东南大学
2008级研究生考试试卷 (A)

课程名称： 数值分析　课程编号： S000112　考试历时： 150 分钟　考核方式： 闭卷

院 (系)__________　学号 __________　姓名 __________　成绩 __________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得 分									

(**注意**：本试卷共有 8 页 9 大题，请考生检查自己的试卷.)

1. 填空 (每小题 3 分，共 21 分)

   1) 为了提高数值计算精度，当近似值 $x >> 1$ 时，应将 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ 改写为 __________ 进行计算.

   2) 求方程 $x = f(x)$ 实根的 Newton 迭代格式是 ____________________________.

   3) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则 $\mathrm{Cond}(A)_2$=_______________.

   4) 给定函数 $f(x) = x^5 + 1$, 则差商 $f[0,1,1,1] =$__________.

   5) 求积分 $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ 近似值的梯形公式是 _______________.

   6) 求解初值问题 $\begin{cases} y' + \sin(x+y) = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 的后退 Euler 公式是

   ______________________________.

   7) 设 A 是实对称矩阵，则求其主特征值及对应的特征向量的幂法 (归一化算法) 是

   ____.

2. (9 分) 给定方程 $\mathrm{e}^x = 2 - x$. 证明该方程存在唯一实根 x^*, 并用迭代法求 x^* 的近似值，精确到 3 位有效数字.

3. (10 分) 用列主元 Gauss 消去法求解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

4. (10 分) 给定线性方程组 $Ax=b$, 这里 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为非奇异矩阵, $b\in\mathbf{R}^n$, $x\in\mathbf{R}^n$. 设有下面的迭代格式

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\omega\left(b-Ax^{(k)}\right),\quad k=0,1,2,\cdots, \tag{1}$$

其中 $\omega\neq 0$ 为常数.

1) 证明：如果迭代格式 (1) 收敛，则迭代序列 $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于方程 $Ax=b$ 的解.

2) 设 $n=2$, $A=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$, 问 ω 取何值时迭代格式 (1) 收敛？

5. (10 分) 求一个函数 $p(x)$, 使之满足下面的三个条件：

1) $p(x) \in C^1[0,2]$.
2) $p(0) = f(0), \quad p(1) = f(1), \quad p(2) = f(2),$
   $p'(0) = f'(0)$.
3) $p(x)$ 在 $[0,1]$ 和 $[1,2]$ 上均为 2 次多项式.

6. (10 分) 求函数 $f(x) = \ln x$ 在区间 $[1, 2]$ 上的 1 次最佳一致逼近多项式 $p_1(x) = c_0 + c_1 x$.

7. (10 分) 考虑积分 $I(f) = \int_0^3 f(x)\,dx$ 及对应的求积公式 $Q(f) = \frac{3}{4}f(0) + \frac{9}{4}f(2)$.

1) 证明求积公式 $Q(f)$ 是以 $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ 为求积节点的插值型求积公式.

2) 求求积公式 $I(f) \approx Q(f)$ 的代数精度.

3) 设 $f(x) \in C^3[0,3]$, 求截断误差 $I(f) - Q(f)$ 形如 $\alpha f^{(\beta)}(\xi)$ 的表达式，其中 $\xi \in (0,3)$, α, β 为常数.

8. (10 分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \quad a \le x \le b, \\ y(a) = \eta. \end{cases}$$

取正整数 n, 记 $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih, i = 0,1,2,\cdots,n$, $y_i \approx y(x_i), 1 \le i \le n$, $y_0 = \eta$.

1) 试应用数值积分公式导出求解上述初值问题的求解公式

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i), \quad 0 \le i \le n-1, \\ y_0 = \eta. \end{cases} \tag{2}$$

2) 推导出公式 (2) 的局部截断误差表达式，并指出该公式是几步几阶公式.

9. (10 分) 给定边值问题

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 $\Omega = \{(x,y) \big| \ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$, $\partial\Omega$ 是 Ω 的边界. 取正整数 M, 记 $h = 1/M$, $x_i = ih(0 \le i \le M)$, $y_j = jh(0 \le j \le M)$. 假设上述问题存在光滑解，试构造上述边值问题的一个差分格式，要求截断误差为 $O(h^2)$, 并写出截断误差表达式.