习题 4.5

1. 求下列函数的凸性区间和拐点

(1) 解：令 y=f(x)，则 f'(x)=$3x^2-10x+3$

f"(x)=6x-10

可知 f(x)在（$-\infty$，$\frac{5}{3}$）上凸，在$\left(\frac{5}{3}，+\infty\right)$下凸

（$\frac{5}{3}$，$\frac{20}{27}$）为拐点

(2) 解：令 y=f(x)，则 f'(x)=$e^{-x}-xe^{-x}$

f"(x)= $-e^{-x}-\ -e^{-x}+\ xe^{-x}=\ e^{-x}$(x-2)

可知 f(x)在（$-\infty$，2）上凸，在$(2，+\infty)$下凸

（2，$\frac{2}{e^2}$）为拐点

(3)解：令 y=f(x)，则 f'(x)=$\frac{2x}{1+x^2}$

f"(x)=$\frac{2(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}$

可知 f(x)在（-1，1）上凸，在$(-\infty，-1)$和$(1,+\infty)$下凸

（-1，$ln2$） 和（1，ln2）为拐点

(4) 解：令 y=f(x)，则 f'(x)=1+cosx

f"(x)=-sinx

可知 f(x)在$(2k\pi，\pi+2k\pi)$下凸，在$(\pi+2k\pi，2k\pi)$上凸

（kπ，kπ）为拐点

2. 利用函数的凸性，证明下列不等式

(1)解：设 f(x)= e^x

∵f"(x)= e^x>0 ∴f(x)下凸（严格）

故 f($\frac{x_1+x_2}{2}$)<$\frac{1}{2}$(f(x_1)+f(x_2))

则$e^{\frac{x+y}{2}}<\frac{1}{2}(e^x+e^y)$

(2)解：设 f(x)= x^n, 则 f'(x)= ln nx^n

∵ f"(x)= $\ln^2$nx^n>0∴f(x)下凸（严格）

故 f($\frac{x+y}{2}$)<$\frac{1}{2}$(f(x)+f(y))

则$(\frac{x+y}{2})^n<\frac{1}{2}(x^n+y^n)$

3. 求下列函数的渐近线

(1) 解:$a_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$=0

$b_1 = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$=0

当 x→$-\infty$时同理

故渐近线为 y=0

(2)解:$a_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} (e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{x}) = 1$

$b_1 = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to +\infty} x(e^{\frac{2}{x}} - 1) + 1$

令 t=1/x, 则上式=$\lim_{t \to 0} \frac{e^{2t}-1}{t}$+1

用洛必达易得b_1=3，渐近线 1 为 y=x+3

$a_1 = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-1}{x} = 0, b = 1$

渐近线 2 为 y=1

（3）解：$a_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$=0

$b_1 = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$=+∞　故不存在

当$x \to +0^+$时，$f(x)$=−∞

故垂直渐近线为 x=0

（4）解：$a_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} (2 + \frac{artan\frac{x}{2}}{x})$ =2

$b_1 = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = \frac{\pi}{2}$

渐近线 1：y=2x+$\frac{\pi}{2}$

$a_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$=2

$b_2 = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = -\frac{\pi}{2}$

渐近线 2：y=2x$-\frac{\pi}{2}$

4、

（1）

证明：根据下凸函数定义

有 f(λx+(1−λ)y)<=λf(x)+(1−λ)f(y)成立

取 x=x_1, y=x_2, λ=λ_1, 1−λ=1−λ_1=λ_2

则 f($\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$)<=$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

(2)

证明：

将$\lambda_3 x_3+\lambda_2 x_2$合并为$\lambda_4 x_4$

两次使用（1）结论可得结果

（3）

令$\lambda_k \lambda_{k+1}=\lambda_{k、}, \frac{\lambda_k}{\lambda_{k、}} x_k+\frac{X_{k+1}}{\lambda_{k、}} x_{k+1}=x_{k、}$

则$x_{k、} \in (a, b)$, $\lambda_1+\lambda_2+\ldots.. \lambda_k+\lambda_{k、}=1$

易知x_1，x_2，x_{k-1}，$x_{k、}$是(a, b)内不全相等 k 个数

由归纳法假设有

$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots \lambda_{k、} x_{k、})<\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\ldots \lambda_{k、} f(x_{k、})$

因为$\frac{\lambda_k}{\lambda_{k、}}$，$\frac{\lambda_k+1}{\lambda_{k、}} \in R^+$，且$\frac{\lambda_k}{\lambda_{k、}}+\frac{\lambda_k+1}{\lambda_{k、}}=1$

故上式<=$\frac{x_k}{\lambda_{k、}} f(xk)+\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}$

因此 $f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k)<=\sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k x_k)$