

The magnitude of graphs and the magnitude homology as its categorification

2026 年度 卒業研究発表

谷内 賢翔 (やち けんしょう)

横浜国立大学 理工学部 数理科学 EP

2026 年 2 月 17 日

目次

- ① 前提知識 1
- ② 主結果 1
- ③ 前提知識 2
- ④ 主結果 2
- ⑤ 今後の課題

グラフと距離 (前提)

- グラフ \rightarrow ループと多重辺を許さない有限グラフ
- グラフ G の頂点集合を $V(G)$, 辺集合を $E(G)$ と表す

- グラフ G が与えられたとき, 頂点集合 $V(G)$ に, 最短経路
- が定める距離 d を与え, グラフ自体を (一般化) 距離空間とみなす.

一辺の長さを 1 とする.

- 上記で定義した距離は, 非負整数および ∞ の値をとる
- 頂点が連結されていないとき, 距離が ∞ となる

グラフの Magnitude

Definition 1 (Leinster, 2014)

グラフ G の **similarity matrix** $Z_G(q)$ を, その成分が $Z_G(q)(x, y) = q^{d(x, y)}$ である $|V(G)| \times |V(G)|$ -行列として定義する.

ここで, q は変数であり, $q^\infty = 0$ とする.

このとき, $Z_G(q)$ の対角成分は全て 1 なので, $\det Z_G$ の定数項は 1 であり, よって Z_G は可逆である.

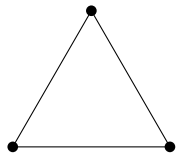
Definition 2 (Leinster, 2014)

グラフ G の **magnitude** は次のように定義される:

$$\#G(q) = \text{sum}(Z_G(q)^{-1}) \in \mathbb{Q}(q).$$

(逆行列の全成分の和)

ここで, sum は行列の全成分の和を表す.

例: 完全グラフ K_3 完全グラフ K_3

K_3 の similarity matrix は次のようになる:

$$Z_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & q & q \\ q & 1 & q \\ q & q & 1 \end{pmatrix}.$$

その逆行列 $Z_{K_3}^{-1}$ は

$$Z_{K_3}^{-1} = \frac{1}{(1+2q)(q-1)} \begin{pmatrix} -q-1 & q & q \\ q & -q-1 & q \\ q & q & -q-1 \end{pmatrix}.$$

よって, その成分和は

$$\#K_3(q) = \frac{3}{1+2q}.$$

一般に,

$$\#K_n(q) = \frac{n}{1+(n-1)q} \quad (\text{後ほど証明}).$$

Magnitude を $\mathbb{Z}[[q]]$ の元として見る

定義より,

$$\#G(q) = \text{sum}(Z_G(q)^{-1}) = \frac{\text{sum}(\text{adj}(Z_G(q)))}{\det(Z_G(q))}$$

である. ここで, sum は行列の全成分の和, adj は余因子行列を表す.
 これと, $\det(Z_G)$ の定数項が 1 であることより, $\#G(q)$ は $\mathbb{Z}[[q]]$ に属する.
 $\mathbb{Z}[[q]]$ で見るのが今後重要となる.

※ $\mathbb{Z}[[q]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \mid a_n \in \mathbb{Z}\}$ (整係数形式的冪級数環)

Weighting

Definition 3 (Leinster, 2014)

グラフ G の各頂点 x に対し,

$$w_G(x)(q) = \sum_{y \in V(G)} (Z_G(q)^{-1})(x, y)$$

で関数 $w_G : V(G) \rightarrow \mathbb{Q}(q)$ を定義し, これを G の **weighting** と呼ぶ.

定義から, $\#G(q) = \sum_{x \in V(G)} w_G(x)(q)$ が成り立つ.

また, G の各頂点 x に対し, weighting $w_G(x)$ は次の方程式を満たす:

$$\sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)} w_G(y) = 1 \quad \text{for } x \in V(G).$$

これを, **weighting equation** と呼ぶ. $Z_G(q)$ の可逆性より, weighting equation を満たす関数 $V(G) \rightarrow \mathbb{Q}(q)$ は一意的である.

実際に計算する

Lemma 1 (Leinster, 2014)

グラフ G が vertex-transitive ならば, 任意の頂点 $x \in V(G)$ に対し,

$$\#G(q) = \frac{|V(G)|}{\sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)}}.$$

※ **vertex-transitive**: 作用 $\text{Aut}(G) \curvearrowright V(G)$ の軌道が唯 1 つであるグラフ.

実際の計算例: 完全グラフ K_n

Lemma 1 (再掲)

グラフ G が vertex-transitive ならば, 任意の頂点 $x \in V(G)$ に対し,

$$\#G(q) = \frac{|V(G)|}{S}.$$

ただし, $S = \sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)}.$

n 頂点完全グラフ K_n は vertex-transitive である. Lemma 1 において, $S = 1 + (n-1)q$ であるから,

$$\begin{aligned} \#K_n(q) &= \frac{n}{1 + (n-1)q} \\ &= n \sum_{k=0}^{\infty} -\{(n-1)q\}^k \end{aligned}$$

k 次の係数は $c_k = \{-(n-1)q\}^k n$ である. 特に, $c_0 = n, c_1 = -(n-1)n.$

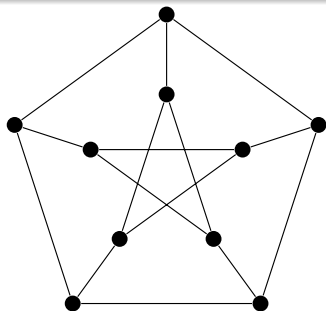
実際の計算例 2: Petersen グラフ

Lemma 1 (再掲)

グラフ G が vertex-transitive ならば, 任意の頂点 $x \in V(G)$ に対し,

$$\#G(q) = \frac{|V(G)|}{S}.$$

ただし, $S = \sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)}.$



G を左図のグラフ (Petersen グラフ) とすると, G も vertex-transitive となる (回転と内外の入れ替え).

$S = 1 + 3q + 6q^2$ なので,

$$\begin{aligned} \#G(q) &= \frac{10}{1 + 3q + 6q^2} \\ &= 10 - 30q + \cdots \end{aligned}$$

組み合わせ的表現

Proposition 1 (Leinster, 2014)

G をグラフとすると,

$$\begin{aligned}\#G(q) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{x_0 \neq \cdots \neq x_k} q^{d(x_0, x_1) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで,

$$c_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left| \left\{ (x_0, \dots, x_k) \mid x_0 \neq \cdots \neq x_k, \right. \right. \\ \left. \left. d(x_0, x_1) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k) = n \right\} \right|.$$

Proposition 1 からわかること

Proposition 1 の c_n の式

$$c_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left| \left\{ (x_0, \dots, x_k) \mid x_0 \neq \dots \neq x_k, \right. \right. \\ \left. \left. d(x_0, x_1) + \dots + d(x_{k-1}, x_k) = n \right\} \right|.$$

上記より,

Corollary 1 (Leinster [3], 2016)

$$|V(G)| = c_0, \quad |E(G)| = -\frac{1}{2}c_1$$

Convex と projection

Definition 4 (Leinster, 2014)

X をグラフ, U を X の部分グラフとする. グラフ X, U の距離をそれぞれ d_X, d_U とする.

U が X で **凸である** とは, 任意の頂点 $x, y \in V(U)$ に対し, $d_U(x, y) = d_X(x, y)$ が成り立つことをいう.

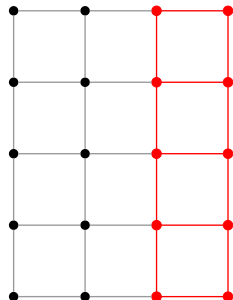
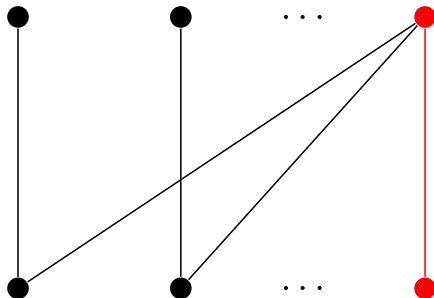
Definition 5 (Leinster, 2014)

X をグラフ, U を X で凸な X の部分グラフとする. また, $V_U(X) = \{v \in V(X) \mid d_X(v, u) < \infty \text{ for some } u \in V(U)\}$ とする (U に接続されている頂点全体).

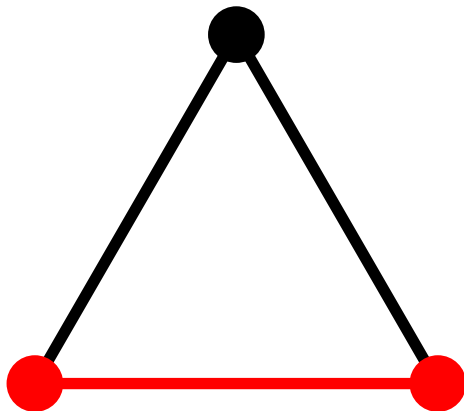
X **projects to** U とは, 任意の $x \in V_U(X)$ に対し, ある $u' \in V(U)$ が存在して, 任意の $u \in V(U)$ について $d_X(x, u) = d_X(x, u') + d_X(u', u)$ が成り立つことをいう. 各 $x \in V_U(X)$ に対し, そのような u' を1つ固定し, これを $\pi(x)$ と表す.

project の例

(赤に接続された) すべての頂点に対し、赤の中から 1 点選んで factor through することで、赤の全ての点との距離が最短になるようにできる。上記の u' は一意に定まる。



project でない例



主結果

Theorem 1 (Leinster, 2014)

X をグラフ, G, H を X の部分グラフとし, $X = G \cup H$ とする. $G \cap H$ が X で凸であり, H projects to $G \cap H$ ならば,

$$\#X = \#G + \#H - \#(G \cap H).$$

上記の状況を満たす組 $(X; G, H)$ を, *projecting decomposition* と呼ぶ.

Proof.

$w_G + w_H - w_{G \cap H}$ が X の weighting equation を満たすので,
 $w_X = w_G + w_H - w_{G \cap H}$ が導かれる. weighting equation を満たすことは, 計算により確認できる. □

計算の様子

$$\begin{aligned}
 d(g, u) + d(u, h) &= d(g, u) + d(u, \pi(h)) + d(\pi(h), h) \\
 &\geq d(g, \pi(h)) + d(\pi(h), h) \\
 &\geq d(g, h) \\
 &= d(g, u) + d(u, h) \\
 \text{means } d(g, h) &= d(g, \pi(h)) + d(\pi(h), h).
 \end{aligned}$$

If $x \in V(G)$,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{g \in V(G)} q^{d(g, x)} w_G(g) + \sum_{h \in V(H)} q^{d(h, x)} w_H(h) - \sum_{u \in V(G \cap H)} q^{d(u, x)} w_{G \cap H}(u) \\
 &= 1 + \sum_{h \in V(H)} q^{d(h, x)} w_H(h) - \sum_{u \in V(G \cap H)} q^{d(u, x)} \sum_{h \in \pi^{-1}(u)} q^{d(h, u)} w_H(h) \\
 &= 1 + \sum_{h \in V_{G \cap H}(H)} q^{d(h, x)} w_H(h) - \sum_{h \in V_{G \cap H}(H)} q^{d(x, \pi(h)) + d(\pi(h), h)} w_H(h) \\
 &= 1 + \sum_{h \in V_{G \cap H}(H)} q^{d(h, x)} w_H(h) - \sum_{h \in V_{G \cap H}(H)} q^{d(h, x)} w_H(h) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

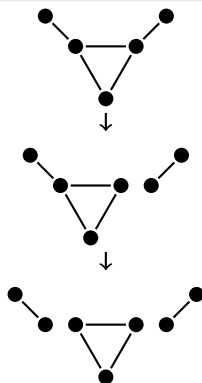
If $x \in V_{G \cap H}(H)$,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{g \in V(G)} q^{d(g, x)} w_G(g) + \sum_{h \in V(H)} q^{d(h, x)} w_H(h) - \sum_{u \in V(G \cap H)} q^{d(u, x)} w_{G \cap H}(u) \\
 &= \sum_{g \in V(G)} q^{d(g, \pi(x)) + d(\pi(x), x)} w_G(g) + 1 - \sum_{u \in V(G \cap H)} q^{d(u, \pi(x)) + d(\pi(x), x)} w_{G \cap H}(u)
 \end{aligned}$$

主結果 1 の使用例 : Bull Graph

Theorem 1

$$\#X = \#G + \#H - \#(G \cap H).$$



左図のグラフ G 場合,
 $G = K_2 \vee C_3 \vee K_2$ とみなせる (\vee は, 1 点の同一視). この場合, 1 点和は projecting decomposition を与えるので, 主定理を 2 回適応することにより, 以下のようなになる.

$$\begin{aligned} \#G &= \#K_3 + 2 \cdot \#K_2 - 2 \cdot \#K_1 \\ &= \frac{3}{1+2q} + 2 \cdot \frac{2}{1+q} - 2 \cdot 1 \\ &= 5 - 10q + \dots \end{aligned}$$

次に, この Magnitude という性質に, 代数トポロジー的な情報を増やすこと (categorification) を考える.

Magnitude complex

Definition 6 (Hepworth, Willerton, 2017)

グラフ G , 非負整数 k, l に対し, 自由アーベル群

$$MC_{k,l}(G) = \text{span}_{\mathbb{Z}} \{ (x_0, \dots, x_k) \mid x_i \in V(G), x_0 \neq \dots \neq x_k, \\ L(x_0, \dots, x_k) := d(x_0, x_1) + \dots + d(x_{k-1}, x_k) = l \}$$

を定め, 境界準同型 $\partial : MC_{k,l}(G) \rightarrow MC_{k-1,l}(G)$ を

$$\begin{aligned} \partial &= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} \partial_i, \quad \partial_i(x_0, \dots, x_k) \\ &= \begin{cases} (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k) & \text{if } L(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k) = L(x_0, \dots, x_k), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

で定義する.

このように定義された ∂ は, 2 回適用すると 0 になり, これにより各 l に対し, 鎖複体 $(MC_{*,l}(G), \partial)$ が得られる.

Magnitude homology

Definition 7 (Hepworth, Willerton, 2017)

グラフ G の **magnitude homology** とは, homology

$$MH_{*,l}(G) = H(MC_{*,l}(G), \partial)$$

$$(MH_{k,l}(G) = \text{Ker} \partial \cap MC_{k,l}(G) / \text{Im} \partial \cap MC_{k,l}(G))$$

のことである. 各 l について得られる.

Magniude との関係

Theorem 2 (Hepworth, Willerton, 2017)

G をグラフとすると,

$$\#G(q) = \sum_{k,l} (-1)^k \text{rank}(MH_{k,l}(G)) q^l.$$

Proof.

各 k, l について,

$$\text{rank}(MC_{k,l}(G)) q^l = \sum_{x_0 \neq \dots \neq x_k} q^{d(x_0, x_1) + \dots + d(x_{k-1}, x_k)}$$

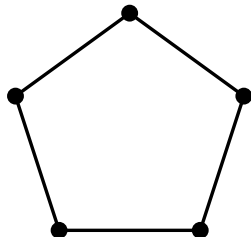
であること, 複体のオイラー標数に関する定理, Proposition 1 を利用. \square

Proposition 1 (再掲)

$$\#G(q) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{x_0 \neq \dots \neq x_k} q^{d(x_0, x_1) + \dots + d(x_{k-1}, x_k)}.$$

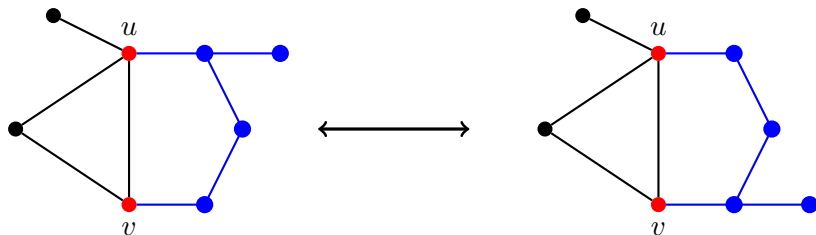
Magnitude Homology の例

各 k, l についての $MH_{k,l}(C_5)$ のランク:



		k							
		0	1	2	3	4	5	6	7
l	0	5							
	1		10						
	2			10					
	3			10	10				
	4				30	10			
	5					50	10		
	6					20	70	10	
	7						80	90	10






今後の課題



今後の課題:

- **Whitney Twist:** ツイスト操作は Magnitude Homology を保存するか？
- **Diagonal Graphs** ($k \neq l$ で $MH_{k,l} = 0$ となるグラフ) についての特徴付け
- **距離空間, enriched categories:** Magnitude は, もともと (コンパクトで positive definite な) 距離空間, さらに広く, enriched categories に対して定義されている. 他に有用なクラスがあるか？

参考文献

-  Richard Hepworth and Simon Willerton. *Categorifying the magnitude of a graph*. Homology Homotopy Appl. 19 (2017), no. 2, 31–60.
-  G. M. Kelly. *Basic concepts of enriched category theory*. Reprint of the 1982 original [Cambridge Univ. Press, Cambridge] Repr. Theory Appl. Categ. No. 10 (2005), vi+137 pp.
-  Tom Leinster. *The magnitude of metric spaces*. Doc. Math. 18 (2013), 857–905.
-  Tom Leinster. *The magnitude of a graph*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 166 (2019), no. 2, 247–264.
-  The Automorphism Group of the Petersen Graph is Isomorphic to S_5 . <https://arxiv.org/abs/2012.02942>

Motivation

集合の要素数や, ベクトル空間の次元, 位相空間のオイラー標数などの不変量は, magnitude という一つの定義で統一的に扱うことができる.

Magnitude は, Enriched category の上定義されるもの.

距離空間は, $[0, \infty]$ -enriched category として考えることができる.

グラフを距離空間として見ることでグラフにも一般的な不変量を構成できる.

Proposition 1 の証明の概略

Proof.

$\tilde{w}_G : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}[q]$ を, 定理 1 行目で x_0 を固定したものとする ↓

$$\tilde{w}_G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{x=x_0 \neq x_1 \neq \cdots \neq x_k} q^{d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k)}.$$

これは weighting equation を満たす. x_0 の固定を解除して足すことで題意を得る. □

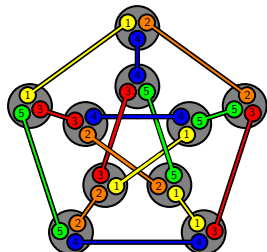
Petersen グラフの Autom Grp が 5-dim symmetric group に同型であること (ここは要修正)

Proof Without Words

Japheth Wood
Bard College
Annandale-on-Hudson, NY 12504



The Petersen Graph



The Automorphism Group of the Petersen Graph is isomorphic to S_5 .

右図で, 黄色, 赤色, オレンジ色, 青色, 緑色の頂点をセットにして, 任意に5つの組を入れ替えることが可能. よって, $S_5 \subset \text{Aut}(G)$ (部分群)

Abstract

The automorphism group of the Petersen Graph is shown to be isomorphic to the symmetric group on 5 elements. The image represents the Petersen Graph with the ten 3-element subsets of $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ as vertices. Two vertices are adjacent when they have precisely one element in common.

他の係数が持っている情報

一般的に, $c_0 \geq 0, c_1 \leq 0, c_2 \geq 0$ は成り立つ. $c_2 \geq 0$ は

$$c_2 = |\{(x, y, z) \mid d(x, y) = d(y, z) = 1\}| - |\{(x, y) \mid d(x, y) = 2\}|$$

から成り立つ. しかし, $c_3 \leq 0$ は成り立たない. これは Petersen グラフ G の例を見ればわかる. 他のグラフについても以下に併せて掲載.

Graph	c_k				
	0	1	2	3	4
G	10	-30	30	90	-450
C_2	2	-2	2	-2	2
C_5	5	-10	10	0	-20
K_n	n	$-n(n-1)$	$n(n-1)^2$	$-n(n-1)^3$	$n(n-1)^4$
$K_{2,3}$	5	-12	22	-36	56

サイクルグラフと完全2部グラフの Magnitude

$$\#C_{2m} = \frac{n(1-q)}{(1+q)(1-q^m)}$$

$$\#C_{2m-1} = \frac{n(1-q)}{1+q-2q^m}$$

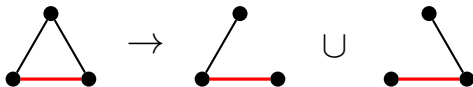
$$\#K_{m,n} = \frac{(m+n) - (2mn - m - n)q}{(1+q)(1-(m-1)(n-1)q^2)}$$

条件なしでは, 主結果は得られない

Lemma 2

グラフ不変量 Φ が, cartesian product に関して積に分解する, かつ, 主定理を無条件に満たすとき, $\Phi(G) = |V(G)|$ となる.

Magnitude は cartesian product に関して積に分解するので, 主定理を満たすには条件が必要. 例えば, C_3 を下図のように分けた場合, 主定理は成り立たない.

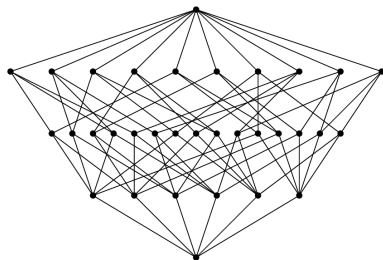
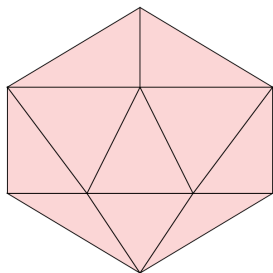


$$\#C_3 = \frac{3}{1+2q} \neq \frac{4-2q}{1+q} = 2 \cdot \#T - \#C_2$$

端折った計算のアイデアを記載する

torsion について

今回扱ったグラフの magnitude homology には, torsion は存在しない.
しかし, torsion を持つグラフも存在する.



TORSION IN THE MAGNITUDE HOMOLOGY OF GRAPHS
RADMILA SAZDANOVIC AND VICTOR SUMMERS

<https://arxiv.org/pdf/1912.13483>

より (2019)

4 頂点以下のグラフについて / Magnitude は connected components の個数 は特定できない

4 頂点以下の全てのグラフについて調べた結果, Magnitude が同じもののペアは以下の通りであった:

categorification について

categorification なので, 実際は functor の構造が入る. グラフ写像 $f : V(G) \rightarrow V(H)$ があると, magnitude complex の間にも写像が誘導され, それが chain map なので, homology 間にも写像が誘導される. それを $f_{\#}$ と書くと, $\#$ は Graphs から BAB への functor となる.

実際に計算する

Lemma 3 (Leinster, 2014)

グラフ G が vertex-transitive ならば, 任意の頂点 $x \in V(G)$ に対し,

$$\#G(q) = \frac{|V(G)|}{\sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)}}.$$

※ **vertex-transitive**: 作用 $\text{Aut}(G) \curvearrowright V(G)$ の軌道が唯1つであるグラフ.

Proof.

$S : V(G) \rightarrow \mathbb{Q}(q); x \mapsto \sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)}$ とおくと, 仮定より, $S(x)$ の値は x によらず, これを S とすると, 定値関数 $\frac{1}{S}$ は weighting equation を満たす. よって,

$$\#G(q) = \sum_{x \in V(G)} \frac{1}{S} = \frac{|V(G)|}{S}.$$

□