习7.5

1. 证明 $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}-2(\cos x+x\sin x)$ 是 $y''-y=4x\sin x$ 的通解。

思路：代入即可

$$y''=C_1e^{x}+C_2e^{-x}-2\cos x+2x\sin x$$

$$\therefore y''-y=4x\sin x$$

代入即可得

(1) $y''-y'+y=0$;

特征方程：$\lambda^2-\lambda+1=0$

$\because \Delta<0$

求共轭复根

$\lambda_1=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$, $\lambda_2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore y=e^{\frac{x}{2}}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

(2) $y''+2y'-3y=0$;

特：$\lambda^2+2\lambda-3=0$

解：$\lambda_1=1$, $\lambda_2=-3$

$\therefore y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$

(3) $y''-8y'+16y=0$;

特：$\lambda^2-8\lambda+16=0$

解：$\lambda_1=\lambda_2=4$

$y=(C_1+C_2x)e^{4x}$

(4) $y''+y=0$

特：$\lambda^2+1=0$

$\Delta<0$

$\therefore \lambda_1=i, \lambda_2=-i$

$\therefore y=C_1\cos x+C_2\sin x$

(5) $y''-y=\cos x$;

对应齐次方程的特征方程为：

$\lambda^2-1=0$

$\lambda_1=1, \lambda_2=-1$

故对应齐次方程的通解：$Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$

又 $\because$ 0不是特征方程的根

故设方程的特解为 $y^*=Q_1\cos x+Q_2\sin x$，

Q_1, Q_2 为待定常数

代入 $y''-y=\cos x$；

解得 $Q_1=-\frac{1}{2}$，$Q_2=0$

$\therefore y^*=-\frac{1}{2}\cos x$

故通解：

$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x$

(6) $y''+4y'+4y=e^{-2x}$;

对应齐次方程的特征方程为

$\lambda^2+4\lambda+4=0$

$\lambda_1=\lambda_2=-2$

$\therefore$ 齐次方程通解 $Y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$

$\because$ -2 是特征方程的重根

$\therefore$ 设方程的特解 $y^*=x^2b_0e^{-2x}$

代入 $y''+4y'+4y=e^{-2x}$

解得 $b_0=\frac{1}{2}$

$\therefore$ $y^*=\frac{x^2}{2}e^{-2x}$

$\therefore$ 方程通解:

$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{x^2}{2}e^{-2x}$

(7) $y''+2y'+2y=2e^{-x}\sin x$;

特征方程: $\lambda^2+2\lambda+2=0$

$\therefore$ $\lambda_1=-1+i$, $\lambda_2=-1-i$

$\therefore$ 齐次的通解: $Y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

$\because$ $-1+i$ 是特征方程的根

$\therefore$ 设方程的特解: $y^*=xe^{-x}(Q_1\cos x+Q_2\sin x)$

代入 $y''+2y'+2y=2e^{-x}\sin x$

解: $Q_1=-1$, $Q_2=0$

$\therefore$ 通解:

$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)-xe^{-x}\cos x$

8) $y''-5y'+6y=x^2e^x-xe^{3x}$;

特征方程：$\lambda^2-5\lambda+6=0$

$\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$

∴齐次通解：$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

∵ 1不是方程解，3是解

设特解 $y^*=(b_0+b_1x+b_2x^2)e^x+x(b_3+b_4x)e^{3x}$

代入 $y''-5y'+6y=x^2e^x-xe^{3x}$

得：$b_0=\frac{7}{4}$, $b_1=\frac{3}{2}$, $b_2=\frac{1}{2}$, $b_3=-1$, $b_4=-\frac{1}{2}$

∴ 通解为：

(9) $x^2y''+4xy'+2y=0\ (x>0)$

设 $x=e^t$，则原方程转化为

$D(D-1)y+4Dy+2y=0$

$D^2+3Dy+2y=0$

特征方程：$\lambda^2+3\lambda+2=0$

$\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$

∴ $y=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$

$=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}$

(10) $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$

齐次方程：设 $x = e^t$，$t = \ln x$

$\therefore D(D-1)(D-2)y + D(D-1)y - 4Dy = 0$

特征方程：$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$

$\therefore Y = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3x^3$

设特解 $y^* = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$

代入 $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$

得 $b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 = -\frac{1}{2}, b_3 = b_4 = 0$

$\therefore y^* = -\frac{x^2}{2}$

$\therefore y = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3x^3 - \frac{x^2}{2}$

思路：先求齐次欧拉方程的通解，随后求特解

3、求下列微分方程的特解

(1) $y''+3y'+2y=\sin x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

∵特征方程 $\lambda^2+3\lambda+2=0$ 的根为

$\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$

∴对应齐次方程的通解

$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

∵ $0+i$ 不是特征方程的根

设方程的特解 $y^*=Q_1\cos x+Q_2\sin x$

代入 $y''+3y'+2y=\sin x$

解得 $Q_1=-\frac{3}{10}$ $Q_2=\frac{1}{10}$

∴通解

$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}-\frac{3}{10}\cos x+\frac{1}{10}\sin x$

代入 $y(0)=0$, $y'(0)=0$

$C_1=\frac{1}{2}$, $C_2=-\frac{1}{5}$

∴特解 $y=\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{5}e^{-2x}-\frac{3}{10}\cos x+\frac{1}{10}\sin x$

(2) $y''+2y'+2y=xe^{-x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

特征方程：$\lambda^2+2\lambda+2=0$

$\lambda_1=-1+i$, $\lambda_2=-1-i$

∴对应齐次方程通解

$Y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

∵ -1 不是特征方程的根

设方程的特解 $y^*=(b_0+b_1x)e^{-x}$

代入 $y''+2y'+2y=xe^{-x}$

解得 $b_0=0$ $b_1=1$

∴通解

$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+xe^{-x}$

代入 $y(0)=0$, $y'(0)=0$

$C_1=0$

$C_2=-1$

∴特解 $y=e^{-x}(x-\sin x)$

4.

$y=e^{-3x}+(1+\frac{x}{4})e^{x}$

设二阶常系数线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解为 $y=e^{-3x}+(1+\frac{x}{4})e^{x}$，试确定 a,b,c，并求通解

①代入特解 $y'=-3e^{-3x}+e^{x}+\frac{e^{x}+xe^{x}}{4}$，$y''=9e^{-3x}+\frac{3}{2}e^{x}+\frac{xe^{x}}{4}$

得：$9e^{-3x}+\frac{3}{2}e^{x}+\frac{xe^{x}}{4}+a(-3)e^{-3x}+\frac{5ae^{x}}{4}+\frac{axe^{x}}{4}+be^{-3x}+be^{x}+\frac{bxe^{x}}{4}=ce^{x}$

$$\begin{cases}9-3a+b=0\\ \frac{3}{2}+\frac{5}{4}a+b=c\\ \frac{1}{4}+\frac{a}{4}+\frac{b}{4}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-3\\ c=1\end{cases}$$

∴原方程为 $y''+2y'-3y=e^{x}$

特征方程：$\lambda^2+2\lambda-3=0$　　∴对应齐次方程的通解：

$\lambda_1=-3\ \ \lambda_2=1$　　$Y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$

∵1是特征方程的解

∴设特解 $y^*=xb_0e^{x}$

代入 $y''+2y'-3y=e^{x}$ 得 $b_0=\frac{1}{4}$

∴通解：$y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}+\frac{x}{4}e^{x}$

1.设放射性元素铀的衰变速度与当时未衰变的铀原子的含量M成正比。已知t=0时铀的含量为M_0，求在衰变过程中铀含量M与时间t的函数关系。

解:

衰变速度为$\frac{dM}{dt}$

∵与M成正比

∴ $\frac{dM}{dt}=-\lambda M$，$\lambda>0$（加“-”是因为M在减少）

利可分离变量求解:

$\frac{dM}{M}=-\lambda dt$

$\int\frac{dM}{M}=\int-\lambda dt$

$\ln M=-\lambda t+C$

$M=Ce^{-\lambda t}$

∵ $M|_{t=0}=M_0$

∴ $C=M_0$

∴ $M=M_0e^{-\lambda t}$

2.设有一个由电阻 $R=10\Omega$，电感 $L=2H$ 和电源电压 $E=20\sin 5t\ V$ 串联组成的电路.开关 S 合上后，电路中有电流.求电流 I 与时间 t 的关系.

(回路电压定律 $E=RI+LI'(t)$)

解：代入数值知

$$\cancel{20}\ I'(t)+5I(t)=10\sin 5t,\quad I(0)=0$$

一阶非齐次线性微分方程，套公式

通解：$I(t)=e^{-\int 5dt}\left[\int 10\sin 5t\, e^{\int 5dt}dt+C\right]=e^{-5t}\left[e^{5t}(\sin 5t-\cos 5t)+C\right]$.

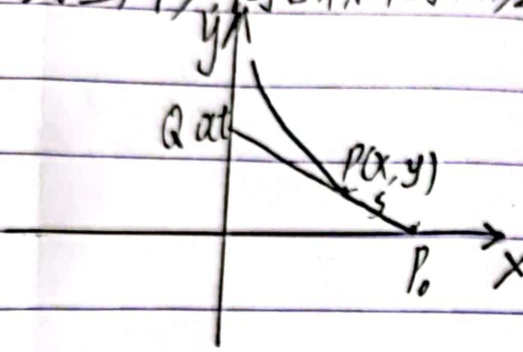
$\int 10\sin 5t\, e^{5t}dt$ 利用分部积分法来求

代入 $I(0)=0$，$C=1$

$\therefore I(t)=\sin 5t-\cos 5t+e^{-5t}$

$=e^{-5t}+\sqrt{2}\sin(5t-\frac{\pi}{4})$

3、位于点 $P_0(l,0)$ 的军舰向位于原点的目标发射制导鱼雷并始终对准目标。设目标始终以速度 a 沿 y 轴正方向运动，鱼雷的速度为 b，求鱼雷轨迹的曲线方程。若设 $l=1$ 海里，$b=5a$ 海里/秒，问目标行驶多远经多少时间将被击中？



设时刻 t，运动点 $P(x,y)$，

则 Q 的位置是 $(0,at)$

记 $s=\overset{\frown}{P_0P}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-at}{x-0}$，$\dfrac{ds}{dt}=-b$

而 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{dt}{ds}\cdot\dfrac{ds}{dx}=-\dfrac{1}{b}\sqrt{1+y'^2}$

连立 $x\dfrac{dy}{dx}=y-at \Rightarrow x\dfrac{d^2y}{dx^2}=-a\dfrac{dt}{dx}$

$$\begin{cases} y''=\dfrac{a}{bx}\sqrt{1+y'^2} \\ y|_{x=l}=0,\ y'|_{x=l}=0 \end{cases}$$

令 $y'=p$，并记 $k=\dfrac{a}{b}$，则

$\ln(p+\sqrt{1+p^2})=\ln x^k-\ln C_1^k$，

$p+\sqrt{1+p^2}=\left(\dfrac{x}{C_1}\right)^k$，

$\because y'(l)=p(l)=0 \Rightarrow C_1=l$

故 $p+\sqrt{1+p^2}=\left(\dfrac{x}{l}\right)^k$ ①

将式①取倒并将分子、分母同乘共轭因

得 $p-\sqrt{1+p^2}=-\left(\dfrac{x}{l}\right)^{-k}$. ②

联立①②

$\therefore p=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{x}{l}\right)^k-\left(\dfrac{x}{l}\right)^{-k}\right]$

$y=\dfrac{l}{2}\left[\dfrac{1}{1+k}\left(\dfrac{x}{l}\right)^{1+k}-\dfrac{1}{1-k}\left(\dfrac{x}{l}\right)^{1-k}\right]+C_2$

代入 $y(l)=0 \Rightarrow C_2=\dfrac{kl}{1-k^2}$

$\therefore y=\dfrac{l}{2}\left[\dfrac{1}{1+k}\left(\dfrac{x}{l}\right)^{1+k}+\dfrac{1}{k-1}\left(\dfrac{x}{l}\right)^{1-k}\right]+\dfrac{kl}{1-k^2}$

代入 $l=1$，$k=\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{5}$，$x=0$

$\therefore y=\dfrac{5}{24}$