

The magnitude of graphs and the magnitude homology as its categorification

2025 年度 卒業研究発表

谷内 賢翔 (やち けんしょう)

横浜国立大学 理工学部 数理科学 EP

2025 年 2 月 17 日

目次

- ① 前提知識 1
- ② 主結果 1
- ③ 前提知識 2
- ④ 主結果 2
- ⑤ 今後の課題

グラフと距離 (前提)

- グラフ \rightarrow ループと多重辺を許さない有限グラフ
- グラフ G の頂点集合を $V(G)$, 辺集合を $E(G)$ と表す

- グラフ G が与えられたとき, 頂点集合 $V(G)$ に, 最短経路
- が定める距離 d を与え, グラフ自体を (一般化) 距離空間とみなす.

一辺の長さを 1 とする.

- 上記で定義した距離は, 非負整数および ∞ の値をとる
- 頂点が連結されていないとき, 距離が ∞ となる

グラフの Magnitude

Definition 1 (Leinster [3], 2016)

グラフ G の **similarity matrix** $Z_G(q)$ を, その成分が $Z_G(x, y) = q^{d(x, y)}$ である $|V(G)| \times |V(G)|$ -行列として定義する.

ここで, q は変数であり, $q^\infty = 0$ とする.

このとき, $Z_G(q)$ の対角成分は全て 1 なので, $\det Z_G$ の定数項は 1 であり, よって Z_G は可逆である.

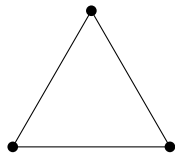
Definition 2 (Leinster [3], 2016)

グラフ G の **magnitude** は次のように定義される:

$$\#G(q) = \sum_{x, y \in V(G)} (Z_G(q)^{-1})(x, y) \in \mathbb{Q}(q).$$

(逆行列の全成分の和)

例: 完全グラフ K_3

完全グラフ K_3

K_3 の similarity matrix は次のようになる:

$$Z_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & q & q \\ q & 1 & q \\ q & q & 1 \end{pmatrix}.$$

その逆行列 $Z_{K_3}^{-1}$ は

$$Z_{K_3}^{-1} = \frac{1}{(1+2q)(q-1)} \begin{pmatrix} -q-1 & q & q \\ q & -q-1 & q \\ q & q & -q-1 \end{pmatrix}.$$

よって, その成分和は

$$\#K_3(q) = \frac{3}{1+2q}.$$

一般に,

$$\#K_n(q) = \frac{n}{1+(n-1)q} \quad (\text{後ほど証明}).$$

Magnitude を $\mathbb{Z}[[q]]$ の元として見る

定義より,

$$\#G(q) = \text{sum}(Z_G(q)^{-1}) = \frac{\text{sum}(\text{adj}(Z_G(q)))}{\det(Z_G(q))}$$

である. ここで, sum は行列の全成分の和, adj は余因子行列を表す.
 これと, $\det(Z_G)$ の定数項が 1 であることより, $\#G(q)$ は $\mathbb{Z}[[q]]$ に属する.
 $\mathbb{Z}[[q]]$ で見るのが今後重要となる.

※ $\mathbb{Z}[[q]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \mid a_n \in \mathbb{Z}\}$ (整係数形式的冪級数環)

Weighting

Definition 3 (Leinster [3], 2016)

グラフ G の各頂点 x に対し,

$$w_G(x)(q) = \sum_{y \in V(G)} (Z_G(q))^{-1}(x, y)$$

で関数 $w_G : V(G) \rightarrow \mathbb{Q}(q)$ を定義し, これを G の **weighting** と呼ぶ.

定義から, $\#G(q) = \sum_{x \in V(G)} w_G(x)(q)$ が成り立つ.

また, G の各頂点 x に対し, weighting $w_G(x)$ は次の方程式を満たす:

$$\sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)} w_G(y) = 1 \quad \text{for } x \in V(G).$$

これを, **weighting equation** と呼ぶ. $Z_G(q)$ の可逆性より, weighting equation を満たす関数 $V(G) \rightarrow \mathbb{Q}(q)$ は一意的である.

実際に計算する

Lemma 1 (Leinster [3], 2016)

グラフ G が vertex-transitive ならば, 任意の頂点 $x \in V(G)$ に対し,

$$\#G(q) = \frac{|V(G)|}{\sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)}}.$$

※ **vertex-transitive**: 作用 $\text{Aut}(G) \curvearrowright V(G)$ の軌道が唯 1 つであるグラフ.

Proof.

$S : V(G) \rightarrow \mathbb{Q}(q); x \mapsto \sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)}$ とおくと, 仮定より, $S(x)$ の値は x によらず, これを S とすると, 定値関数 $\frac{1}{S}$ は weighting equation を満たす. よって,

$$\#G(q) = \sum_{x \in V(G)} \frac{1}{S} = \frac{|V(G)|}{S}.$$

□

実際の計算例: 完全グラフ K_n

Lemma 1 (再掲)

グラフ G が vertex-transitive ならば, 任意の頂点 $x \in V(G)$ に対し,

$$\#G(q) = \frac{|V(G)|}{S}.$$

ただし, $S = \sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)}.$

n 頂点完全グラフ K_n は vertex-transitive である. Lemma 1 において, $S = 1 + (n-1)q$ であるから,

$$\begin{aligned} \#K_n(q) &= \frac{n}{1 + (n-1)q} \\ &= n \sum_{k=0}^{\infty} -\{(n-1)q\}^k \end{aligned}$$

k 次の係数は $c_k = \{-(n-1)q\}^k n$ である. 特に, $c_0 = n, c_1 = -(n-1)n.$

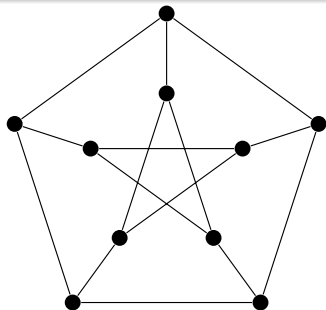
実際の計算例 2: Petersen グラフ

Lemma 1 (再掲)

グラフ G が vertex-transitive ならば, 任意の頂点 $x \in V(G)$ に対し,

$$\#G(q) = \frac{|V(G)|}{S}.$$

ただし, $S = \sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)}.$



G を左図のグラフ (Petersen グラフ) とすると, G も vertex-transitive となる (回転と内外の入れ替え).

$S = 1 + 3q + 6q^2$ なので,

$$\begin{aligned} \#G(q) &= \frac{10}{1 + 3q + 6q^2} \\ &= 10 - 30q + \cdots \end{aligned}$$

組み合わせ的表現

Proposition 1 (Leinster [3], 2016)

G をグラフとすると,

$$\begin{aligned}\#G(q) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{x_0 \neq \cdots \neq x_k} q^{d(x_0, x_1) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで,

$$c_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left| \left\{ (x_0, \dots, x_k) \mid x_0 \neq \cdots \neq x_k, \right. \right. \\ \left. \left. d(x_0, x_1) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k) = n \right\} \right|.$$

Proposition 1 からわかること

Proposition 1 の c_n の式

$$c_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left| \left\{ (x_0, \dots, x_k) \mid x_0 \neq \dots \neq x_k, \right. \right. \\ \left. \left. d(x_0, x_1) + \dots + d(x_{k-1}, x_k) = n \right\} \right|.$$

上記より,

Corollary 1 (Leinster [3], 2016)

$$|V(G)| = c_0, \quad |E(G)| = -\frac{1}{2}c_1$$

Convex と projection

Definition 4 (Leinster [3], 2016)

X をグラフ, U を X の部分グラフとする. グラフ X, U の距離をそれぞれ d_X, d_U とする.

U が X で **凸である** とは, 任意の頂点 $x, y \in V(U)$ に対し, $d_U(x, y) = d_X(x, y)$ が成り立つことをいう.

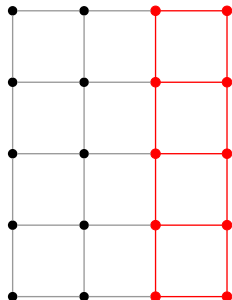
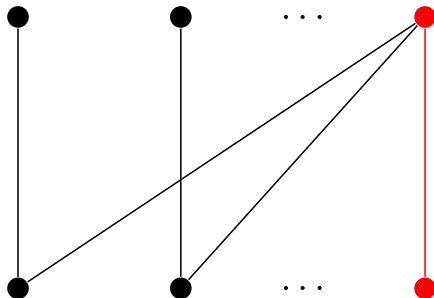
Definition 5 (Leinster [3], 2016)

X をグラフ, U を X で凸な X の部分グラフとする. また, $V_U(X) = \{v \in V(X) \mid d_X(v, u) < \infty \text{ for some } u \in V(U)\}$ とする (U に接続されている頂点全体).

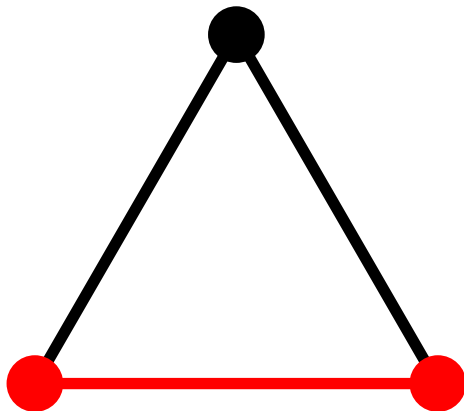
X **projects to** U とは, 任意の $x \in V_U(X)$ に対し, ある $u' \in V(U)$ が存在して, 任意の $u \in V(U)$ について $d_X(x, u) = d_X(x, u') + d_X(u', u)$ が成り立つことをいう. 各 $x \in V_U(X)$ に対し, そのような u' を1つ固定し, これを $\pi(x)$ と表す.

project の例

(赤に接続された) すべての頂点に対し、赤の中から 1 点選んで factor through することで、赤の全ての点との距離が最短になるようにできる。上記の u' は一意に定まる。



project でない例



主結果

Theorem 1 (Leinster [3], 2016)

X をグラフ, G, H を X の部分グラフとし, $X = G \cup H$ とする. $G \cap H$ が X で凸であり, H projects to $G \cap H$ ならば,

$$\#X = \#G + \#H - \#(G \cap H).$$

上記の状況を満たす pair $(X; G, H)$ を, *projecting decomposition* と呼ぶ.

Proof.

$w_G + w_H - w_{G \cap H}$ が X の weighting equation を満たすので,
 $w_X = w_G + w_H - w_{G \cap H}$ が導かれる. weighting equation を満たすことは, 計算により確認できる. □

計算の様子

$$\begin{aligned}
 d(g, u) + d(u, h) &= d(g, u) + d(u, \pi(h)) + d(\pi(h), h) \\
 &\geq d(g, \pi(h)) + d(\pi(h), h) \\
 &\geq d(g, h) \\
 &= d(g, u) + d(u, h) \\
 d(g, h) &= d(g, \pi(h)) + d(\pi(h), h).
 \end{aligned}$$

means

If $x \in V(G)$,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{g \in V(G)} q^{d(g, x)} w_G(g) + \sum_{h \in V(H)} q^{d(h, x)} w_H(h) - \sum_{u \in V(G \cap H)} q^{d(u, x)} w_{G \cap H}(u) \\
 &= 1 + \sum_{h \in V(H)} q^{d(h, x)} w_H(h) - \sum_{u \in V(G \cap H)} q^{d(u, x)} \sum_{h \in \pi^{-1}(u)} q^{d(h, u)} w_H(h) \\
 &= 1 + \sum_{h \in V_{G \cap H}(H)} q^{d(h, x)} w_H(h) - \sum_{h \in V_{G \cap H}(H)} q^{d(x, \pi(h)) + d(\pi(h), h)} w_H(h) \\
 &= 1 + \sum_{h \in V_{G \cap H}(H)} q^{d(h, x)} w_H(h) - \sum_{h \in V_{G \cap H}(H)} q^{d(h, x)} w_H(h) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

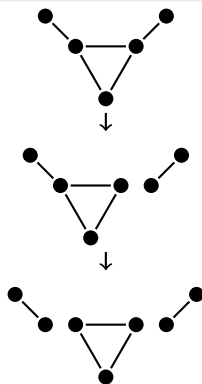
If $x \in V_{G \cap H}(H)$,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{g \in V(G)} q^{d(g, x)} w_G(g) + \sum_{h \in V(H)} q^{d(h, x)} w_H(h) - \sum_{u \in V(G \cap H)} q^{d(u, x)} w_{G \cap H}(u) \\
 &= \sum_{g \in V(G)} q^{d(g, \pi(x)) + d(\pi(x), x)} w_G(g) + 1 - \sum_{u \in V(G \cap H)} q^{d(u, \pi(x)) + d(\pi(x), x)} w_{G \cap H}(u)
 \end{aligned}$$

主結果 1 の使用例 : Bull Graph

Theorem 1

$$\#X = \#G + \#H - \#(G \cap H).$$



左図のグラフ G 場合,
 $G = K_2 \vee C_3 \vee K_2$ とみなせる (\vee は, 1 点の同一視). この場合, 1 点和は projecting decomposition を与えるので, 主定理を 2 回適応することにより, 以下のようなになる.

$$\begin{aligned} \#G &= \#K_3 + 2 \cdot \#K_2 - 2 \cdot \#K_1 \\ &= \frac{3}{1+2q} + 2 \cdot \frac{2}{1+q} - 2 \cdot 1 \\ &= 5 - 10q + \dots \end{aligned}$$

次に, この Magnitude という性質に, 代数トポロジー的な情報を増やすこと (categorification) を考える.

Magnitude complex

Definition 6 (Hepworth, Willerton [1], 2019)

グラフ G , 非負整数 k, l に対し, 自由アーベル群

$$MC_{k,l}(G) = \text{span}_{\mathbb{Z}} \{ (x_0, \dots, x_k) \mid x_i \in V(G), x_0 \neq \dots \neq x_k, \\ d(x_0, x_1) + \dots + d(x_{k-1}, x_k) = l \}$$

を定め, 境界準同型 $\partial : MC_{k,l}(G) \rightarrow MC_{k-1,l}(G)$ を

$$\begin{aligned} \partial &= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} \partial_i, \quad \partial_i(x_0, \dots, x_k) \\ &= \begin{cases} (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k) & \text{if } l(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k) = l(x_0, \dots, x_k), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

で定義する.

このように定義された ∂ は, 2 回適用すると 0 になり, これにより各 l に対し, 鎖複体 $(MC_{*,l}(G), \partial)$ が得られる.

Magnitude homology

Definition 7 (Hepworth, Willerton [1], 2019)

グラフ G の **magnitude homology** とは, homology

$$MH_{*,l}(G) = H(MC_{*,l}(G), \partial)$$

$$(MH_{k,l}(G) = \text{Ker} \partial \cap MC_{k,l}(G) / \text{Im} \partial \cap MC_{k,l}(G))$$

のことである. 各 l について得られる.

Magniude との関係

Theorem 2 (Hepworth, Willerton [1], 2019)

G をグラフとすると,

$$\sum_{k,l} (-1)^k \text{rank}(MH_{k,l}(G)) q^l = \#G(q).$$

Proof.

各 k, l について,

$$\text{rank}(MC_{k,l}(G)) q^l = \sum_{x_0 \neq \dots \neq x_k} q^{d(x_0, x_1) + \dots + d(x_{k-1}, x_k)}$$

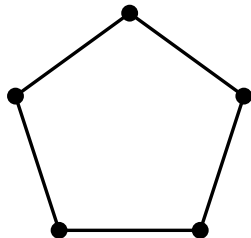
であること, 複体のオイラー標数に関する定理, Proposition 1 を利用. \square

Proposition 1(再掲)

$$\#G(q) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{x_0 \neq \dots \neq x_k} q^{d(x_0, x_1) + \dots + d(x_{k-1}, x_k)}.$$

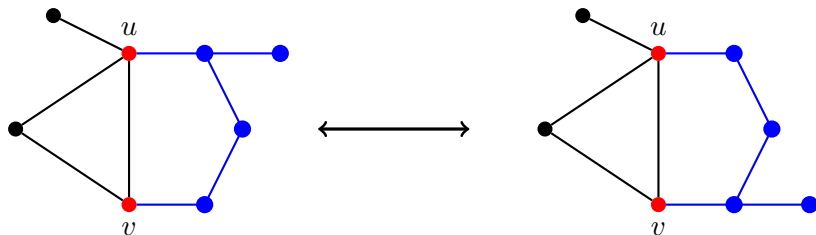
Magnitude Homology の例

各 k, l についての $MH_{k,l}(C_5)$ のランク:



		k							
		0	1	2	3	4	5	6	7
l	0	5							
	1		10						
	2			10					
	3			10	10				
	4				30	10			
	5					50	10		
	6					20	70	10	
	7						80	90	10






今後の課題



今後の課題:

- **Whitney Twist:** ツイスト操作は Magnitude Homology を保存するか？
- **Diagonal Graphs** ($k \neq l$ で $MH_{k,l} = 0$ となるグラフ) についての特徴付け
- **距離空間, enriched categories:** Magnitude は, もともと (コンパクトで positive definite な) 距離空間, さらに広く, enriched categories に対して定義されている. 他に有用なクラスがあるか？

参考文献

-  Richard Hepworth and Simon Willerton. *Categorifying the magnitude of a graph*. Homology Homotopy Appl. 19 (2017), no. 2, 31–60.
-  G. M. Kelly. *Basic concepts of enriched category theory*. Reprint of the 1982 original [Cambridge Univ. Press, Cambridge] Repr. Theory Appl. Categ. No. 10 (2005), vi+137 pp.
-  Tom Leinster. *The magnitude of metric spaces*. Doc. Math. 18 (2013), 857–905.
-  Tom Leinster. *The magnitude of a graph*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 166 (2019), no. 2, 247–264.
-  The Automorphism Group of the Petersen Graph is Isomorphic to S_5 . <https://arxiv.org/abs/2012.02942>

Proposition 1 の証明の概略

Proof.

$\tilde{w}_G : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}[q]$ を, 定理 1 行目で x_0 を固定したものとする ↓

$$\tilde{w}_G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{x=x_0 \neq x_1 \neq \cdots \neq x_k} q^{d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k)}.$$

これは weighting equation を満たす. x_0 の固定を解除して足すことで題意を得る. □

Motivation

monoidal category

Definition 8

圏 \mathcal{V} とその object I , 関手 $\otimes : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, 自然変換

$\alpha : \otimes \circ (\otimes \times id_{\mathcal{V}} \Rightarrow \otimes \circ (id_{\mathcal{V}} \times \otimes)), \lambda : I \otimes - \Rightarrow id_{\mathcal{V}}, \rho : - \otimes I \Rightarrow id_{\mathcal{V}}$ に対し, pair $(\mathcal{V}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ が *monoidal category* であるとは, 以下の性質を満たすものをいう:

Enriched Category

Definition 9

$(\mathcal{V}, I, \otimes, \alpha, \lambda, \rho)$ を monoidal category とする. 圏 \mathcal{A} , a collection of morphisms m, j に対し, pair (\mathcal{A}, m, j) が \mathcal{V} -enriched category であるとは, 以下の性質を満たすものをいう:

Enriched Category の例

Enriched category の magnitude

$(\mathcal{V}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, |\cdot|)$ をモノイダル圏, (\mathcal{A}, m, j) を有限のオブジェクトを持つ \mathcal{V} -enriched category とする.

Definition 10

magnitude

Enriched category から見た グラフ の magnitude

Theorem 3

G をグラフとするとき, G には一般化距離空間の構造が入る. その上で G を $[0, \infty]$ -enriched category として考えると, その magnitude は, 先ほど定義したグラフの magnitude と一致する.

Proof.

グラフの頂点集合 $V(G)$ に, 最短経路が定める距離 d を入れることで, $V(G)$ は一般化距離空間となる. これを G の距離とする.

モノイダル圏 $([0, \infty], +, 0, \leq, id, |\cdot|)$ には, 部分的に定義されるモノイド準同型 $|\cdot| : Z \rightarrow \mathbb{Q}(q)$ を $|x| = q^x$ が付加されており, G の距離が Z に値をとることから G は $[0, \infty]$ -enriched category の構造を持つ. (ただし, $Z = \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$). これにより Definition 2 と一致させることができる. □

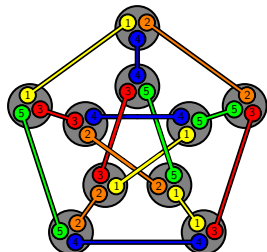
Petersen グラフの Autom Grp が 5-dim symmetric group に同型であること (ここは要修正)

Proof Without Words

Japheth Wood
Bard College
Annandale-on-Hudson, NY 12504



The Petersen Graph



The Automorphism Group of the Petersen Graph is isomorphic to S_5 .

Abstract

The automorphism group of the Petersen Graph is shown to be isomorphic to the symmetric group on 5 elements. The image represents the Petersen Graph with the ten 3-element subsets of $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ as vertices. Two vertices are adjacent when they have precisely one element in common.

右図で, 黄色, 赤色, オレンジ色, 青色, 緑色の頂点をセットにして, 任意に5つの組を入れ替えることが可能. よって, $S_5 \subset \text{Aut}(G)$ (部分群)

Magnitude では, connected components の個数 は特定できない

Remark 2.2.12, 2.2.13 あたりをまとめましょう. 簡単で非自明なグラフいくつかについて、3次くらいまでの一覧表を用意する.

条件なしでは, 主結果は得られない

Lemma 2.3.3 や cartesian product 周りの話をまとめる.

端折った計算のアイデアを記載する

torsion について

今回扱ったグラフの magnitude homology には, torsion は存在しない.
しかし, torsion を持つグラフも存在する.

4 頂点以下のグラフについて

4 頂点以下の全てのグラフについて調べた結果, Magnitude が同じもののペアは以下の通りであった:

categorification について

categorification なので, 実際は functor の構造が入る.