2011 年秋季工学硕士研究生学位课程考试试题(A)

1. 填空(每题 4 分, 共 20 分)

   1) 已知 $x_1 = 0.724$, $x_2 = 1.25$ 均为有效数, 则 $|e_r(x_1x_2)| \leqslant$ ________ $|e(x_1/x_2)| \leqslant$ ________.

   2) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & 4 \end{bmatrix}$, 则 $\|\boldsymbol{A}\|_\infty =$ ______, $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_2 =$ ______.

   3) 超定方程组
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$
   的最小二乘解为 $x_1 =$ ______, $x_2 =$ ______.

   4) 用 Simpson 公式计算积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ 的近似值为 ________.

   5) 设
$$s(x) = \begin{cases} x^3, & 0 \leqslant x < 1, \\ ax^2 + bx + 1, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$
   是以 0, 1, 2 为节点的三次样条函数, 则 $a =$ ______, $b =$ ______.

2. (8 分) 给定方程 $\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}x - 2 = 0$, 分析此方程有几个实根, 并用迭代法求此方程的正根, 精确至 3 位有效数字.

3. (8 分) 用列主元 Guass 消去法求下列线性方程组的解:
$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

4. (10 分) 给定求解线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的迭代格式
$$\boldsymbol{Bx}^{(k+1)} + \omega \boldsymbol{Cx}^{(k)} = \boldsymbol{b},$$
其中
$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
试确定 ω 的值, 使上述迭代格式收敛.

5. (10 分) 作一个 3 次多项式 $H(x)$, 使得

$$H(a) = b^3, \quad H(b) = a^3, \quad H''(a) = 6b, \quad H''(b) = 6a.$$

6. (10 分) 求函数 $f(x) = x^4$ 在区间 $[0,\ 1]$ 上的 1 次最佳一致逼近多项式 $p(x)$.

7. (12 分) 已知函数 $f(x) \in C^4[a,\ b]$, $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

1) 写出以 a, b 为二重节点的 $f(x)$ 的 3 次 Hermite 插值多项式 $H(x)$ 及插值余项;

2) 根据 $f(x) \approx H(x)$ 建立一个求解 $I(f)$ 的数值求积公式 $I_H(x)$, 并分析该公式的截断误差和代数精度.

8. (10 分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ y(a) = \eta, \end{cases}$$

取正整数 n, 并记 $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$, $0 \leqslant i \leqslant n$. 试确定参数 A, B, C, 使求解公式

$$y_{i+1} = Ay_i + (1-A)y_{i-1} + h\left[Bf(x_{i+1}, y_{i+1}) + Cf(x_i, y_i)\right]$$

的局部截断误差 R_{i+1} 的阶数达到最高, 指出所达到的最高阶数并给出局部截断误差表达式.

9. (12 分) 给定如下抛物方程初边值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3 - 3x, & 0 < x < 1, 0 < t \leqslant 1, \\ u(x, 0) = x^3, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u(0, t) = 3t,\ u(1, t) = 1 + 3t, & 0 < t \leqslant 1, \end{cases}$$

取步长 $h = \dfrac{1}{3}, \tau = \dfrac{1}{4}$. 用古典隐格式计算 $u(x, t)$ 在点 $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}\right)$, $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}\right)$, $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$ 处的近似值.

$$u_0^k = \alpha(t_k),\ u_M$$

2) 记 $r=\tau/h^2$, 则差分方程可写为

$$-ru_{i-1}^k+(1+2r)u_i^k-ru_{i+1}^k=u_i^{k-1}+\tau f(x_i,t_k),\quad 1\leqslant i\leqslant M-1,\ 1\leqslant k\leqslant N,$$

当 $h=1/3$ 有 $M=3$, 当 $k=1$ 时我们得

$$\begin{cases}(1+2r)u_1^1-ru_2^1=u_1^0+r\alpha(t_1)+\tau f(x_1,t_1),\\ -ru_1^1+(1+2r)u_2^1=u_2^0+r\beta(t_1)+\tau f(x_2,t_1),\end{cases}\quad (3')$$

将 $r=\tau/h^2=3$, $\tau=1/3$, $x_1=1/3$, $x_2=2/3$, $t_1=1/3$, $f(x_1,t_1)=x_1+t_1$, $f(x_2,t_1)=x_2+t_1$ 及初始条件和边界条件代入得

$$\begin{cases}7u_1^1-3u_2^1=\dfrac{4}{9},\\ -3u_1^1+7u_2^1=\dfrac{5}{9},\end{cases}\quad (2')$$

解方程组可得 $u_1^1=\dfrac{43}{360}\approx 0.1194$, $u_2^1=\dfrac{47}{360}\approx 0.1306$. (2')

2011 年秋季工学硕士研究生学位课程考试试题 (A)

1. 1) $0.469\times10^{-2}, 0.272\times10^{-2}$ 2) $4+2\sqrt{5}, 8$
   3) $-0.8333\left(或-\dfrac{5}{6}\right), -0.6667\left(或-\dfrac{2}{3}\right)$ 4) 1.4757 5) $3, -3$ $(4'\times5)$

2. 解 设 $f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}x-2$, $f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}$. 当 $x=\ln 0.5$ 时, $f'(x)=0$; 当 $x\in(-\infty,\ln 0.5)$ 时, $f'(x)<0$; 当 $x\in(\ln 0.5,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$. 再注意到 $f(-4)>0, f(-3)<0, f(1)<0, f(2)>0$, 则该方程存在两个实根, 分别在区间 $[-4,-3]$ 和 $[1,2]$ 内. $(3')$

构造迭代格式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{\mathrm{e}^{x_k}-\frac{1}{2}x_k-2}{\mathrm{e}^{x_k}-\frac{1}{2}},\quad k=0,1,\cdots,\quad (1')$$

取 $x_0=1.5$, 计算得 $x_1=1.0651$, $x_2=0.9116$, $x_3=0.8953$, $x_4=0.8951$, 所以 $x_2^*\approx 0.895$. (4′)

3. 解 $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ (1′)

$\xrightarrow[r_3+\frac{1}{3}r_1]{r_2-\frac{2}{3}r_1} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & 4 \\ 0 & \frac{16}{3} & -\frac{2}{3} & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & \frac{16}{3} & -\frac{2}{3} & 6 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & 4 \end{bmatrix}$ (2′)

$\xrightarrow{r_3-\frac{7}{16}r_2} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & \frac{16}{3} & -\frac{2}{3} & 6 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{8} & \frac{11}{8} \end{bmatrix}$, (2′)

用回代法求得 $x_1=-2, x_2=1, x_3=-1$. (3′)

4. 解 方法 1: 由 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k+1)}+\omega\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{b}$ 得

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=-\omega\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},$$

上述格式收敛的充要条件为 $\rho(-\omega\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C})<1$. (2′)

迭代矩阵 $-\omega\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}$ 的特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{I}+\omega\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}|=0, \quad (2')$$

可变形为

$$|\boldsymbol{B}^{-1}||\lambda\boldsymbol{B}+\omega\boldsymbol{C}|=0,$$

即

$$\begin{vmatrix} 4\lambda & -2\omega & \omega \\ -2\lambda & 4\lambda & -2\omega \\ \lambda & -2\lambda & 4\lambda \end{vmatrix}=0, \quad (3')$$

展开得 $\lambda(16\lambda^2-8\lambda\omega+\omega^2)=0$, 即 $\lambda(4\lambda-\omega)^2=0$, 解得 $\lambda_1=0, \lambda_{2,3}=\frac{\omega}{4}$. 则当 $|\lambda|<1$, 即 $|\omega|<4$ 时, 该格式收敛. (3′)

方法 2: 因为

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\ \frac{1}{8}&\frac{1}{4}&0\\ 0&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}\end{bmatrix},\quad B^{-1}C=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\ 0&-\frac{1}{4}&-\frac{3}{8}\\ 0&0&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}, \tag{5'}$$

而 $|\lambda I+\omega B^{-1}C|=0$, 即

$$\begin{vmatrix}\lambda&-\frac{\omega}{2}&\frac{\omega}{4}\\ 0&\lambda-\frac{\omega}{4}&-\frac{3}{8}\omega\\ 0&0&\lambda-\frac{\omega}{4}\end{vmatrix}=0, \tag{3'}$$

解得 $\lambda_1=0,\ \lambda_{2,3}=\frac{\omega}{4}$, 所以当 $\left|\frac{\omega}{4}\right|<1$, 即当 $|\omega|<4$ 时, 该格式收敛. (2')

5. 解　方法 1: 根据 $H''(a)=6b, H''(b)=6a$ 可知

$$H''(x)=6b+\frac{6a-6b}{b-a}(x-a)=6b-6(x-a), \tag{3'}$$

两边积分得

$$H'(x)=6b(x-a)-3(x-a)^2+c, \tag{2'}$$

$$H(x)=3b(x-a)^2-(x-a)^3+c(x-a)+d. \tag{2'}$$

由 $H(a)=b^3$ 得 $d=b^3$, 再由 $H(b)=a^3$ 有 $c=-3b^2$, 所以 (2')

$$H(x)=-(x-a)^3+3b(x-a)^2-3b^2(x-a)+b^3. \tag{1'}$$

方法 2: 根据题意, 知

$$H''(x)=6b\frac{x-b}{a-b}+6a\frac{x-a}{b-a}, \tag{3'}$$

$$H'(x)=\frac{3b}{a-b}(x-b)^2+\frac{3a}{b-a}(x-a)^2+c, \tag{2'}$$

$$H(x)=\frac{b}{a-b}(x-b)^3+\frac{a}{b-a}(x-a)^3+c(x-a)+d, \tag{2'}$$

其中 $d=b^3-b(a-d)^2, c=-3ab$, 所以 (2')

$$H(x)=\frac{b}{a-b}(x-b)^3+\frac{a}{b-a}(x-a)^3-3ab(x-a)+b^3-b(a-b)^2. \tag{1'}$$

6. 解　设 $p(x)=a+bx$. 由 $f'(x)=4x^3, f''(x)=12x^2$ 知, 当 $x\in(0,1)$ 时, $f''(x)$ 恒大于零. 则 $f(x)-p(x)$ 在 $[0,1]$ 上有三个交错偏差点: $0, x_1, 1$, 且满足 (2')

$$\begin{cases}f(0)-p(0)=-f(x_1)+p(x_1)=f(1)-p(1),\\ f'(x_1)-p'(x_1)=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -a = -x_1^4 + a + bx_1 = 1 - a - b, \\ x_1 = \sqrt[3]{\dfrac{b}{4}}, \end{cases}$$

求解得

$$a = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right], \quad b = 1, \quad x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \tag{6'}$$

所以

$$p(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right] + x = -0.2362 + x. \tag{2'}$$

7. **解** 1) 由条件

$$H(a) = f(a), \quad H'(a) = f'(a), \quad H(b) = f(b), \quad H'(b) = f'(b),$$

作差商表:

x_k	$f(x_k)$			
a	$f(a)$	$f'(a)$	$\dfrac{f[a,b]-f'(a)}{b-a}$	$\dfrac{f'(b)-2f[a,b]+f'(a)}{(b-a)^2}$
a	$f(a)$	$f[a,b]$	$\dfrac{f'(b)-f[a,b]}{b-a}$	
b	$f(b)$	$f'(b)$		
b	$f(b)$			

所以

$$\begin{aligned} H(x) =& f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f[a,b]-f'(a)}{b-a}(x-a)^2 \\ &+ \frac{f'(b)-2f[a,b]+f'(a)}{(b-a)^2}(x-a)^2(x-b), \end{aligned} \tag{2'}$$

$$f(x) - H(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)^2(x-b)^2, \quad \xi \in (a,b). \tag{2'}$$

2) 根据题意, 有

$$I(f) \approx \int_a^b H(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned} \int_a^b H(x)\,\mathrm{d}x =& f(a)(b-a) + \frac{f'(a)}{2}(b-a)^2 + \frac{f[a,b]-f'(a)}{3(b-a)}(b-a)^3 \\ &+ \frac{f'(b)-2f[a,b]+f'(a)}{(b-a)^2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4\left(-\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{(b-a)^2}{12}[f'(a)-f'(b)],$$ (3′)

$$R(f) = \int_a^b [f(x) - H(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)^2(x-b)^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{f^{(4)}(\eta)}{720}(b-a)^5, \quad \eta \in (a,b).$$ (3′)

再求代数精度. 由插值余项知, 当 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 时, $R(f) = 0$, $I_H(f) = I(f)$; 当 $f(x) = x^4$ 时, $R(f) \neq 0$, $I_N(f) \neq I(f)$. 故 $I_H(f)$ 具有 3 次代数精度. (2′)

8. **解** 局部截断误差为

$$R_{i+1} = y(x_{i+1}) - Ay(x_i) - (1-A)y(x_{i-1}) - h[By'(x_{i+1}) + Cy'(x_i)]$$

$$= y(x_i) + hy'(x_1) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(x_i) + O(h^5) - Ay(x_i)$$

$$- (1-A)\left[y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(x_i) + O(h^5)\right]$$

$$- h\left[By'(x_i) + Bhy''(x_i) + \frac{Bh^2}{2}y'''(x_i) + \frac{Bh^3}{6}y^{(4)}(x_i) + O(h^4) + Cy'(x_i)\right]$$ (2′)

$$= hy'(x_i)(1+1-A-B-C) + h^2y''(x_i)\left(\frac{1}{2} - \frac{1-A}{2} - B\right)$$

$$+ h^3y'''(x_i)\left(\frac{1}{6} + \frac{1-A}{6} - \frac{B}{2}\right) + h^4y^{(4)}(x_i)\left(\frac{1}{24} - \frac{1-A}{24} - \frac{B}{6}\right) + O(h^5).$$ (2′)

要使公式至少是 3 阶的, 当且仅当

$$\begin{cases} 2-A-B-C=0, \\ \frac{A}{2} - B = 0, \\ 2-A-3B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4}{5}, \\ B = \frac{2}{5}, \\ C = \frac{4}{5}, \end{cases}$$ (3′)

此时

$$R_{i+1} = -\frac{1}{30}y^{(4)}(x_i)h^4 + O(h^5),$$ (2′)

该公式的最高阶数是 3. (1′)

9. 解 求解该问题的古典隐格式为

$$\begin{cases}\frac{1}{\tau}(u_i^k-u_i^{k-1})-\frac{1}{2h^2}(u_{i+1}^k-2u_i^k+u_{i-1}^k)=3-3x_i, & 1\leqslant i\leqslant 2,1\leqslant k\leqslant 4,\\ u_i^0=x_i^3, & 0\leqslant i\leqslant 3,\\ u_0^k=3t_k,\ u_3^k=1+3t_k, & 1\leqslant k\leqslant 4.\end{cases} \quad (3')$$

记

$$r=\frac{\tau}{2h^2}=\frac{9}{8},$$

则差分格式可写为

$$(1+2r)u_i^k-r(u_{i+1}^k+u_{i-1}^k)=u_i^{k-1}+\tau(3-3x_i),\quad 1\leqslant i\leqslant 2.$$

用方程组表示为

$$\begin{bmatrix}1+2r & -r\\ -r & 1+2r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^k\\ u_2^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1^{k-1}\\ u_2^{k-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{4}(3-3x_1)+r3t_k\\ \frac{1}{4}(3-3x_2)+r(1+3t_k)\end{bmatrix},\quad k=1,2.\quad (3')$$

所以，当 $k=1$ 时，方程为

$$\begin{bmatrix}\frac{13}{4} & -\frac{9}{8}\\ -\frac{9}{8} & \frac{13}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^1\\ u_2^1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1193}{864}\\ \frac{2173}{864}\end{bmatrix},$$

或

$$\begin{bmatrix}3.25 & -1.125\\ -1.125 & 3.25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^1\\ u_2^1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.3808\\ 2.5150\end{bmatrix},$$

解得 $u_1^1=0.7870, u_2^1=1.0463.$ (3′)

当 $k=2$ 时，方程为

$$\begin{bmatrix}3.25 & -1.125\\ -1.125 & 3.25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^2\\ u_2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.9745\\ 4.1088\end{bmatrix},$$

解得

$$u_1^2=1.5370,\quad u_2^2=1.7963.$$

因而

$$u\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)\approx u_1^1=0.7870,\quad u\left(\frac{2}{3},\frac{1}{4}\right)\approx u_2^1=1.0463,$$

$$u\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\approx u_1^2=1.5370,\quad u\left(\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)\approx u_2^2=1.7963.\quad (3')$$