グラフの Magnitude
その Categorification としての Magnitude ホモロジー

2025 年度 卒業研究発表

谷内 賢翔 (やち けんしょう)

横浜国立大学 理工学部 数理科学 EP

2025 年 2 月 17-19 日

目次

グラフの Magnitude

$G = (V, E)$ を, loop と multiple edge を許さない有限グラフとする. G の similarity matrix Z_G を, その成分が $(Z_G)_{xy} = q^{d(x,y)}$ である $|V| \times |V|$-行列として定義する. このとき, $detZ_G$ の定数項は 1 であるため, Z_G は可逆である.

定義 1 (Magnitude)

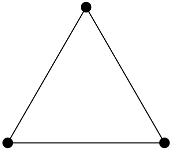
グラフ G の magnitude は次のように定義される：

$$\#G(q) = \sum_{x,y \in V} (Z_G^{-1})_{xy} \in \mathbb{Q}(q).$$

(逆行列の全成分の和)

$q^\infty = 0$ とする.

例: 完全グラフ K_3



完全グラフ K_3

類似度行列は次のようになる：

$$Z_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & q & q \\ q & 1 & q \\ q & q & 1 \end{pmatrix}$$

逆行列 $Z_{K_3}^{-1}$ の成分和を計算すると：

$$\#K_3(q) = \frac{3}{1+2q}.$$

一般に,

$$\#K_n = \frac{n}{1+(n-1)q}$$

.

Magnitude を $\mathbb{Z}[\![q]\!]$ の元として見る

定義より，

$$\#G(q) = \mathrm{sum}(Z_G(q)^{-1}) = \frac{\mathrm{sum}(\mathrm{adj}(Z_G(q)))}{\det(Z_G(q))}$$

である．ここで，sum は行列の全成分の和，adj は adjoint 行列を表す．これと，$\det(Z_G)$ の定数項が 1 であることより，$\#G(q)$ は $\mathbb{Z}[\![q]\!]$ に属する．$\mathbb{Z}[\![q]\!]$ で見ることが今後重要となる．

※ $\mathbb{Z}[\![q]\!] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \mid a_n \in \mathbb{Z}\}$ (整係数形式的冪級数環)

Magnitude の calculation と weighting

定義 2 (weighting)

グラフ G の各頂点 x に対し,

$$w_G(x)(q) = \sum_{y \in V(G)} (Z_G(q))^{-1}(x, y)$$

で関数 $w_G : V(G) \to \mathbb{Q}(q)$ を定義し, これを G の weighting と呼ぶ.

G の各頂点 x に対し, weighting $w_G(x)$ は次の方程式を満たす：

$$\sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)} w_G(y) = 1 \quad \text{for } x \in V(G).$$

これを, weighting equation と呼ぶ. weighting equation を満たす他の関数 $V(G) \to \mathbb{Q}(q)$ は存在しない.

実際の計算例

定義: Magnitude 鎖複体

長さ l で次数付けられた鎖複体 (chain complex) $MC_{*,l}(G)$ を定義する.

定義 3

生成元: $x_i \neq x_{i+1}$ を満たす頂点の列 $(x_0, \ldots, x_k)$.
微分 $\partial = \sum (-1)^i \partial_i$:

$$\partial_i(x_0, \ldots, x_k) = \begin{cases} (x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_k) & \text{もし長さが保存されるなら} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

(頂点 x_i を抜いても最短経路性が保たれる場合のみ残る)

Magnitude Homology $MH_{k,l}(G)$ は、この複体のホモロジーである.

Categorification (圏化)

Magnitude Homology は Magnitude を「圏化」する.

定理 1 (Hepworth-Willerton)

$MH(G)$ の次数付きオイラー標数は、元の magnitude を復元する：

$$\sum_{k,l}(-1)^k \operatorname{rank}(MH_{k,l}(G))q^l = \#G(q).$$

これは、$\#G$ の持つ性質が、$MH(G)$ のより深い構造的性質の「影」であることを意味する.

Mayer-Vietoris 完全列

グラフの分解 $G = A \cup B$ から、$MH(G)$ を計算したい.

定理 2 (Mayer-Vietoris 完全列)

もし分解 $(G; A, B)$ が **Projecting Decomposition (射影分解)** であるならば、以下の長完全列が存在する：

$$\cdots \to MH_n(A \cap B) \to MH_n(A) \oplus MH_n(B) \\ \to MH_n(G) \to MH_{n-1}(A \cap B) \to \cdots$$

これは包除原理 $\#G = \#A + \#B - \#(A \cap B)$ の圏化版である.

証明のアイデア: Projecting Decomposition

グラフにおいて、通常の Mayer-Vietoris 列は必ずしも成立しない. 我々は **Projecting (射影)** 条件を課す：

- 共通部分 $A \cap B$ は G において *convex (凸)* でなければならない.
- G の各頂点は、$A \cap B$ への距離を保存する一意的な「射影」を持たなければならない（最短パスが射影点を通る）.

この条件の下で、鎖複体が適切に分裂し、完全列が導かれる.

動機: 豊穣圏

なぜ "Magnitude" と呼ぶのか？

- グラフは、モノイダル圏 $([0,\infty],+,0)$ 上の豊穣圏とみなせる.
- 対象: 頂点
- 射 (Hom object): 最短パス距離

整合性

豊穣圏に対する Magnitude の一般定義が、グラフに対する組合せ的な定義（第 2 節）と一致することを再確認した.

まとめと今後の課題

まとめ:

- Magnitude の復習と Magnitude Homology の定義.
- オイラー標数との関係（Categorification）の確認.
- Projecting Decomposition における Mayer-Vietoris 完全列の導入.

今後の課題:

- **Whitney Twist:** ツイスト操作は Magnitude Homology を保存するか？
- **Diagonal Graphs:** $k \neq l$ で $MH_{k,l} = 0$ となるグラフの特徴付け（例: 正二十面体グラフ）.
- **Cohomology:** Magnitude Cohomology への積構造の導入.