

Magnitude Homology of Graphs and the Magnitude as its Categorification

2025 年度 卒業研究発表

谷内 賢翔 (Kensho Yachi)

横浜国立大学 理工学部 数理科学 EP

2026 年 2 月 X 日

目次

1 Introduction

2 Preliminaries

3 Main Results

4 Conclusion

研究の背景 (Motivation)

- グラフの不变量として **Magnitude** が知られている
- これを圏論的視点 (Enriched Category) から捉え直す動きがある
- **Magnitude Homology** は、Magnitude の「オイラー標数化」として定義される

本研究の目的

グラフの Magnitude Homology の性質を調べ、特定の条件下での Mayer-Vietoris 完全列の存在を示す。

準備: Magnitude の定義

グラフ $G = (V, E)$ に対し、その Magnitude は以下のように定義される。

定義 1 (Magnitude of Graphs)

G の similarity matrix Z が可逆であるとき、

$$|G| = \sum_{i,j \in V} (Z^{-1})_{ij}$$

と定義する。これは $\mathbb{Q}(q)$ の元である。

準備: Magnitude の定義

グラフ $G = (V, E)$ に対し、その Magnitude は以下のように定義される。

定義 1 (Magnitude of Graphs)

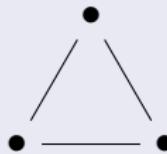
G の similarity matrix Z が可逆であるとき、

$$|G| = \sum_{i,j \in V} (Z^{-1})_{ij}$$

と定義する。これは $\mathbb{Q}(q)$ の元である。

例 1 (完全グラフ K_3)

TikZ で図を描画したり、画像を貼ったりできます。



主結果: Magnitude Chain Complex

定義 2 (Magnitude Chain Complex)

長さ k のパス $x = (x_0, \dots, x_k)$ を基底とする自由加群 $MC_k(G)$ を考え、境界作用素 ∂ を以下で定義する：

$$\partial_k(x) = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k)$$

これにより、ホモロジーグループ $MH_{k,l}(G)$ が構成される。

主結果: Mayer-Vietoris Sequence

本研究における主要な定理は以下の通りである。

定理 1 (Mayer-Vietoris Sequence)

グラフ G が特定の分解条件 (Projecting Decomposition) を満たすとき、以下の長完全列が存在する：

$$\begin{aligned} \cdots &\rightarrow MH_n(A \cap B) \rightarrow MH_n(A) \oplus MH_n(B) \\ &\rightarrow MH_n(G) \rightarrow MH_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

まとめと今後の課題

まとめ

- Magnitude Homology の定義を確認した
- MV 完全列の存在条件を整理した
- 具体的なグラフで計算を行った

今後の課題

- より一般の距離空間への拡張
- Path Homology との関連性の調査
- 応用例の探索

参考文献 |

-  T. Leinster, *The magnitude of metric spaces*, Doc. Math. 18 (2013), 857–905.
-  R. Hepworth and S. Willerton, *Categorifying the magnitude of a graph*, Homology Homotopy Appl. 19 (2017), 31–60.

ご清聴ありがとうございました