$，$y_2 > 0$，因而当 $x \leqslant 0$ 时，$y_1(x) = y_2(x)$ 无解；

当 $x > 0$ 时，y_1 严格单调上升，y_2 严格单调下降，故 $y_1(x) = y_2(x)$ 有惟一根 $x^* \in (1,2)$.　　(5′)

改写方程为



$$x = 1 + e^{-x^2}$$

记

$$\varphi(x) = 1 + e^{-x^2},$$
$$\varphi'(x) = -2xe^{-x^2}$$
$$\varphi''(x) = -2[e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2}]$$
$$= 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$$

当 $x \in [1,2]$ 时，$\varphi(x) \in [\varphi(2), \varphi(1)] = [1 + e^{-4}, 1 + e^{-1}] \subset [1,2]$；

当 $x \in [1,2]$ 时，$|\varphi'(x)| \leqslant |\varphi'(1)| = \dfrac{2}{e} < 1$.

∴ 迭代格式

$$x_{k+1} = 1 + e^{-x_k^2}, \qquad k = 0, 1, \cdots$$

对任意 $x_0 \in [1,2]$ 均收敛. 取 $x_0 = 1$ 得　　(4′)

$x_1 = 1.36788$，　$x_2 = 1.15400$，　$x_3 = 1.26405$，　$x_4 = 1.20234$

$x_5 = 1.23560$，　$x_6 = 1.21725$，　$x_7 = 1.22725$，　$x_8 = 1.22176$

$x_9 = 1.22476$，　$x_{10} = 1.22312$，　$x_{11} = 1.22402$，　$x_{12} = 1.22353$

$x_{13} = 1.22380$

∴ $x^* \approx 1.224$　　(6′)

3. 解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 & 7 \\ -2 & -2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{s_3 = -2 \\ s_4 = 1 \\ r_2 \leftrightarrow r_1}]{\substack{s_1 = 1 \\ s_2 = 2}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (1')$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -2 & 7 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{s_4=\frac{1}{2} \\ r_3\leftrightarrow r_2}]{\substack{s_2=-\frac{1}{2} \\ s_3=3}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -2 & 7 \\ -1 & -2 & 3 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3'+1')$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -2 & 7 \\ -1 & 3 & 6 & 3 & 6 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 1 & -2 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[s_4=-\frac{1}{2}]{s_3=\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -2 & 7 \\ -1 & 3 & 6 & 3 & 6 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(3′ + 1′)

$$\longrightarrow\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -2 & 7 \\ -1 & 3 & 6 & 3 & 6 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad (1')$$

等价的三角方程组为

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+3x_3-2x_4=7 \\ 3x_2+6x_3+3x_4=6 \\ \frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4=\frac{3}{2} \\ 3x_4=-3 \end{cases} \quad (2')$$

回代得 $x_4=-1, x_3=2, x_2=-1, x_1=2$. (3′)

4. 解 (1) 3 次 Lagrange 插值多项式为

$$\begin{aligned} L_3(x) = {} & 3\times\frac{(x-2)(x-4)(x+5)}{(1-2)(1-4)(1+5)} \\ & +4\times\frac{(x-1)(x-4)(x+5)}{(2-1)(2-4)(2+5)} \\ & +1\times\frac{(x-1)(x-2)(x+5)}{(4-1)(4-2)(4+5)} \end{aligned} \quad (5')$$

(2) 构造差商表如下:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
1	3	1	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{19}{189}$
2	4	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{29}{126}$	
4	1	$\frac{1}{9}$		
-5	0			

(3′)

3 次 Newton 插值多项式为

$$N_3(x) = 3 + (x-1) - \frac{5}{6}(x-1)(x-2) - \frac{19}{189}(x-1)(x-2)(x-4) \qquad (3')$$

(3) 插值余项

$$f(x) - L_3(x) = f(x) - N_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)(x-2)(x-4)(x+5),$$
$$\xi \in (\min\{x, -5\}, \max\{4, x\}) \qquad (4')$$

5. 解 (1) 当 $f(x) = 1$ 时,左 $= \int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}x = 2$,右 $= 2$,左 = 右;

当 $f(x) = x$ 时,左 $= \int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = 0$,右 $= 0$,左 = 右;

当 $f(x) = x^2$ 时,左 $= \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$,右 $= \frac{2}{3}$,左 = 右;

当 $f(x) = x^3$ 时,左 $= \int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x = 0$,右 $= 0$,左 = 右;

当 $f(x) = x^4$ 时,左 $= \int_{-1}^{1} x^4\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$,右 $= \frac{2}{9}$,左 ≠ 右.

所给求积公式具有 3 次代数精度,因而为 Gauss 公式. (9′)

(2) 将 $[a,b]$ 作 n 等分,记 $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $0 \leqslant i \leqslant n$,

$$x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \xrightarrow{x = x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\int_{-1}^{1} f\left(x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}t\right)\mathrm{d}t$$
$$\overset{\text{利用(1)}}{\approx} \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + f\left(x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right]$$

上式即为 2 点复化 Gauss 公式. (6′)

6. 解 (1) 利用

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

和

$$y''(x) = \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x} + y'(x)\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y}$$

可得公式 ① 的局部截断误差为

$$\begin{aligned}
R_{i+1}^{(1)} &= y(x_{i+1}) - y(x_i) \\
&\quad - \frac{h}{2}[f(x_i, y(x_i)) + f(x_i + h, y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)))] \\
&= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + O(h^3) - y(x_i) - \frac{h}{2}[y'(x_i) \\
&\quad + f(x_i, y(x_i)) + h\frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial x} + hf(x_i, y(x_i))\frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial y} \\
&\quad + O(h^2)] \\
&= hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + O(h^3) - \frac{h}{2}[2y'(x_i) + hy''(x_i) + O(h^3)] \\
&= O(h^3)
\end{aligned}$$

(4′)

公式 ② 的局部截断误差为

$$\begin{aligned}
R_{i+1}^{(2)} &= y(x_{i+1}) - y(x_i) - \frac{h}{2}[3f(x_i, y(x_i)) - f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))] \\
&= y(x_{i+1}) - y(x_i) - \frac{h}{2}[3y'(x_i) - y'(x_{i-1})] \\
&= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + O(h^3) - y(x_i) \\
&\quad - \frac{h}{2}[3y'(x_i) - (y'(x_i) - hy''(x_i) + O(h^2))] \\
&= O(h^3)
\end{aligned}$$

∴ 公式 ① 和 ② 均是 2 阶公式. (4′)

公式 ① 每前进一步需计算两个函数值,公式 ② 每前进一步只需计算一个函数值. (2′)

(2) 公式 ① 是一个单步方法,只需一个初始值 y_0,可取 $y_0 = \eta$. (2′)

公式 ② 是一个两步方法,需两个初始值 y_0 和 y_1,可取

$$y_0 = \eta, \qquad y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + hf(x_1, y_0 + hf(x_0, y_0))]$$

(3′)

7. 解　幂法计算公式:取 u_0,作如下迭代:

$$v_k = Au_{k-1}, \qquad m_k = \max(v_k), \qquad u_k = \frac{v_k}{m_k}, \qquad k = 1,2,\cdots$$

其中 $\max(v_k)$ 表示 v_k 中(首次出现的)绝对值最大的分量,则

$$\lambda_1 = \lim_{k\to\infty}(m_k) \tag{3'}$$

计算如下:

$$u_0 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$v_1 = Au_0 = \begin{bmatrix}99 & 3\\33 & 0.9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}102\\33.9\end{bmatrix}$$

$$m_1 = 102 \tag{3'}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix}1\\0.3323529\end{bmatrix}$$

$$v_2 = Au_1 = \begin{bmatrix}99 & 3\\33 & 0.9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0.3323529\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}99.9970587\\33.29911761\end{bmatrix}$$

$$m_2 = 99.9970587 \tag{3'}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix}1\\0.3330097\end{bmatrix}$$

$$v_3 = Au_2 = \begin{bmatrix}99 & 3\\33 & 0.9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0.3330097\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}99.9990029\\33.29970087\end{bmatrix}$$

$$m_3 = 99.9990029 \tag{3'}$$

$$u_3 = \begin{bmatrix}1\\0.33300033\end{bmatrix}$$

$$v_4 = Au_3 = \begin{bmatrix}99 & 3\\33 & 0.9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0.33300033\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}99.99900099\\33.2997003\end{bmatrix}$$

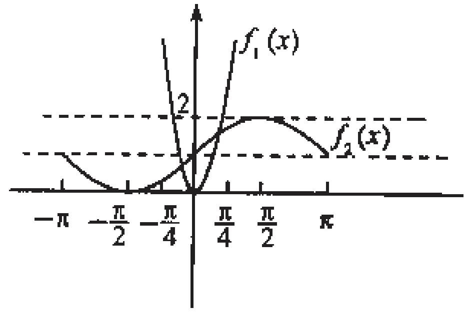
$$m_4 = 99.9990099$$

$$\lambda_1 \approx 99.999 \tag{3'}$$

2000 年秋季攻读博士学位研究生入学考试

1. 解　(1)　$$9x^2 = 1 + \sin x \tag{①}$$

作 $f_1(x) = 9x^2, f_2(x) = 1 + \sin x$ 的图像.



$$f_1\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)=9\left(\frac{\pi}{4}\right)^2>9\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=5.06$$

由图像可知①有2个根

$$x_1^*\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right),\qquad x_2^*\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\qquad(4')$$

(2) 在$\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$内将①改写为等价方程

$$x=-\frac{1}{3}\sqrt{1+\sin x},\qquad x\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$$

$$\varphi_1(x)=-\frac{1}{3}\sqrt{1+\sin x}$$

$$\varphi_1'(x)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}=-\frac{1}{6}\sqrt{1-\sin x}<0,\qquad x\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$$

当$x\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$时

$$\varphi_1(x)\in\left[\varphi(0),\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left[-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right]\subset\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$$

$$|\varphi_1'(x)|\leqslant\frac{1}{6}$$

∴ 迭代格式

$$x_{k+1}=-\frac{1}{3}\sqrt{1+\sin x_k},\qquad k=0,1,2,\cdots\qquad(3')$$

对任意$x_0\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$均收敛于$x_1^*$.取$x_0=0$,得

$$x_1=-\frac{1}{3},\qquad x_2=-0.273415,\qquad x_3=-0.284796$$

$$x_4=-0.282654,\qquad x_5=-0.283058,\qquad x_6=-0.282982$$

∴ $x_1^*=-0.283$ (3′)

当$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时,将①改写为等价方程

$$x=\frac{1}{3}\sqrt{1+\sin x},\qquad x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$$

记

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{3}\sqrt{1+\sin x}$$

则

$$\varphi_2'(x) = \frac{1}{6}\cdot\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} = \frac{1}{6}\sqrt{1-\sin x}$$

当 $x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时

$$\varphi_2(x) \in \left[\varphi(0),\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[\frac{1}{3},\frac{1}{3}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right] \subset \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$$

$$|\varphi_2'(x)| \leqslant \frac{1}{6}$$

∴ 迭代格式

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}\sqrt{1+\sin x_k},\qquad k = 0,1,2,\cdots$$

对任意 $x_0 \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$收敛于 x_2^*. (3′)

取 $x_0 = 0$,得到

$$x_1 = \frac{1}{3},\qquad x_2 = 0.384013,\qquad x_3 = 0.390817$$

$$x_4 = 0.391712,\qquad x_5 = 0.391829$$

$\therefore x_2^* = 0.392$ (3′)

2. 解

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[s_3=2,\ s_4=1]{s_1=-2,\ s_2=1} \left[\begin{array}{c|cccc} -2 & -2 & 3 & 5 & -1 \\ \hline -\frac{1}{2} & 2 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 & -2 & 7 \\ -\frac{1}{2} & 3 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \quad (3')$$

$$\xrightarrow[s_4=2,\ r_2\leftrightarrow r_3]{s_2=1,\ s_3=3} \left[\begin{array}{c|cccc} -2 & -2 & 3 & 5 & -1 \\ \hline -1 & 5 & 3 & -2 & 7 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 1 & -2 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 3 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} -2 & -2 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 6 & 3 & 6 \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & -2 & 4 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \quad (3')$$

反

$$\xrightarrow[s_4=-\frac{1}{2}]{s_3=\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}-2 & -2 & 3 & 5 & -1\\ -1 & 3 & 6 & 3 & 6\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -1 & 3 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-2 & -2 & 3 & 5 & -1\\ -1 & 3 & 6 & 3 & 6\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -1 & 3 & -3\end{bmatrix}$$

(4′)

等价的三角方程组为

$$\begin{cases}-2x_1-2x_2+3x_3+5x_4=-1\\ 3x_2+6x_3+3x_4=6\\ \frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4=\frac{3}{2}\\ 3x_4=-3\end{cases}$$

回代得 $x_4=-1, x_3=2, x_2=-1, x_1=2$.

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{bmatrix}2\\-1\\2\\-1\end{bmatrix}$. (4′)

3. 解 (1) 构造差商表

a	$f(a)$			
		$f[a,c]$		
c	$f(c)$		$f[a,c,c]$	
		$f'(c)$		$f[a,c,,c,b]$
c	$f(c)$		$f[c,c,b]$	
		$f[c,b]$		
b	$f(b)$			

其中

$$f[a,c]=\frac{f(c)-f(a)}{c-a},\qquad f[c,b]=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

$$f[a,c,c]=\frac{f'(c)-f[a,c]}{c-a},\qquad f[c,c,b]=\frac{f[c,b]-f'(c)}{b-c}$$

$$f[a,c,c,b]=\frac{f[c,c,b]-f[a,c,c]}{b-a} \tag{6′}$$

$$p_3(x)=f(a)+f[a,c](x-a)+f[a,c,c](x-a)(x-c)$$
$$+f[a,c,c,b](x-a)(x-c)^2 \tag{2′}$$

(2) 设

$$f(x)-p_3(x)=K(x)\omega(x) \tag{①}$$

其中

$$\omega(x)=(x-a)(x-c)^2(x-b)$$

现考虑 $x\neq a,c,b$. 令

$$R(t)=f(t)-p_3(t)-K(x)\omega(t)$$

则

$$R(a)=0, R(c)=R'(c)=0, R(b)=0, R(x)=0$$

即 a,b,c,x 为 $R(t)$ 的 4 个互异的零点. 根据 Rolle 定理,在两相邻零点之间至少有 $R'(t)$ 的 1 个零点,加之 c 为 $R'(t)$ 的 1 个零点,知 $R'(t)$ 至少有 4 个互异的零点,再由 Rolle 定理知 $R''(t)$ 至少有 3 个互异的零点, $R'''(t)$ 至少有 2 个互异的零点, $R^{(4)}(t)$ 至少有 1 个零点,记为 ξ,即 $R^{(4)}(\xi)=0$. 注意到

$$R^{(4)}(t)=f^{(4)}(t)-K(x)\cdot 4!$$

$\therefore f^{(4)}(\xi)-4!K(x)=0$

于是 $K(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)$. 代入 ① 得到当 $x\neq a,b,c$ 时

$$f(x)-p_3(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\omega(x) \qquad (6')$$

此外,当 $x=a,b,c$ 之时,左右两边均为 0,故结论也是成立的.

4. **解** 设 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x^2$, $f(x)$ 在 M_2 中的最佳平方逼近元为

$$p(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)$$

则 a_0 和 a_1 满足如下正规方程组

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,f)\\ (\varphi_1,f)\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix}2 & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix} \qquad (8')$$

解得

$$a_1=\frac{15}{16},\qquad a_0=\frac{3}{16}$$

$\therefore$ 所求最佳平方逼近元为 $p(x)=\frac{3}{16}+\frac{15}{16}x^2$. $\qquad (4')$

5. **解** (1) 当 $f(x)=1$ 时,

左 $=\int_{-1}^{1}1\mathrm{d}x=2$, 右 $=\frac{1}{9}(5+8+5)=2$, 左 = 右;

当 $f(x) = x$ 时，

左 $= \int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = 0$，右 $= \frac{1}{9}\left[5\times\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+8\times 0+5\times\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]=0$，左 = 右；

当 $f(x) = x^2$ 时，

左 $= \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$，右 $= \frac{1}{9}\left[5\times\frac{3}{5}+8\times 0+5\times\frac{3}{5}\right]=\frac{2}{3}$，左 = 右；

当 $f(x) = x^3$ 时，

左 $= \int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x = 0$，右 $= \frac{1}{9}\left[5\times\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3+8\times 0^3+5\times\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3\right]=0$，左 = 右；

当 $f(x) = x^4$ 时，

左 $= \int_{-1}^{1} x^4\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$，右 $= \frac{1}{9}\left[5\times\frac{9}{25}+8\times 0^4+5\times\frac{9}{25}\right]=\frac{2}{5}$，左 = 右；

当 $f(x) = x^5$ 时，

左 $= \int_{-1}^{1} x^5\mathrm{d}x = 0$，右 $= \frac{1}{9}\left[5\times\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5+8\times 0^5+5\times\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5\right]=0$，左 = 右；

当 $f(x) = x^6$ 时，

左 $= \int_{-1}^{1} x^6\mathrm{d}x = \frac{2}{7}$，右 $= \frac{1}{9}\left[5\times\left(\frac{3}{5}\right)^3+8\times 0^6+5\times\left(\frac{3}{5}\right)^3\right]=\frac{1}{9}\times\frac{54}{25}$ $=\frac{6}{25}$，左 $\neq$ 右. (6′)

即所给求积公式对 5 次多项式精确成立，对 6 次多项式不精确成立，又因为求积点共有 3 个，故所给求积公式的 3 点 Gauss 公式. (2′)

(2)
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \xrightarrow{x=\frac{1}{2}(1+t)} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(1+t)^2}\mathrm{d}t$$
$$\approx \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\left[5\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2}+8\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(1+0)^2}+5\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2}\right] \quad (4')$$
$$= \frac{1}{18}[5\times 0.987377+8\times 0.778801+5\times 0.455073]$$
$$= 0.776814 \quad (2')$$

6. **解** $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}\left[f(x_n, y_n) + 3f\left(x_n+\frac{2}{3}h, y_n+\frac{2}{3}hf(x_n, y_n)\right)\right]$

局部截断误差为

$$R_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - \frac{h}{4}\left[y'(x_n) + 3f\left(x_n+\frac{2}{3}h, y(x_n)+\frac{2}{3}hy'(x_n)\right)\right]$$
(2′)

$$= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y'''(x_n) + O(h^4) - y(x_n)$$

$$- \frac{h}{4}\left\{y'(x_n) + 3\left[f(x_n, y(x_n)) + \frac{2}{3}h\frac{\partial f(x_n, y(x_n))}{\partial x}\right.\right.$$

$$- \frac{2}{3}hy'(x_n)\frac{\partial f(x_n, y(x_n))}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}h\right)^2\frac{\partial^2 f(x_n, y(x_n))}{\partial x^2}\right.$$

$$+ 2\cdot\frac{2}{3}h\cdot\frac{2}{3}hy'(x_n)\frac{\partial^2 f(x_n, y(x_n))}{\partial x\partial y}$$

$$\left.\left.\left. + \left(\frac{2}{3}hy'(x_n)\right)^2\frac{\partial^2 f(x_n, y(x_n))}{\partial y^2}\right) + O(h^3)\right]\right\} \qquad (3')$$

$$= hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y'''(x_n)$$

$$- \frac{h}{4}\left\{4y'(x_n) + 2h\left[\frac{\partial f(x_n, y(x_n))}{\partial x} + y'(x_n)\frac{\partial f(x_n, y(x_n))}{\partial y}\right]\right.$$

$$+ \frac{2}{3}h^2\left[\frac{\partial^2 f(x_n, y(x_n))}{\partial x^2} + 2y'(x_n)\frac{\partial^2 f(x_n, y(x_n))}{\partial x\partial y}\right.$$

$$\left.\left. + (y'(x_n))^2\frac{\partial^2 f(x_n, y(x_n))}{\partial y^2}\right]\right\} + O(h^4)$$

注意到

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

$$y''(x) = \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x} + y'(x)\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} \qquad (1')$$

$$y'''(x) = \frac{\partial^2 f(x, y(x))}{\partial x^2} + 2y'(x)\frac{\partial^2 f(x, y(x))}{\partial x\partial y}$$

$$+ (y'(x))^2\frac{\partial^2 f(x, y(x))}{\partial y^2} + y''(x)\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} \qquad (2')$$

有

$$R_{n+1} = hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y'''(x_n) - hy'(x_n) - \frac{h^2}{2}y''(x_n)$$

$$- \frac{h^3}{6}\left[y'''(x_n) - y''(x_n)\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y(x_n))\right] + O(h^4)$$

$$= \frac{h^3}{6}y''(x_n)\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y(x_n)) + O(h^4) \qquad (4')$$

所以所给求解公式是 2 阶的. (2′)

7. 解

$$Ax^* = b$$

$$\| b \| = \| Ax^* \| \leqslant \| A \| \| x^* \|, \frac{1}{\| x^* \|} \leqslant \frac{\| A \|}{\| b \|} \qquad (3')$$

$$\gamma = b - A\tilde{x} = Ax^* - A\tilde{x} = A(x^* - \tilde{x})$$

$$x^* - \tilde{x} = A^{-1}\gamma$$

$$\| x^* - \tilde{x} \| \leqslant \| A^{-1} \| \, \| \gamma \| \qquad (3')$$

$$\frac{\| x^* - \tilde{x} \|}{\| x^* \|} \leqslant \frac{\| A^{-1} \| \, \| \gamma \| \cdot \| A \|}{\| b \|} = \| A \| \cdot \| A^{-1} \| \frac{\| \gamma \|}{\| b \|}$$

$$= \mathrm{Cond}(A) \frac{\| \gamma \|}{\| b \|} \qquad (2')$$

8. 解　将$[a,b]$作 N 等分，记 $h = \dfrac{b-a}{N}$，$x_i = a + ih$，$0 \leqslant i \leqslant N$，

应用复化梯形公式可得

$$y(x_i) = h\left[\frac{1}{2}k(x_i,x_0)y(x_0) + \sum_{j=1}^{N-1} k(x_i,x_j)y(x_j) + \frac{1}{2}k(x_i,x_N)y(x_N)\right] + f(x_i) + O(h^2), \quad 0 \leqslant i \leqslant N \qquad (3')$$

略去 $O(h^2)$，并令 $y(x_i)$ 为 y_i 得到

$$y_i = h\left[\frac{1}{2}k(x_i,x_0)y_0 + \sum_{j=1}^{N-1} k(x_i,x_j)y_j + k(x_i,x_N)y_N\right] + f(x_i), \quad 0 \leqslant i \leqslant N \qquad (2')$$

或

$$-h\left[\frac{1}{2}k(x_i,x_0)y_0 + \sum_{j=1}^{N-1} k(x_i,x_j)y_j + k(x_i,x_N)y_N\right] + y_i = f(x_i), \quad 0 \leqslant i \leqslant N \qquad ②$$

记

$$\langle k_i, y \rangle = h\left[\frac{1}{2}k(x_i,x_0)y_0 + \sum_{j=1}^{N-1} k(x_i,x_j)y_j + k(x_i,x_N)y_N\right]$$

则 ② 可写为

$$-\langle k_i, y \rangle + y_i = f(x_i), \qquad 0 \leqslant i \leqslant N$$

上式为关于 $y_0, y_1, \cdots, y_N$ 的线性方程组.

由条件 $\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \int_a^b |k(x,s)| \mathrm{d}s \leqslant \rho < 1$ 知当 h 适当小时 $\langle |k_i|, 1 \rangle \leqslant \dfrac{1+\rho}{2} < 1$.

此时 ② 的系数矩阵为严格对角占优矩阵，故 ② 是惟一可解的.　(3′)

2001 年春季攻读博士学位研究生入学考试

1. 解　$L = 50$，$|e(L)| \leqslant 0.01$；$W = 25$，$|e(W)| \leqslant 0.01$；　$H = 20$，$|e(H)| \leqslant 0.01$

容积

$$V = V(L, W, H) = LWH = 50 \times 25 \times 20 = 25000(\mathrm{m}^3) \qquad (2')$$

由

$$\begin{aligned} e(V) &= V(L^*, W^*, H^*) - V(L, W, H) \\ &\approx \frac{\partial V}{\partial L}(L^* - L) + \frac{\partial V}{\partial W}(W^* - W) + \frac{\partial V}{\partial H}(H^* - H) \\ &= WHe(L) + LHe(W) + LWe(H) \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} |e(V)| &\approx WHe(L) + LHe(W) + LWe(H) \\ &\leqslant WH|e(L)| + LH|e(W)| + LW|e(H)| \\ &\leqslant 25 \times 20 \times 0.01 + 50 \times 20 \times 0.01 + 50 \times 25 \times 0.01 \\ &= 27.50(\mathrm{m}^3) \end{aligned} \qquad (5')$$

由 $e_r(V) = \dfrac{e(V)}{V}$,知

$$|e_r(V)| \leqslant \frac{27.50}{25000} = 0.11\% = 1.1 \times 10^{-3} \qquad (3')$$

或由 $e_r(V) \approx e_r(L) + e_r(W) + e_r(H)$ 知

$$\begin{aligned} |e_r(V)| &\leqslant |e_r(L)| + |e_r(W)| + |e_r(H)| \\ &\leqslant \frac{0.01}{50} + \frac{0.01}{25} + \frac{0.01}{20} = 0.0011 \end{aligned}$$

2. **解**　记

$$\varphi(x) = \frac{x(x^2 + 3a)}{3x^2 + a}$$

则

$$(3x^2 + a)\varphi(x) = x^3 + 3ax \qquad ①$$

易知

$$\varphi(\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}(a + 3a)}{3a + a} = \sqrt{a} \qquad ②(2')$$

对 ① 两边求 1 阶导数得

$$6x\varphi(x) + (3x^2 + a)\varphi'(x) = 3x^2 + 3a$$

令 $x = \sqrt{a}$ 并利用 ② 得

$$6\sqrt{a}\sqrt{a} + (3a + a)\varphi'(a) = 6a$$

$$\therefore \varphi'(\sqrt{a}) = 0 \qquad ③(3')$$

对 ① 两边求 2 阶导数得

$$6\varphi(x) + 12x\varphi'(x) + (3x^2 + a)\varphi''(x) = 6x$$

令 $x = \sqrt{a}$,并利用 ② 和 ③ 得

$$6\sqrt{a}+12\sqrt{a}\cdot 0+(3a+a)\varphi''(\sqrt{a})=6\sqrt{a}$$

得

$$\varphi''(\sqrt{a})=0 \qquad ④(3')$$

对 ① 两边求 3 阶导数得

$$3\times 6\varphi'(x)+3\times(6x)\varphi''(x)+(3x^2+a)\varphi'''(x)=6$$

令 $x=\sqrt{a}$,并利用 ② ~ ④ 得

$$\varphi'''(\sqrt{a})=\frac{3}{2a} \qquad ⑤(3')$$

由 ② ~ ⑤ 知所给迭代公式是 3 阶收敛的,且有 (1′)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-\sqrt{a}}{(x_k-\sqrt{a})^3}=\frac{\varphi'''(\sqrt{a})}{3!}=\frac{1}{4a} \qquad (3')$$

3. **解** Gauss-Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=4-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)}=(7-2x_1^{(k+1)}-3x_3^{(k)})/5 \\ x_3^{(k+1)}=(-1+2x_1^{(k+1)}+2x_2^{(k+1)})/3 \end{cases} \qquad (6')$$

Gauss-Seidel 迭代矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 2\lambda & 5\lambda & 3 \\ -2\lambda & -2\lambda & 3\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (5')$$

$$\lambda(15\lambda^2-12)=0$$

$$\lambda_1=0,\qquad \lambda_2=\sqrt{0.8},\qquad \lambda_3=-\sqrt{0.8}$$

$$\rho(G)=\sqrt{0.8}<1$$

∴Gauss-Seidel 迭代格式收敛. (4′)

4. **解** 设 $f(x)$ 在[1,3] 上的 1 次最佳一致逼近多项式为

$$p_1(x)=a_0+a_1x$$

由于 $f'(x)=3x^2, f''(x)=6x$;当 $x\in[1,3]$ 时 $f''(x)>0$,所以 $f(x)$ 和 $p_1(x)$ 确有 3 个交错偏差点

$$x_0=1,\qquad x_1(1<x_1<3),\qquad x_2=3 \qquad (3')$$

由

$$\begin{cases} f(x_0)-p_1(x_0)=-[f(x_1)-p_1(x_1)]=f(x_2)-p_1(x_2) \\ f'(x_1)-p_1'(x_1)=0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases}1-(a_0+a_1)=-[x_1^3-(a_0+a_1x_1)]=3^3-(a_0+3a_1)\\3x_1^2-a_1=0\end{cases}\qquad(6')$$

解得

$$a_1=13,\qquad x_1=\sqrt{\frac{13}{3}},\qquad a_0=-\left(6+\frac{13}{3}\sqrt{\frac{13}{3}}\right)\qquad(3')$$

因而 $f(x)$ 的 1 次最佳一致逼近多项式为

$$p_1(x)=-\left(6+\frac{13}{3}\sqrt{\frac{13}{3}}\right)+13x=-15.0206+13x\qquad(3')$$

5. 解 (1) 当 $f(x)=1$ 时,左 $=\int_{-1}^{1}1\mathrm{d}x=2$,右 $=2$,左 = 右;

当 $f(x)=x$ 时,左 $=\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x=0$,右 $=0$,左 = 右;

当 $f(x)=x^2$ 时,左 $=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$,右 $=\frac{2}{3}$,左 = 右;

当 $f(x)=x^3$ 时,左 $=\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x=0$,右 $=0$,左 = 右;

当 $f(x)=x^4$ 时,左 $=\int_{-1}^{1}x^4\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$,右 $=\frac{2}{9}$,左 ≠ 右.

所给求积公式具有 3 次代数精度,因而为 Gauss 公式. (9′)

(2) 将 $[a,b]$ 作 n 等分,记 $h=\frac{b-a}{n}$,$x_i=a+ih,0\leqslant i\leqslant n$.

$$x_{i+\frac{1}{2}}=(x_i+x_{i+1})/2$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=x_{i+\frac{1}{2}}+\frac{h}{2}t}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\int_{-1}^{1}f\left(x_{i+\frac{1}{2}}+\frac{h}{2}t\right)\mathrm{d}t$$

$$\overset{利用(1)}{\approx}\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(x_{i+\frac{1}{2}}-\frac{h}{2\sqrt{3}}\right)+f\left(x_{i+\frac{1}{2}}+\frac{h}{2\sqrt{3}}\right)\right]$$

上式即为 2 点复化 Gauss 公式. (6′)

6. 解 取正整数 n,并记 $h=\frac{1}{n}$,$x_i=a+ih,0\leqslant i\leqslant n$.

(1) Euler 公式为

$$\begin{cases}y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i),\qquad 0\leqslant i\leqslant n-1\\y_0=\eta\end{cases}\qquad ③(4')$$

(2) Euler 公式的局部截断误差

$$R_{i+1} = y(x_{i+1}) - [y(x_i) + hf(x_i, y(x_i))]$$
$$= y(x_{i+1}) - y(x_i) - hy'(x_i)$$
$$= \frac{h^2}{2} y''(x_i + \theta_i h), \quad 0 < \theta_i < 1 \tag{2'}$$

即

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} y''(x_i + \theta_i h), \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1 \quad ④$$
$$y(x_0) = \eta$$

记 $e_i = y(x_i) - y_i, c = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |y''(x)|$. 将 ③ 和 ① 相减得

$$y(x_{i+1}) - y_{i+1} = y(x_i) - y_i + h[f(x_i, y(x_i)) - f(x_i, y_i)] + \frac{h^2}{2} y''(x_i + \theta_i h)$$

两边取绝对值,再用三角不等式及 ② 得

$$|e_{i+1}| \leqslant (1 + Lh)|e_i| + \frac{c}{2} h^2, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1 \tag{4'}$$

递推可得

$$|e_i| \leqslant (1+Lh)^i |e_0| + [(1+Lh)^{i-1} + (1+Lh)^{i-2} + \cdots + (1+Lh) + 1] \frac{c}{2} h^2$$
$$\leqslant \frac{(1+Lh)^i - 1}{(1+Lh) - 1} \cdot \frac{c}{2} h^2 \leqslant \frac{c}{2L} [e^{Lih} - 1] h$$
$$\leqslant \frac{c}{2L} [e^{L(b-a)} - 1] h, \quad 0 \leqslant i \leqslant n \tag{4'}$$

$\therefore \lim\limits_{h \to 0} \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} |e_i| = 0$

$\therefore$ Euler 公式的解收敛于 ① 的解. (1′)

7. 解　设与 λ_1 和 λ_2 相应的特征向量为 x_1 和 x_2,则有

$$Ax_1 = \lambda_1 x_2 \qquad Ax_2 = \lambda x_2$$

计算 λ_1 的幂法算法如下:取 u_0,

$$v_k = Au_{k-1}, \quad m_k = \max(v_k), \quad u_k = \frac{v_k}{m_k}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

其中 $\max(v_k)$ 表示 v_k 中首次出现的绝对值最大的分量.

有结论

$$\lambda_1 = \max_{k \to \infty} m_k \tag{5'}$$

证明如下:

$$u_k = \frac{1}{m_k}Au_{k-1} = \frac{1}{m_k}\frac{1}{m_{k-1}}A^2u_{k-2} = \cdots$$

$$= \frac{1}{m_k m_{k-1}\cdots m_1}A^k u_0 = \frac{A^k u_0}{\max(A^k u_0)} \qquad (2')$$

$$v_k = Au_{k-1} = A\cdot\frac{A^{k-1}u_0}{\max(A^{k-1}u_0)} = \frac{A^k u_0}{\max(A^{k-1}u_0)} \qquad (2')$$

设 $u_0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$,且 $\alpha_1 \neq 0$.这是可做到的.

$$A^k u_0 = A^k(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1\lambda_1^k x_1 + \alpha_2\lambda_2^k x_2 \qquad (2')$$

$$m_k = \frac{\max(A^k u_0)}{\max(A^{k-1}u_0)} = \frac{\max(\alpha_1\lambda_1^k x_1 + \alpha_2\lambda_2^k x_2)}{\max(\alpha_1\lambda_1^{k-1}x_1 + \alpha_2\lambda_2^{k-1}x_2)}$$

$$= \lambda_1\frac{\max\left(x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x_2\right)}{\max\left(x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k-1} x_2\right)}$$

由 $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$ 知 $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = \lambda$. (4′)

2001 年秋季攻读博士学位研究生入学考试

1. **解** (1) $e = 2.718281828\cdots$,所以 e 的具有 6 位有效数字近似值为 $\bar{e} = 2.71828$.
记 $\delta = e - \bar{e} = 0.1828\times10^{-5}$,$e_n = E_n - \widetilde{E}_n$, $n = 1,2,\cdots$.取 $\widetilde{E}_1 = 1$,计算得到

$\widetilde{E}_2 = \bar{e} - 2\widetilde{E}_1 = 0.71828$,	$e_2 = \delta - 2e_0 = \delta$
$\widetilde{E}_3 = \bar{e} - 3\widetilde{E}_2 = 0.56344$,	$e_3 = \delta - 3e_2 = -2\delta$
$\widetilde{E}_4 = \bar{e} - 4\widetilde{E}_3 = 0.46452$,	$e_4 = \delta - 4e_2 = 9\delta$
$\widetilde{E}_5 = \bar{e} - 5\widetilde{E}_4 = 0.39568$,	$e_5 = \delta - 5e_4 = -44\delta$
$\widetilde{E}_6 = \bar{e} - 6\widetilde{E}_5 = 0.34420$,	$e_6 = \delta - 6e_5 = 265\delta$
$\widetilde{E}_7 = \bar{e} - 7\widetilde{E}_6 = 0.30888$,	$e_7 = \delta - 7e_6 = -1854\delta$
$\widetilde{E}_8 = \bar{e} - 8\widetilde{E}_7 = 0.24724$,	$e_8 = \delta - 8e_7 = 14833\delta$
$\widetilde{E}_9 = \bar{e} - 9\widetilde{E}_8 = 0.49312$,	$e_9 = \delta - 9e_8 = -133496\delta$
$\widetilde{E}_{10} = \bar{e} - 10\widetilde{E}_9 = -2.21292$,	$e_{10} = \delta - 10e_9 = 1334959\delta$
$\widetilde{E}_{11} = \bar{e} - 11\widetilde{E}_{10} = 27.0604$,	$e_{11} = \delta - 11e_{10} = -14684548\delta$
$\widetilde{E}_{12} = \bar{e} - 12\widetilde{E}_{11} = -322.00652$,	$e_{12} = \delta - 12e_{11} = 161530027\delta$
$\widetilde{E}_{13} = \bar{e} - 13\widetilde{E}_{12} = 4188.80304$,	$e_{13} = \delta - 13e_{12} = -2099890352\delta$

显然计算过程不稳定. (6′)

(2) 证 $e_n = E_n - \tilde{E}_n$，则

$$\begin{cases} e_n = e - \bar{e} - n(E_{n-1} - \tilde{E}_{n-1}) = \delta - n e_{n-1}, & n = 2,3,4,\cdots \\ e_1 = E_1 - \tilde{E}_1 = 0 \end{cases}$$

$$|e_n| \geqslant n\, e_{n-1}| - \delta, \qquad n = 2,3,4,\cdots$$

$$|e_2| = |\delta - 2e_1| = \delta$$

$$|e_3| \geqslant 3|e_2| - \delta = 2\delta$$

$$|e_4| \geqslant 4|e_3| - \delta \geqslant 7\delta$$

一般地设 $|e_{n-1}| \geqslant c_{n-1}\delta$，则有

$$|e_n| \geqslant n \cdot c_{n-1}\delta - \delta = (nc_{n-1} - 1)\delta$$

$$\therefore \begin{cases} c_n \geqslant nc_{n-1} - 1, & n = 2,3,4,\cdots \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

令 $c_n = d_n + \frac{1}{2}$，则有

$$d_n + \frac{1}{2} \geqslant n\left(d_{n-1} + \frac{1}{2}\right) - 1 = nd_{n-1} + \frac{n}{2} - 1$$

当 $n \geqslant 3$ 时

$$d_n \geqslant nd_{n-1} + \frac{1}{2}(n - 3) \geqslant nd_{n-1}$$

因而

$$d_n \geqslant n!\frac{d_2}{2} = n!\left(c_2 - \frac{1}{2}\right)\Big/2 \geqslant \frac{1}{4} \cdot n!$$

由此易知 $c_n \geqslant \frac{1}{4}n! + \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{4}n!$，因而

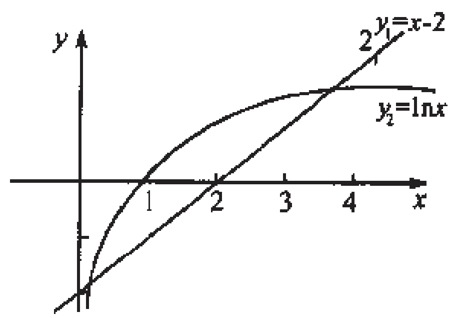
$$|e_n| \geqslant \frac{n!}{4}\delta \qquad (6')$$

2. 解

$$x - \ln x - 2 = 0 \qquad ①$$

(1)

$$x - 2 = \ln x$$



作 $y_1 = x - 2$ 和 $y_2 = \ln x$ 的图像知方程 ① 存在两个根 $x_1^* \in (0,1)$，$x_2^* \in (3,4)$.　　(4′)

(2) 将方程 ① 改写为

$$x = e^{x-2}$$

记

$$\varphi(x) = e^{x-2}$$

则

$$\varphi'(x) = e^{x-2}$$

当 $x \in [0,1]$ 时

$$\varphi(x) \in [\varphi(0), \varphi(1)] = [e^{-2}, e^{-1}] \subset [0,1]$$
$$|\varphi'(x)| \leqslant \varphi'(1) = e^{-1} < 1$$

任取 $x_0 \in [0,1]$，迭代格式

$$x_{k+1} = e^{x_k - 2}, \qquad k = 0,1,2,\cdots \tag{3′}$$

收敛，取 $x_0 = 0.5$，得

$$x_1 = 0.22313, \qquad x_2 = 0.16917, \qquad x_3 = 0.16028$$
$$x_4 = 0.15886, \qquad x_5 = 0.15864, \qquad x_6 = 0.15860$$

$\therefore x_1^* = 0.1586$　　(2′)

将方程 ① 改写为

$$x = 2 + \ln x$$

记

$$\varphi(x) = 2 + \ln x$$

则

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x}$$

当 $x \in [3,4]$ 时

$$\varphi(x) \in [\varphi(3), \varphi(4)] = [2 + \ln 3, 2 + \ln 4] \subset [3,4]$$
$$|\varphi'(x)| \leqslant \frac{1}{3}$$

任取 $x_0 \in [3,4]$，迭代格式

$$x_{k+1} = 2 + \ln x_k, \qquad k = 0,1,2,\cdots \tag{3′}$$

收敛. 取 $x_0 = 3.5$，得

$$x_1 = 3.2528, \qquad x_2 = 3.1795, \qquad x_3 = 3.1567$$
$$x_4 = 3.1495, \qquad x_5 = 3.1472, \qquad x_6 = 3.1465$$
$$x_7 = 3.1463, \qquad x_8 = 3.1462$$

$\therefore x_2^* = 3.146$　　(2′)

3. 解 $\begin{bmatrix} 12 & -3 & 6 & 15 \\ -18 & 3 & -2 & -15 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -2 & -15 \\ 12 & -3 & 6 & 15 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ (2′)

$$\xrightarrow[r_3+\frac{1}{18}r_1]{r_2+\frac{2}{3}r_1} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -2 & -15 \\ 0 & -1 & \frac{14}{3} & \frac{15}{3} \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{9} & \frac{31}{6} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -2 & -15 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{9} & \frac{31}{6} \\ 0 & -1 & \frac{14}{3} & \frac{15}{3} \end{bmatrix}$$

(6′)

$$\xrightarrow{r_3+\frac{6}{7}r_2} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -2 & -15 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{9} & \frac{31}{6} \\ 0 & 0 & \frac{44}{7} & \frac{66}{7} \end{bmatrix}$$ (1′)

同解的三角方程组为

$$\begin{cases} -18x_1+3x_2-2x_3=-15 \\ \frac{7}{6}x_2+\frac{17}{9}x_3=\frac{31}{6} \\ \frac{44}{7}x_3=\frac{66}{7} \end{cases}$$

回代得 $x_3=\frac{3}{2}, x_2=2, x_1=1.$ (3′)

4. 解 设 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一种范数.

(1) 如果

$$\lim_{k\to\infty}\|x^{(k)}-x^*\|=0$$

则称向量序列 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于向量 x^*. (3′)

(2) $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\|x^{(k)}-x^*\|=0$.

$$\|Bx^{(k)}-Bx^*\|=\|(Bx^{(k)}-x^*)\|\leqslant\|B\|\cdot\|x^{(k)}-x^*\|$$

$$\because \lim_{k\to\infty}\|Bx^{(k)}-Bx^*\|\leqslant\lim_{k\to\infty}\|B\|\cdot\|x^{(k)}-x^*\|$$

$$=\|B\|\lim_{k\to\infty}\|x^{(k)}-x^*\|=0$$

$\therefore \lim\limits_{k\to\infty}Bx^{(k)}=Bx^*$ (5′)

5. 解 (1) $L_2(x)=\sum\limits_{i=0}^{2}f(x_i)\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{2}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

$$= f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$+ f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \qquad (3')$$

$$f(x) - L_2(x) = \frac{1}{3!}f'''(\xi)\prod_{i=0}^{2}(x-x_i)$$

$$= \frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \qquad (2')$$

(2) $f'(x_1) \approx L_2'(x_1)$

$$= f(x_0)\frac{x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{x_1-x_0+x_1-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$+ f(x_2)\frac{x_1-x_0}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{1}{2h}[f(x_2) - f(x_0)] \qquad (3')$$

$$f'(x_1) - L_2'(x_1)$$

$$= \frac{1}{6}[(x-x_1)f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_2)]'\big|_{x=x_1}$$

$$= \frac{1}{6}[f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_2) + (x-x_1)(f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_2))']\big|_{x=x_1}$$

$$= \frac{1}{6}f'''(\xi)(x_1-x_0)(x_1-x_2)$$

$$= -\frac{1}{6}f'''(\xi)h^2 \qquad (2')$$

6. **解** (1) 设 $f(x)$ 的 1 次最佳平方逼近多项式为 $p(x) = a_0 + a_1 x$. 记

$$\varphi_0(x) = 1, \qquad \varphi_1(x) = x$$

则

$$(\varphi_0,\varphi_0) = \int_0^1 1^2\mathrm{d}x = 1, \qquad (\varphi_0,\varphi_1) = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$(\varphi_1,\varphi_1) = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}, \qquad (\varphi_0,f) = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

$$(\varphi_1,f) = \int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$$

法方程组为

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad (4')$$

解得

$$a_0 = -\frac{1}{6}, a_1 = 1$$

所以

$$p(x) = -\frac{1}{6} + x \qquad (3')$$

(2) 设 $f(x)$ 的 1 次最佳一致逼近多项式为 $q(x) = b_0 + b_1 x$.

由于 $f''(x) = 2 > 0$,所以 $f(x)$ 与 $q(x)$ 有 3 个交错偏差点

$$0, x_1 (0 < x_1 < 1), 1$$

$$\begin{cases} f(0) - q(0) = -[f(x_1) - q(x_1)] = f(1) - q(1) \\ f'(x_1) - q'(x_1) = 0 \end{cases}$$

即

$$-b_0 = -[x_1^2 - (b_0 + b_1 x_1)] = 1 - (b_0 + b_1)$$

$$2x_1 - b_1 = 0 \qquad (4')$$

解得 $b_1 = 1, x_1 = \frac{1}{2}, b_0 = -\frac{1}{8}$.

所以

$$q(x) = -\frac{1}{8} + x \qquad (3')$$

7. 解　记 $x_i = a + ih, 0 \leqslant i \leqslant n, h = \frac{b-a}{n}, x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$.

(1)

$$T_n = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

$$S_n = \frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})\right] \qquad (4')$$

(2)

$$T_{2n} = \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i) + 2f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})\right]$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n &= \frac{4}{3}\cdot\frac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i) + 2f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})\right] \\ &\quad - \frac{1}{3}\cdot\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})] \\ &= \frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}\left\{2\left[f(x_i) + 2f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})\right] \right. \\ &\quad \left. - [f(x_i) + f(x_{i+1})]\right\} \\ &= \frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})\right] = S_n \qquad (6') \end{aligned}$$

8. 解 (1) 如果求积公式

$$I_N(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

的代数精度为 $2n+2$,则称该求积公式为 Gauss 公式. (3′)

(2) 考虑求积公式

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) \qquad ②$$

当 $f(x) = 1$ 时,左 $= 1$,右 $= A_0 + A_1$;

当 $f(x) = x$ 时,左 $= \frac{1}{2}$,右 $= A_0x_0 + A_1x_1$;

当 $f(x) = x^2$ 时,左 $= \frac{1}{3}$,右 $= A_0x_0^2 + A_1x_1^2$;

当 $f(x) = x^3$ 时,左 $= \frac{1}{4}$,右 $= A_0x_0^3 + A_1x_1^3$.

要使求积公式 ② 的代数精度为 3,当且仅当

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 1 \\ A_0x_0 + A_1x_1 = \frac{1}{2} \\ A_0x_0^2 + A_1x_1^2 = \frac{1}{3} \\ A_0x_0^3 + A_1x_1^3 = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad ③(3')$$

解得

$$A_0 = A_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

所以区间$[0,1]$上的 2 点 Gauss 求积公式为

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\right] \qquad (4')$$

注:求解 ③ 的简便方法.为了求积公式 ② 的代数精度高,求积节点 x_0, x_1 应跟求积区间的中点$\frac{1}{2}$对称,故可设 $x_0 = \frac{1}{2} - \alpha, x_1 = \frac{1}{2} + \alpha(\alpha > 0)$,且求积系数 A_0 和 A_0 相等,即 $A_0 = A_1$.由 ③ 的第 1 式得到 $A_0 = A_1 = \frac{1}{2}$.再由 ③ 的第 3 式得 $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.于是 $x_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right), x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.可以验证如此得到的 A_0, A_1, x_0, x_1 满足 ③ 的所有式子.

9. 解 局部截断误差为

$$R_{i+1} = y(x_{i+1}) - y(x_i)$$

$$-\frac{h}{12}[23f(x_i,y(x_i))-16f(x_{i-1},y(x_{i-1}))+5f(x_{i-2},y(x_{i-2}))]$$

(2′)

$$=y(x_{i+1})-y(x_i)-\frac{h}{12}[23y'(x_i)-16y'(x_{i-1})+5y'(x_{i-2})]\quad(1')$$

$$=y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{1}{2}h^2y''(x_i)+\frac{1}{6}h^3y'''(x_i)+\frac{1}{24}h^4y^{(4)}(x_i)$$

$$+O(h^5)-y(x_i)\quad(2')$$

$$-\frac{h}{12}\Big[23y'(x_i)-16\Big(y'(x_i)-hy''(x_i)+\frac{h^2}{2}y'''(x_i)$$

$$-\frac{h^3}{6}y^{(4)}(x_i)+O(h^4)\Big)\quad(2')$$

$$+5\Big(y'(x_i)-2hy''(x_i)+\frac{4h^2}{2}y'''(x_i)-\frac{8h^3}{6}y^{(4)}(x_i)+O(h^4)\Big)\Big]$$

(2′)

$$=\frac{3}{8}h^4y^{(4)}(x_i)+O(h^5)\quad(1')$$

所给公式是 3 阶的.

2002 年春季攻读博士学位研究生入学考试

1\. **解** 记 $x_1^*=\sqrt{201}, x_2^*=\sqrt{200}, x_1=14.1774, x_2=14.1421$,则

$$|e(x_1)|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-4},\qquad |e(x_2)|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-4}$$

$$A=\sqrt{201}-\sqrt{200}\approx14.1774-14.1421=0.0353\qquad ①(2')$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{201}+\sqrt{200}}\approx\frac{1}{14.1774+14.1421}=\frac{1}{28.3195}=0.0353113579$$

②(2′)

$$u(x_1,x_2)=x_1-x_2,\qquad v(x_1,x_2)=\frac{1}{x_1+x_2}$$

由

$$e(x_1-x_2)\approx e(x_1)-e(x_2)$$

得

$$|e(x_1-x_2)|\approx|e(x_1)-e(x_2)|\leqslant|e(x_1)|+|e(x_2)|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-4}+\frac{1}{2}\times10^{-4}=10^{-4}<\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

所以算法 ① 至少具有 2 位有效数字. (4′)

由

$$e\left(\frac{1}{x_1+x_2}\right)\approx-\frac{1}{(x_1+x_2)^2}e(x_1+x_2)$$

$$|e(x_1+x_2)|\approx|e(x_1)+e(x_2)|\leqslant|e(x_1)|+|e(x_2)|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-4}+\frac{1}{2}\times10^{-4}\leqslant10^{-4}$$

得

$$\left|e\left(\frac{1}{x_1+x_2}\right)\right|\approx\frac{1}{(x_1+x_2)^2}|e(x_1+x_2)|\leqslant\left(\frac{1}{28.31952}\right)^2\times10^{-4}$$

$$=0.12469\times10^{-6}<\frac{1}{2}\times10^{-6}$$

所以算法 ② 至少具有 5 位有效数字. (4′)

注:由 $u^*=v^*$ 及 $u^*-u=v^*-v+v-u$ 得

$$|u^*-u|\leqslant|v^*-v|+|v-u|\leqslant0.12469\times10^{-6}+0.0000113579$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-4}$$

$$|u^*-u|\geqslant|u-v|-|v^*-v|=0.0000113579-0.12469\times10^{-6}$$

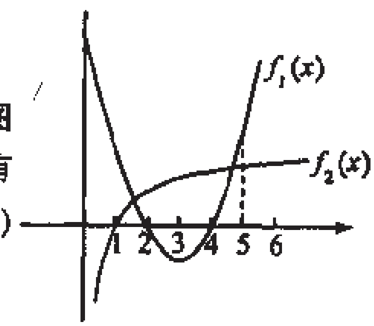
$$>\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

所以 u 具有 3 位有效数字. (2′)

2. **解** (1) 改写方程 $x^2-6x-\ln x+8=0$ 为

$$x^2-6x+8=\ln x$$

作函数 $f_1(x)=x^2-6x+8, f_2(x)=\ln x$ 的图像,知 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 有两个交点.因而原方程有两个根 $x_1^*\in(1,2), x_2^*\in(4,5)$. (3′)



(2)
$$x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{x^2-6x-\ln x+8}{2x-6-\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{2x^2-6x-1-(x^2-6x-\ln x+8)}{2x-6-\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{x^2+\ln x-9}{2x-6-\frac{1}{x}}$$

Newton 迭代格式为

$$x_{k+1}=\frac{x_k^2+\ln x_k-9}{2x_k-6-\frac{1}{x_k}} \qquad (4')$$

取 $x_0 = 1.5$，计算得 $x_1 = 1.7303, x_2 = 1.7509, x_3 = 1.7509$，所以 $x_1^* = 1.751$； (3′)

取 $x_0 = 4.5$，计算得 $x_1 = 4.5915, x_2 = 4.5886, x_3 = 4.5886$，所以 $x_2^* = 4.589$. (3′)

3．解 (1) $$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3 & -5\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_1}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 3 & -5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+\frac{2}{3}r_1]{r_2-\frac{1}{3}r_1}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{11}{3}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{11}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\qquad(3')$$

$$\xrightarrow{r_3-\frac{1}{7}r_2}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{11}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7}\end{bmatrix}\qquad(2')$$

等价的三角方程组为

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=2\\ \frac{7}{3}x_2+\frac{11}{3}x_3=-\frac{11}{3}\\ \frac{1}{7}x_3=-\frac{1}{7}\end{cases}$$

回代得 $x_3=-1, x_2=0, x_1=1$. (4′)

(2) Gauss-Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)} = (-5 - x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)})/(-2)\\ x_2^{(k+1)} = -x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}\\ x_3^{(k+1)} = 2 - 3x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)}\end{cases}\qquad(3')$$

迭代矩阵 G 的特征方程为

$$\begin{vmatrix}-2\lambda & 1 & 3\\ \lambda & \lambda & 1\\ 3\lambda & 2\lambda & \lambda\end{vmatrix}=0\qquad(3')$$

$$\lambda(-2\lambda^2+3)=0$$

$$\lambda_1=0, \lambda_2=\sqrt{1.5}, \lambda_3=-\sqrt{1.5}$$

$\because \rho(G)=\sqrt{1.5}>1$，$\therefore$ Gauss-Seidel 迭代格式发散. (3′)

4. **解**　方法 1：

构造差商表

$$\begin{array}{llllll}
a & f(a) & & & & \\
 & & f'(a) & & & \\
a & f(a) & & f[a,a,c] & & \\
 & & f[a,c] & & f[a,a,c,b] & \\
c & f(c) & & f[a,c,b] & & f[a,a,c,b,b] \\
 & & f[c,b] & & f[a,c,b,b] & \\
b & f(b) & & f[c,b,b] & & \\
 & & f'(b) & & & \\
b & f(b) & & & &
\end{array}$$

其中

$$f[a,c]=\frac{f(c)-f(a)}{c-a},\qquad f[c,b]=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

$$f[a,a,c]=\frac{f[a,c]-f'(a)}{c-a}$$

$$f[a,c,b]=\frac{f[c,b]-f[a,c]}{b-a}$$

$$f[c,b,b]=\frac{f'(b)-f[c,b]}{b-c}$$

$$f[a,a,c,b]=\frac{f[a,c,b]-f[a,a,c]}{b-a}$$

$$f[a,c,b,b]=\frac{f[c,b,b]-f[a,c,b]}{b-a}$$

$$f[a,a,c,b,b]=\frac{f[a,c,b,b]-f[a,a,c,b]}{b-a}\tag{8'}$$

$$\begin{aligned}H(x)=&f(a)+f'(a)(x-a)+f[a,a,c](x-a)^2\\&+f[a,a,c,b](x-a)^2(x-c)\\&+f[a,a,c,b,b](x-a)^2(x-c)(x-b)\end{aligned}\tag{4'}$$

$$f(x)-H(x)=\frac{f^{(5)}(\eta)}{5!}(x-a)^2(x-c)(x-b)^2\tag{3'}$$

方法 2：作 3 次多项式 $p_2(x)$ 使得 $p_2(a)=f(a),p_2(c)=f(c),p_2(b)=f(c)$.

$$H_4(x)=p_2(x)+[A(x-c)+B](x-a)(x-c)(x-b)$$

由 $H_4'(a)=f'(a),H_4'(b)=f'(b)$，求 A、B.

5. **解**　(1) 如果求积公式 ① 的代数精度为 $2n+1$，则称 ① 为 Gauss 公式.　(4′)

(2) 当 $f(x)=1$ 时，② 右 $=A_0+A_1$，② 左 $=2$；

当 $f(x)=x$ 时，② 右 $=A_0x_0+A_1x_1$，② 左 $=0$；

当 $f(x)=x^2$ 时，② 右 $=A_0x_0^2+A_1x_1^2$，② 左 $=\frac{2}{3}$；

当 $f(x)=x^3$ 时,② 右 $=A_0x_0^3+A_1x_1^3$,② 左 $=0$.

要使 ② 为 Gauss 公式,当且仅当

$$\begin{cases} A_0+A_1=2 & ③ \\ A_0x_0+A_1x_1=0 & ④ \\ A_0x_0^2+A_1x_1^2=\dfrac{2}{3} & ⑤ \\ A_0x_0^3+A_1x_1^3=0 & ⑤ \end{cases} \quad (4')$$

首先可以肯定 $x_0\neq 0$,否则由 ④ 知 $A_1x_1=0$,但由 ⑤ 知 $A_1x_1^2=\dfrac{2}{3}$,矛盾.同理 $x_1\neq 0, A_0\neq 0, A_1\neq 0$.不妨假设 $x_0<x_1$.

④ - $x_0$⑤ 得

$$A_1(x_1-x_0)=-2x_0 \qquad ⑦$$

⑤ - $x_0$④ 得

$$A_1x_1(x_1-x_0)=\frac{2}{3} \qquad ⑤$$

⑤ - $x_0$⑤ 得

$$A_1x_1^2(x_1-x_0)=-\frac{2}{3}x_0 \qquad ⑨$$

将 ⑦ 代入 ⑧ 得

$$-2x_0x_1=\frac{2}{3} \quad 或 \quad -x_0x_1=\frac{1}{3} \qquad ⑩$$

将 ⑧ 代入 ⑨ 得

$$\frac{2}{3}x_1=-\frac{2}{3}x_0 \quad 或 \quad x_1=-x_0 \qquad ⑪$$

由 ⑩ 和 ⑪ 得

$$x_0=-\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_1=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad ⑫$$

将 ⑫ 代入 ④ 得

$$A_0-A_1=0 \qquad ⑫$$

由 ③ 和 ⑬ 解得

$$A_0=A_1=1 \qquad ⑭(6')$$

容易验证 ⑫ 和 ⑭ 为 ③ ~ ⑥ 的解.将 ⑫ 和 ⑭ 代入 ② 得 Gauss 求积公式

$$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x\approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad (2')$$

6. 解　所给预测校正公式为

9.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{12}h\left\{5f\left(x_{i+1}, y_i + \frac{1}{2}h\left[3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})\right]\right) + 8f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})\right\}$$

局部截断误差为

$$\begin{aligned}
R_{i+1} &= y(x_{i+1}) - y(x_i) - \frac{1}{12}h\left\{5f(x_{i+1}, y(x_i) + \frac{1}{2}h(3y'(x_i) - y'(x_{i-1}))) + 8y'(x_i) - y'(x_{i-1})\right\} && (3') \\
&= y(x_{i+1}) - y(x_i) - \frac{5}{12}hf(x_{i+1}, y(x_{i+1})) - \frac{8}{12}hy'(x_i) \\
&\quad + \frac{1}{12}hy'(x_{i-1}) + \frac{5}{12}h\left[f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) - f(x_{i+1}, y(x_i) + \frac{1}{2}h(3y'(x_i) - y'(x_{i-1})))\right] \\
&= y(x_{i+1}) - y(x_i) - \frac{5}{12}hy'(x_{i+1}) - \frac{2}{3}hy'(x_i) + \frac{1}{12}hy'(x_{i-1}) \\
&\quad + \frac{1}{12}\frac{\partial f(x_{i+1}, \eta_i)}{\partial y}\left[y(x_{i+1}) - y(x_i) - \frac{1}{2}h(3y'(x_i) - y'(x_{i-1}))\right] && (3') \\
&= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{1}{2}h^2y''(x_i) + \frac{1}{6}h^3y'''(x_i) \\
&\quad + \frac{1}{24}h^4y^{(4)}(x_i) + O(h^5) - y(x_i) \\
&\quad - \frac{5}{12}h\left[y'(x_i) + hy''(x_i) + \frac{h^2}{2}y'''(x_i) + \frac{1}{6}h^3y^{(4)}(x_i) + O(h^4)\right] \\
&\quad - \frac{2}{3}hy'(x_i) \\
&\quad + \frac{1}{12}h\left[y'(x_i) - hy''(x_i) + \frac{h^2}{2}y'''(x_i) - \frac{1}{6}h^3y^{(4)}(x_i) + O(h^4)\right] \\
&\quad + \frac{1}{12}h\frac{\partial f(x_{i+1}, \eta_i)}{\partial y}\left[hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + O(h^4)\right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{2}hy'(x_i) + \frac{1}{2}h\left(y'(x_i) - hy''(x_i) + \frac{h^2}{2}y'''(x_i) + O(h^3)\right)\right] && (5') \\
&= -\frac{1}{24}h^4y^{(4)}(x_i) + O(h^5) + \frac{1}{12}h\frac{\partial f(x_{i+1}, \eta_i)}{\partial y}\frac{5}{12}h^3y'''(x_i) + O(h^5) \\
&= \left[-\frac{1}{24}y^{(4)}(x_i) + \frac{5}{144}y'''(x_i)\frac{\partial f(x_{i+1}, \eta_i)}{\partial y}\right]h^4 + O(h^5) && (3')
\end{aligned}$$

所给公式为 3 阶公式. (2′)

7. 解
$$u_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\qquad v_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$
$$v_1=Au_0=\begin{bmatrix}1&3\\-1&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix},\qquad m_1=8$$
$$u_1=\frac{1}{m_1}v_1=\begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix}$$
$$v_2=Au_1=\begin{bmatrix}1&3\\-1&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.5\\8.5\end{bmatrix},\qquad m_2=8.5$$
$$u_2=\frac{1}{m_2}v_2=\begin{bmatrix}0.41176\\1\end{bmatrix}$$
$$v_3=Au_2=\begin{bmatrix}1&3\\-1&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.41176\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.41176\\8.58824\end{bmatrix},\qquad m_3=8.58824$$
$$u_3=\frac{1}{m_3}v_3=\begin{bmatrix}0.397260\\1\end{bmatrix}$$
$$v_4=Au_3=\begin{bmatrix}1&3\\-1&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.397260\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.397260\\8.602740\end{bmatrix},\qquad m_4=8.602740$$
$$u_4=\frac{1}{m_4}v_4=\begin{bmatrix}0.394904\\1\end{bmatrix}$$
$$v_5=Au_4=\begin{bmatrix}1&3\\-1&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.394904\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.394904\\8.605096\end{bmatrix},\qquad m_5=8.605096$$
$$u_5=\frac{1}{m_5}v_5=\begin{bmatrix}0.394523\\1\end{bmatrix}$$
$$v_6=Au_5=\begin{bmatrix}1&3\\-1&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.394523\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.394523\\8.605477\end{bmatrix},\qquad m_6=8.605477$$
$$\lambda_{\max}=8.605 \tag{8'}$$

2002 年秋季攻读博士学位研究生入学考试

1. 解 (1) $I_n=\int_0^1 x^n e^x dx=\int_0^1 x^n de^x=x^n e^x\Big|_{x=0}^{1}-\int_0^1 e^x\cdot nx^{n-1}dx$
$$=e-n\int_0^1 x^{n-1}e^x dx=e-nI_{n-1},\qquad n=1,2,\cdots \tag{3'}$$

(2) 由上式可解得 $nI_{n-1}=e-I_n$.若已知 I_N,可得如下递推算法:
$$I_{n-1}=\frac{1}{n}(e-I_n),\qquad n=N,N-1,N-2,\cdots,1 \qquad ①$$

由

$$I_n = \mathrm{e}^{\xi}\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\xi}\frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_{x=0}^{1} = \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{n+1}, \qquad \xi \in (0,1)$$

可知

$$\frac{1}{n+1} < I_n < \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

且

$$\left| I_n - \frac{(1+\mathrm{e})}{2(n+1)} \right| \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{2(n+1)}$$

取

$$\tilde{I}_N = \frac{1+\mathrm{e}}{2(N+1)}$$

可得如下递推算法

$$\begin{cases} \tilde{I}_{n-1} = \dfrac{1}{n}(\mathrm{e} - \tilde{I}_n), \qquad n = N, N-1, \cdots, 2, 1 \\ \tilde{I}_N = \dfrac{1+\mathrm{e}}{2(N+1)} \end{cases} \qquad ②(3')$$

$$I_{n-1} - \tilde{I}_{n-1} = -\frac{1}{n}(I_n - \tilde{I}_n)$$

$$|I_{n-1} - \tilde{I}_{n-1}| = \frac{1}{n}|I_n - \tilde{I}_n|, \qquad n = N, N-1, \cdots$$

每迭代一次误差均在减少,所以递推算法 ② 是稳定的. (3′)

2. 解 (1) 记 $f(x) = x^2 - 6$,则 $f'(x) = 2x$ 用 Newton 法求正根 x^* 的迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{6}{x_k}\right), \qquad k = 0, 1, \cdots \qquad (3')$$

(2) 设 x_k 是 x^* 具有 n 位有效数字的近似值,并注意到 $x^* = 2.\times\times\times\times\cdots$,有

$$|x^* - x_k| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-(n-1)}, \qquad |x_k| \geqslant 2 \qquad (2')$$

再由 $(x^*)^2 = 6$,有

$$\begin{aligned} x^* - x_{k+1} &= x^* - \frac{1}{2}(x_k + \frac{6}{x_k}) = x^* - \frac{x_k^2 + (x^*)^2}{2x_k} \\ &= -\frac{x_k^2 + (x^*)^2 - 2x_k x^*}{2x_k} = -\frac{(x^* - x_k)^2}{2x_k} \end{aligned} \qquad (2')$$

因而

$$|x^* - x_{k+1}| = \frac{(x^* - x_k)^2}{2x_k} \leqslant \frac{\left(\frac{1}{2} \times 10^{-(n-1)}\right)^2}{2 \times 2}$$

$$= \frac{1}{16} \times 10^{-(2n-2)} < \frac{1}{2} \times 10^{-(2n-1-1)}$$

因而 x_{k+1} 具有$(2n-1)$位有效数字. (2′)

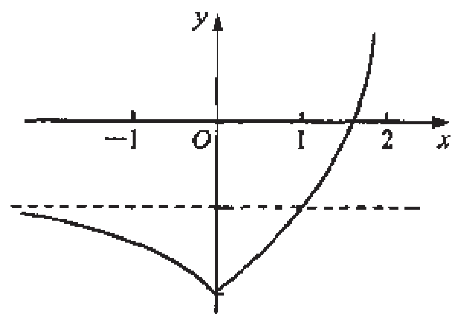
3. 解 (1) $f(x) = (x-1)e^x - 1 = 0$, $f'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$

由 $f'(x) = 0$ 得 $x = 0$. 当 $x < 0$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数;当 $x > 0$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1, \quad f(0) = -2, \quad f(1) = -1$$

$$f(2) = (2-1)e^2 - 1 = e^2 - 1 > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

方程 $f(x) = 0$ 有惟一根 $x^* \in [1,2]$. (3′)



(2) $x - 1 = e^{-x}$, $x = 1 + e^{-x}$

记

$$\varphi(x) = 1 + e^{-x}$$

则

$$\varphi'(x) = -e^{-x}$$

当 $x \in [1,2]$ 时

$$\varphi(x) \in [\varphi(2), \varphi(1)] = [1 + e^{-2}, 1 + e^{-1}] \subset [1,2]$$
$$|\varphi'(x)| = e^{-x} \leqslant e^{-1} < 1$$

∴ 迭代格式

$$x_{k+1} = 1 + e^{-x_k}, \quad k = 0,1,\cdots$$

对任意 $x_0 \in [1,2]$ 均收敛. (3′)

(3) 取 $x_0 = 1.5$,迭代得

$$x_1 = 1.22313, \quad x_2 = 1.29431, \quad x_3 = 1.27409$$
$$x_4 = 1.27969, \quad x_5 = 1.27812, \quad x_6 = 1.27856$$
$$x_7 = 1.27844, \quad x_8 = 1.27847, \quad x_9 = 1.27846$$

$\therefore x^* \approx 1.278$ (3′)

4. 解

$$\begin{bmatrix}3&1&-1&2\\1&1&1&6\\12&-3&3&15\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}12&-3&3&15\\1&1&1&6\\3&1&-1&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-\frac{1}{4}r_1]{r_2-\frac{1}{12}r_1}\begin{bmatrix}12&-3&3&15\\0&\frac{5}{4}&\frac{3}{4}&\frac{19}{4}\\0&\frac{7}{4}&-\frac{7}{4}&-\frac{7}{4}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}12&-3&3&15\\0&\frac{7}{4}&-\frac{7}{4}&-\frac{7}{4}\\0&\frac{5}{4}&\frac{3}{4}&\frac{19}{4}\end{bmatrix}\quad(4')$$

$$\xrightarrow{r_3-\frac{5}{7}r_2}\begin{bmatrix}12&-3&3&15\\0&\frac{7}{4}&-\frac{7}{4}&-\frac{7}{4}\\0&0&2&6\end{bmatrix}\quad(2')$$

等价三角方程组为

$$\begin{cases}12x_1-3x_2+3x_3=15\\ \frac{7}{4}x_2-\frac{7}{4}x_3=-\frac{7}{4}\\ 2x_3=6\end{cases}$$

回代得 $x_3=3, x_2=2, x_1=1.$ (3′)

5. **解** (1) Jacobi 迭代格式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=(b_1-a_{12}x_1^{(k)}-\cdots-a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11}\\ x_2^{(k+1)}=(b_2-a_{21}x_1^{(k)}-a_{23}x_3^{(k)}-\cdots-a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22}\\ \quad\vdots\\ x_n^{(k+1)}=(b_n-a_{n1}x_1^{(k)}-a_{n2}x_2^{(k)}-\cdots-a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})/a_{nn}\end{cases}\quad(4')$$

(2) Jacobi 迭代矩阵

$$J=-\begin{bmatrix}0&\frac{a_{12}}{a_{11}}&\frac{a_{13}}{a_{11}}&\cdots&\frac{a_{1,n-1}}{a_{11}}&\frac{a_{1n}}{a_{11}}\\ \frac{a_{21}}{a_{22}}&0&\frac{a_{23}}{a_{22}}&\cdots&\frac{a_{2,n-1}}{a_{22}}&\frac{a_{2n}}{a_{22}}\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}}&\frac{a_{n2}}{a_{nn}}&\frac{a_{n3}}{a_{nn}}&\cdots&\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}&0\end{bmatrix}\quad(2')$$

$$\|J\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\Big/|a_{ii}|\right\}<1$$

∴Jacobi 迭代格式收敛. (2′)

6. 解 $$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),$$
$$x\in[0,2],\xi\in(0,2) \qquad (3')$$

$$f^{(n+1)}(x)=\mathrm{e}^x,\text{当 } x\in[0,2] \text{ 时},|x-x_i|\leqslant 2,0\leqslant i\leqslant n$$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-L_n(x)|\leqslant\frac{\mathrm{e}^2}{(n+1)!}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|\leqslant\frac{\mathrm{e}^2}{(n+1)!}2^{n+1}$$
$$(3')$$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-L_n(x)|\leqslant\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^2\cdot\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}=0 \qquad (2')$$

7. 解 差商表

k	x_k	$f[x_k]$	$f[x_k,x_{k+1}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3},x_{k+4}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3},x_{k+4}]$
0	1	3	2	-6	11	-15	$\frac{65}{12}$
1	1	3	-4	5	-4	$\frac{5}{4}$	
2	2	-1	1	1	$-\frac{1}{4}$		
3	2	-1	1	$\frac{1}{2}$			
4	2	-1	2				
5	4	3					

(6′)

$$H(x)=3+2(x-1)-6(x-1)^2+11(x-1)^2(x-2)$$
$$-15(x-1)^2(x-2)^2+\frac{65}{12}(x-1)^2(x-2)^3 \qquad (2')$$

8. 解 (1) 当

$$A_i=\int_a^b\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\mathrm{d}x,\qquad i=0,1,2,\cdots,n$$

时,称求积公式 ① 为插值型求积公式. (3′)

(2) 必要性:如果 ① 至少具有 n 次代数精度,则求积公式 ① 对 n 次多项式

$$l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

精确成立,即有

$$\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}A_i l_k(x_i)$$

注意到 $l_k(x_i)=\delta_{ki}$，故 $\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}A_i l_k(x_i)=A_k$，即

$$A_k=\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x,\qquad k=0,1,2,\cdots,n$$

因而求积公式是插值型的. (3′)

充分性：如果 ① 是插值型的，则有

$$\begin{aligned}I(f)-I_n(f)&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)\\&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum_{i=0}^{n}\left(\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x\right)f(x_i)\\&=\int_a^b\left[f(x)-\sum_{i=0}^{n}l_i(x)f(x_i)\right]\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

如果 $f(x)$ 是一个 n 次多项式，则有 $I(f)-I_n(f)=0$，即

$$I_n(f)=I(f)$$

因而求积公式至少具有 n 次代数精度. (3′)

9. 解 (1) 作变换 $x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$，有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_{-1}^{1}\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)\mathrm{d}t\\&\approx\frac{5}{9}\times\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\\&\quad+\frac{8}{9}\times\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\&\quad+\frac{5}{9}\times\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\end{aligned}$$

计算 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的 3 点 Gauss 公式为

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&\approx\frac{5(b-a)}{18}f\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{4(b-a)}{9}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\&\quad+\frac{5(b-a)}{18}f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\end{aligned}\qquad(5')$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_3^6 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x&\approx\frac{5\times(6-3)}{18}\mathrm{e}^{-\left(\frac{3+6}{2}-\frac{6-3}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}+\frac{4\times(6-3)}{9}\mathrm{e}^{-\frac{3+6}{2}}\\&\quad+\frac{5\times(6-3)}{18}\mathrm{e}^{-\left(\frac{3+6}{2}+\frac{6-3}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}\end{aligned}$$

$$= \frac{5}{6}e^{-(4.5-1.5\sqrt{0.6})} + \frac{4}{3}e^{-4.5} + \frac{5}{6}e^{-(4.5+1.5\sqrt{0.6})}$$
$$= 0.0295868 + 0.0148120 + 0.0002897$$
$$= 0.0446885 \qquad (4')$$

10. **解** (1) $\| f \|_\infty = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$， $\| f \|_2 = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x}$ (2′)

(2) 记 M 为所有 n 次多项式组成的集合.如果 $p_n^*(x)$ 满足

$$\| f - p_n^* \|_\infty = \min_{p_n \in M} \| f - p_n \|_\infty$$

则称 $p_n^*(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式. (3′)

如果 $q_n^*(x)$ 满足

$$\| f - q_n^* \|_2 = \min_{q_n \in M} \| f - q_n \|_2$$

则称 $q_n^*(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 次最佳平方逼近多项式. (3′)

11. **解** (1) 求解公式 ① 的局部截断误差为

$$\begin{aligned} R_{i+1}^{(1)} &= y(x_{i+1}) - y(x_i) - \frac{h}{2}[3y'(x_i) - y'(x_{i-1})] \\ &= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + O(h^4) - y(x_i) \\ &\quad - \frac{3h}{2}y'(x_i) + \frac{h}{2}\left[y'(x_i) - hy''(x_i) + \frac{h^2}{2}y'''(x_i) + O(h^3)\right] \\ &= \frac{5}{12}h^3 y'''(x_i) + O(h^4) \end{aligned}$$

∴ 求解公式 ① 为一个 2 阶公式. (4′)

(2) 求解公式 ② 的局部截断误差为

$$\begin{aligned} R_{i+1}^{(2)} &= y(x_{i+1}) - y(x_i) - \frac{h}{2}[y'(x_{i+1}) + y'(x_i)] \\ &= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + O(h^4) - y(x_i) \\ &\quad - \frac{h}{2}\left[y'(x_i) + hy''(x_i) + \frac{h^2}{2}y'''(x_i) + O(h^3) + y'(x_i)\right] \\ &= -\frac{1}{12}h^3 y'''(x_i) + O(h^4) \end{aligned}$$

∴ 求解公式 ② 为一个 2 阶公式. (4′)

(3) 求解公式 ③ 可写为

$$y_{i+1} = \frac{1}{6}\left\{y_i + \frac{h}{2}[3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})]\right\}$$

$$+\frac{5}{6}\left\{y_i+\frac{h}{2}\left[f\left(x_{i+1},y_i+\frac{h}{2}(3f(x_i,y_i)-f(x_{i-1},y_{i-1}))\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+f(x_i,y_i)\right]\right\}$$

局部截断误差为

$$R_{i+1}^{(3)}=y(x_{i+1})-\frac{1}{6}\left\{y(x_i)+\frac{h}{2}[3y'(x_i)-y'(x_{i-1})]\right\}$$

$$-\frac{5}{6}\left\{y(x_i)+\frac{h}{2}\left[f\left(x_{i+1},y(x_i)+\frac{h}{2}(3y'(x_i)-y'(x_{i-1}))\right)\right]+y'(x_i)\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{y(x_{i+1})-y(x_i)-\frac{h}{2}[3y'(x_i)-y'(x_{i-1})]\right\}$$

$$+\frac{5}{6}\left\{y(x_{i+1})-y(x_i)-\frac{h}{2}[f(x_{i+1},y(x_{i+1}))+y'(x_i)]\right\}$$

$$+\frac{5h}{12}\left\{f(x_{i+1},y(x_{i+1}))-f\left(x_{i+1},y(x_i)+\frac{h}{2}(3y'(x_i)-y'(x_{i-1}))\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{6}R_{i+1}^{(1)}+\frac{5}{6}R_{i+1}^{(2)}$$

$$+\frac{5h}{12}\frac{\partial f(x_{i+1},\eta_i)}{\partial y}\left[y(x_{i+1})-y(x_i)-\frac{h}{2}(3y'(x_i)-y'(x_{i-1}))\right]$$

$$=\frac{1}{6}R_{i+1}^{(1)}+\frac{5}{6}R_{i+1}^{(2)}+\frac{5h}{12}\frac{\partial f(x_{i+1},\eta_i)}{\partial y}R_{i+1}^{(1)}$$

$$=\frac{1}{6}\times\left[\frac{5}{12}h^3y'''(x_i)+O(h^4)\right]+\frac{5}{6}\times\left[-\frac{1}{12}h^3y'''(x_i)+O(h^4)\right]$$

$$+\frac{5h}{12}\frac{\partial f(x_{i+1},\eta_i)}{\partial y}\times\left[\frac{5}{12}h^3y'''(x_i)+O(h^4)\right]$$

$$=O(h^4)$$

∴ 求积公式 ③ 为一个 3 阶公式. (6′)

2003 年春季攻读博士学位研究生入学考试

1. **解** (1) 设方程组有两组解 $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$,则

$$\begin{cases}x_1=\sin\frac{1}{2}y_1\\y_1=\cos x_1\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=\sin\frac{1}{2}y_2\\y_2=\cos x_2\end{cases}$$

由

$$x_1-x_2=\sin\frac{1}{2}y_1-\sin\frac{1}{2}y_2=(\cos\xi)\left(\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2\right)$$

得

$$|x_1 - x_2| \leqslant \frac{1}{2}|y_1 - y_2| \quad ③$$

由

$$y_1 - y_2 = \cos x_1 - \cos x_2 = -(\sin\eta)(x_1 - x_2)$$

得

$$|y_1 - y_2| \leqslant |x_1 - x_2| \quad ④$$

由 ③ 和 ④ 得

$$|x_1 - x_2| \leqslant \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$$

因而 $x_1 - x_2 = 0$，即 $x_1 = x_2$. 代入 ④ 有 $y_1 = y_2$. 因而解是惟一的. (3′)

(2)

$$x = \sin\left(\frac{1}{2}y\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\cos x\right) \quad ⑤$$

如果该方程有根 x^*，则

$$x^* = \sin\left(\frac{1}{2}\cos x^*\right)$$

两边取绝对值，有 $|x^*| \leqslant 1$，即 $x^* \in [-1,1]$.

∴ 方程 ⑤ 在 $[-1,1]$ 内存在惟一根 x^*.

令 $y^* = \cos x^*$，则 $x^* = \sin\left(\frac{1}{2}y^*\right)$. 因而 (x^*, y^*) 为 ①② 的解. (3′)

考虑区间 $[-1,1]$. 记 $\varphi(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\cos x\right)$，则有

$$\varphi'(x) = \left[\cos\left(\frac{1}{2}\cos x\right)\right]\left(-\frac{1}{2}\sin x\right)$$

当 $x \in [-1,1]$ 时，$|\varphi'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$，$\varphi(x) \in [-1,1]$. 因而迭代格式

$$x_{k+1} = \sin\left(\frac{1}{2}\cos x_k\right), \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

对任意 $x_0 \in [-1,1]$ 均收敛. 取 $x_0 = 0$，得 (3′)

$$x_1 = \sin(0.5) = 0.47943$$

$$x_2 = \sin\left(\frac{1}{2}\cos 0.47943\right) = 0.42922$$

$$x_3 = \sin\left(\frac{1}{2}\cos 0.42922\right) = 0.439144$$

$$x_4 = \sin\left(\frac{1}{2}\cos 0.439144\right) = 0.437267$$

$$x_5 = \sin\left(\frac{1}{2}\cos 0.437267\right) = 0.437626$$

$$x_6 = \sin\left(\frac{1}{2}\cos 0.437626\right) = 0.43756$$

因而 $x^* = 0.438, y^* = 0.906$. (3′)

2. 解　令 $\bar{b}_1 = b_1, d_n^{(1)} = d_n$.

第 1 步消元:记 $l_1 = \dfrac{\bar{b}_1}{a_1}$.将第一行的$(-l_1)$倍加到第 n 行,并记

$$\bar{b}_2 = b_2 - l_1c_1, \qquad d_n^{(2)} = d_n^{(1)} - l_1d_1$$

第 2 步消元:记 $l_2 = \dfrac{\bar{b}_2}{a_2}$.将第二行的$(-l_2)$倍加到第 n 行,并记

$$\bar{b}_3 = b_3 - l_2c_2, \qquad d_n^{(3)} = d_n^{(2)} - l_2d_2$$

第 $n-1$ 步消元:将第 n 行的第 $n-1$ 列的元素 $\bar{b}_{n-1}$ 消为零.记 $l_{n-1} = \dfrac{\bar{b}_{n-1}}{a_{n-1}}$,将第$(n-1)$行的$(-l_{n-1})$倍加到第 n 行,并记

$$\bar{b}_n = b_n - l_{n-1}c_{n-1}, \qquad d_n^{(n)} = d_n^{(n-1)} - l_{n-1}d_{n-1}$$

经过以上 $n-1$ 步消元,得到同解的两对角方程组

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & & & d_1 \\ & a_2 & c_2 & & & & d_2 \\ & & a_3 & c_3 & & & d_3 \\ & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & & & \bar{b}_n & d_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

追赶算法:

(1) $\bar{b}_1 = b_1, d_n^{(1)} = d_n$.

(2) 对 $i = 1,2,\cdots,n-1$,依次

$$l_i = \bar{b}_i/a_i, \qquad \bar{b}_{i+1} = b_{i+1} - l_ic_i, \qquad d_n^{(i+1)} = d_n^{(i)} - l_id_i \qquad (6')$$

(3) $x_n = d_n^{(n)}/\bar{b}_n$.

(4) $x_i = (d_i - c_ix_{i+1})/a_i, \qquad i = n-1, n-2, \cdots, 1.$ (4′)

总的乘除法运算次数为 $5n-4$,加减法运算次数为 $3(n-1)$. (2′)

3. 解 (1) Jacobi 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 4 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = (7 - 2x_1^{(k)} - 3x_3^{(k)})/5 \\ x_3^{(k+1)} = (-1 + 2x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)})/3 \end{cases} \qquad (2')$$

Gauss-Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 4 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = (7 - 2x_1^{(k+1)} - 3x_3^{(k)})/5 \\ x_3^{(k+1)} = (-1 + 2x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)})/3 \end{cases} \qquad (2')$$

SOR 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega(4 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} + \omega(7 - 2x_1^{(k+1)} - 3x_3^{(k)})/5 \\ x_3^{(k+1)} = (1-\omega)x_3^{(k)} + \omega(-1 + 2x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)})/3 \end{cases} \qquad (2')$$

(2) Jacobi 迭代格式的迭代矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 2 & 5\lambda & 3 \\ -2 & -2 & 3\lambda \end{vmatrix} = 0$$

展开得

$$15\lambda^3 + 4\lambda - 16 = 0 \qquad ①$$

记

$$f(\lambda) = 15\lambda^3 + 4\lambda - 16$$

则有

$$f'(\lambda) = 45\lambda^2 + 4 > 0, \qquad f(0) = -16, \qquad f(1) = 3$$

方程①有惟一实根 $x_1^* \in (0,1)$. 设 x_2^*, x_3^* 为①的两个共轭复根，由根与系数的关系有

$$(-1)^3 x_1^* x_2^* x_3^* = -\frac{16}{15}$$

$$|x_2^*| = |x_3^*| > \sqrt{\frac{16}{15}} > 1$$

$\therefore \rho(J) = \sqrt{\frac{16}{15}} > 1$, Jacobi 迭代格式发散. (4′)

Gauss-Seidel 迭代格式的迭代矩阵 G 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 2\lambda & 5\lambda & 3 \\ -2\lambda & -2\lambda & 3\lambda \end{vmatrix} = 0$$

展开得

$$\lambda(15\lambda^2 - 12) = 0$$

3 个根为 $\lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = \frac{2}{\sqrt{5}}, \lambda_3 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$\therefore \rho(G) = \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$, Gauss-Seidel 迭代格式收敛. (4′)

4. 解 (1) 方法1:

构造差商表

$$\begin{array}{llllll} x_0-h & f(x_0-h) & & & & \\ & & f[x_0-h,x_0] & & & \\ x_0 & f(x_0) & & f[x_0-h,x_0,x_0] & & \\ & & f'(x_0) & & f[x_0-h,x_0,x_0,x_0+h] & \\ x_0 & f(x_0) & & f[x_0,x_0,x_0+h] & & \\ & & f[x_0,x_0+h] & & & \\ x_0+h & f(x_0+h) & & & & \end{array}$$

其中

$$f[x_0-h,x_0,x_0]=\frac{f'(x_0)-f[x_0-h,x_0]}{h}$$

$$f[x_0,x_0,x_0+h]=\frac{f[x_0,x_0+h]-f'(x_0)}{h}$$

$$f[x_0-h,x_0,x_0,x_0+h]=\frac{1}{2h^2}\{f[x_0,x_0+h]-2f'(x_0)+f[x_0-h,x_0]\} \tag{5'}$$

因而

$$\begin{aligned} H(x)=&f(x_0-h)+f[x_0-h,x_0](x-x_0+h)\\ &+\frac{1}{h}\{f'(x_0)-f[x_0-h,x_0]\}(x-x_0+h)\\ &\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2h^2}\{f[x_0,x_0+h]-2f'(x_0)\\ &+f[x_0-h,x_0]\}(x-x_0+h)(x-x_0)^2 \end{aligned} \tag{2'}$$

方法2:作2次多项式 $h(x)$ 满足

$$h(x_0-h)=f(x_0-h),\quad h(x_0)=f(x_0),\quad h(x_0+h)=f(x_0+h)$$

易知

$$\begin{aligned} h(x)=&f(x_0-h)+f[x_0-h,x_0](x-x_0+h)\\ &+f[x_0-h,x_0,x_0+h](x-x_0+h)(x-x_0) \end{aligned}$$

其中

$$f[x_0-h,x_0]=\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

$$f[x_0-h,x_0,x_0+h]=\frac{1}{2h^2}[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)]$$

令

$$R(x)=H(x)-h(x)$$

则

$$R(x_0-h)=0,\qquad R(x_0)=0,\qquad R(x_0+h)=0$$

于是有

$$R(x) = A(x - x_0 + h)(x - x_0)(x - x_0 - h)$$

即

$$H(x) = h(x) + A(x - x_0 + h)(x - x_0)(x - x_0 - h) \qquad (4')$$

由 $H'(x_0) = f'(x_0)$，得

$$A = \frac{1}{2h^2}(f[x_0 - h, x_0] - 2f'(x_0) + f[x_0, x_0 + h])$$

因而

$$\begin{aligned} H(x) = & f(x_0 - h) + f[x_0 - h, x_0](x - x_0 + h) \\ & + f[x_0 - h, x_0, x_0 + h](x - x_0 + h)(x - x_0) \\ & + \frac{1}{2h^2}(f[x_0 - h, x_0] - 2f'(x_0) + f[x_0, x_0 + h]) \\ & \cdot (x - x_0 + h)(x - x_0)(x - x_0 - h) \qquad (3') \end{aligned}$$

(2) $f(x) - H(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0 + h)(x - x_0)^2(x - x_0 - h)$,

$$x_0 - h < \xi < x_0 + h \qquad (3')$$

(3) 记 $g(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}[x - (x_0 - h)][x - (x_0 + h)]$，则

$$f(x) - H(x) = g(x)(x - x_0)^2$$

求 2 阶导数得

$$f''(x) - H''(x) = 2g(x) + 4g'(x)(x - x_0) + g''(x)(x - x_0)^2$$

$$f''(x_0) - H''(x_0) = 2g(x_0) = -\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi), \qquad x_0 - h < \xi < x_0 + h$$

$$(4')$$

5. 解　对

$$y = ax^b \qquad ①$$

两边取对数得

$$\ln y = \ln a + b\ln x$$

令 $Y = \ln y, a_0 = \ln a, a_1 = b, X = \ln x$，则拟合函数转变为

$$Y = a_0 + a_1 X \qquad ②$$

所给数据转化为

i	1	2	3	4
X_i	0.6931	1.0986	1.3863	1.7918
Y_i	−0.2744	−1.0788	−1.6607	−2.4651

(4′)

② 为 1 次多项式.正规方程组为

$$\begin{bmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \end{bmatrix} \qquad ③$$

其中

$$s_0 = 4, \quad s_1 = \sum_{i=1}^{4} X_i = 4.9698, \quad s_2 = \sum_{i=1}^{4} X_i^2 = 6.8197$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^{4} Y_i = -5.4790, \quad T_1 = \sum_{i=1}^{4} X_i Y_i = -8.0946$$

将上述数据代入 ③ 得

$$\begin{bmatrix} 4 & 4.9698 \\ 4.9698 & 6.8197 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.4790 \\ -8.0946 \end{bmatrix} \qquad (4')$$

解得 $a_0 = 1.1098, a_1 = -1.9957$. (2′)

因而所求拟合函数为

$$Y = 1.1098 - 1.9957X$$

$$y = e^Y = e^{1.1098-1.9957X} = e^{1.1098} \cdot e^{-1.9957\ln x} = 3.0338x^{-1.9957} \qquad (2')$$

6. 解　不妨设 $x_0 < x_1 < x_2$.

当 $f(x) = 1$ 时,左 = 2,右 = 2;

当 $f(x) = x$ 时,左 = 0,右 = $\frac{1}{2}(x_0 + 2x_1 + x_2)$;

当 $f(x) = x^2$ 时,左 = $\frac{2}{3}$,右 = $\frac{1}{2}(x_0^2 + 2x_1^2 + x_2^2)$;

当 $f(x) = x^3$ 时,左 = 0,右 = $\frac{1}{2}(x_0^3 + 2x_1^3 + x_2^3)$.

要使所给求积公式具有 3 次代数精度,当且仅当

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x_0 + 2x_1 + x_2) = 0 \\ \frac{1}{2}(x_0^2 + 2x_1^2 + x_2^2) = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}(x_0^3 + 2x_1^3 + x_2^3) = 0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x_0 + 2x_1 + x_2 = 0 & ① \\ x_0^2 + 2x_1^2 + x_2^2 = \frac{4}{3} & ②(5') \\ x_0^3 + 2x_1^3 + x_2^3 = 0 & ③ \end{cases}$$

由 ① 得

$$x_1 = -\frac{1}{2}(x_0 + x_2) \tag{④}$$

将 ④ 代入 ② 得

$$x_0^2 + \frac{1}{2}(x_0 + x_2)^2 + x_2^2 = \frac{4}{3} \tag{⑤}$$

将 ④ 代入 ③ 得

$$x_0^3 + 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right)(x_0 + x_2)^3 + x_2^3 = 0 \tag{⑥}$$

$$(x_0 + x_2)(x_0^2 - x_0x_2 + x_2^2) - \frac{1}{4}(x_0 + x_2)(x_0 + x_2)^2 = 0$$

$$\frac{1}{4}(x_0 + x_2)[4x_0^2 - 4x_0x_2 + 4x_2^2 - (x_0^2 + 2x_0x_2 + x_2^2)] = 0$$

$$\frac{3}{4}(x_0 + x_2)(x_0 - x_2)^2 = 0$$

$$x_0 + x_2 = 0 \tag{⑦}$$

将 ⑦ 代入 ④ 得 $x_1 = 0$,再由 ② 得

$$x_0^2 + x_2^2 = \frac{4}{3} \tag{⑧}$$

由 ⑦ 和 ⑧ 得 $x_0 = -\sqrt{\frac{2}{3}}, x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

代入所给公式得

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\left[f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + 2f(0) + f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right] \tag{⑨(4′)}$$

当 $f(x) = x^4$ 时,左 $= \frac{2}{5}$,右 $= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \times 0 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] = \frac{4}{9}$,左 $\neq$ 右.

所以当 $x_0 = -\sqrt{\frac{2}{3}}, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ 时所得公式 ⑨ 具有最高代数精度 3.

(3′)

注:求解 ① ~ ③ 的简便方法:为了求积公式的精度尽量高,x_0 和 x_2 应关于求积区面的中点 0 对称,即 $x_0 = -a < 0, x_2 = a > 0$.另外,$x_1 = 0$.由 ② 得 $a^2 = \frac{2}{3}$,所以 $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$.检验,它们正是 ① ~ ③ 的解.

7. 解 (1) 记 $x_i = a + ih, 0 \leqslant i \leqslant n, h = \frac{b-a}{n}$.

$$T_n(f) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i-1})] \tag{3′}$$

$$I(f) - T_n(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi), \qquad \xi \in (a,b) \tag{3'}$$

(2)

$$x_i = a + ih, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n, \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

$$y_j = c + jk, \qquad 0 \leqslant j \leqslant m, \qquad k = \frac{d-c}{m}$$

$$I(g) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\mathrm{d}x\int_{y_j}^{y_{j+1}} g(x,y)\mathrm{d}y$$

$$T_{n,m}(g) = \frac{hk}{4}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}[g(x_i,y_j) + g(x_{i+1},y_j) + g(x_i,y_{j+1}) + g(x_{i+1},y_{j+1})] \tag{4'}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\mathrm{d}x\int_{y_j}^{y_{j+1}} g(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}}\left[\frac{k}{2}(g(x,y_j) + g(x,y_{j+1})) - \frac{k^3}{12}g_{yy}(x,\eta_{i,j})\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{k}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}[g(x,y_j) + g(x,y_{j+1})]\mathrm{d}x - \frac{k^3}{12}\int_{x_i}^{x_{i+1}}g_{yy}(x,\eta_{i,j})\mathrm{d}x$$

$$= \frac{k}{2}\cdot\left\{\frac{h}{2}[g(x_i,y_j) + g(x_i,y_{j+1}) + g(x_{i+1},y_j) + g(x_{i+1},y_{j+1})] - \frac{h^3}{12}[g_{xx}(\xi_{i,j},y_j) + g_{xx}(\xi_{i,j},y_{j+1})]\right\} - h\frac{k^3}{12}g_{yy}(\bar{x}_{i,j},\eta_{i,j})$$

对 i,j 求和

$$I(f) = T_{n,m}(g) - \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\frac{kh^3}{12}g_{xx}(\xi_{i,j},\bar{y}_{i,j}) + \frac{hk^3}{12}g_{yy}(\bar{x}_{i,j},\eta_{i,j})\right]$$

$$= T_{n,m}(g) - \frac{(b-a)(d-c)}{12}[h^2 g_{xx}(\xi,\eta) + k^2 g_{yy}(\bar{\xi},\bar{\eta})] \tag{4'}$$

8. **解**　局部截断误差为

$$R_{(i+1)} = y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) - \frac{h}{3}[f(x_{i+1},y(x_{i+1})) + 4f(x_i,y(x_i)) + f(x_{i-1},y(x_{i-1}))]$$

$$= y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) - \frac{h}{3}[y'(x_{i+1}) + 4y'(x_i) + y'(x_{i-1})] \tag{3'}$$

$$= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{1}{2}h^2y''(x_i) + \frac{1}{6}h^3y'''(x_i) + \frac{1}{24}h^4y^{(4)}(x_i) + \frac{1}{120}h^5y^{(5)}(\xi_i)$$

$$- \left[y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{1}{2}h^2y''(x_i) - \frac{1}{6}h^3y'''(x_i)\right.$$

$$+\frac{1}{24}h^4y^{(4)}(x_i)-\frac{1}{120}h^5y^{(5)}(\bar{\xi}_i)\Big]$$

$$-\frac{h}{3}\Big[y'(x_i)+hy''(x_i)+\frac{1}{2}h^2y'''(x_i)+\frac{1}{6}h^3y^{(4)}(x_i)$$

$$+\frac{1}{24}h^4y^{(5)}(\eta_i)\Big]-\frac{4}{3}hy'(x_i)$$

$$-\frac{h}{3}\Big[y'(x_i)-hy''(x_i)+\frac{1}{2}h^2y'''(x_i)-\frac{1}{6}h^3y^{(4)}(x_i)$$

$$+\frac{1}{24}h^4y^{(5)}(\bar{\eta}_i)\Big] \qquad (4')$$

$$=\left\{\frac{1}{120}\left[y^{(5)}(\xi_i)+y^{(5)}(\bar{\xi}_i)\right]-\frac{1}{72}\left[y^{(5)}(\eta_i)+y^{(5)}(\bar{\eta}_i)\right]\right\}h^5$$

$$=O(h^5) \qquad (2')$$

所给公式为 2 步 4 阶公式. (1′)

2003 年秋季攻读博士学位研究生入学考试

1. **解** 设 $x^*=\sqrt{99}$, $x=9.94987$, 则 $|e(x)|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-5}$. (1′)

(1) 记 $u(x)=(10-x)^6$, 则

$$u'(x)=-6(10-x)^5$$

$$u(x)=(10-9.94987)^6=0.158703399\times10^{-7}$$

由

$$e(u)\approx u'(x)e(x)=-6(10-x)^5e(x)$$

得

$$|e(u)|\approx6(10-x)^5|e(x)|\leqslant6(10-9.94987)^5\times\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

$$\approx0.95\times10^{-11}\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-3}\times10^{-7}$$

$\therefore u(x)$ 至少具有 3 位有效数字. (5′)

(2) 记 $v(x)=\frac{1}{(10+x)^6}$, 则

$$v'(x)=-\frac{6}{(10+x)^7}$$

$$v(x)=\frac{1}{(10+9.94987)^6}=0.158620597\times10^{-7}$$

由

$$e(v) \approx v'(x)e(x) = -\frac{6}{(10+x)^7}e(x)$$

得

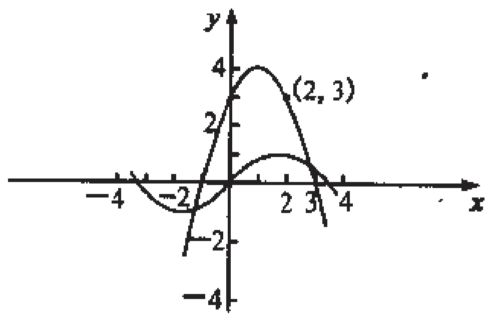
$$|e(v)| \approx \frac{6}{(10+x)^7}|e(x)| \leqslant \frac{6}{(10+9.94987)^7} \times \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

$$\approx 0.238 \times 10^{-13} \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-6} \times 10^{-7}$$

$\therefore v(x)$ 至少具有 6 位有效数字. (5′)

2. **解** 方程 $\sin x + x^2 - 2x - 3 = 0$ 可改写为

$$\sin x = 3 + 2x - x^2 = (3-x)(1+x)$$



记 $f(x) = \sin x + x^2 - 2x - 3, f_1(x) = \sin x, f_2(x) = 3 + 2x - x^2$.

函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 有两个交点 $x_1^* \in (-2, -1), x_2^* \in (2,3)$, 因而方程 $f(x) = 0$ 有两个根 x_1^* 和 x_2^*. (4′)

对 $f(x)$ 求导得

$$f'(x) = \cos x + 2x - 2$$

Newton 迭代格式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\sin x_k + x_k^2 - 2x_k - 3}{\cos x_k + 2x_k - 2}, \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

(2′)

分别取 $x_0 = -1.5$ 和 $x_0 = 2.5$, 迭代得

k	0	1	2	3
x_k	−1.5	−1.2459	−1.2228	−1.2226

$$x_1^* = -1.22$$ (3′)

k	0	1	2	3
x_k	2.5	3.0237	2.9540	2.9524

$$x_2^* = 2.95 \tag{3'}$$

3. **解** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ -18 & 3 & -1 & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_1} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3+\frac{1}{18}r_1]{r_2+\frac{2}{3}r_1} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & 5 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & 5 \end{bmatrix}$$

(2′)

$$\xrightarrow{r_3+\frac{6}{7}r_2} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \\ 0 & 0 & \frac{22}{7} & \frac{66}{7} \end{bmatrix} \tag{2'}$$

等价三角方程组为

$$\begin{cases} -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 \\ \frac{7}{6}x_2 + \frac{17}{18}x_3 = \frac{31}{6} \\ \frac{22}{7}x_3 = \frac{66}{7} \end{cases}$$

回代得 $x_3 = 3, x_2 = 2, x_1 = 1$. (6′)

4. **解** (1) Gauss-Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (15 - 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)})/(-18) \\ x_2^{(k+1)} = (6 - 12x_1^{(k+1)} - 3x_3^{(k)})/(-3) \\ x_3^{(k+1)} = (-15 - x_1^{(k+1)} - 4x_2^{(k+1)})/10 \end{cases} \tag{6'}$$

(2) 迭代矩阵 G 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -18\lambda & 3 & -1 \\ 12\lambda & -3\lambda & 3 \\ \lambda & 4\lambda & 10\lambda \end{vmatrix} = 0$$

化简得 $\lambda(180\lambda^2 - 65\lambda + 3) = 0$,解得

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \frac{65 + \sqrt{2065}}{360} \approx \frac{65 + 45.44}{360}$$

$$\lambda_3 = \frac{65 - \sqrt{2065}}{360} \approx \frac{65 - 45.44}{360}$$

$\therefore \rho(G) = \lambda_2 < 1$,迭代格式收敛. (4′)

5. 解　令 $g_k(x) = x^k$,则有

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x_i^k}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{g_k(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} = g_k[x_0, x_1, \cdots, x_n]$$

$$= \frac{g_k^{(n)}(x)\big|_{x=\xi}}{n!} = \begin{cases} 0, & \text{当 } 0 \leqslant k \leqslant n-1 \text{ 时} \\ 1, & \text{当 } k = n \text{ 时} \end{cases} \quad (7')$$

6. 解　(1) $S(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$,代数精度为 3. (3′)

(2) 取正整数 n,记 $h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + ih, x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$.

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{6}\left[f(x_i) + 4f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + f(x_{i+1})\right] \quad (2')$$

(3) $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{h}{6}\left[f(x_i) + 4f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + f(x_{i+1})\right] = -\frac{h}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta_i)$,

$\eta_i \in (x_i, x_{i+1})$ (1′)

$$I(f) - S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{6}\left[f(x_i) + 4f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + f(x_{i+1})\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left\{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{h}{6}\left[f(x_i) + 4f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + f(x_{i+1})\right]\right\}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{h}{180}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta_i)$$

$$= -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta), \qquad \eta \in (a, b) \quad (3')$$

(4) $\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d g(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$\approx \int_a^b \frac{d-c}{6}\left[g(x,c) + 4g\left(x, \frac{c+d}{2}\right) + g(x,d)\right]\mathrm{d}x$$

$$\approx \frac{b-a}{6}\left\{\frac{d-c}{6}\left[g(a,c) + 4g\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + g(a,d)\right]\right.$$

$$+ 4 \times \frac{d-c}{6}\left[g\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + 4g\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + g\left(\frac{a+b}{2}, d\right)\right]$$

$$+\frac{d-c}{6}\left[g(b,c)+4g\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+g(b,d)\right]\Bigg\}$$

$$=\frac{(b-a)(d-c)}{36}\Bigg\{g(a,c)+g(b,c)+g(a,d)+g(b,d)+4\left[g\left(\frac{a+b}{2},c\right)\right.$$

$$\left.+g\left(\frac{a+b}{2},d\right)+g\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+g\left(b,\frac{c+d}{2}\right)\right]$$

$$+16g\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\Bigg\} \qquad (4')$$

7. 解　取正整数 n. 记 $h=\frac{b-a}{n}, x_i=a+ih, i=0,1,2,\cdots,n$.

(1) 设所构造的公式有如下形式

$$y_{i+1}=y_i+h[\alpha f(x_i,y_i)+\beta f(x_{i-1},y_{i-1})] \qquad ①(2')$$

其中 α 和 β 为待定参数.

公式 ① 的局部截断误差为

$$\begin{aligned}R_{i+1}&=y(x_{i+1})-y(x_i)-h[\alpha f(x_i,y(x_i))+\beta f(x_{i-1},y(x_{i-1}))]\\&=y(x_{i+1})-y(x_i)-h[\alpha y'(x_i)+\beta y'(x_{i-1})]\\&=y(x_i+h)-y(x_i)-\alpha hy'(x_i)-\beta hy'(x_i-h)\\&=y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)+\frac{h^3}{6}y'''(x_i)+O(h^4)-y(x_i)\\&\quad-\alpha hy'(x_i)-\beta h\left[y'(x_i)-hy''(x_i)+\frac{h^2}{2}y'''(x_i)+O(h^3)\right]\\&=(1-\alpha-\beta)hy'(x_i)+\left(\frac{1}{2}+\beta\right)h^2y''(x_i)\\&\quad+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\beta\right)h^3y'''(x_i)+O(h^4)\end{aligned} \qquad (3')$$

要使公式 ① 为 2 阶公式,当且仅当

$$\begin{cases}1-\alpha-\beta=0\\\frac{1}{2}+\beta=0\end{cases}$$

解得 $\alpha=\frac{3}{2}, \beta=-\frac{1}{2}$. 由此我们得到 2 阶 2 步显式公式

$$y_{i+1}=y_i+h\left[\frac{3}{2}f(x_i,y_i)-\frac{1}{2}f(x_{i-1},y_{i-1})\right] \qquad ②(3')$$

(2) 下列公式

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_i+hf(x_i,y_i))] \qquad ③(2')$$

是一个 2 阶单步公式.

公式 ② 需要 2 个初始值 y_0, y_1,其中 y_1 可由 ③ 提供,从 $i\geqslant 1$ 起每计算 1

步只要计算函数 f 在 1 个点上的值;公式 ③ 每计算 1 步需要计算 f 在 2 个点上的值. (3′)

8. 解 (1) 设 1 次最佳平方逼近多项为 $p(x) = a_0 + a_1x$.

记 $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x$,则

$$(\varphi_0,\varphi_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \qquad (\varphi_0,\varphi_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8}$$

$$(\varphi_2,\varphi_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{24}, \qquad (\varphi_0,f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = 1$$

$$(\varphi_1,f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\mathrm{d}x = 1$$

正规方程组为

$$\begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} \\ \frac{\pi^2}{8} & \frac{\pi^3}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4′}$$

解得 $a_0 = \frac{24}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{3} - 1\right) = 0.1145, a_1 = \frac{96}{\pi^3}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 0.6643.$

所以

$$p(x) = 0.1145 + 0.6643x \tag{2′}$$

(2) 设 1 次最佳一致逼近多项式为 $q(x) = c_0 + c_1x$. $f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x$,由于当 $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时 $f''(x) < 0$. 因而 $f(x) - q(x)$ 有 3 个交错偏差点 $x_0 = 0, x_1 \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$和 $x_2 = \frac{\pi}{2}$. 由

$$\begin{cases} f(x_0) - q(x_0) = -[f(x_1) - q(x_1)] = f(x_2) - q(x_2) \\ f'(x_1) - q'(x_1) = 0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} 0 - c_0 = -[\sin x_1 - (c_0 + c_1x_1)] = \sin\frac{\pi}{2} - \left(c_0 + c_1 \times \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos x_1 - c_1 = 0 \end{cases} \tag{4′}$$

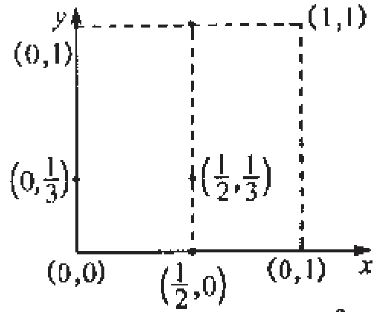
解得

$$c_1 = \frac{2}{\pi} = 0.6366, \qquad x_1 = \arccos\frac{2}{\pi} = 0.8807$$

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\arccos\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\sin\left(\arccos\frac{2}{\pi}\right) = -0.1053$$

$\therefore q(x) = -0.1053 + 0.6366x$ (2′)

9．解



$$f(x,0)=\frac{1-x}{1-0}f(0,0)+\frac{x-0}{1-0}f(1,0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(\xi_1,0)}{\partial x^2}(x-0)(x-1),$$

$$\xi_1\in(0,1)$$

$$f(x,1)=\frac{1-x}{1-0}f(0,1)+\frac{x-0}{1-0}f(1,1)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(\xi_2,1)}{\partial x^2}(x-0)(x-1),$$

$$\xi_2\in(0,1)$$

$$f\left(\frac{1}{2},0\right)=\frac{1}{2}f(0,0)+\frac{1}{2}f(1,0)-\frac{1}{8}\frac{\partial^2 f(\xi_1,0)}{\partial x^2}$$

$$f\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{1}{2}f(0,1)+\frac{1}{2}f(1,1)-\frac{1}{8}\frac{\partial^2 f(\xi_2,0)}{\partial x^2} \qquad (6')$$

$$f\left(\frac{1}{2},y\right)=\frac{1-y}{1-0}f\left(\frac{1}{2},0\right)+\frac{y-0}{1-0}f\left(\frac{1}{2},1\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{2},\eta\right)}{\partial y^2}(y-0)(y-1),$$

$$\eta\in(0,1)$$

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)&=\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2},0\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{2},1\right)-\frac{1}{9}\frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{2},\eta\right)}{\partial y^2}\\&=\frac{2}{3}\times\left[\frac{1}{2}f(0,0)+\frac{1}{2}f(1,0)-\frac{1}{8}\frac{\partial^2 f(\xi_1,0)}{\partial x^2}\right]\\&\quad+\frac{1}{3}\times\left[\frac{1}{2}f(0,1)+\frac{1}{2}f(1,1)-\frac{1}{8}\frac{\partial^2 f(\xi_2,1)}{\partial x^2}\right]-\frac{1}{9}\frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{2},\eta\right)}{\partial y^2}\\&=\frac{1}{3}[f(0,0)+f(1,0)]+\frac{1}{6}[f(0,1)+f(1,1)]\\&\quad-\left[\frac{1}{12}\frac{\partial^2 f(\xi_1,0)}{\partial x^2}+\frac{1}{24}\frac{\partial^2 f(\xi_2,1)}{\partial x^2}+\frac{1}{9}\frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{2},\eta\right)}{\partial y^2}\right] \qquad (4')\end{aligned}$$

故

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\approx\frac{1}{3}[f(0,0)+f(1,0)]+\frac{1}{6}[f(0,1)+f(1,1)]$$

其误差为

$$-\left[\frac{1}{12}\frac{\partial^2 f(\xi_1,0)}{\partial x^2}+\frac{1}{24}\frac{\partial^2 f(\xi_2,1)}{\partial x^2}+\frac{1}{9}\frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{2},\eta\right)}{\partial y^2}\right],$$

$$\xi_1,\xi_2,\eta\in(0,1) \qquad (2')$$

2004 年春季攻读博士学位研究生入学考试

1. **解** (1) $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $\quad x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$

(3′ + 2′)

(2) $10,\sqrt{35+5\sqrt{13}}$ 或 7.2820 (2′ + 3′)

(3) $3\times\dfrac{(x+1)(x-2)}{(1+1)\times(1-2)}+2\times\dfrac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)}$, $-\dfrac{5}{6}x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{7}{3}$

(3′ + 3′)

注:两式相同.

(4) 1.642075, 1.642042 (3′ + 3′)

(5) $y_{i+1}=y_i+\dfrac{h}{2}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_i+hf(x_i,y_i))]$, 2 (3′ + 1′)

2. **解** $fl(x)=0.1628\times10^1, fl(y)=0.1845\times10^0, fl(z)=0.4263\times10^{-1}$

(1′)

$$\begin{aligned}
u &= (fl(x)+fl(y))+fl(z)\\
&= (0.1628\times10^1+0.1845\times10^0)+0.4263\times10^{-1}\\
&= (0.1628\times10^1+0.0185\times10^1)+0.4263\times10^{-1}\\
&= (0.1628+0.0185)\times10^1+0.4263\times10^{-1}\\
&= 0.1813\times10^1+0.4263\times10^{-1}\\
&= 0.1813\times10^1+0.0043\times10^1\\
&= (0.1813+0.0043)\times10^1\\
&= 0.1856\times10^1 \qquad (2')\\
v &= fl(x)+(fl(y)+fl(z))\\
&= 0.1628\times10^1+(0.1845\times10^0+0.4263\times10^{-1})\\
&= 0.1628\times10^1+(0.1845\times10^0+0.0426\times10^0)\\
&= 0.1628\times10^1+(0.1845+0.0426)\times10^0\\
&= 0.1628\times10^1+0.2271\times10^0\\
&= 0.1628\times10^1+0.0227\times10^1
\end{aligned}$$

$$= (0.1628 + 0.0227) \times 10^1$$
$$= 0.1855 \times 10^1 \qquad (2')$$

说明计算机中加法交换律不成立. (1′)

此外,计算可得精确值

$$x + y + z = 1.85493$$

比较可知 v 比 u 更精确.这说明多个数相加时,应按照先绝对值较小的数相加,再依次与绝对值较大的数相加,这样做所得计算结果具有较高的精度. (2′)

3. 解　$f(x) = 400x^3 + 12x - 3$,　$f'(x) = 1200x^2 + 12 > 0$

$\therefore$ 方程 $f(x) = 0$ 仅有一实根 x^*.

又 $f(0) = -3 < 0, f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{13}{5} > 0, \therefore x^* \in \left(0, \frac{1}{5}\right)$. (2′)

将方程 $f(x) = 0$ 改写为

$$x = \sqrt[3]{\frac{3}{400}(1 - 4x)}, \qquad x \in \left[0, \frac{1}{5}\right]$$

记 $\varphi(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{400}(1 - 4x)}$,则

$$\varphi'(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{400}} \cdot \frac{1}{3}(1 - 4x)^{-\frac{2}{3}}(-4)$$

当 $x \in \left[0, \frac{1}{5}\right]$时

$$\varphi(x) \in \left[\varphi\left(\frac{1}{5}\right), \varphi(0)\right] = \left[\sqrt[3]{\frac{3}{400}\left(1 - 4 \times \frac{1}{5}\right)}, \sqrt[3]{\frac{3}{400}}\right]$$
$$= [0.1145, 0.1957] \subset \left[0, \frac{1}{5}\right]$$

$$|\varphi'(x)| = \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{400} \times \frac{1}{(1 - 4x)^2}} \leqslant \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{400} \times \frac{1}{\left(1 - 4 \times \frac{1}{5}\right)^2}}$$
$$= \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{400} \times 25} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{16}} = 0.7631 < 1$$

$\therefore$ 迭代格式 $x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 0, 1, 2, \cdots$ 对任意 $x_0 \in \left[0, \frac{1}{5}\right]$均收敛. (4′)

取 $x_0 = 0.1$,得到

$$x_1 = 0.16510, x_2 = 0.13657, x_3 = 0.15041, x_4 = 0.14403$$
$$x_5 = 0.14704, x_6 = 0.14563, x_7 = 0.14630, x_8 = 0.14598$$

$\therefore x^* \approx 0.146$ (4′)

4. 解

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & -1 & 13\\12 & -3 & 3 & 45\\0 & 4 & 3 & -3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\begin{bmatrix}12 & -3 & 3 & 45\\3 & 1 & -1 & 13\\0 & 4 & 3 & -3\end{bmatrix} \qquad (1')$$

$$\xrightarrow{r_2-\frac{1}{4}r_1}\begin{bmatrix}12 & -3 & 3 & 45\\0 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4}\\0 & 4 & 3 & -3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}12 & -3 & 3 & 45\\0 & 4 & 3 & -3\\0 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4}\end{bmatrix}$$

$(2'+1')$

$$\xrightarrow{r_3-\frac{7}{16}r_2}\begin{bmatrix}12 & -3 & 3 & 45\\0 & 4 & 3 & -3\\0 & 0 & -\frac{49}{16} & \frac{49}{16}\end{bmatrix} \qquad (2')$$

等价方程组为

$$\begin{cases}12x_1-3x_2+3x_3=45\\ \quad 4x_2+3x_3=-3\\ \quad -\frac{49}{16}x_3=\frac{49}{16}\end{cases} \qquad (4')$$

回代得 $x_3=-1, x_2=0, x_1=4$.

5．解　Gauss-Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=(45+3x_2^{(k)}-3x_3^{(k)})/12\\ x_2^{(k+1)}=(-3-3x_3^{(k)})/4\\ x_3^{(k+1)}=(13-3x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)})/(-1)\end{cases} \qquad (4')$$

迭代矩阵 G 的特征方程为

$$\begin{vmatrix}12\lambda & -3 & 3\\0 & 4\lambda & 3\\3\lambda & \lambda & -\lambda\end{vmatrix}=0 \qquad (2')$$

展开得

$$-3\lambda(16\lambda^2+24\lambda+9)=0$$

解得 $\lambda_1=0,\quad \lambda_2=-\frac{3}{4},\quad \lambda_3=-\frac{3}{4}$.

$$\rho(G)=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3|\}=\frac{3}{4}<1$$

∴ 迭代收敛.　$(2')$

6．解　用数学归纳法证明 ①.

当 $k=1$ 时

$$f[x_0,x_1]=\frac{1}{x_1-x_0}[f(x_1)-f(x_0)]$$
$$=\frac{1}{x_1-x_0}\left[\frac{1}{a-x_1}-\frac{1}{a-x_0}\right]$$
$$=\frac{1}{(a-x_0)(a-x_1)} \tag{1'}$$

设 ① 当 $k=m<n$ 时成立，即有

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_m]=\frac{1}{\prod_{i=0}^{m}(a-x_i)}$$
$$f[x_1,x_2,\cdots,x_{m+1}]=\frac{1}{\prod_{i=1}^{m+1}(a-x_i)} \tag{2'}$$

则

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_{m+1}]$$
$$=\frac{1}{x_{m+1}-x_0}\{f[x_1,x_2,\cdots,x_{m+1}]-f[x_0,x_1,\cdots,x_m]\}$$
$$=\frac{1}{x_{m+1}-x_0}\left\{\frac{1}{\prod_{i=1}^{m+1}(a-x_i)}-\frac{1}{\prod_{i=0}^{m}(a-x_i)}\right\}$$
$$=\frac{1}{\prod_{i=0}^{m+1}(a-x_i)} \tag{3'}$$

即 ① 对 $k=m+1$ 成立．由归纳原理 ① 对任意 $k\leqslant n$ 均成立．

$f(x)$ 以 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为节点的 n 次 Newton 插值多项式为

$$N(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n]\prod_{j=0}^{n-1}(x-x_j)$$
$$=\sum_{m=0}^{n}f[x_0,x_1,\cdots,x_m]\prod_{j=0}^{m-1}(x-x_j)$$
$$=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{\prod_{i=0}^{m}(a-x_i)}\prod_{j=0}^{m-1}(x-x_j) \tag{4'}$$

7. **解**　当 $f(x)=1$ 时，左 $=\int_{-1}^{1}1\mathrm{d}x=2$，右 $=A+B+C$；

当 $f(x)=x$ 时，左 $=\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x=0$，右 $=\frac{1}{2}(-A+C)$；

当 $f(x)=x^2$ 时，左 $=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$，右 $=\frac{1}{4}(A+C)$．

要使求积公式至少具有2次代数精度，其充分必要条件是 A、B、C 满足如下方程组

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ \frac{1}{2}(-A+C)=0 \\ \frac{1}{4}(A+C)=\frac{2}{3} \end{cases} \qquad (5')$$

解得 $A=\frac{4}{3}, B=-\frac{2}{3}, C=\frac{4}{3}$.

代入 ① 得

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{2}{3}\left[2f\left(-\frac{1}{2}\right)-f(0)+2f\left(\frac{1}{2}\right)\right] \qquad ②(2')$$

当 $f(x)=x^3$ 时，② 的左 $=0$，右 $=0$，左 $=$ 右；

当 $f(x)=x^4$ 时，左 $=\frac{2}{5}$，右 $=\frac{2}{3}\left[4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]=\frac{1}{6}$，左 $\neq$ 右.

综上，当求积公式 ① 中求积系数取为 $A=\frac{4}{3}, B=-\frac{2}{3}, C=\frac{4}{3}$ 时得到求积公式 ②，其代数精度取到最高，此时代数精度为 3. (3′)

8. **解** 记 $x_i=a+ih, 0\leqslant i\leqslant n, h=\frac{b-a}{n}$.

由定积分的定义有

$$\lim_{n\to\infty} h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)=I(f), \qquad \lim_{n\to\infty} h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)=I(f) \qquad (2')$$

由

$$T_n(f)=\frac{1}{2}h\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})] \qquad (4')$$

得

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} T_n(f) &= \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty} h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)+\lim_{n\to\infty} h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty} h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)+\lim_{n\to\infty} h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right] \\ &= \frac{1}{2}[I(f)+I(f)]=I(f) \end{aligned} \qquad (2')$$

9. **解** 求解 ① 的 Runge-Kutta 公式为

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x_i, y_i) = x_i^4 \\ k_2 = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \dfrac{1}{2}hk_1\right) = \left(x_i + \dfrac{h}{2}\right)^4 \\ k_3 = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \dfrac{1}{2}hk_2\right) = \left(x_i + \dfrac{h}{2}\right)^4 \\ k_4 = f(x_{i+1}, y_i + hk_3) = (x_i + h)^4 \\ y_0 = 1 \end{cases} \tag{3'}$$

因而

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}\left[x_i^4 + 2\left(x_i + \frac{h}{2}\right)^4 + 2\left(x_i + \frac{h}{2}\right)^4 + (x_i + h)^4\right] \\ &= y_i + h\left(x_i^4 + 2x_i^3 h + 2x_i^2 h^2 + x_i h^3 + \frac{5}{24}h^4\right) \end{aligned} \tag{2'③}$$

又

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= 1 + \frac{1}{5}x_{i+1}^5 = 1 + \frac{1}{5}(x_i + h)^5 \\ &= 1 + \frac{1}{5}[x_i^5 + 5x_i^4 h + 10x_i^3 h^2 + 10x_i^2 h^3 + 5x_i h^4 + h^5] \\ &= y(x_i) + x_i^4 h + 2x_i^3 h^2 + 2x_i^2 h^3 + x_i h^4 + \frac{1}{5}h^5 \end{aligned} \tag{2'④}$$

将 ③ 和 ④ 相减,得

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) - y_{i+1} &= y(x_i) - y_i + \frac{1}{5}h^5 - \frac{5}{24}h^5 \\ &= y(x_i) - y_i - \frac{1}{120}h^5, \qquad i = 0,1,2,\cdots \end{aligned}$$

递推得到

$$y(x_i) - y_i = -\frac{ih}{120} \cdot h^4 = -\frac{x_i}{120}h^4, \qquad i = 0,1,2,\cdots \tag{3'}$$