

グラフの Magnitude その Categorification としての Magnitude ホモロジー

2025 年度 卒業研究発表

谷内 賢翔 (やち けんしょう)

横浜国立大学 理工学部 数理科学 EP

2025 年 2 月 17-19 日

目次

① 前提知識 1

② 主結果 1

③ 前提知識 2

④ 主結果 2

⑤ 今後の課題

グラフと距離 (前提)

- グラフ \rightarrow ループと多重辺を許さない有限グラフ
- グラフ G の頂点集合を $V(G)$, 辺集合を $E(G)$ と表す
- グラフ G が与えられたとき, 頂点集合 $V(G)$ に, 最短経路が定める距離 d を与え, グラフ自体を(一般化)距離空間とみなす
- 上記で定義した距離は, 非負整数および ∞ の値をとる

グラフの Magnitude

Definition 1

グラフ G の similarity matrix $Z_G(q)$ を、その成分が $Z_G(x, y) = q^{d(x,y)}$ である $|V(G)| \times |V(G)|$ -行列として定義する。

ここで、 q は変数であり、 $q^\infty = 0$ とする。

このとき、 $Z_G(q)$ の対角成分は全て 1 なので、 $\det Z_G$ の定数項は 1 であり、よって Z_G は可逆である。

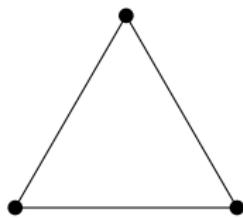
Definition 2 (magnitude)

グラフ G の magnitude は次のように定義される：

$$\#G(q) = \sum_{x,y \in V(G)} (Z_G(q)^{-1})(x, y) \in \mathbb{Q}(q).$$

(逆行列の全成分の和)

例: 完全グラフ K_3



完全グラフ K_3

K_3 の similarity matrix は次のようになる:

$$Z_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & q & q \\ q & 1 & q \\ q & q & 1 \end{pmatrix}$$

逆行列 $Z_{K_3}^{-1}$ の成分和を計算すると:

$$\#K_3(q) = \frac{3}{1 + 2q}.$$

一般に,

$$\#K_n(q) = \frac{n}{1 + (n - 1)q} \quad (\text{後ほど証明}).$$

Magnitude を $\mathbb{Z}[[q]]$ の元として見る

定義より、

$$\#G(q) = \text{sum}(Z_G(q)^{-1}) = \frac{\text{sum}(\text{adj}(Z_G(q)))}{\det(Z_G(q))}$$

である。ここで、sum は行列の全成分の和、adj は余因子行列を表す。
 これと、 $\det(Z_G)$ の定数項が 1 であることより、 $\#G(q)$ は $\mathbb{Z}[[q]]$ に属する。
 $\mathbb{Z}[[q]]$ で見ることが今後重要となる。

※ $\mathbb{Z}[[q]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \mid a_n \in \mathbb{Z}\}$ (整係数形式的幕級数環)

Weighting

Definition 3 (weighting)

グラフ G の各頂点 x に対し,

$$w_G(x)(q) = \sum_{y \in V(G)} (Z_G(q))^{-1}(x, y)$$

で関数 $w_G : V(G) \rightarrow \mathbb{Q}(q)$ を定義し, これを G の weighting と呼ぶ.

定義から, $\#G(q) = \sum_{x \in V(G)} w_G(x)(q)$ が成り立つ.

また, G の各頂点 x に対し, weighting $w_G(x)$ は次の方程式を満たす:

$$\sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)} w_G(y) = 1 \quad \text{for } x \in V(G).$$

これを, weighting equation と呼ぶ. $Z_G(q)$ の可逆性より, weighting equation を満たす他の関数 $V(G) \rightarrow \mathbb{Q}(q)$ は存在しない.

実際の計算例

Lemma 1

グラフ G が vertex-transitive ならば、任意の頂点 $x \in V(G)$ に対し、

$$\#G(q) = \frac{|V(G)|}{\sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)}}.$$

※ vertex-transitive: 作用 $\text{Aut}(G) \curvearrowright V(G)$ の軌道が唯 1 つであるグラフ。

Proof.

$S : V(G) \rightarrow \mathbb{Q}(q); x \mapsto \sum_{y \in V(G)} q^{d(x,y)}$ とおくと、仮定より、 $S(x)$ の値は x によらず、これを S とすると、定値関数 $\frac{1}{S}$ は weighting equation を満たす。よって、

$$\#G(q) = \sum_{x \in V(G)} \frac{1}{S} = \frac{|V(G)|}{S}.$$

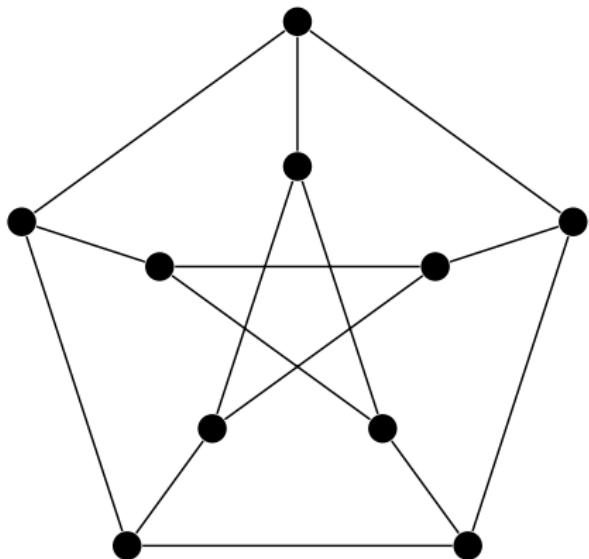
□

実際の計算例: 完全グラフ K_n

n 頂点完全グラフ K_n は vertex-transitive である. Lemma 1において,
 $S = 1 + (n - 1)q$ であるから,

$$\#K_n(q) = \frac{n}{1 + (n - 1)q}.$$

実際の計算例: Petersen グラフ



G を左図のグラフ (Petersen グラフ) とすると, G も vertex-transitive となる (回転と内外の入れ替え).
 $S = 1 + 3q + 6q^2$ なので,

$$\#G(q) = \frac{10}{1 + 3q + 6q^2}.$$

組み合わせ的表現

Proposition 1

G をグラフとするとき,

$$\begin{aligned}\#G(q) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{x_0 \neq \dots \neq x_k} q^{d(x_0, x_1) + \dots + d(x_{k-1}, x_k)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$c_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left| \left\{ (x_0, \dots, x_k) \mid x_0 \neq \dots \neq x_k, \right. \right.$$

$$\left. \left. d(x_0, x_1) + \dots + d(x_{k-1}, x_k) = n \right\} \right|.$$

Proposition 1 の証明の概略

Proof.

$\tilde{w}_G : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}[q]$ を、定理 1 行目で x_0 を固定したものとする ↓

$$\tilde{w}_G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{x=x_0 \neq x_1 \neq \dots \neq x_k} q^{d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{k-1}, x_k)}.$$

これは weighting equation を満たす。 x_0 の固定を解除して足すことで題意を得る。

□

Proposition 1 からわかること

Corollary 1

G をグラフとするとき,

$$|V(G)| = \#G(0), |E(G)| = -\frac{1}{2} \left. \frac{d}{dq} \#G(q) \right|_{q=0}.$$

Proof.

Proposition 1 を見ると、以下を確認できる:

$$c_0 = |V(G)|, c_1 = -2|E(G)|.$$



Convex と projection

Definition 4 (convex)

X をグラフ, U を X の部分グラフとする. グラフ X, U の距離をそれぞれ d_X, d_U とする.

U が X で凸であるとは, 任意の頂点 $x, y \in V(U)$ に対し,
 $d_U(x, y) = d_X(x, y)$ が成り立つことをいう.

Definition 5 (projection)

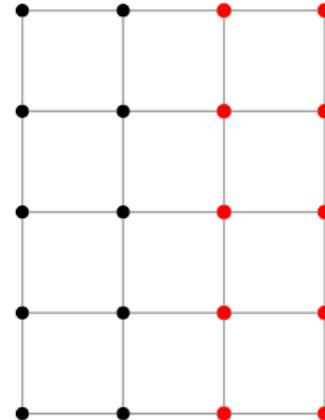
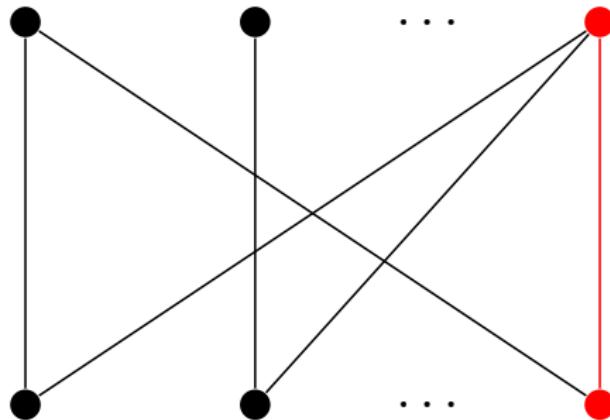
X をグラフ, U を X で凸な X の部分グラフとする. また,

$V_U(X) = \{v \in V(X) \mid d_X(v, u) < \infty \text{ for some } u \in V(U)\}$ とする
 $(U$ に接続されている頂点全体).

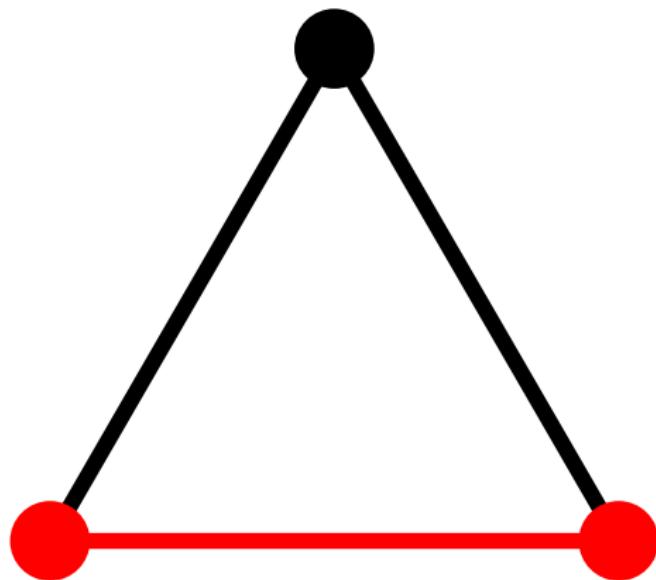
X projects to U とは, 任意の $x \in V_U(X)$ に対し, ある $u' \in V(U)$ が存在して, 任意の $u \in V(U)$ について $d_X(x, u) = d_X(x, u') + d_X(u', u)$ が成り立つことをいう. 各 $x \in V_U(X)$ に対し, そのような u' を 1 つ固定し,これを $\pi(x)$ と表す.

project の例

(赤に接続された) すべての頂点に対し, 赤の中から 1 点選んで factor through することで, 赤の全ての点との距離が最短になるようにできる.
上記の u' は一意に定まる.



project でない例



主結果

Theorem 1

X をグラフ, G, H を X の部分グラフとし, $X = G \cup H$ とする. $G \cap H$ が X で凸であり, H projects to $G \cap H$ ならば,

$$\#X = \#G + \#H - \#(G \cap H).$$

上記の状況を満たす pair $(X; G, H)$ を, *projecting decomposition* と呼ぶ.

Proof.

$w_G + w_H - w_{G \cap H}$ が X の weighting equation を満たすので,
 $w_X = w_G + w_H - w_{G \cap H}$ が導かれる. weighting equation を満たすこと
 は、計算により確認できる. □

計算の様子

$$\begin{aligned}
 d(g, u) + d(u, h) &= d(g, u) + d(u, \pi(h)) + d(\pi(h), h) \\
 &\geq d(g, \pi(h)) + d(\pi(h), h) \\
 &\geq d(g, h) \\
 &= d(g, u) + d(u, h)
 \end{aligned}$$

means

$$d(g, h) = d(g, \pi(h)) + d(\pi(h), h).$$

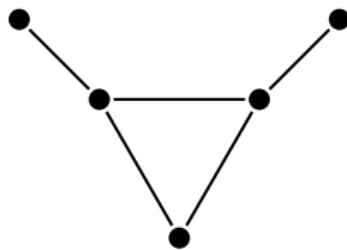
If $x \in V(G)$,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{g \in V(G)} q^{d(g, x)} w_G(g) + \sum_{h \in V(H)} q^{d(h, x)} w_H(h) - \sum_{u \in V(G \cap H)} q^{d(u, x)} w_{G \cap H}(u) \\
 &= 1 + \sum_{h \in V(H)} q^{d(h, x)} w_H(h) - \sum_{u \in V(G \cap H)} q^{d(u, x)} \sum_{h \in \pi^{-1}(u)} q^{d(h, u)} w_H(h) \\
 &= 1 + \sum_{h \in V_{G \cap H}(H)} q^{d(h, x)} w_H(h) - \sum_{h \in V_{G \cap H}(H)} q^{d(x, \pi(h)) + d(\pi(h), h)} w_H(h) \\
 &= 1 + \sum_{h \in V_{G \cap H}(H)} q^{d(h, x)} w_H(h) - \sum_{h \in V_{G \cap H}(H)} q^{d(h, x)} w_H(h) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

If $x \in V_{G \cap H}(H)$,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{g \in V(G)} q^{d(g, x)} w_G(g) + \sum_{h \in V(H)} q^{d(h, x)} w_H(h) - \sum_{u \in V(G \cap H)} q^{d(u, x)} w_{G \cap H}(u) \\
 &= \sum_{g \in V(G)} q^{d(g, \pi(x)) + d(\pi(x), x)} w_G(g) + 1 - \sum_{u \in V(G \cap H)} q^{d(u, \pi(x)) + d(\pi(x), x)} w_{G \cap H}(u)
 \end{aligned}$$

主定理の使用例 : Bull Graph



左図のグラフ G 場合,

$G = K_2 \vee C_3 \vee K_2$ とみなせる (\vee は, 1 点の同一視). この場合, 1 点和は projecting decomposition を与えるので, 主定理を 2 回適応することにより,

$$\begin{aligned} \#G &= \#K_3 + 2 \cdot \#K_2 - 2 \cdot \#K_1 \\ &= \frac{3}{1+2q} + 2 \cdot \frac{2}{1+q} - 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

となる.

Magnitude complex

Definition 6

グラフ G , 非負整数 k, l に対し, 自由アーベル群

$$MC_{k,l}(G) = \text{span}_{\mathbb{Z}} \left\{ (x_0, \dots, x_k) \mid x_i \in V(G), x_0 \neq \dots \neq x_k, \right. \\ \left. l = d(x_0, x_1) + \dots + d(x_{k-1}, x_k) \right\}$$

を定め, 境界準同型 $\partial : MC_{k,l}(G) \rightarrow MC_{k-1,l}(G)$ を

$$\partial = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} \partial_i, \quad \partial_i(x_0, \dots, x_k) = \\ \begin{cases} (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k) & \text{if } l(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k) = l(x_0, \dots, x_k), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

で定義する.

このように定義された ∂ は, 2回適用すると 0 になり, これにより各 l に対し, 鎖複体 $(MC_{*,l}(G), \partial)$ が得られる.

Magnitude homology

Definition 7

グラフ G の *magnitude homology* とは, homology

$$MH_{*,l}(G) = H_\partial(MC_{*,l}(G))$$

のことである. 各 l について得られる.

Magnitude との関係

Theorem 2

G をグラフとするとき,

$$\sum_{k,l} (-1)^k \text{rank}(MH_{k,l}(G))q^l = \#G(q).$$

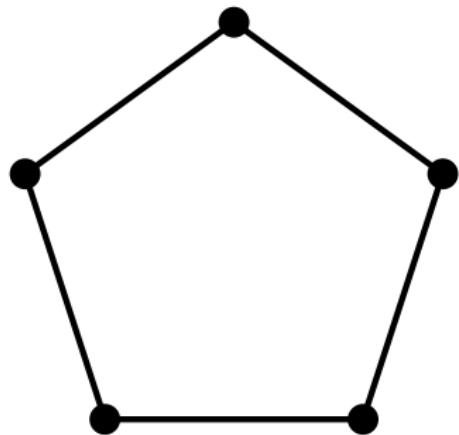
Proof.

各 k, l について,

$$\text{rank}(MC_{k,l}(G))q^l = \sum_{x_0 \neq \dots \neq x_k} q^{d(x_0, x_1) + \dots + d(x_{k-1}, x_k)}$$

であることや、複体のオイラー標数に関する定理、Proposition 1 を利用する。 □

Magnitude Homology の例



各 k, l についての $MH_{k,l}(C_5)$ のランクは以下の通り:

	k					
	0	1	2	3	4	5
0	5					
1		10				
l	2		10			
3			10	10		
4				30	10	
5					50	10

今後の課題

今後の課題:

- **Whitney Twist:** ツイスト操作は Magnitude Homology を保存するか？
- **Diagonal Graphs:** $k \neq l$ で $MH_{k,l} = 0$ となるグラフの特徴付け（例: 正二十面体グラフ）.
- 距離空間, enriched categories: Magnitude は, もともと (コンパクトで positive definite な) 距離空間, さらに広く, enriched categories に対して定義されている. 他に有用なクラスがあるか？

参考文献

-  Richard Hepworth and Simon Willerton. *Categorifying the magnitude of a graph.* Homology Homotopy Appl. 19 (2017), no. 2, 31–60.
-  G. M. Kelly. *Basic concepts of enriched category theory.* Reprint of the 1982 original [Cambridge Univ. Press, Cambridge] Repr. Theory Appl. Categ. No. 10 (2005), vi+137 pp.
-  Tom Leinster. *The magnitude of metric spaces.* Doc. Math. 18 (2013), 857–905.
-  Tom Leinster. *The magnitude of a graph.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 166 (2019), no. 2, 247–264.
-  The Automorphism Group of the Petersen Graph is Isomorphic to S_5 .
<https://arxiv.org/abs/2012.02942>

Motivation の話を書く

monoidal category

Definition 8

圏 \mathcal{V} とその object I , 関手 $\otimes : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, 自然変換

$\alpha : \otimes \circ (\otimes \times id_{\mathcal{V}} \Rightarrow \otimes \circ (id_{\mathcal{V}} \times \otimes)), \lambda : I \otimes - \Rightarrow id_{\mathcal{V}}, \rho : - \otimes I \Rightarrow id_{\mathcal{V}}$ に
対し, pair $(\mathcal{V}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ が monoidal category であるとは, 以下の性質
を満たすものをいう:

Enriched Category

Definition 9

$(\mathcal{V}, I, \otimes, \alpha, \lambda, \rho)$ を monoidal category とする. 圈 \mathcal{A} , a collection of morphisms m, j に対し, pair (\mathcal{A}, m, j) が \mathcal{V} -enriched category であるとは, 以下の性質を満たすものをいう:

Enriched Category の例

Enriched category の magnitude

$(\mathcal{V}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, |\cdot|)$ をモノイダル圏, (\mathcal{A}, m, j) を有限のオブジェクトを持つ \mathcal{V} -enriched category とする.

Definition 10

magnitude

Enriched category から見た グラフ の magnitude

Theorem 3

G をグラフとするとき, G には一般化距離空間の構造が入る. その上で G を $[0, \infty]$ -enriched category として考えると, その magnitude は, 先ほど定義したグラフの magnitude と一致する.

Proof.

グラフの頂点集合 $V(G)$ に, 最短経路が定める距離 d を入れることで, $V(G)$ は一般化距離空間となる. これを G の距離とする.

モノイダル圏 $([0, \infty], +, 0, \leq, id, |\cdot|)$ には, 部分的に定義されるモノイド準同型 $|\cdot| : Z \rightarrow \mathbb{Q}(q)$ を $|x| = q^x$ が付加されており, G の距離が Z に値をとることから G は $[0, \infty]$ -enriched category の構造を持つ. (ただし, $Z = \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$). これにより Definition 2 と一致させることができ
る. □

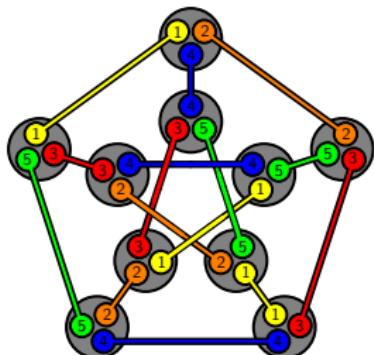
Petersen グラフの Autom Grp が 5-dim symmetric group に同型であること (ここは要修正)

Proof Without Words

Japheth Wood
Bard College
Annandale-on-Hudson, NY 12504



The Petersen Graph



右図で、黄色、赤色、オレンジ色、青色、緑色の頂点をセットにして、任意に 5 つの組を入れ替えることが可能。よって、 $S_5 \subset \text{Aut}(G)$ (部分群)

Abstract

The automorphism group of the Petersen Graph is shown to be isomorphic to the symmetric group on 5 elements. The image represents the Petersen Graph with the ten 3-element subsets of $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ as vertices. Two vertices are adjacent when they have precisely one element in common.

Magnitude では, connected components の個数 は特定できない

Remark 2.2.12, 2.2.13あたりをまとめましょう. 簡単で非自明なグラフいくつかについて、3次くらいまでの一覧表を用意する.

条件なしでは、主結果は得られない

Lemma 2.3.3 や cartesian product 周りの話をまとめる。

端折った計算のアイデアを記載する

torsion について

今回扱ったグラフの magnitude homology には, torsion は存在しない.
しかし, torsion を持つグラフも存在する.