东 南 大 学 考 试 试 卷 (A 卷)

课程名称 数值分析 考试学期 13-14学年秋学期 得分______

适用专业 各专业工学研究生 考试形式 闭卷 考试时间长度 150分钟

（开卷、半开卷请在此写明考试可带哪些资料）

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总分
得分											
批阅人											

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名______ 学号______

线 封 密

1. (8分) 设近似值x和y的相对误差限分别为δ_1和δ_2. 给定函数$z = x^2\cos y$, 试求函数z的绝对误差限.

2. (10分) 给定方程$x^4 - 4x + 1 = 0$.

(1) 分析该方程存在几个实根;

(2) 用迭代法求出这些根, 精确至两位有效数.

3. (10分) 用列主元Gauss消去法求解下列线性方程组：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \\ 4 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

线

封

密

4. (10分) 考虑线性方程组

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

其中$a \neq 0$.

(1) 写出Gauss-Seidel迭代格式;

(2) 给出Gauss-Seidel迭代格式收敛的充分必要条件(a, b, c之间应满足什么条件).

线

封

密

5. (12分) 求一个在闭区间$[0,3]$上一阶导数连续的函数$p(x)$, 使之满足以下条件：

(1) 函数$p(x)$在区间$[0,2]$和$[2,3]$上均为二次多项式；

(2) $p(0)=1,\ p(2)=3,\ p(3)=5$;

(3) 积分$\int_0^2 p(x)\mathrm{d}x=0$.

密 …… 封 …… 线

6. (10分) 求函数$f(x) = \cos x$在区间$[0, \frac{\pi}{2}]$上的一次最佳一致逼近多项式$p(x)$,并估计误差.

线

封

密

7. (12分) 已知$g(t)\in C^4[-1,1]$, 则存在$\xi\in(-1,1)$, 使对于$[-1,1]$上的两点Gauss公式有以下估计式：

$$\int_{-1}^{1} g(t)\mathrm{d}t-\Big[g(-\frac{1}{\sqrt{3}})+g(\frac{1}{\sqrt{3}})\Big]=\frac{1}{135}g^{(4)}(\xi).$$

设函数$f(x)\in C^4[a,b]$. 考虑积分$I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(1) 对积分$I(f)$构造两点Gauss公式$G(f)$, 推导出截断误差$I(f)-G(f)$的表达式；

(2) 将区间$[a,b]$作n等分，记$h=\frac{b-a}{n}, x_i=a+ih,\ i=0,1,\cdots,n$.试应用

$$I(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

构造复化两点Gauss公式$G_n(f)$, 并推导出截断误差$I(f)-G_n(f)$的表达式.

8. (12分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \quad a \le x \le b, \\ y(a) = \eta. \end{cases}$$

取正整数 n, 并记 $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $0 \le i \le n$. 试推导求解公式

$$y_{i+1} = y_i + hf\Big(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\Big)$$

的局部截断误差表达式R_{i+1}，并指出这是一个几阶公式.

线

封

密

9. (10分) 给定边值问题

$$\begin{cases} -\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)=12xy, \qquad (x,y)\in\Omega, \\ u(x,y)|_\Omega=0, \end{cases}$$

其中$\Omega=\{(x,y)|\ 0<x<1,\ 0<y<1\}$, 取步长$h=1/3$，记$x_i=ih, y_j=jh,\ i,j=0,1,2,3$. 并记$u_{ij}\approx u(x_i,y_j)$. 求数值解$u_{11},u_{12},u_{21},u_{22}$.

线

封

密

10. (6分) 设$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. 设函数$f(x) \in C^{n+1}[a,b]$, $P(x)$为$f(x)$的以$x_0, x_1, \cdots, x_n$为插值节点的n次插值多项式. 试证明

(1) 方程$f'(x) - P'(x) = 0$至少有n个互异的实根$z_1, z_2, \cdots, z_n$;

(2) 存在$\xi \in (a,b)$使得

$$f'(x) - P'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n),\ x \in [a,b].$$

线

封

密