グラフの Magnitude
その Categorification としての Magnitude ホモロジー

2025 年度 卒業研究発表

谷内 賢翔 (やち けんしょう)

横浜国立大学 理工学部 数理科学 EP

2025 年 2 月 17-19 日

目次

グラフの Magnitude

$G = (V, E)$ を，loop と multiple edge を許さない有限グラフとする．G の similarity matrix Z_G を，その成分が $(Z_G)_{xy} = q^{d(x,y)}$ である $|V| \times |V|$-行列として定義する．このとき，$detZ_G$ の定数項は 1 であるため，Z_G は可逆である．

Definition 1 (Magnitude)

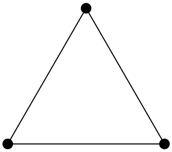
グラフ G の magnitude は次のように定義される：

$$\#G(q) = \sum_{x,y \in V} (Z_G^{-1})_{xy} \in \mathbb{Q}(q).$$

（逆行列の全成分の和）

$q^{\infty} = 0$ とする．

例: 完全グラフ K_3



完全グラフ K_3

類似度行列は次のようになる：

$$Z_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & q & q \\ q & 1 & q \\ q & q & 1 \end{pmatrix}$$

逆行列 $Z_{K_3}^{-1}$ の成分和を計算すると：

$$\#K_3(q) = \frac{3}{1+2q}.$$

一般に,

$$\#K_n(q) = \frac{n}{1+(n-1)q} \quad \text{(後ほど証明).}$$

Magnitude を $\mathbb{Z}[\![q]\!]$ の元として見る

定義より,

$$\#G(q) = \mathrm{sum}(Z_G(q)^{-1}) = \frac{\mathrm{sum}(\mathrm{adj}(Z_G(q)))}{\det(Z_G(q))}$$

である．ここで，sum は行列の全成分の和, adj は adjoint 行列を表す. これと, $\det(Z_G)$ の定数項が 1 であることより, $\#G(q)$ は $\mathbb{Z}[\![q]\!]$ に属する. $\mathbb{Z}[\![q]\!]$ で見ることが今後重要となる.

※ $\mathbb{Z}[\![q]\!] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \mid a_n \in \mathbb{Z}\}$ (整係数形式的冪級数環)

weighting

Definition 2 (weighting)

グラフ G の各頂点 x に対し,

$$w_G(x)(q) = \sum_{y \in V(G)} (Z_G(q))^{-1}(x, y)$$

で関数 $w_G : V(G) \to \mathbb{Q}(q)$ を定義し, これを G の weighting と呼ぶ.

定義より, $\#G(q) = \sum_{x \in V(G)} w_G(x)(q)$ である.
また, G の各頂点 x に対し, weighting $w_G(x)$ は次の方程式を満たす：

$$\sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)} w_G(y) = 1 \quad \text{for } x \in V(G).$$

これを, weighting equation と呼ぶ. weighting equation を満たす他の関数 $V(G) \to \mathbb{Q}(q)$ は存在しない.

実際の計算例

Lemma 1

グラフ G が vertex-transitive ならば, 任意の頂点 $x \in V(G)$ に対し,

$$\#G(q) = \frac{|V(G)|}{\sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)}}.$$

※ vertex-transitive: 作用 $\mathrm{Aut}(G) \curvearrowright V(G)$ の軌道が唯 1 つであるグラフ.

Proof.

$S : V(G) \to \mathbb{Q}(q); x \mapsto \sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)}$ とおくと, 仮定より, $S(x)$ の値は x によらず, これを S とすると, 定値関数 $\frac{1}{S}$ は weighting equation を満たす． よって,

$$\#G(q) = \sum_{x \in V(G)} \frac{1}{S} = \frac{|V(G)|}{S}.$$

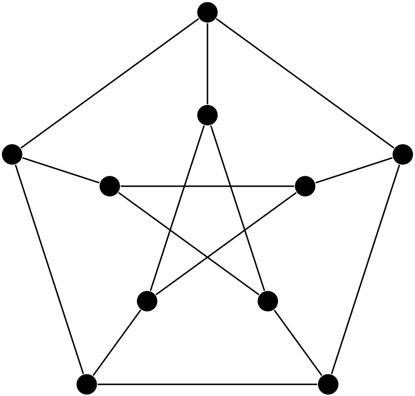
$\square$

実際の計算例: 完全グラフ K_n

n 頂点完全グラフ K_n は vertex-transitive である．Lemma 1 において，$S = 1 + (n-1)q$ であるから，

$$\#K_n(q) = \frac{n}{1 + (n-1)q}.$$

実際の計算例: Petersen グラフ



G を左図のグラフ (Petersen グラフ) とすると, G も vertex-transitive となる (回転と内外の入れ替え).
$S = 1 + 3q + 6q^2$ なので,

$$\#G(q) = \frac{10}{1 + 3q + 6q^2}.$$

組み合わせ的表現

Proposition 1

G をグラフとするとき，

$$\begin{aligned}\#G(q) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sum_{x_0 \neq \cdots \neq x_k} q^{d(x_0,x_1)+\cdots+d(x_{k-1},x_k)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left|\left\{(x_0,\ldots,x_k) \;\middle|\; x_0 \neq \cdots \neq x_k,\ d(x_0,x_1)+\cdots+d(x_{k-1},x_k) = n\right\}\right|.$$

Proposition 1 の証明の概略

Proof.

$\tilde{w}_G : V(G) \to \mathbb{Z}[q]$ を, 定理 1 行目で x_0 を fix したものとする↓

$$\tilde{w}_G(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sum_{x=x_0 \neq x_1 \neq \cdots \neq x_k} q^{d(x_0,x_1)+d(x_1,x_2)+\cdots+d(x_{k-1},x_k)}.$$

これが weighting equation を満たすことを示せばよい. □

Proposition 1 からわかること

Corollary 1

G をグラフとするとき,

$$|V(G)| = \#G(0), |E(G)| = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dq}\#G(q)\bigg|_{q=0}.$$

Proof.

Proposition 1 で, c_1, c_2 の定義を確認する. □

convex

Definition 3

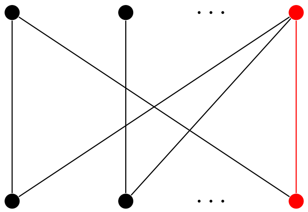
X をグラフ, U を X の部分グラフとする. U が *convex* in X であるとは, 任意の頂点 $x, y \in V(U)$ に対し, $d_U(x, y) = d_X(x, y)$ が成り立つことをいう.

projection

Definition 4

X をグラフ, U を convex in X な X の部分グラフとする. また, $V_U(X) = \{v \in V(X) \mid d_X(v,u) < \infty \text{ for some } u \in V(U)\}$ とする. X *projects to* U とは, 任意の $x \in V_U(X)$ に対し, ある $u' \in V(U)$ が存在して, 任意の $u \in V(U)$ について $d_X(x,u) = d_X(x,u') + d_X(u',u)$ が成り立つことをいう. 各 $x \in V_U(X)$ に対し, そのような u' を 1 つ固定し, これを $\pi(x)$ と表す.

上記の u' は一意に定まる.



主結果

Theorem 1

X をグラフ, G, H を X の部分グラフとし, $X = G \cup H$ とする. $G \cap H$ が convex in X であり, H projects to $G \cap H$ ならば,

$$\# X = \# G + \# H - \#(G \cap H).$$

上記の状況を満たす pair $(X; G, H)$ を, *projecting decomposition* と呼ぶ.

Proof.

$w_X = w_G + w_H - w_{G \cap H}$ を頑張って示す. $\square$

計算の様子

$$
\begin{aligned}
d(g,u) + d(u,h) &= d(g,u) + d(u,\pi(h)) + d(\pi(h),h) \\
&\geq d(g,\pi(h)) + d(\pi(h),h) \\
&\geq d(g,h) \\
&= d(g,u) + d(u,h)
\end{aligned}
$$

means

$$d(g,h) = d(g,\pi(h)) + d(\pi(h),h).$$

If $x \in V(G)$,

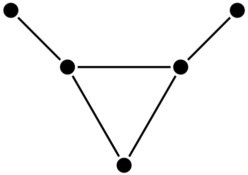
$$
\begin{aligned}
&\sum_{g \in V(G)} q^{d(g,x)} w_G(g) + \sum_{h \in V(H)} q^{d(h,x)} w_H(h) - \sum_{u \in V(G\cap H)} q^{d(u,x)} w_{G\cap H}(u) \\
&= 1 + \sum_{h \in V(H)} q^{d(h,x)} w_H(h) - \sum_{u \in V(G\cap H)} q^{d(u,x)} \sum_{h \in \pi^{-1}(u)} q^{d(h,u)} w_H(h) \\
&= 1 + \sum_{h \in V_{G\cap H}(H)} q^{d(h,x)} w_H(h) - \sum_{h \in V_{G\cap H}(H)} q^{d(x,\pi(h))+d(\pi(h),h)} w_H(h) \\
&= 1 + \sum_{h \in V_{G\cap H}(H)} q^{d(h,x)} w_H(h) - \sum_{h \in V_{G\cap H}(H)} q^{d(h,x)} w_H(h) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

If $x \in V_{G\cap H}(H)$,

$$
\sum_{g \in V(G)} q^{d(g,x)} w_G(g) + \sum_{h \in V(H)} q^{d(h,x)} w_H(h) - \sum_{u \in V(G\cap H)} q^{d(u,x)} w_{G\cap H}(u)
$$

$$
= \sum q^{d(g,\pi(x))+d(\pi(x),x)} w_G(g) + 1 - \sum q^{d(u,\pi(x))+d(\pi(x),x)} w_{G\cap H}(u)
$$

主定理の使用例：Bull Graph



左図のグラフ G 場合,

$G = K_2 \vee C_3 \vee K_2$ とみなせる ($\vee$ は, 1 点の同一視). この場合, 1 点和は projecting decomposition を与えるので, 主定理を 2 回適応することにより,

$$\#G = \#C_3 + 2 \cdot \#K_2 - 2 \cdot \#K_1.$$

となる.

Magnitude Complexes

chain complex $MC_{*,*}(G)$ を定義する.

Definition 5

グラフ G, 非負整数 k, l に対し, $MC_{k,l}(G)$ とは, $V(G)$ の長さ l の列 $(x_0, \dots, x_k)$ によって freely に generated される $\mathbb{Z}$-加群である. ただし, 列の要素は, 前後で異なるもの $x_i \neq x_{i+1} (i = 0, \dots, k-1)$ とする. 微分 $\partial : MC_{k,l}(G) \to MC_{k-1,l}(G)$ を $\partial = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} \partial_i,\ \partial_i(x_0, \dots, x_k) =$

$$\begin{cases} (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k) & \text{if } l(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k) = l(x_0, \dots, x_k), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

で定義する. ただし, $l(x_0, \dots, x_k) = d(x_0, x_1) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k)$ を, 列の長さとする.

このように定義された ∂ は, 2 回適用すると 0 になり, これにより各 l に対し, 鎖複体 $(MC_{*,l}(G), \partial)$ が得られる.

Magnitude Homology

Definition 6

グラフ G の *magnitude homology* とは, homology

$$MH_{*,l}(G) = H_{\partial}(MC_{*,l}(G))$$

のことである. 各 l について得られる.

Magniude との関係

Theorem 2

G をグラフとするとき,

$$\sum_{k,l}(-1)^k \mathrm{rank}(MH_{k,l}(G))q^l = \#G(q).$$

Proof.

各 k, l について,

$$\mathrm{rank}(MC_{k,l}(G))q^l = \sum_{x_0 \neq \cdots \neq x_k} q^{d(x_0,x_1)+\cdots+d(x_{k-1},x_k)}$$

であることや, 複体のオイラー標数に関する定理, Proposition 1 を利用する. □

Magnitude Homology の例

monoidal category

Definition 7

圏 $\mathcal{V}$ とその object I, 関手 $\otimes : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, 自然変換 $\alpha : \otimes \circ (\otimes \times id_{\mathcal{V}} \Rightarrow \otimes \circ (id_{\mathcal{V}} \times \otimes)), \lambda : I \otimes - \Rightarrow id_{\mathcal{V}}, \rho : - \otimes I \Rightarrow id_{\mathcal{V}}$ に対し, pair $(\mathcal{V}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ が *monoidal category* であるとは, 以下の性質を満たすものをいう:

Enriched Category

Definition 8

$(\mathcal{V}, I, \otimes, \alpha, \lambda, \rho)$ を monoidal category とする. 圏 $\mathcal{A}$, a collection of morphisms m, j に対し, pair $(\mathcal{A}, m, j)$ が $\mathcal{V}$-*enriched category* であるとは, 以下の性質を満たすものをいう:

Enriched Category の例

Enriched Category の Magnitude

Enriched Category から見た グラフ の Magnitude

まとめと今後の課題

まとめ:

- Magnitude の復習と Magnitude Homology の定義.
- オイラー標数との関係（Categorification）の確認.
- Projecting Decomposition における Mayer-Vietoris 完全列の導入.

今後の課題:

- **Whitney Twist:** ツイスト操作は Magnitude Homology を保存するか？
- **Diagonal Graphs:** $k \neq l$ で $MH_{k,l} = 0$ となるグラフの特徴付け（例: 正二十面体グラフ）.

参考文献

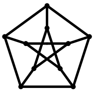
- Richard Hepworth and Simon Willerton. *Categorifying the magnitude of a graph.* Homology Homotopy Appl. 19 (2017), no. 2, 31–60.
- G. M. Kelly. *Basic concepts of enriched category theory.* Reprint of the 1982 original [Cambridge Univ. Press, Cambridge] Repr. Theory Appl. Categ. No. 10 (2005), vi+137 pp.
- Tom Leinster. *The magnitude of metric spaces.* Doc. Math. 18 (2013), 857–905.
- Tom Leinster. *The magnitude of a graph.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 166 (2019), no. 2, 247–264.
- The Automorphism Group of the Petersen Graph is Isomorphic to S_5. https://arxiv.org/abs/2012.02942

Petersen グラフの Autom Grp が 5-dim synmetric group に同型であること (ここは要修正)

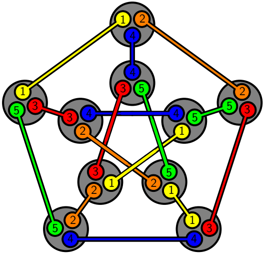
arXiv:2012.02942v1 [math.HO] 5 Dec 2020

Proof Without Words

Japheth Wood
Bard College
Annandale-on-Hudson, NY 12504



The Petersen Graph



The Automorphism Group of the Petersen Graph is isomorphic to S_5.

Abstract

The automorphism group of the Petersen Graph is shown to be isomorphic to the symmetric group on 5 elements. The image represents the Petersen Graph with the ten 3-element subsets of $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ as vertices. Two vertices are adjacent when they have precisely one element in common.

右図で, 黄色, 赤色, オレンジ色, 青色, 緑色の頂点をセットにして, 任意に 5 つの組を入れ替えることが可能. よって, $S_5 \subset \mathrm{Aut}(G)$ (部分群)

Magnitude では, connected components の個数 は特定できない

Remark 2.2.12, 2.2.13 あたりをまとめましょう. 簡単で非自明なグラフいくつかについて、3 次くらいまでの一覧表を用意する.

条件なしでは, 主結果は得られない

Lemma 2.3.3 や cartesian product 周りの話をまとめる.