

1. 填空 (每小题 3 分, 共 18 分)

1) 设多项式 $f(x) = 4x^4 + 6x^3 + 9x + 1$, 则求 $f(x_0)$ 仅含有 4 次乘法运算的算法为

2) 已知实对称矩阵 A 的全部特征值是 3, 2, 1, 则 $\text{Cond}(A)_2 =$ _____.

3) 设 $f(x) = x^3 - 3x + 1$, 则 $f(x)$ 以 0, 1, 2 为插值节点的 2 次牛顿插值多项式为

4) 用 Simpson 公式计算积分 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ 的近似值 (保留小数点后 3 位小数) 是

5) 求解初值问题 $\begin{cases} y' = f(x, y), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = \eta \end{cases}$ 的改进的 Euler 公式是

6) 求解双曲型方程初边值问题的显格式稳定的条件是步长比 s _____, 该差分格式关于空间步长_____阶收敛, 关于时间步长_____阶收敛.

2. (10 分) 分析方程 $x^5 - 5x + 1 = 0$ 有几个正根. 用迭代法求此方程的最大正根, 精确到 4 位有效数字.

3. (10 分) 用列主元 Gauss 消去法求下面线性方程组的解

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

4. (10 分) 设有求解线性方程组 $Ax = b$ 的迭代格式

$$Bx^{(k+1)} + Cx^{(k)} = b, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 \\ 2 & \eta & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix}.$$

试确定实参数 ξ 和 η 的取值范围, 使迭代格式 (1) 收敛.

5. (10 分) 设 $f \in C^4[a, a+2]$, 求一个 3 次多项式 $H(x)$, 使之满足

$$H(a) = f(a), \quad H(a+1) = f(a+1), \quad H(a+2) = f(a+2), \quad H'(a) = f'(a),$$

并写出插值余项 $f(x) - H(x)$ 的表达式.

6. (10 分) 用最小二乘法确定经验公式 $y = a + be^x$ 中的参数 a 和 b , 使该曲线拟合下面的数据:

x_i	-1	0	1	2
y_i	2	3	5	9

7. (12 分) 设 $f(x) \in C^2[a, b]$, $I(f) = \int_a^b f(x) dx$, $h = (b-a)/n$, $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \dots, n$, $x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + h/2$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

- 1) 写出计算积分 $I(f)$ 的一点 Gauss 公式 $G(f)$ 以及对应的复化求积公式 $G_n(f)$.
- 2) 设 $T_n(f)$ 是计算积分 $I(f)$ 的复化梯形公式, 求参数 α , 使得

$$T_{2n}(f) = \frac{1}{2}T_n(f) + \alpha G_n(f).$$

8. (10 分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = \eta. \end{cases} \quad (2)$$

取正整数 n , 记 $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. 给定求初值问题 (2) 的多步方法:

$$y_{i+1} = -4y_i + 5y_{i-1} + h[\beta_1 f(x_i, y_i) + \beta_2 f(x_{i+1}, y_{i+1})]. \quad (3)$$

- 1) 试确定公式 (3) 中的参数 β_1, β_2 , 使求解公式具有尽可能高的阶数, 并写出局部截断误差表达式和阶数.
- 2) 利用 Euler 公式和公式 (3) 构造一个预测 - 校正公式.

9. (10 分) 给定初边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), \quad a < x < b, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad a \leq x \leq b,$$

$$u(a, t) = \alpha(t), \quad u(b, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

其中 $\varphi(x), \alpha(t), \beta(t)$ 是光滑函数, 且满足相容性条件. 取正整数 M, N , 记 $h = (b - a)/M, \tau = T/N, x_i = a + ih, (0 \leq i \leq M), t_k = k\tau, (0 \leq k \leq N)$.

1) 写出求上述定解问题的古典隐格式.

2) 设 $f(x, t) \equiv 0, \alpha(t) = \beta(t) \equiv 0, \{u_i^k | 0 \leq i \leq M, 0 \leq k \leq N\}$ 是古典隐格式的解,

记 $r = \tau/h^2, \|u^k\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq M} |u_i^k|, k = 0, 1, \dots, N$. 证明: 对任意步长比 r 有

$$\|u^k\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$