

东南大学 考试卷 (A 卷)

课程名称 数值分析 考试学期 14-15学年秋学期 得分

适用专业 各专业工科研究生 考试形式 闭卷 考试时间长度 150分钟

(开卷、半开卷请在此写明考试可带哪些资料)

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
批阅人										

1. (10分) 设 $x = 1.345$, $y = 0.2067$ 均为有效数. 试分析由此计算函数

$$f(x, y) = x^2 - x \sin y$$

的近似值至少具有几位有效数字, 并给出其相对误差限.

解: $|e(x)| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}$, $|e(y)| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$ (2分)

$$f(x, y) = x^2 - x \sin y = 1.5330$$

$$|ef(x, y)| \leq |2x - \sin y| |e(x)| + |x \cos y| |e(y)| \quad (2分)$$

$$\leq 2.4848 \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} + 1.3164 \times \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

$$= 0.1308 \times 10^{-2} < 0.5 \times 10^{-3} \quad (2分)$$

$f(x, y)$ 的近似值有至少 3 位有效数字. (2分)

2. (10分) 给定方程 $x^5 - 20x^2 - 2 = 0$.

(1) 证明该方程存在唯一正根;

(2) 用 Newton 迭代法求出这个根, 精确至 4 位有效数.

$$|er(f(x, y))| = \left| \frac{e(f(x, y))}{f(x, y)} \right| \leq 0.8532 \times 10^{-3} \quad (2分)$$

解: 设 $f(x) = x^5 - 20x^2 - 2$

$$f'(x) = 5x^4 - 40x = 5x(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \quad (2分)$$

可判断在 $(0, 2)$ 内, $f'(x) < 0$, 在 $(2, +\infty)$ 内 $f'(x) > 0$

又因为 $f(0) = -2 < 0$, $f(2) = -30 < 0$, $f(3) = 64 > 0$

第 1 页 共 8 页

因此方程存在唯一正根 x^* , 且 $x^* \in [2, 3]$. (2分)

自觉遵守考场纪律

如考试作弊

此答卷无效

姓名

学号

取 $x_0 = 2.5$,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^5 - 20x_k^2 - 2}{5x_k^4 - 40x_k} \quad (3\text{分})$$

取 $x_0 = 2.5$, $x_1 = 2.8079$, $x_2 = 2.7330$, $x_3 = 2.7266$, $x_4 = 2.7265$

$$x^* \approx 2.727 \quad (3\text{分})$$

[注意, 若取 $x_0 = 2$, 发散]

3. (10分) 用列主元Gauss消去法求解线性方程组

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 + 5x_3 = 9 \end{cases}$$

解: $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{cases} \Gamma_2 + \Gamma_1 \times (-\frac{1}{2}) \\ \Gamma_3 + \Gamma_1 \times (\frac{1}{4}) \end{cases} \quad (1\text{分})$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & -\frac{7}{2} & -\frac{13}{2} \\ 0 & 4 & \frac{13}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 4 & \frac{13}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 3 & -\frac{7}{2} & -\frac{13}{2} \end{bmatrix} \begin{cases} \Gamma_3 + \Gamma_2 \times (-\frac{3}{4}) \end{cases} \quad (3\text{分}) \quad (1\text{分})$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 4 & \frac{13}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{95}{16} & -\frac{95}{16} \end{bmatrix} \quad (2\text{分})$$

等价三角方程组为:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_3 = 9 \\ 4x_2 + \frac{13}{4}x_3 = -\frac{3}{4} \\ -\frac{95}{16}x_3 = -\frac{95}{16} \end{cases} \quad (2\text{分})$$

解得 $\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_1 = 1 \end{cases} \quad (1\text{分})$

4. (10分) 给定方程组

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 2 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

其中实参数 $\alpha \neq 0$. 试确定 α 的取值范围以保证求解这个线性方程组的 Jacobi 格式和 Gauss-Seidel 格式都收敛.

解: 求解以上方程组的 Jacobi 格式对应迭代矩阵 J 的特征方程为:

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha & 2 & 1 \\ 2 & \lambda\alpha & -1 \\ 1 & 1 & \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{即: } \alpha^2\lambda^3 - 4\lambda = \lambda(\alpha^2\lambda^2 - 4) = 0 \quad (3\text{分})$$

$$\lambda = 0 \text{ 或 } \lambda^2 = \frac{4}{\alpha^2}$$

$$\rho(J) = \frac{2}{|\alpha|} \quad \text{当 } \rho(J) < 1 \text{ 时, Jacobi 格式收敛.}$$

$$\text{因此由 } \frac{2}{|\alpha|} < 1 \text{ 得 } |\alpha| > 2. \quad (2\text{分})$$

Gauss-Seidel 格式对应的迭代矩阵 G 的特征方程为:

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha & 2 & 1 \\ 2\lambda & \lambda\alpha & -1 \\ \lambda & \lambda & \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{即: } \alpha^2\lambda^3 - 4\lambda = 0 \quad (3\text{分})$$

$$\lambda = 0 \text{ 或 } \lambda^2 = \frac{4}{\alpha^2}$$

$$\therefore \rho(G) = \frac{2}{|\alpha|}, \quad \rho(G) < 1 \text{ 时 G-S 格式收敛.}$$

$$\text{由 } \frac{2}{|\alpha|} < 1 \text{ 得 } |\alpha| > 2 \quad (2\text{分})$$

要保证两种格式都收敛,

所以取 $|\alpha| > 2$.

5. (12分) 设 $f(x) \in C^1[a, b]$.

(1) 求一个3次多项式 $H_3(x)$, 使之满足

$$H_3(a) = f(a), H'_3(a) = f'(a), H_3(b) = f(b), H'_3(b) = f'(b).$$

(2) 讨论满足如下条件的4次多项式 $H(x)$ 是否存在. 若存在, 写出满足这组条件的多项式.

$$H(a) = f(a), H'(a) = f'(a), H(b) = f(b), H'(b) = f'(b), H'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

解: (1) 列差商表:

a	$f(a)$	$f'(a)$	$f[a, a, b]$	$f[a, a, b, b]$
a	$f(a)$	$f[a, b]$	$f[a, b, b]$	
b	$f(b)$	$f'(b)$		
b	$f(b)$			

(2/分)

$$\text{其中 } f[a, a, b] = \frac{f[a, b] - f'(a)}{b-a} = \frac{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)}{(b-a)^2}$$

$$f[a, b, b] = \frac{f'(b) - f[a, b]}{b-a} = \frac{(b-a)f'(b) - f(b) + f(a)}{(b-a)^2}$$

$$f[a, a, b, b] = \frac{f'(b) + f'(a) - 2f[a, b]}{(b-a)^2} = \frac{(b-a)(f'(b) + f'(a)) - 2(f(b) - f(a))}{(b-a)^3}$$

$$H_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f[a, b] - f'(a)}{b-a}(x-a)^2 + \frac{f'(b) + f'(a) - 2f[a, b]}{(b-a)^2}(x-a)^3$$

(2/分)

(2) 注意到 $H(x)$ 与 $H_3(x)$ 共同满足(1)中的4个条件. 因此

$$H(x) - H_3(x) = A(x-a)^2(x-b)^2 \quad (2/分)$$

$$H'(x) - H'_3(x) = 2A(x-a)(x-b)(2x-a-b)$$

$$\text{将 } x = \frac{a+b}{2} \text{ 代入有 } H'\left(\frac{a+b}{2}\right) - H'_3\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \quad (2/分)$$

$$\text{因此若 } H'_3\left(\frac{a+b}{2}\right) = H'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ 时,}$$

$$\text{即 } f'(a) + f[a, a, b](b-a) - f[a, a, b, b]\frac{(b-a)^2}{4} = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ 时}$$

$$H(x) = H_3(x) + A(x-a)^2(x-b)^2, \quad A \text{ 可取任意值.} \quad (2/分)$$

$$\text{若 } f'(a) + f[a, a, b](b-a) - f[a, a, b, b]\frac{(b-a)^2}{4} \neq f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ 时}$$

满足这组条件的4次多项式 $H(x)$ 不存在. (2/分)

6. (12分) 设 $p_1(x)$ 为任意的一次多项式, 证明

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{1+x} - p_1(x) \right| \geq \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

求函数 $\frac{1}{1+x}$ 在 $[0, 1]$ 上的最佳一致逼近多项式 $p_1(x) = C_0 + C_1 x$.

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} > 0.$$

$f(x) - p_1(x)$ 的交错偏差点, 为 $0, x_1, 1$

$$\begin{cases} f(0) - p(0) = -[f(x_1) - p(x_1)] = f(1) - p(1) \\ f'(x_1) = p'(x_1) \end{cases} \quad (4\text{分})$$

求得: $x_1 = \sqrt{2} - 1, \quad C_1 = -\frac{1}{2}, \quad C_0 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

因此, $p_1(x) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}x$ 是 $\frac{1}{1+x}$ 在 $[0, 1]$ 上的

最佳一致逼近多项式. 因此对于任意的一次多项式 $p_1(x)$ (4分)

有:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{1+x} - p_1(x) \right| &\geq \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{1+x} - p(x) \right| = |f(0) - p(0)| \\ &= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4\text{分}) \end{aligned}$$

7. (12分) 设 $f(x) \in C^2[a, b]$, $I(f) = \int_a^b f(x) dx$. 已知

$$I(f) - \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \xi \in (a, b).$$

(1) 取 $h = \frac{b-a}{n}$, 其中 n 是正整数, $x_i = a + ih$, $0 \leq i \leq n$. 写出计算 $I(f)$ 的复化梯形公式 $T_n(f)$;

(2) 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(f) - T_n(f)}{h^2} = \frac{1}{12} [f'(a) - f'(b)];$$

(3) 证明 $I(f) - T_{2n}(f) \approx \frac{1}{3} [T_{2n}(f) - T_n(f)]$.

$$(1) \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] = T_n(f) \quad (4分)$$

$$(2) I(f) - T_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{h^3}{12} f''(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}) \quad (2分)$$

$$\frac{I(f) - T_n(f)}{h^2} = -\frac{1}{12} \sum_{i=0}^{n-1} h f''(\xi_i)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(f) - T_n(f)}{h^2} = -\frac{1}{12} \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} h f''(\xi_i) = -\frac{1}{12} \int_a^b f''(x) dx \quad (2分)$$

$$= \frac{1}{12} [f'(a) - f'(b)]$$

$$(3) I(f) - T_n(f) \approx \frac{h^2}{12} [f'(a) - f'(b)]$$

$$\text{因此 } I(f) - T_{2n}(f) \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{h^2}{12} [f'(a) - f'(b)] \quad (2分)$$

$$\text{因此有 } I(f) - T_{2n}(f) \approx \frac{1}{4} [I(f) - T_n(f)]$$

$$\text{上式两边同乘 } \frac{4}{3} \text{ 有 } I(f) - T_{2n}(f) \approx \frac{1}{3} (T_{2n}(f) - T_n(f)) \quad (2分)$$

8. (12分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = \eta. \end{cases}$$

取正整数 n , 并记 $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$, $0 \leq i \leq n$.

试确定参数 A, B 使求解公式

$$y_{i+1} = y_i + h \left[Af(x_i, y_i) + (1-A)f(x_i + Bh, y_i + \frac{4}{5}hf(x_i, y_i)) \right]$$

的局部截断误差 R_{i+1} 的阶数达到最高, 并给出局部截断误差表达式.

$$\begin{aligned} \text{解} = R_{i+1} &= y(x_{i+1}) - y(x_i) - h \left[Ay'(x_i) + (1-A)f(x_i + Bh, y(x_i) + \frac{4}{5}hy'(x_i)) \right] \\ &= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + O(h^4) - y(x_i) \\ &\quad - hAy'(x_i) \\ &\quad - h(1-A) \left[f(x_i, y(x_i)) + \frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial x} Bh + \frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial y} \frac{4}{5}hy'(x_i) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial x^2} B^2 h^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial y^2} \frac{16}{25} h^2 (y'(x_i))^2 \\ &\quad + \frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial x \partial y} B \cdot \frac{4}{5} h^2 y'(x_i) + O(h^3) \quad (2/分) \\ &= hy'(x_i)(1-A-1+A) + h^2 \left[\left(\frac{1}{2} - (1-A)B \right) \frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5}(1-A) \right) \frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial y^2} y'(x_i) \right] \quad (2/分) \\ &\quad + h^3 \left[\frac{1}{6}y'''(x_i) - \frac{1}{2}(1-A)B \frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial x^2} - \frac{1}{2}(1-A) \cdot \frac{16}{25} \frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial y^2} y'(x_i) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{5}(1-A)B \frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial x \partial y} y'(x_i) \right] + O(h^4) \quad (2/分) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-A)B &= \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} - \frac{4}{5}(1-A) &= 0 \Rightarrow B = \frac{4}{5} \quad (2/分) \end{aligned}$$

注意到此时 $\frac{1}{2}(1-A)B^2 = \frac{1}{5}$, 第7页共8页 $\frac{1}{2}(1-A)\frac{16}{25} = \frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}(1-A)B = \frac{2}{5}$

$$\text{因此 } R_{i+1} = h^3 \left(-\frac{1}{30}y'''(x_i) + \frac{1}{5} \frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial y^2} y''(x_i) \right) + O(h^4) \quad (2/分)$$

9. (12分) 给定如下抛物方程初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = f(x, t), & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1, \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

取正整数 M, N , 记步长 $h = 1/M, \tau = 1/N, x_i = ih, t_k = k\tau, 0 \leq i \leq M, 0 \leq k \leq N$. 试建立一个求解此问题的隐式差分格式, 并给出截断误差表达式.

解: ① 在节点 (x_i, t_k) 处考虑方程: $\frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2} + u(x_i, t_k) = f(x_i, t_k)$ (2分)

② 差商替代导数有:

$$\frac{1}{\tau} [u(x_i, t_k) - u(x_i, t_{k-1})] - \frac{2}{h^2} [u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)] + u(x_i, t_k) = f(x_i, t_k) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial t^2} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^4 u(x_i, t_k)}{\partial x^4}, \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq k \leq N \quad (3分)$$

$\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}), \eta_k \in (t_{k-1}, t_k)$

$$u(x_i, t_0) = \phi(x_i), \quad 0 \leq i \leq M \quad (2分)$$

$$u(x_0, t_k) = \alpha(t_k), \quad u(x_M, t_k) = \beta(t_k), \quad 1 \leq k \leq N.$$

③ 略去小量 $R_{ik} = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, \eta_k)}{\partial t^2} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^4 u(\xi_i, t_k)}{\partial x^4}$, 用近似值 u_i^k

代替精确值 $u(x_i, t_k)$ 得:

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau} [u_i^k - u_i^{k-1}] - \frac{2}{h^2} [u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k] + u_i^k = f(x_i, t_k) \\ 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq k \leq N \end{cases}$$

$$u_i^0 = \phi(x_i), \quad 0 \leq i \leq M \quad (3分)$$

$$u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), \quad 1 \leq k \leq N.$$

截断误差为 $R_{ik} = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, \eta_k)}{\partial t^2} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^4 u(\xi_i, t_k)}{\partial x^4}, \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}), \eta_k \in (t_{k-1}, t_k)$ (2分)