

グラフの Magnitude
その Categorification としての Magnitude ホモロジー
2025 年度 卒業研究発表

谷内 賢翔 (やち けんしょう)

横浜国立大学 理工学部 数理科学 EP

2025 年 2 月 17-19 日

目次

① 前提知識 (Introduction)

② 主結果

③ 今後の課題

グラフの Magnitude

$G = (V, E)$ を, loop と multiple edge を許さない有限グラフとする. G の similarity matrix Z_G を, その成分が $(Z_G)_{xy} = q^{d(x,y)}$ である $|V| \times |V|$ -行列として定義する. このとき, $\det Z_G$ の定数項は 1 であるため, Z_G は可逆である.

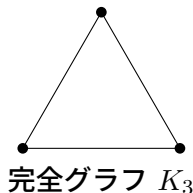
定義 1 (Magnitude)

グラフ G の magnitude は次のように定義される:

$$\#G(q) = \sum_{x,y \in V} (Z_G^{-1})_{xy} \in \mathbb{Q}(q).$$

(逆行列の全成分の和)

$q^\infty = 0$ とする.

例: 完全グラフ K_3 

類似度行列は次のようになる：

$$Z_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & q & q \\ q & 1 & q \\ q & q & 1 \end{pmatrix}$$

逆行列 $Z_{K_3}^{-1}$ の成分和を計算すると：

$$\#K_3(q) = \frac{3}{1 + 2q}.$$

一般に,

$$\#K_n = \frac{n}{1 + (n-1)q}$$

.

Magnitude を $\mathbb{Z}[[q]]$ の元として見る

定義より,

$$\#G(q) = \text{sum}(Z_G(q)^{-1}) = \frac{\text{sum}(\text{adj}(Z_G(q)))}{\det(Z_G(q))}$$

である. ここで, sum は行列の全成分の和, adj は adjoint 行列を表す. これと, $\det(Z_G)$ の定数項が 1 であることより, $\#G(q)$ は $\mathbb{Z}[[q]]$ に属する. $\mathbb{Z}[[q]]$ で見るのが今後重要となる.

※ $\mathbb{Z}[[q]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \mid a_n \in \mathbb{Z}\}$ (整係数形式的冪級数環)

Magnitude と weighting

定義 2 (weighting)

グラフ G の各頂点 x に対し, 次の方程式を満たす数値 $w_G(x) \in \mathbb{Q}(q)$ の組 $(w_G(x))_{x \in V(G)}$ を **weighting** と呼ぶ:

$$\sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)} w_G(y) = 1 \quad (\forall x \in V(G)).$$

定義: Magnitude 鎖複体

長さ l で次数付けられた鎖複体 (chain complex) $MC_{*,l}(G)$ を定義する.

定義 3

生成元: $x_i \neq x_{i+1}$ を満たす頂点の列 (x_0, \dots, x_k) .

微分 $\partial = \sum (-1)^i \partial_i$:

$$\partial_i(x_0, \dots, x_k) = \begin{cases} (x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_k) & \text{もし長さが保存されるなら} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

(頂点 x_i を抜いても最短経路性が保たれる場合のみ残る)

Magnitude Homology $MH_{k,l}(G)$ は、この複体のホモロジーである.

Categorification (圏化)

Magnitude Homology は Magnitude を「圏化」する.

定理 1 (Hepworth-Willerton)

$MH(G)$ の次数付きオイラー標数は、元の magnitude を復元する：

$$\sum_{k,l} (-1)^k \operatorname{rank}(MH_{k,l}(G)) q^l = \#G(q).$$

これは、 $\#G$ の持つ性質が、 $MH(G)$ のより深い構造的性質の「影」であることを意味する.

Mayer-Vietoris 完全列

グラフの分解 $G = A \cup B$ から、 $MH(G)$ を計算したい.

定理 2 (Mayer-Vietoris 完全列)

もし分解 $(G; A, B)$ が **Projecting Decomposition** (射影分解) であるならば、以下の長完全列が存在する：

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow MH_n(A \cap B) &\rightarrow MH_n(A) \oplus MH_n(B) \\ &\rightarrow MH_n(G) \rightarrow MH_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

これは包除原理 $\#G = \#A + \#B - \#(A \cap B)$ の圏化版である.

証明のアイデア: Projecting Decomposition

グラフにおいて、通常の Mayer-Vietoris 列は必ずしも成立しない. 我々は Projecting (射影) 条件を課す:

- 共通部分 $A \cap B$ は G において *convex* (凸) でなければならない.
- G の各頂点は、 $A \cap B$ への距離を保存する一意的な「射影」を持たなければならない (最短パスが射影点を通る) .

この条件の下で、鎖複体が適切に分裂し、完全列が導かれる.

動機: 豊穡圏

なぜ "Magnitude" と呼ぶのか？

- グラフは、モノイダル圏 $([0, \infty], +, 0)$ 上の豊穡圏とみなせる.
- 対象: 頂点
- 射 (Hom object): 最短パス距離

整合性

豊穡圏に対する Magnitude の一般定義が、グラフに対する組合せ的な定義 (第2節) と一致することを再確認した.

まとめと今後の課題

まとめ:

- Magnitude の復習と Magnitude Homology の定義.
- オイラー標数との関係 (Categorification) の確認.
- Projecting Decomposition における Mayer-Vietoris 完全列の導入.

今後の課題:

- **Whitney Twist:** ツイスト操作は Magnitude Homology を保存するか？
- **Diagonal Graphs:** $k \neq l$ で $MH_{k,l} = 0$ となるグラフの特徴付け (例: 正二十面体グラフ) .
- **Cohomology:** Magnitude Cohomology への積構造の導入.