数值分析复习

吴宏伟

东南大学数学系

E-mail: hwwu@seu.edu.cn

(2008年10月)

1 绪 论

一、内容提要

1. 误差的概念

   ✓ 绝对误差(限)、相对误差(限)、有效数字及它们之间的关系

2. 数据误差对函数值的影响

$$\begin{aligned} &\checkmark \qquad y = f(x), \quad e(y) \approx f'(x)e(x) \\ &\checkmark \qquad y = f(x_1, x_2), \quad e(y) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} e(x_1) + \frac{\partial f}{x_2} e(x_2) \end{aligned}$$

3. 算法的数值稳定性概念（教材例1.5）

4. 实际计算中应注意的问题

   - 避免两个相近的数相减;

   ✓ 计算多项式的秦九韶法

二、练习

1. 设$x_1 = 6.1025, x_2 = 80.115$是经过四舍五入得到的近似值, 试求$x_1 - x_2, x_1x_2, x_1/x_2$及$x_1^2x_2$的绝对误差限, 相对误差限和有效数字.

   解

$$\begin{aligned} &|e(x_1)| \le \frac{1}{2} \times 10^{-4}, \quad |e(x_2)| \le \frac{1}{2} \times 10^{-3}, \\ &|e(x_1 - x_2)| = |e(x_1) - e(x_2)| \le |e(x_1)| + |e(x_2)| \le 0.55 \times 10^{-3}. \\ &|e_r(x_1 - x_2)| = \left| \frac{e(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} \right| \le \frac{0.55 \times 10^{-3}}{74.0125} = 7.43 \times 10^{-6}. \\ &x_1 - x_2 = -74.0125, \quad |e(x_1 - x_2)| \le 0.55 \times 10^{-3} < \frac{1}{2} \times 10^{-2}, \end{aligned}$$

故$x_1 - x_2$具有4位有效数字.

$$\begin{aligned} &|e(x_1x_2)| \approx |x_2 e(x_1) + x_1 e(x_2)| \le x_2|e(x_1)| + x_1|e(x_2)| \le 0.7057 \times 10^{-2}. \\ &|e_r(x_1x_2)| = \left| \frac{e(x_1x_2}{x_1x_2} \right| \le 1.44 \times 10^{-5}. \\ &x_1x_2 = 488.9017875, \quad |e(x_1x_2)| < \frac{1}{2} \times 10^{-1}, \end{aligned}$$

所以, x_1x_2具有4位有效数字.

$$\begin{aligned} &|e(x_1/x_2)| \approx \left| \frac{1}{x_2} e(x_1) - \frac{x_1}{x_2^2} e(x_2) \right| \le \frac{1}{x_2}|e(x_1)| + \frac{x_1}{x_2^2}|e(x_2)| \le 1.099 \times 10^{-6}. \\ &|e_r(x_1/x_2)| = \left| \frac{e(x_1/x_2)}{x_1/x_2} \right| \le 1.44 \times 10^{-5}. \\ &x_1/x_2 = 0.07617175, \quad |e(x_1/x_2)| < \frac{1}{2} \times 10^{-5}, \end{aligned}$$

因此, x_1/x_2具有4位有效数字.

$$
\begin{aligned}
&|e(x_1^2x_2)| \approx |2x_1x_2e(x_1)+x_1^2e(x_2)| \le 2x_1x_2|e(x_1)|+x_1^2|e(x_2)| \le 0.06751.\\
&|e_r(x_1^2x_2)| = \left|\frac{e(x_1^2x_2)}{x_1^2x_2}\right| \le 2.263\times 10^{-5}.\\
&x_1^2x_2 = 2983.523, \quad |e(x_1^2x_2)| < \frac{1}{2}\times 10^0,
\end{aligned}
$$

故$x_1^2x_2$具有4位有效数字.

2. 设$x^*=\sqrt{2008}$, $y^*=\sqrt{2007}$, $x=44.8107$, $y=44.7996$. 已知x,y分别是x^*和y^*的具有6位有效数字的近似值. 计算$\sqrt{2008}-\sqrt{2007}$, 试分析下面两种算法所得结果的有效数字.

   (a) $\sqrt{2008}-\sqrt{2007}\approx x-y=0.0111.$

   (b) $\sqrt{2008}-\sqrt{2007}=\frac{1}{\sqrt{2008}+\sqrt{2007}}\approx\frac{1}{x+y}=0.0111594314.$

   解

$$
\begin{aligned}
&|e(x)| \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}, \quad |e(y)| \le \frac{1}{2}\times 10^{-4},\\
&|e(x-y)| \le |e(x)|+|e(y)| \le 10^{-4} < \frac{1}{2}\times 10^{-3},
\end{aligned}
$$

所以, 第一种方法所得结果有2位有效数字.

$$
\begin{aligned}
\left|e(\frac{1}{x+y})\right| &\approx \left|-\frac{1}{(x+y)^2}(e(x)+e(y))\right| \le \frac{1}{(x+y)^2}(|e(x)|+|e(y)|)\\
&\le 1.2453\times 10^{-8} < \frac{1}{2}\times 10^{-7},
\end{aligned}
$$

因此, 第二种方法所得结果有6位有效数字.

3. 假设测得圆柱体容积的地面半径和高分别为50cm和100cm, 且已知测量误差限是0.05cm. 试估计由此计算所得容积的绝对误差和相对误差.

   解 设圆柱体地面半径为r, 高为h, 容积为V, 则$r=50$, $h=100$, $V=\pi r^2h$. 由条件得

$$
\begin{aligned}
&|e(r)| \le 0.05, \quad |e(h)| \le 0.05, \text{ 所以}\\
&|e(V)| \approx |2\pi rhe(r)+\pi r^2e(h)| \le \pi r(2h|e(r)|+r|e(h)|) \le 1963.495.\\
&|e_r(V)| = \left|\frac{e(V)}{V}\right| \le 0.25\times 10^{-2}.
\end{aligned}
$$

4. 改变下列表达式, 使计算结果比较精确.

   (a) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}, \quad x>>1.$

   (b) $\ln(x-\sqrt{x^2-1}), \quad x>>1.$

   (c) $e^x-1, \quad |x|<<1.$

   (d) $1-\cos x, \quad |x|<<1.$

(e) $\int_x^{x+1}\frac{t}{1+t^2}dt$.

解

(a) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

(b) $\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

(c) $e^x-1\approx x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3$.

(d) $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$.

(e) $\int_x^{x+1}\frac{t}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln\frac{1+(1+x)^2}{1+x^2}$.

5. 设多项式$f(x)=3x^4+4x^3-5x^2+6x+1$, 用秦九韶法计算$f(2)$.

解

	3	4	-5	6	1
$x=2$		6	20	30	72
	3	10	15	36	73

$f(2)=73$.

2 非线性方程求根

一、内容提要

1. 二分法

$$|x^*-x_k|\leq\frac{1}{2^{k+1}}|b-a|.$$

2. 简单迭代法

✓ 用作图法或微分法判别方程根的个数

✓ 构造迭代格式, 分析收敛性

✓ 用迭代法求方程的根, 要求满足$|x_{k+1}-x_k|\leq\varepsilon$

• 局部收敛性，收敛阶数及求法

3. Newton迭代

✓ 迭代格式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

- 局部收敛性
- 重根的处理，Newton法的变形

二、练习

1. 给定方程 $3x - \sin x - \cos x = 0$.

   (a) 分析该方程存在几个实根；

   (b) 用迭代法求出该方程的所有实根，精确到4位有效数；

   (c) 说明使用的迭代格式为什么是收敛的.

   解

   (a) (法一)　将方程改写为 $3x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$. 作函数$y = 3x$及$y = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$的图像, 由图像知方程有唯一实根$x^* \in [0, 1]$.

   (法二)　令$f(x) = 3x - \sin x - \cos x$. $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 3 - \sin 1 - \cos 1 > 0$, $f'(x) = 3 - \cos x + \sin x > 0, \quad x \in \mathbf{R}$. 所以方程$f(x) = 0$有唯一实根$x^* \in [0, 1]$.

   (b) 构造迭代格式

   $$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{1}{3}(\sin x_k + \cos x_k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \\ x_0 = 0.5. \end{cases} \tag{1}$$

   计算得$x_1 = 0.452336$, $x_2 = 0.445499$, $x_3 = 0.444435$, $x_4 = 0.444267$, $x_5 = 0.444241$. $|x_5 - x_4| = 0.26 \times 10^{-4} < \frac{1}{2} \times 10^{-4}$, 因此, $x^* \approx 0.444241$.

   (c) 迭代函数 $\varphi(x) = \frac{1}{3}(\sin x + \cos x)$.

      i. 当 $x \in [0, 1]$ 时, $0 < \varphi(x) < \frac{2}{3} < 1$;

      ii. $|\varphi'(x)| = \frac{1}{3}|\cos x - \sin x| < \frac{2}{3} < 1, \quad \forall x \in [0, 1]$.

   由定理2.1, 迭代格式(1)收敛.

2. 给定方程 $e^x - 4x = 0$.

   (a) 分析方程根的个数.

   (b) 构造迭代格式求出这些根, 精确到3位有效数字.

   (c) 说明迭代法的收敛性.

   解

   (a) 作函数$y = 4x$和$y = e^x$的图像得知方程有两个实根$x_1^* \in [0, 1]$, $x_2^* \in [2, 3]$.

(b) 求$x_1^* \in [0,1]$. 构造迭代格式

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{1}{4}e^{x_k}, \quad k = 0,1,2,\cdots, \\ x_0 = 0.5. \end{cases} \tag{2}$$

计算得$x_1 = 0.4122$, $x_2 = 0.3775$, $x_3 = 0.3647$, $x_4 = 0.3600$, $x_5 = 0.3583$, $x_6 = 0.3577$, $x_7 = 0.3575$.

$|x_7 - x_6| = 0.0002 < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$, 因此, $x_1^* \approx 0.3575$.

求$x_2^* \in [2,3]$. 构造迭代格式

$$\begin{cases} x_{k+1} = \ln 4x_k, \quad k = 0,1,2,\cdots, \\ x_0 = 2.5. \end{cases} \tag{3}$$

计算得$x_1 = 2.3026$, $x_2 = 2.2203$, $x_3 = 2.1839$, $x_4 = 2.1674$, $x_5 = 2.1598$, $x_6 = 2.1563$.

$|x_6 - x_5| = 0.0035 < \frac{1}{2} \times 10^{-2}$, 所以, $x_2^* \approx 2.1563$.

(c) 记 $\varphi_1(x) = \frac{1}{4}e^x$.

i. 当 $x \in [0,1]$ 时, $0 < \varphi_1(x) \le \frac{e}{4} < 1$;

ii. $|\varphi_1'(x)| = \frac{e^x}{4} \le \frac{e}{4} < 1, \quad \forall x \in [0,1]$.

由定理2.1知迭代格式(2)收敛.

记 $\varphi_2(x) = \ln 4x$.

i. 当 $x \in [2,3]$时, $2 < \ln 8 \le \varphi_2(x) \le \ln 12 < 3$;

ii. $|\varphi_2'(x)| = \frac{1}{x} \le \frac{1}{2} < 1, \quad \forall x \in [2,3]$.

由定理2.1知迭代格式(3)收敛.

3. 证明下面的迭代收敛.

$$\begin{cases} x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k}, \quad k = 0,1,2,\cdots \\ x_0 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

证. 记迭代函数 $\varphi(x) = \sqrt{2+x}$. 则有

(a) 当 $x \in [0,2]$时, $0 < \sqrt{2} \le \varphi(x) \le \sqrt{2+2} = 2$;

(b) $|\varphi'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} \le \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1, \quad \forall x \in [0,2]$.

由定理2.1知迭代格式(4)收敛.

3 线性方程组的数值解法

一、内容提要

1. 消元法

- Gauss 消元法

✓ Gauss列主元消去法

- 三对角方程组的追赶法

2. 方程组的性态和误差估计

✓ 向量和矩阵的3个范数的计算

- 向量范数的连续性和等价性, 向量序列的收敛性

✓ 谱半径以及和矩阵范数的关系

✓ 矩阵的条件数, 谱条件数

- 方程组近似解可靠性的判别

3. 线性方程组的迭代法

✓ Jacobi迭代格式和Gauss-Seidel迭代格式

- 迭代法收敛的充要条件(Th.3.12)

✓ 利用Th.3.12 判别Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代收敛性(写出迭代矩阵的特征多项式)

- Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代收敛性的充分判别法.

二、练习

1. 用列主元Gauss消去法解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ -8 & -6 & 3 \\ 9 & 6 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 8 \\ -33 \end{pmatrix}$$

解

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 & 19 \\ -8 & -6 & 3 & 8 \\ 9 & 6 & -15 & -33 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 9 & 6 & -15 & -33 \\ -8 & -6 & 3 & 8 \\ 6 & 7 & 9 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{2}{3}r_1+r_3]{\frac{8}{9}r_1+r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & -15 & -33 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{31}{3} & -\frac{64}{3} \\ 0 & 3 & 19 & 41 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 9 & 6 & -15 & -33 \\ 0 & 3 & 19 & 41 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{31}{3} & -\frac{64}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{9}r_2+r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & -15 & -33 \\ 0 & 3 & 19 & 41 \\ 0 & 0 & -\frac{55}{9} & -\frac{110}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

2. (a) 设

$$x=\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}7&4&3\\1&-4&6\\4&8&7\end{pmatrix}.$$

试求$\|x\|_1, \|x\|_2, \|A\|_\infty, \|Ax\|_\infty$.

(b) 设$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$且$\|A\|_1<1$, 试证明线性方程组

$$(I-A)x=b$$

存在唯一解, 其中I为$\mathbf{R}^{n\times n}$中的单位矩阵.

解

(a) $\|x\|_1=7, \|x\|_2=\sqrt{21}, \|A\|_\infty=19, \|Ax\|_\infty=31.$

(b) (法一) 由定理3.8及条件得$\rho(A)\le\|A\|_1<1$, 所以1不是A的特征值, 即$|1\cdot I-A|\neq 0$, 所以$I-A$可逆, 从而方程$(I-A)x=b$有唯一解.

(法二) 反正. 假设$I-A$不可逆, 则对应的齐次方程$(I-A)x=0$有非零解, 即存在$y\in\mathbb{R}^n, y\neq 0$, 使得$(I-A)y=0$, 即$y=Ay$. 两边取1范数并利用矩阵范数的性质得

$$\|y\|_1=\|Ay\|_1\le\|A\|_1\|y\|_1.$$

因为$y\neq 0$, 所以$\|y\|_1\neq 0$, 从而得$\|A\|_1\ge 1$, 与条件矛盾.

3. 给定线性方程组

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \tag{5}$$

(a) 写出解线性方程组(5)的Jacobi迭代格式和Gauss-Seidel迭代格式.

(b) 分析这两种迭代的收敛性.

解

(a) Jacobi迭代格式:

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=(-x_2^{(k)}-x_3^{(k)}+1)/2\\x_2^{(k+1)}=(-x_1^{(k)}-x_3^{(k)}+2)/2\\x_3^{(k+1)}=(-x_1^{(k)}-x_2^{(k)}+3)/2\end{cases},k=0,1,2\dots.$$

Gauss-Seidel迭代格式:

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=(-x_2^{(k)}-x_3^{(k)}+1)/2\\x_2^{(k+1)}=(-x_1^{(k+1)}-x_3^{(k)}+2)/2\\x_3^{(k+1)}=(-x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}+3)/2\end{cases},k=0,1,2\dots.$$

(b) Jacobi迭代矩阵J的特征方程是

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad \Rightarrow 8\lambda^3 - 6\lambda + 2 = 0, \quad \Rightarrow (\lambda+1)(2\lambda-1)^2 = 0,$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}, \Rightarrow \rho(J) = 1,$ 所以Jacobi迭代发散.

Gauss-Seidel迭代矩阵G的特征方程是

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 2\lambda & 1 \\ \lambda & \lambda & 2\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad \Rightarrow 8\lambda^3 - 5\lambda^2 + \lambda = 0,$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{7}i}{16}, \Rightarrow \rho(G) = \frac{\sqrt{2}}{4} < 1,$ 所以Gauss-Seidel迭代收敛.

4. 已知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

试求

(a) $\|x\|_\infty, \|A\|_\infty$, 并估计$\|Ax\|_\infty$.

(b) $\mathrm{Cond}(A)_2$.

解

(a) $\|x\|_\infty = 2, \|A\|_\infty = 2, \|Ax\|_\infty \le \|A\|_\infty \|x\|_\infty = 4.$

(b)

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$|\lambda I - A^TA| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0, \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\mathrm{Cond}(A)_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^TA)}{\lambda_{\min}(A^TA)}} = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})/2}{(3-\sqrt{5})/2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

4 插值与逼近

一、内容提要

1. Lagrange插值多项式

✓ 求Lagrange插值多项式

✓ 利用插值多项式的余项估计误差

2. Newton插值多项式

   ✓ 差商的计算

   - 差商的性质

   ✓ 求Newton插值多项式

3. Hermite插值多项式

   ✓ 求Hermite插值多项式

   - 了解Hermite插值多项式的余项

4. 分段线性插值和分段三次Hermite插值

5. 三次样条插值

6. 最佳平方逼近

   - 离散数据的最佳平方逼近(最小二乘法)

   - 超定线性方程组的最小二乘解

   ✓ 连续函数的最佳平方逼近

二、练习

1. 给定数据

x	0	2	3	5
$f(x)$	1	-3	-4	2

   (a) 写出$f(x)$的3次Lagrange插值多项式$L_3(x)$.

   (b) 写出$f(x)$的3次Newton插值多项式$N_3(x)$.

   (c) 写出上述插值多项式的余项表达式.

解

(a)

$$\begin{aligned} L_3(x) &= 1\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)} - 3\cdot\frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)} \\ &\quad -4\cdot\frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)} + 2\cdot\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} N_3(x) &= f(0) + f[0,2](x-0) + f[0,2,3](x-0)(x-2) \\ &\quad + f[0,2,3,5](x-0)(x-2)(x-3). \end{aligned}$$

列表求差商

x_k	$f(x_k)$			
0	1	-2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
2	-3	-1	$\frac{4}{3}$	
3	-4	3		
5	2			

$\Rightarrow N_3(x) = 1 - 2x + \frac{1}{3}x(x-2) + \frac{1}{5}x(x-2)(x-3).$

2. 设

$$f(x) = \ln x, \quad x \in [3, 6]$$

且$L_n(x)$为$f(x)$以$(n+1)$个等距节点$x_i = 3(1 + i/n)$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$为插值节点的n次插值多项式, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \max_{3\le x\le 6} |f(x) - L_n(x)| = 0$$

证明. 由插值多项式的余项得, 对$\forall x \in [3, 6]$

$$\begin{aligned} |f(x) - L_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| = \left| \frac{(-1)^n n!}{\xi^{n+1}(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \\ &\le \frac{1}{3^{n+1}(n+1)} \cdot 3^{n+1} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

3. 作一个5次多项式$H(x)$使得

$$H(1) = 3, \quad H(2) = -1, \quad H(4) = 3$$

$$H'(1) = 2, \quad H'(2) = 1, \quad , H'(4) = 2.$$

解

$$\begin{aligned} H(x) &= f(1) + f[1,1](x-1) + f[1,1,2](x-1)^2 + f[1,1,2,2,](x-1)^2(x-2) \\ & f[1,1,2,2,4](x-1)^2(x-2)^2 + f[1,1,2,2,4,4](x-1)^2(x-2)^2(x-4). \end{aligned}$$

列表求差商

x_k	$f(x_k)$					
1	3	2	-6	11	$-\frac{25}{6}$	$\frac{55}{36}$
1	3	-4	5	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{12}$	
2	-1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$		
2	-1	2	0			
4	3	2				
4	3					

$$\begin{aligned} H(x) &= 3 + 2(x-1) - 6(x-1)^2 + 11(x-1)^2(x-2) - \frac{25}{6}(x-1)^2(x-2)^2 \\ &+ \frac{55}{36}(x-1)^2(x-2)^2(x-4). \end{aligned}$$

4. 求一个3次多项式$H(x)$使得

$$H(a)=f(a),\quad H(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2}),\quad H(b)=f(b),$$
$$H'(\frac{a+b}{2})=f'(\frac{a+b}{2}).$$

解 记$x_1=\frac{a+b}{2}$.

$$\begin{aligned}H(x) &= f(a)+f[a,x_1](x-a)+f[a,x_1,x_1](x-a)(x-x_1)\\ & f[a,x_1,x_1,b](x-a)(x-x_1)^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f[a,x_1]=\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}=\frac{2(f(x_1)-f(a))}{(b-a)},\\
&f[x_1,x_1]=f'(x_1),\\
&f[x_1,b]=\frac{f(b)-f(x_1)}{b-x_1}=\frac{2(f(b)-f(x_1))}{b-a},\\
&f[a,x_1,x_1]=\frac{f[x_1,x_1]-f[a,x_1]}{x_1-a}=\frac{4((x_1-a)f'(x_1)+f(a)-f(x_1))}{(b-a)^2},\\
&f[x_1,x_1,b]=\frac{f[x_1,b]-f[x_1,x_1]}{b-x_1}=\frac{4(f(b)-f(a)-(b-x_1)f'(x_1))}{(b-a)^2},\\
&f[a,x_1,x_1,b]=\frac{f[x_1,x_1,b]-f[a,x_1,x_1]}{b-a}=\frac{4}{(b-a)^2}(f[a,b]-f'(x_1)).
\end{aligned}$$

5. 设$f(x)\in C^2[a,b]$. 作一个3次多项式$H(x)$使得

$$H(a)=f(a),\quad H''(a)=f''(a),\quad H(b)=f(b),\quad H''(b)=f''(b).$$

解 $H''(x)$是1次多项式, 由$H''(a)=f''(a),H''(b)=f''(b)$得

$$H''(x)=f''(a)+\frac{f''(b)-f''(a)}{b-a}(x-a). \tag{6}$$

将(6)两边积分两次得

$$\begin{aligned}
H'(x)&=f''(a)(x-a)+\frac{f''(b)-f''(a)}{2(b-a)}(x-a)^2+c_1,\\
H(x)&=\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f''(b)-f''(a)}{6(b-a)}(x-a)^3+c_1(x-a)+c_2, \qquad (7)
\end{aligned}$$

其中c_1,c_2为积分常数. 由(7)及条件 $H(a)=f(a)$ 得 $c_2=f(a)$. 由$H(b)=f(b)$得

$$c_1=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{(b-a)[f''(b)+2f''(a)]}{6},$$

将c_1,c_2代入(7)即得3次多项式$H(x)$.

6. 已知平面上四点$A(0,0),B(1,0),C(3,0),D(4,1)$. 试作一条3次多项式曲线$p(x)$连接$B$和$C$两点, 要求该三次曲线与直线段$AB$相交相切, 同时也与直线段$CD$相交相切.

解 由条件得

$$p(1)=0,\quad p'(1)=0,$$
$$p(3)=0,\quad p'(3)=1.$$

因此$p(x)$是一个3次Hermite插值多项式, 即

$$p(x) = f(1) + f[1,1](x-1) + f[1,1,3](x-1)^2 + f[1,1,3,3](x-1)^2(x-3).$$

x_k	$f(x_k)$			
1	0	0	0	$\frac{1}{4}$
1	0	0	$\frac{1}{2}$	
3	0	1		
3	0			

$p(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2(x-3)$.

7. 给定下列数据：

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5	2	1	1	2

求一个2次多项式拟合上面的数据.

解 设2次最小二乘多项式是$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$. 取

$$\vec{\varphi}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{\varphi}_0, \vec{\varphi}_0) = 5, \quad (\vec{\varphi}_0, \vec{\varphi}_1) = 0, \quad (\vec{\varphi}_0, \vec{\varphi}_2) = 10, \quad (\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_1) = 10, \quad (\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2) = 0,$$
$$(\vec{\varphi}_2, \vec{\varphi}_2) = 34, \quad (\vec{y}, \vec{\varphi}_0) = 11, \quad (\vec{y}, \vec{\varphi}_1) = -7, \quad (\vec{y}, \vec{\varphi}_2) = 31.$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -7 \\ 31 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow c_0 = \frac{32}{35}, \quad c_1 = -\frac{7}{10}, \quad c_2 = \frac{9}{14}.$$

8. 求下列超定线性方程组的最小二乘解:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

解 最小二乘解是方程组$A^TAx = A^Tb$的解.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}, \quad A^Tb = \begin{bmatrix} 17 \\ 27 \end{bmatrix}$$

求解方程

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 27 \end{bmatrix}$$

得最小二乘解为$x_1 = 5/6, x_2 = 2.$

9. 求函数$f(x) = \cos x$在[0,1]上的1次最佳平方多项式$p_1(x) = c_0 + c_1 x.$

解 取$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x.$

$$\begin{aligned}
(\varphi_0, \varphi_0) &= \int_0^1 1dx = 1, \quad (\varphi_0, \varphi_1) = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}, \\
(\varphi_1, \varphi_0) &= \int_0^x 1dx = \frac{1}{2}, \quad (\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}, \\
(f, \varphi_0) &= \int_0^1 \cos xdx = \sin 1, \quad (f, \varphi_1) = \int_0^x \cos xdx = \sin 1 + \cos 1 - 1.
\end{aligned}$$

解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin 1 \\ \sin 1 + \cos 1 - 1 \end{bmatrix}$$

得$c_0 = -2\sin 1 - 6\cos 1 + 6, c_1 = 6(\sin 1 + 2\cos 1 - 2).$

10. 设$f(x) = x^3$. 试求a和b使得

$$\int_0^1 [f(x) - (ax + bx^2)]^2 dx$$

达到最小.

解 该问题就是求函数$f(x) = x^3$在[0,1]上的最佳平方逼近多项式$p(x) = ax + bx^2$. 取$\varphi_1 = x, \varphi_2 = x^2$. 计算内积

$$\begin{aligned}
(\varphi_1, \varphi_1) &= \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}, \quad (\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4}, \\
(\varphi_2, \varphi_1) &= \int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4}, \quad (\varphi_2, \varphi_2) = \int_0^1 x^4dx = \frac{1}{5}, \\
(f, \varphi_1) &= \int_0^1 x^4dx = \frac{1}{5}, \quad (f, \varphi_2) = \int_0^1 x^5dx = \frac{1}{6},
\end{aligned}$$

得正规方程组

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix},$$

求解得$a = -\frac{2}{5}, b = \frac{4}{3}.$

5　数值积分与数值微分

一、内容提要

1. 插值型求积公式

- 插值型求积公式的构造

✓ 梯形公式、Simpson公式及其截断误差

✓ 代数精度的求法

2. 复化求积公式

✓ 复化梯形公式及后验误差估计

✓ 复化Simpson公式及后验误差估计

✓ 用复化梯形和复化Simpson公式求积分的近似值, 满足一定的要求

3. Romberg求积法

✓ $S_n(f) = \frac{4}{3}T_{2n}(f) - \frac{1}{3}T_n(f)$.

4. Gauss公式

- Gauss公式及其代数精度的关系
- Gauss公式的构造

✓ $[-1, 1]$上两点Gauss公式,

✓ 由$[-1, 1]$上的Gauss公式构造$[a, b]$上的Gauss公式

✓ 利用Gauss公式求积分的近似值

二、练习

1. 选取求积节点x_0和x_1，使得求积公式

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$$

具有尽可能高的代数精度，并指出所达到的最高代数精度的次数.

解

$$\text{当 } f(x) = 1,\quad \text{左边} = \int_0^1 1dx = 1,\quad \text{右边} = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

$$\text{当 } f(x) = x,\quad \text{左边} = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2},\quad \text{右边} = \frac{1}{2}(x_0 + x_1).$$

$$\text{当 } f(x) = x^2,\quad \text{左边} = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3},\quad \text{右边} = \frac{1}{2}(x_0^2 + x_1^2).$$

要使求积公式的代数精度尽可能高, 则

$$\frac{1}{2}(x_0+x_1)=\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2}(x_0^2+x_1^2)=\frac{1}{3}.$$

求得$x_0=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{3}}), x_1=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sqrt{3}})$. 此时求积公式为

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)+f\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right].$$

$$\begin{aligned}
\text{当 } f(x)=x^3, \qquad & \text{左边}=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4},\\
& \text{右边}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)^3+\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)^3\right]=\frac{1}{4},\\
\text{当 } f(x)=x^4, \qquad & \text{左边}=\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{5},\\
& \text{右边}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)^4+\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)^4\right]=\frac{7}{36}\neq\frac{1}{5},
\end{aligned}$$

因此求积公式的代数精度是3.

2. 给定积分$I(f)=\int_{-1}^1 f(t)dt$,

   (a) 写出计算积分$I(f)$的两点Gauss公式;

   (b) 写出计算积分$I(g)=\int_a^b g(x)dx$的两点Gauss公式;

   (c) 用两点Gauss公式计算积分$\int_0^1 \sin(x^2)dx$的近似值.

解

(a)

$$I(f)\approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

(b) 令$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$, 则

$$\begin{aligned}
I(g)=\int_a^b g(x)dx &= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 g\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)dt\\
&\approx \frac{b-a}{2}\left[g\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)+g\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)\right].
\end{aligned}$$

(c)

$$\int_0^1 \sin(x^2)dx=\frac{1}{2}\left[\sin(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}})^2+\sin(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}})^2\right]=0.273637.$$

3. 用复化Simpson公式计算积分$\int_0^1 e^x dx$具有4位有效数字的近似值.

解

$$
\begin{aligned}
&S_1 = \frac{1}{6}[e^0 + 4e^{0.5} + e^1] = 1.71886,\\
&S_2 = \frac{1}{12}[e^0 + 4e^{0.25} + e^{0.5}] + \frac{1}{12}[e^{0.5} + 4e^{0.75} + e^2] = 1.71832.\\
&\frac{1}{15}|S_2 - S_1| = 0.36 \times 10^{-4} < \frac{1}{2} \times 10^{-4},\\
&\therefore \int_0^1 e^x dx \approx S_2 = 1.71832.
\end{aligned}
$$

4. 给定积分

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

并记$h = (b-a)/n, x_i = a + ih, i = 0, 1, 2, \cdots, n.$

(a) 写出复化梯形公式$T_n(f)$和复化Simpson公式$S_n(f)$;

(b) 证明

$$S_n(f) = \frac{4}{3}T_{2n}(f) - \frac{1}{3}T_n(f).$$

解

(a)

$$
\begin{aligned}
T_n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})].\\
S_n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{6}[f(x_k) + 4f(x_{k+1/2}) + f(x_{k+1})].
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{3}T_{2n}(f) - \frac{1}{3}T_n(f) &= \frac{4}{3}[\frac{1}{2}T_n(f) + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/2})] - \frac{1}{3}T_n(f)\\
&= \frac{1}{3}T_n(f) + \frac{2h}{3}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/2})\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{6}[f(x_k) + f(x_{k+1})] + \frac{2h}{3}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/2})\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{6}[f(x_k) + 4f(x_{k+1/2}) + f(x_{k+1})] = S_n(f).
\end{aligned}
$$

6 常微分方程数值解

一、内容提要

1. Euler公式

✓ Euler公式, 后退的Euler公式, 梯形公式, 改进的Euler公式(预测–校正公式)

✓ 局部截断误差和公式的阶数

2. Runge-Kutta方法

- Runge-Kutta公式的构造

✓ 用Taylor展开和待定系数确定公式中的系数

3. 线性多步法

- 基于积分的Adams线性多步公式

✓ 基于Taylor展开的线性多步公式的建立

二、练习

1. 考虑微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)),\ a \le x \le b, \\ y(a) = \eta, \end{cases}$$

取正整数n, 并记$h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$, $0 \le i \le n$. 试求参数α和λ使得求解公式

$$y_{i+1} = y_i + h\Big[\alpha f(x_i, y_i) + (1-\alpha) f(x_i + \lambda h, y_i + \lambda h f(x_i, y_i))\Big] \tag{8}$$

为一个2阶公式.

解 公式(8)的局部截断误差为

$$\begin{aligned} R_{i+1} &= y(x_{i+1}) - y(x_i) - h[\alpha f(x_i, y(x_i)) \\ &\quad + (1-\alpha) f(x_i + \lambda h, y(x_i) + \lambda h f(x_i, y(x_i)))]. \end{aligned} \tag{9}$$

由方程及对方程两边求导得

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)), \tag{10}$$

$$y''(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i)) y'(x_i), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} y'''(x_i) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y(x_i)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i, y(x_i)) y'(x_i) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_i, y(x_i)(y'(x_i)))^2 \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i)) y''(x_i). \end{aligned} \tag{12}$$

利用上面(10)-(12), (9)及Taylor展开得

$$
\begin{aligned}
R_{i+1} &= y(x_{i+1}) - y(x_i) - \alpha h y'(x_i) - (1-\alpha) f(x_i + \lambda h, y(x_i) + \lambda h y'(x_i)) \\
&= y(x_i) + h y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + O(h^4) - y(x_i) - \alpha y'(x_i) \\
&\quad (1-\alpha) h \Bigg[f(x_i, y(x_i)) + \frac{\partial f}{\partial x} \lambda h + \frac{\partial f}{\partial y} \lambda h y'(x_i) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\lambda h)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \lambda^2 h^2 y'(x_i) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \lambda^2 h^2 (y'(x_i))^2 \right) + O(h^3) \Bigg] \\
&= (1-\alpha) h y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) - (1-\alpha) h y'(x_i) - (1-\alpha) \lambda h^2 y''(x_i) \\
&\quad + \frac{1-\alpha}{2} \lambda^2 h^3 \left[y'''(x_i) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i)) y''(x_i) \right] + O(h^4) \\
&= \left[\frac{1}{2} - (1-\alpha)\lambda \right] h^2 y''(x_i) \\
&\quad + \left[\left(\frac{1}{6} - \frac{1-\alpha}{2} \lambda^2 \right) y'''(x_i) - \frac{1-\alpha}{2} \lambda^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i)) y''(x_i) \right] h^3 + O(h^4).
\end{aligned}
$$

要使公式为2阶公式, 则

$$
\frac{1}{2} - (1-\alpha)\lambda = 0, \quad 即 \quad (1-\alpha)\lambda = \frac{1}{2}.
$$

2. 给定微分方程初值问题

$$
\begin{cases}
y'(x) = f(x, y(x)),\ a \le x \le b, \\
y(a) = \eta,
\end{cases}
$$

取正整数n, 并记$h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$, $0 \le i \le n$. 试确定两步公式

$$
y_{i+1} = A(y_i + y_{i-1}) + h\Big[B f(x_i, y_i) + C f(x_{i-1}, y_{i-1}) \Big] \tag{13}
$$

中的参数A, B, C, 使其具有尽可能高的精度，并指出能达到的阶数.

解　公式(13)的局部截断误差为

$$
\begin{aligned}
R_{i+1} &= y(x_{i+1}) - A(y(x_i) + y(x_{i-1})) - h\Big[B f(x_i, y(x_i)) + C f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) \Big] \\
&= y(x_{i+1}) - A y(x_i) - A y(x_{i-1}) - B h y'(x_i) - C h y'(x_{i-1}) \quad (利用方程) \\
&= y(x_i) + h y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + O(h^4) - A y(x_i) - B h y'(x_i) \\
&\quad - A \left[y(x_i) - h y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + O(h^4) \right] \\
&\quad - C h \left[y'(x_i) - h y''(x_i) + \frac{h^2}{2} y'''(x_i) + O(h^3) \right] \\
&= (1-2A) y(x_i) + (1 + A - B - C) h y'(x_i) + \left(\frac{1}{2} - \frac{A}{2} + C \right) h^2 y''(x_i) \\
&\quad + \left(\frac{1}{6} + \frac{A}{6} - \frac{C}{2} \right) h^3 y'''(x_i) + O(h^4).
\end{aligned}
$$

要使公式(13)具有尽可能高的精度, 则

$$\begin{aligned} &1-2A=0 \\ &1+A-B-C=0 \\ &\frac{1}{2}-\frac{A}{2}+C=0 \end{aligned}$$

求得$A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{7}{4}$, $C=-\frac{1}{4}$. 局部截断误差为

$$R_{i+1}=\frac{3}{8}h^3y'''(x_i)+O(h^4).$$

该公式是2阶公式.

3. 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(x)=f(x,y(x)),\ a\le x\le b, \\ y(a)=\eta, \end{cases}$$

取正整数n, 并记$h=(b-a)/n$, $x_i=a+ih$, $0\le i\le n$. 试证明下列数值求解公式是3阶公式：

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{12}\Big[5f(x_{i+1},y_{i+1})+8f(x_i,y_i)-f(x_{i-1},y_{i-1})\Big]. \tag{14}$$

证明 公式(14)的局部截断误差为

$$\begin{aligned} R_{i+1} &= y(x_{i+1})-y(x_i)-\frac{h}{12}\Big[5f(x_{i+1},y(x_{i+1}))+8f(x_i,y(x_i))-f(x_{i-1},y(x_{i-1}))\Big] \\ &= y(x_{i+1})-y(x_i)-\frac{5h}{12}y'(x_{i+1})-\frac{2h}{3}y'(x_i)+\frac{h}{12}y'(x_{i-1}) \\ &= y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_i)+\frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_i)+O(h^5) \\ &\quad -y(x_i)-\frac{2h}{3}y'(x_i) \\ &\quad -\frac{5h}{12}\left[y'(x_i)+hy''(x_i)+\frac{h^2}{2}y'''(x_i)+\frac{h^3}{3!}y^{(4)}+O(h^4)\right] \\ &\quad +\frac{h}{12}\left[y'(x_i)-hy''(x_i)+\frac{h^2}{2}y'''(x_i)-\frac{h^3}{3!}y^{(4)}+O(h^4)\right] \\ &= -\frac{1}{24}h^4y^{(4)}(x_i)+O(h^5). \end{aligned}$$

所以公式(14)是一个3阶公式.