

# グラフの Magnitude その Categorification としての Magnitude ホモロジー

## 2025 年度 卒業研究発表

谷内 賢翔 (やち けんしょう)

横浜国立大学 理工学部 数理科学 EP

2025 年 2 月 17-19 日

# 目次

① 前提知識 (Introduction)

② 主結果

③ 今後の課題

# グラフの Magnitude

$G = (V, E)$  を, loop と multiple edge を許さない有限グラフとする.  $G$  の similarity matrix  $Z_G$  を, その成分が  $(Z_G)_{xy} = q^{d(x,y)}$  である  $|V| \times |V|$ -行列として定義する. このとき,  $\det Z_G$  の定数項は 1 であるため,  $Z_G$  は可逆である.

## 定義 1 (Magnitude)

グラフ  $G$  の magnitude は次のように定義される :

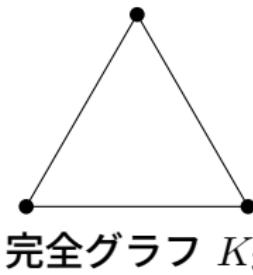
$$\#G(q) = \sum_{x,y \in V} (Z_G^{-1})_{xy} \in \mathbb{Q}(q).$$

(逆行列の全成分の和)

$q^\infty = 0$  とする.

# 例: 完全グラフ $K_3$

類似度行列は次のようになる：



$$Z_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & q & q \\ q & 1 & q \\ q & q & 1 \end{pmatrix}$$

逆行列  $Z_{K_3}^{-1}$  の成分和を計算すると：

$$\#K_3(q) = \frac{3}{1 + 2q}.$$

一般に、

$$\#K_n = \frac{n}{1 + (n - 1)q}$$

# Magnitude を $\mathbb{Z}[[q]]$ の元として見る

定義より、

$$\#G(q) = \text{sum}(Z_G(q)^{-1}) = \frac{\text{sum}(\text{adj}(Z_G(q)))}{\det(Z_G(q))}$$

である。ここで、sum は行列の全成分の和、adj は adjoint 行列を表す。これと、 $\det(Z_G)$  の定数項が 1 であることより、 $\#G(q)$  は  $\mathbb{Z}[[q]]$  に属する。 $\mathbb{Z}[[q]]$  で見ることが今後重要となる。

※  $\mathbb{Z}[[q]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \mid a_n \in \mathbb{Z}\}$  (整係数形式的幕級数環)

# Magnitude と weighting

## 定義 2 (weighting)

グラフ  $G$  の各頂点  $x$  に対し、次の方程式を満たす数値  $w_G(x) \in \mathbb{Q}(q)$  の組  $(w_G(x))_{x \in V(G)}$  を **weighting** と呼ぶ：

$$\sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)} w_G(y) = 1 \quad (\forall x \in V(G)).$$

# 定義: Magnitude 鎖複体

長さ  $l$  で次数付けられた鎖複体 (chain complex)  $MC_{*,l}(G)$  を定義する.

## 定義 3

生成元:  $x_i \neq x_{i+1}$  を満たす頂点の列  $(x_0, \dots, x_k)$ .

微分  $\partial = \sum (-1)^i \partial_i$ :

$$\partial_i(x_0, \dots, x_k) = \begin{cases} (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k) & \text{もし長さが保存されるなら} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

(頂点  $x_i$  を抜いても最短経路性が保たれる場合のみ残る)

Magnitude Homology  $MH_{k,l}(G)$  は、この複体のホモロジーである.

# Categorification (圏化)

Magnitude Homology は Magnitude を「圏化」する。

## 定理 1 (Hepworth-Willerton)

$MH(G)$  の次数付きオイラー標数は、元の magnitude を復元する：

$$\sum_{k,l} (-1)^k \operatorname{rank}(MH_{k,l}(G)) q^l = \#G(q).$$

これは、 $\#G$  の持つ性質が、 $MH(G)$  のより深い構造的性質の「影」であることを意味する。

# Mayer-Vietoris 完全列

グラフの分解  $G = A \cup B$  から、 $MH(G)$  を計算したい。

## 定理 2 (Mayer-Vietoris 完全列)

もし分解  $(G; A, B)$  が Projecting Decomposition (射影分解) であるならば、以下の長完全列が存在する：

$$\begin{aligned} \cdots &\rightarrow MH_n(A \cap B) \rightarrow MH_n(A) \oplus MH_n(B) \\ &\rightarrow MH_n(G) \rightarrow MH_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

これは包除原理  $\#G = \#A + \#B - \#(A \cap B)$  の圏化版である。

# 証明のアイデア: Projecting Decomposition

グラフにおいて、通常の Mayer-Vietoris 列は必ずしも成立しない。我々は Projecting (射影) 条件を課す：

- 共通部分  $A \cap B$  は  $G$  において convex (凸) でなければならない。
- $G$  の各頂点は、 $A \cap B$  への距離を保存する一意的な「射影」を持たなければならぬ（最短パスが射影点を通る）。

この条件の下で、鎖複体が適切に分裂し、完全列が導かれる。

# 動機: 豊穰圏

なぜ "Magnitude" と呼ぶのか?

- グラフは、モノイダル圏  $([0, \infty], +, 0)$  上の豊穰圏とみなせる.
- 対象: 頂点
- 射 (Hom object): 最短パス距離

## 整合性

豊穰圏に対する Magnitude の一般定義が、グラフに対する組合せ的な定義（第 2 節）と一致することを再確認した.

# まとめと今後の課題

まとめ:

- Magnitude の復習と Magnitude Homology の定義.
- オイラー標数との関係 (Categorification) の確認.
- Projecting Decomposition における Mayer-Vietoris 完全列の導入.

今後の課題:

- **Whitney Twist:** ツイスト操作は Magnitude Homology を保存するか？
- **Diagonal Graphs:**  $k \neq l$  で  $MH_{k,l} = 0$  となるグラフの特徴付け (例: 正二十面体グラフ).
- **Cohomology:** Magnitude Cohomology への積構造の導入.