1. 对于 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$ 或 $-\infty$ 的情形，证明定理 4.2.1

证明：由于函数在 $x=x_0$ 处的值与 $x\to x_0^+$ 时的极限无关。

因此可以补充定义 $f(x_0)=g(x_0)=0$

这样，对任意的 $x\in(x_0,x_0+\delta)$，函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在 $[x_0,x]$ 上满足柯西中值

定理的所有条件，故存在 $\xi\in(x_0,x)$，使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

注意到，当 $x\to x_0^+$ 时，$\xi\to x_0^+$，故

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{\xi\to x_0^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

即证对于 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$ 或 $-\infty$ 的情形，定理 4.2.1 依然成立。

(1). $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$ $(m>0, n>0)$.

解: 原式 $= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{m \cdot x^{m-1}}{n \cdot x^{n-1}} = \dfrac{m}{n}$

(2). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

解: 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$

(3). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$.

解: 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x (1 - \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2$

(4). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$

解: 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x e^{x^2}}{-\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}}{-\cos x} = -2.$

(5). $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$

解: 原式 $= \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{3\cos 3x}{\frac{5}{\cos^2 5x}} = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{3\cos 3x \cdot \cos^2 5x}{5} = -\dfrac{3}{5}$

(6). $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x - 1}{\sin 4x}$

解: 原式 $= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{4\cos^2 x \cos 4x} = -\dfrac{1}{2}$

(7). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(3^x\ln 3-2^x\ln 2)=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$

(8). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^2 x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{2\cos 2x}=-\frac{1}{4}$

(9). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(e^x+\cos x)=2$

(10). $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccot} x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{x+1}}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1+x^2}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=1$

(11). $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{5x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{5e^x+5}=\lim\limits_{x\to +\infty}=\dfrac{1}{5+\frac{5}{e^x}}=\frac{1}{5}$

(12). $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+\ln x}{x\ln x}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+\frac{1}{x}}{\ln x+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=+\infty$

(13). $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

解：$\because \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\tan \ln(\frac{1}{x})}$

又 $\because \lim\limits_{x\to 0^+} \tan x \ln(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-\ln x}{\cot x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

$\therefore$ 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\tan x \ln(\frac{1}{x})} = e^0 = 1$.

(14). $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

解：$\because \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\sin x \ln x}$.

又 $\because \lim\limits_{x\to 0^+} \sin x \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$.

$\therefore$ 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\sin x \ln x} = e^0 = 1$.

(15). $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x^2})^x$

解：$\because \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x^2})^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\cdot\ln(1+\frac{1}{x^2})}$

又 $\because \lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\ln(1+\frac{1}{x^2}) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{x^3}\cdot\frac{x^2}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}=\frac{2x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x+\frac{1}{x}} = 0$

$\therefore$ 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\cdot\ln(1+\frac{1}{x^2})} = e^0 = 1$.

(16). $\lim\limits_{x\to0}\frac{(e^{x^2}-1)\sin x^2}{x^2(1-\cos x)}$

解：原式 $= \frac{x^2\sin x^2}{x^2\cdot\frac{1}{2}x^2} = \lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\frac{4x\cos x^2}{2x} = 2$

(17). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x}=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}$

$=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=e\lim\limits_{x\to 0}-\frac{1}{2(1+x)}=-\frac{e}{2}$

(18). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{x}}{\tan x-x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-1-(e^{x}-1)}{\tan x-x}=\lim\limits_{x\to 0}1=1$

(19). $\lim\limits_{x\to1}\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$

解：$\because \lim\limits_{x\to1}\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}} = \lim\limits_{x\to1} e^{\tan\frac{\pi x}{2}\cdot\ln(\tan\frac{\pi}{4}x)}$.

又 $\because \lim\limits_{x\to1}\tan\frac{\pi}{2}x\cdot\ln(\tan\frac{\pi}{4}x) = \lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(\tan\frac{\pi}{4}x)}{\cot\frac{\pi}{2}x} = \lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}x}\cdot\frac{\frac{\pi}{4}}{\cos^2\frac{\pi}{4}x}}{-\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{2}x}}$

$= -\lim\limits_{x\to1}\sin\frac{\pi}{2}x = -1$

$\therefore$ 原式 $= \lim\limits_{x\to1} e^{\tan\frac{\pi x}{2}\cdot\ln(\tan\frac{\pi}{4}x)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

(20). $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$

解：$\because \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{\ln\frac{2}{\pi}\arccos x}{x}}$

又 $\because \lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{2}{\pi}\arccos x}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\frac{2}{\pi}\arccos x}\cdot\frac{-\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x\to0} -\frac{1}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2}{\pi}$.

$\therefore$ 原式 $= \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{\ln\frac{2}{\pi}\arccos x}{x}} = e^{-\frac{2}{\pi}}$.

(21). $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x \ln(1-x)$.

解：原式 $= \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x\ln^2 x}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln^2 x+2\ln x}{-1} = 0$

(22). $\lim\limits_{x\to 0} \left((1+x)^{\frac{1}{x}}/e \right)^{\frac{1}{x}}$.

解：原式 $= \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}/e]} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1]} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{2(1+x)}} = e^{-\frac{1}{2}}$.

(23). $\lim\limits_{x\to 0} (\cot x - \frac{1}{x})$

解：原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x-\sin x}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x-x\cos x}{2\cos x-x\sin x} = 0$

或 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\tan x}{x\tan x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\tan x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sec^2 x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2\sec^2 x\tan x}{2} = 0$.

(14). $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{m}(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x)\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a_1, a_2, \cdots, a_m>0)$

解：厚式 $=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m}}{x}}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{m}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}\cdot\frac{1}{m}(a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_m^x\ln a_m)$

$=\frac{1}{m}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_m)=\ln(a_1a_2\cdots a_m)^{\frac{1}{m}}$

$\therefore$ 厚式 $=e^{\ln(a_1a_2\cdots a_m)^{\frac{1}{m}}}=(a_1a_2\cdots a_m)^{\frac{1}{m}}$

3.说明不能用洛必达法则求下列极限.

(1). $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$

解：当 $x \to +\infty$ 时，$\left(\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}\right)' = \dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ 极限不存在.

故 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$ 不能用洛必达法则求极限.

(2). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

解：当 $x \to 0$ 时，$\left(\dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}\right)' = \dfrac{2x\sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$ 极限不存在.

故 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 不能用洛必达法则求极限.