グラフの Magnitude
その Categorification としての Magnitude ホモロジー

2025 年度 卒業研究発表

谷内 賢翔 (やち けんしょう)

横浜国立大学 理工学部 数理科学 EP

2025 年 2 月 17-19 日

目次

背景と動機

- **Magnitude** は、豊穣圏（Enriched Category）に対する「サイズ」の不変量である (Leinster)。
- グラフは、豊穣圏（一般化距離空間）の一種とみなせる。
- **Magnitude Homology** は、Magnitude の *categorification*（圏化）として導入された (Hepworth & Willerton)。

研究の主目的

グラフの Magnitude Homology の性質、特に特定の条件下における **Mayer-Vietoris** 完全列 の成立について研究すること。

定義: グラフの Magnitude

$G = (V, E)$ を有限グラフとする。Z_G を類似度行列 (similarity matrix) とし、その成分を $(Z_G)_{xy} = q^{d(x,y)}$ で定義する。

定義 1 (Magnitude)

Z_G が $\mathbb{Q}(q)$ 上で可逆であるとき、グラフ G の magnitude は次のように定義される：

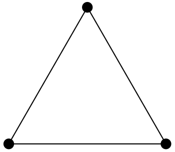
$$\#G(q) = \sum_{x,y \in V} (Z_G^{-1})_{xy} \in \mathbb{Q}(q).$$

(逆行列の全成分の和)

重要な性質: これは「濃度」(オイラー標数) のように振る舞う。

$$\#(G \square H) = \#G \cdot \#H, \quad \#(G \sqcup H) = \#G + \#H$$

例: 完全グラフ K_3



完全グラフ K_3

類似度行列は次のようになる：

$$Z_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & q & q \\ q & 1 & q \\ q & q & 1 \end{pmatrix}$$

逆行列 $Z_{K_3}^{-1}$ の成分和を計算すると：

$$\#K_3(q) = \frac{3}{1+2q}$$

定義: Magnitude 鎖複体

長さ l で次数付けられた鎖複体 (chain complex) $MC_{*,l}(G)$ を定義する。

定義 2

生成元: $x_i \neq x_{i+1}$ を満たす頂点の列 $(x_0, \ldots, x_k)$。
微分 $\partial = \sum(-1)^i \partial_i$:

$$\partial_i(x_0, \ldots, x_k) = \begin{cases} (x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_k) & \text{もし長さが保存されるなら} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

(頂点 x_i を抜いても最短経路性が保たれる場合のみ残る)

Magnitude Homology $MH_{k,l}(G)$ は、この複体のホモロジーである。

Categorification (圏化)

Magnitude Homology は Magnitude を「圏化」する。

定理 1 (Hepworth-Willerton)

$MH(G)$ の次数付きオイラー標数は、元の magnitude を復元する：

$$\sum_{k,l}(-1)^k \operatorname{rank}(MH_{k,l}(G))q^l = \#G(q).$$

これは、$\#G$ の持つ性質が、$MH(G)$ のより深い構造的性質の「影」であることを意味する。

Mayer-Vietoris 完全列

グラフの分解 $G = A \cup B$ から、$MH(G)$ を計算したい。

定理 2 (Mayer-Vietoris 完全列)

もし分解 $(G; A, B)$ が **Projecting Decomposition (射影分解)** であるならば、以下の長完全列が存在する：

$$\begin{aligned} \cdots \to MH_n(A \cap B) \to MH_n(A) \oplus MH_n(B) \\ \to MH_n(G) \to MH_{n-1}(A \cap B) \to \cdots \end{aligned}$$

これは包除原理 $\#G = \#A + \#B - \#(A \cap B)$ の圏化版である。

証明のアイデア: Projecting Decomposition

グラフにおいて、通常の Mayer-Vietoris 列は必ずしも成立しない。我々は **Projecting (射影)** 条件を課す：

- 共通部分 $A \cap B$ は G において *convex* (凸) でなければならない。
- G の各頂点は、$A \cap B$ への距離を保存する一意的な「射影」を持たなければならない（最短パスが射影点を通る）。

この条件の下で、鎖複体が適切に分裂し、完全列が導かれる。

動機: 豊穣圏

なぜ "Magnitude" と呼ぶのか？

- グラフは、モノイダル圏 $([0,\infty],+,0)$ 上の豊穣圏とみなせる。
- 対象: 頂点
- 射 (Hom object): 最短パス距離

整合性

豊穣圏に対する Magnitude の一般定義が、グラフに対する組合せ的な定義（第 2 節）と一致することを再確認した。

まとめと今後の課題

まとめ:

- Magnitude **の復習と** Magnitude Homology **の定義。**
- **オイラー標数との関係**（Categorification）**の確認。**
- Projecting Decomposition **における** Mayer-Vietoris **完全列の導入。**

今後の課題:

- **Whitney Twist: ツイスト操作は** Magnitude Homology **を保存するか？**
- **Diagonal Graphs:** $k \neq l$ **で** $MH_{k,l} = 0$ **となるグラフの特徴付け**（例: **正二十面体グラフ**）**。**
- **Cohomology:** Magnitude Cohomology **への積構造の導入。**