习题 7.1

微分方程的阶：指方程中未知函数的最高阶导数的阶数

n 阶线性微分方程：方程$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$的左端为$y,y',\cdots,y^{(n)}$用一次多项式

1.

(1) $x^2y''-xy'+3y=\cos x$ 是二阶线性方程

(2) $x^2dx=y^3dy$

$x^2=y^3\frac{dy}{dx}$　　$y'^{y^3}=x^2$　为一阶非线性方程

(3) $(1+y^2)y'''+6(y'')^2+3y=0$ 为三阶非线性方程

(4) $y''+\sin(x+y)=\sin x$ 为二阶非线性方程

(5) $y^{(m)}+y''+y=0$　为 m 阶线性方程

(6) $y''+P(x)y'+q(x)y=g(x)$ 为二阶线性方程

2.

(1) $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$　$y'=\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+x\frac{1}{cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

$xy'=x^2+y^2+y$

$$xtan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{x^2}{cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=x^2+x^2tan^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+xtan(x+6)$$

$\frac{1}{cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=1+tan^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$\frac{1}{cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}-1=tan^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$\frac{sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=tan^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$tan^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=tan^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$　成立

(2) $y=5x^2+x$

$y'=10x+1$

$xy'=10x^2$　$2y+1=10x^2+2x+1$

$xy'\neq 2y+1$　不成立

(3) $y=C_1x+C_2x^2$

$y'=C_1+2C_2x$　$y''=2C_2$

$y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2y}{x^2}$

$= 2C_2 - \frac{2}{x}(C_1 + 2C_2 x) + \frac{2C_1 + 2C_2 x^2}{x^2}$

$= 2C_2 - 4C_2 - \frac{2C_1}{x} + \frac{2C_1}{x} + 2C_2$

$= 0$　成立

(4)　$y = x \quad y' = 1$

$xy' = y\left(1 + ln\frac{y}{x}\right)$

$x = x(1 + ln\,1)$

$x = x$　成立

3.

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \qquad y' = -\sin x\, C_1 + \cos x\, C_2$

$y'' = C_1 \cos x - C_2 \sin x$

$y'' + y = -C_1 \cdot \cos x - C_2 \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x = 0$

$\therefore y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ 是方程 $y'' + y = 0$ 的通解

$y|_{x=0} = 1 \Rightarrow C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1 = 1$

$y'|_{x=0} = 3 \Rightarrow -\sin 0\, C_1 + \cos 0\, C_2 = C_2 = 3$

$\therefore y = \cos x + 3 \sin x$

4.

(1)　$y' = x^2$

(2)　$(X - x) + y'(Y - y) = 0$

线段 PQ 被 y 轴平分$\Rightarrow x_{中点} = 0$

$Q(-x, 0)$

$P(x, y)$的法线斜率为$-\frac{1}{y'}$

$\frac{y}{x + x'} = -\frac{1}{y'}$

$yy' + 2x = 0$

(3) $\because$线段 MN 被点 P 平分

$\therefore M(2x, 0) \quad N(0, 2y)$

过点$P(x, y)$处的切线斜率为$k = \frac{0 - 2y}{2x - 0} = \frac{-y}{x} = y'$

$-y = xy' \Rightarrow xy' + y = 0$

$\begin{cases} xy' + y = 0 \\ y|_{x=1} = 2 \end{cases}$

习题 7.2

1.(1) $y' = e^{x-y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y}$

$\Rightarrow\ e^y\,dy = e^x\,dx$

两端积分：$e^y = e^x + c$ （c 为任意常数）

（2）$xy\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$

$xy\,dx = -\sqrt{1-x^2}\,dy$

$-\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{y}dy$

两端积分：$ln\,y = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)$

$= \sqrt{1-x^2} + c_1$

$\therefore y = e^{\sqrt{1-x^2}+C_1}$

$= e^{c_1} \cdot e^{\sqrt{1-x^2}}$

$= c \cdot e^{\sqrt{1-x^2}}$ （c 为任意常数）

(3) $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

两端积分：$arc\sin y = arcsin\,x + c$ （c 为任意常数）

（4）$e^x y\,dx + 2(e^x - 1)\,dy = 0$

$\frac{e^x}{e^x-1}dx = -\frac{2}{y}dy$

两端积分：$ln|e^x - 1| = -2\,ln|y| + c$

$ln|e^x - 1| + ln\,y^2 = c$

$\therefore\quad (e^x - 1)y^2 = c$ （c 为任意常数）

2.(1) $xy' = y\,ln\frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}ln\frac{y}{x}$

令$m=\frac{y}{x}$ ，则 $y=mx$ ，$\frac{dy}{dx}=m+x\frac{dm}{dx}$

$\therefore m+x\frac{dm}{dx}=m\ln m$

$\frac{dm}{m(\ln m-1)}=\frac{dx}{x}$

两端积分：$\ln|\ln m-1|=\ln x+\ln c_1$

$\therefore \ln m-1=cx$

$\ln\frac{y}{x}=cx+1$

$y=xe^{cx+1}$（c 为任意常数）

(2) $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx}=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$

令$m=\frac{y}{x}$ ，则 $y=mx$ ，$\frac{dy}{dx}=m+x\frac{dm}{dx}$

$m+x\frac{dm}{dx}=e^m+m$

$\frac{dm}{e^m}=\frac{dx}{x}$

两端积分：$\frac{1}{e^m}=\ln|x|+c$

$\therefore e^{-\frac{y}{x}}=\ln|x|+c$ （c 为任意常数）

（3）$xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$ $(x>0)$

同除x并移项$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}$

令$m=\frac{y}{x}$ ，则 $y=mx$ ，$\frac{dy}{dx}=m+x\frac{dm}{dx}$

$\therefore m+x\frac{dm}{dx}=m+\sqrt{m^2-1}$

$\frac{dm}{\sqrt{m^2-1}}=\frac{dx}{x}$

两端积分：$\ln\left|m+\sqrt{m^2-1}\right|=\ln|x+1|+\ln c_1$

$\therefore m+\sqrt{m^2-1}=cx$

$\frac{y}{x}\frac{+\sqrt{y^2-x^2}}{x}=cx$

$y=cx^2-\sqrt{y^2-x^2}$（c 为任意常数）

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+5}{2x-y+4}$

令$m=2x-y$ 则$y=2x-m$ $\frac{dy}{dx}=2-\frac{dm}{dx}$

$\therefore 2-\frac{dm}{dx}=1+\frac{9}{m-4}$

$\frac{m-4}{m-13}dm=dx$

两端积分：$\int\left(1+\frac{9}{m-13}\right)dm=x$

$\Rightarrow m+9\,ln|m-13|=x+c_1$

$\Rightarrow ln|m-13|=\frac{1}{9}(x-m+c_1)$

$\Rightarrow m-13=e^{\frac{x-m}{9}}\cdot e^{\frac{c_1}{9}}$

$\therefore 2x-y-13=ce^{\frac{y-x}{9}}$ (c 为任意常数)

(5) $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$

显然$\begin{matrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{matrix}$ =-3≠0

设$\begin{cases}x=X+s\\ y=Y+t\end{cases}$ 则$dx=dX,dy=dY$

解方程组：$\begin{cases}2s-t+1=0\\ s-2t+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}s=-\frac{1}{3}\\ t=\frac{1}{3}\end{cases}$

$\therefore$原方程可化为$\frac{dY}{dX}=\frac{2X-Y}{X-2Y}=\frac{2-\frac{Y}{X}}{1-\frac{2Y}{X}}$

设$m=\frac{Y}{X}$ $\therefore\frac{dY}{dX}=m+X\frac{dm}{dX}$

$\therefore m+x\frac{dm}{dx}=\frac{2-m}{1-2m}$

$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2m-1}{1-m+m^2}dm=\frac{dX}{X}$

$ln|1-m+m^2|=-2\,ln|X|+ln\,c$

$\Rightarrow 1-\frac{Y}{X}+\frac{Y^2}{X^2}=\frac{c}{X^2}$

$\Rightarrow X^2-XY+Y^2=c$

$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=c$

$x^2-xy+y^2+x-y=c$ (c 为任意常数)

(6)$y(1+x^2y^2)\,dx = x\,dy$

设$z=xy$ $\therefore \frac{dz}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$ ①

$\therefore y(1+z^2)\,dx = x\,dy$

$1+z^2 = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$

由①式可知: $\frac{dz}{y\,dx} = 1 + \frac{x\,dy}{y\,dx}$

$\Rightarrow \frac{x\,dz}{z\,dx} = 1 + \frac{x\,dy}{y\,dx}$

$\therefore 1+z^2 = \frac{x\,dz}{z\,dx} + 1$

$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z(1+z^2)}$

$4\,ln|x| = 2\,ln|z| - ln|z+z^2| + ln\,c$

$x^4 = \frac{z^2\cdot c}{2+z^2}$

$y = cx\sqrt{x^2y^2+2}$ (c 为任意常数)

3.(1) $xy' + y = cos\,x$

解: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{cos\,x}{x}$ ①

常数变易法: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$

$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$

积分: $ln|y| = -\,ln|x| + c_1$

$y = Cx$ $(c = \pm e^{c_1})$

$y = \frac{u}{x}$ ②

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x} - \frac{u}{x^2}$ ③

将②③带入①中 $\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x} - \frac{u}{x^2} + \frac{u}{x^2} = \frac{cos\,x}{x}$

$\Rightarrow du = \cos x\,dx$

积分 $u = sin\,x + c$

代入②中 通解为$y=(\sin x+c)\frac{1}{x}$ （c 为任意常数）

（2）$y'-\frac{2y}{x}=x^2\sin 3x$

解：$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=x^2\sin 3x$ ①

$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=0$

$\frac{dy}{y}=2\frac{dx}{x}$

积分:

$\ln|y|=2\ln|x|+c_1$

$y=cx^2(c=\pm e^{c_1})$

$y=ux^2$ ②

$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x^2+2ux$ ③

将②③代入①中

$\frac{du}{dx}x^2+2ux-2ux=x^2\sin 3x$

$\Rightarrow du=\sin 3x\,dx$

积分 $u=-\frac{1}{3}\cos 3x+c$

代入②中 通解 $y=\left(-\frac{1}{3}\cos 3x+c\right)x^2$ （c 为任意常数)

(3)$(y^2-6x)y'+2y=0$②

解 $\frac{dx}{dy}-\frac{3x}{y}=-\frac{y}{2}$ ①

$\frac{dx}{dy}=\frac{3x}{y}$

$\frac{dx}{x}=\frac{3\,dy}{y}$

积分 $\ln|x|=3\ln|y|+c_1$

$x=cy^3$ $(c=\pm e^{c_1})$

$x=uy^3$ ②

$\frac{dx}{dy}=\frac{du}{dy}y^3+3uy^2$ ③

将②③代入①中 $\frac{du}{dy}y^3+3uy^2-3uy^2=-\frac{y}{2}$

$\Rightarrow du=-\frac{1}{2y^2}dy$

积分 $u=\frac{1}{2y}+c$

代入②中 $x=\left(\frac{1}{2y}+c\right)y^3=cy^3+\frac{y^2}{2}$　　　　（c 为任意常数)

（4）$y'\cos x+y\sin x=1$

解: $\frac{dy}{dx}+y\tan x=\frac{1}{\cos x}$①

$\frac{dy}{dx}+y\tan x=0$

$\frac{dy}{y}=-\tan x\,dx$

积分 $\ln|y|=-\ln|\sec x|+c_1$

$y=c\cos x$　　　$(c=\pm e^{c_1})$

$y=u\cos x$ ②

$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cos x-u\sin x$③

将②③代入①中

$\frac{du}{dx}\cos x-u\sin x+n\sin x=\frac{1}{\cos x}$

$\Rightarrow\ du=\frac{1}{\cos^2 x}dx$

积分：$u=\tan x+c$

代入②通解：$y=(\tan x+c)\cos x=c\cos x+\sin x$　（c 为任意常数）

4（1）$y'+2\frac{y}{x}=x^2y^{\frac{4}{3}}$

解　　$y^{-\frac{4}{3}}\frac{dy}{dx}+2\frac{1}{x}\cdot y^{-\frac{1}{3}}=x^2$①

$z=y^{-\frac{1}{3}}$

$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{3}y^{-\frac{4}{3}}\frac{dy}{dx}$

代入①中

$\frac{dz}{dx}-\frac{2}{3}\frac{z}{x}=-\frac{1}{3}x^2$②

$\frac{dz}{dx}=\frac{2}{3}\frac{z}{x}$

$\frac{dz}{z}=\frac{2}{3}\frac{dx}{x}$

积分$\ln|z|=\frac{2}{3}\ln|x|+c_1$

$z=cx^{\frac{2}{3}}(c=\pm e^{c_1})$

$z=ux^{\frac{2}{3}}$③

$\frac{dz}{dx}=\frac{du}{dx}x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}ux^{-\frac{1}{3}}$④

将③④代入②中

$\frac{du}{dx}x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}ux^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}ux^{-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}x^{2}$

$\Rightarrow du=-\frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}}dx$

积分 $u=-\frac{1}{7}x^{\frac{7}{3}}+c$

代入③中$z=\left(-\frac{1}{7}x^{\frac{7}{3}}+c\right)x^{\frac{2}{e}}=-\frac{1}{7}x^{3}+cx^{\frac{2}{3}}$

$y=\left(-\frac{1}{7}x^{3}+cx\frac{2}{3}\right)^{-3}$ (c 为任意常数)

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy+x^{3}y^{3}}$

解 $\frac{dx}{dy}=xy+x^{3}y^{3}$

$\Rightarrow x^{-3}\frac{dx}{dy}-yx^{-2}=y^{3}$

$z=x^{-2}$

$\frac{dz}{dy}=-2x^{-3}\frac{dx}{dy}$

$\frac{dz}{dy}+2yz=-2y^{3}$ ①

$\frac{dz}{dy}+2yz=0$

$\frac{dz}{z}=-2y\,dy$

积分:$ln|z|=-y^{2}+c_{1}$

$z=ce^{-y^{2}}$

$z=ue^{-y^{2}}$②

$\frac{dz}{dy}=\frac{du}{dy}e^{-y^{2}}-2ue^{-y^{2}}y$③

将②③代入①中

$\frac{du}{dy}e^{-y^{2}}-2ue^{-y^{2}}y+2ue^{-y^{2}}y=-2y^{3}$

$\Rightarrow du=-2y^{3}e^{y^{2}}dy$

积分:$u=(1-y^{2})e^{y^{2}}+c$

代入②中:$z = 1 - y^2 + ce^{-y^2} = x^{-2}$

$\therefore -x^2 - y^2 + 1 + ce^{-y^2} = 0$（$c$ 为任意常数）

（3）$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1$

解: 设$x - y = z$,则$\frac{dz}{dx} = -\frac{dy}{dx} + 1$

代入原方程:$-\frac{dz}{dx} = \frac{1}{z}$

$$-z\,dz = dx$$

$$z^2 = -2(x - c_1)$$

$$(x-y)^2 = -2x + c$$（c 为任意常数）

（4）$(1 - xy + x^2y^2)\,dx + (x^3y - x^2)\,dy = 0$

解:令 $z = xy$，则$dz = x\,dy + y\,dx$

$\therefore dy = \frac{x\,dz - z\,dx}{x^2}$

$\therefore$代入原方程:$(1 - z + z^2)\,dx + x^2(z-1)\frac{x\,dz - z\,dx}{x} = 0$

$\Rightarrow (1 - z + z^2)\,dx + (z-1)x\,dz - (z-1)z\,dx = 0$

$\Rightarrow (z-1)x\,dz + dx = 0$

$\therefore (z-1)\,dz = -\frac{dx}{x}$

两端积分:$\frac{1}{2}z^2 - z = -\ln|x| + c$

$\therefore \ln|x| + \frac{1}{2}x^2y^2 - xy = c$（$c$ 为任意常数）

5（1）$y' + 3y = 8$，$y(0) = 2$

$\frac{dy}{dx} = 8 - 3y$

$\frac{dy}{8-3y} = dx$

两端积分：$-\frac{1}{3}\ln|8 - 3y| = x + c$

$\therefore 8 - 3y = ce^{-3x}$

代入$y(0) = 2$　$c = 2$

$\therefore$特解为：$y = \frac{8-2e^{-3x}}{3}$

（2）$xyy' = x^2 + y^2$，$y(1) = 1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

令$m=\frac{y}{x}$，则$y=mx$，$\frac{dy}{dx}=m+x\frac{dm}{dx}$

$$\therefore m+x\frac{dm}{dx}=m+\frac{1}{m}$$

$$m\,dm=\frac{dx}{x}$$

两端积分：$\frac{1}{2}m^2=ln|x|+ln\,c$

$$\therefore \frac{y^2}{x^2}=ln\,x^2+c$$

代入$y(1)=1\quad \therefore c=1$

$\therefore$特解为：$\frac{y^2}{x^2}=2\,ln\,x+1$

（3）$(y-x^2y)\,dy+x\,dx=0$，$y(\sqrt{2})=0$

$$\frac{x}{x^2-1}dx=y\,dy$$

两端积分：$ln|x^2-1|=y^2+c$

代入$y(\sqrt{2})=0\ \ \therefore c=0$

$$\therefore y^2=ln(x^2-1)$$

（4）$xy'=y+x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$，$y(1)=\frac{\pi}{4}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$$

令$m=\frac{y}{x}$，则$y=mx$,$\frac{dy}{dx}=m+x\frac{dy}{dx}$

$$\therefore m+x\frac{dm}{dx}=m+\cos^2 m$$

$$\frac{dm}{\cos^2 m}=\frac{dx}{x}$$

两端积分:$\tan m=ln|x|+c$

$$\tan\frac{y}{x}=ln|x|+c$$

代入$y(1)=\frac{\pi}{4}\ \ c=1$

$$\therefore \tan\frac{y}{x}=ln\,x+1$$

$e^x\left(c-2\left(xe^{-x}-\int e^{-x}\,dx\right)\right)$ （5） $y'-\frac{4xx}{x^2+1}=x\sqrt{y}$, $y(0)=0$

令$z=y^{\frac{1}{2}}$ ， $z'=\frac{1}{2\sqrt{y}}y'$

$\therefore z'-\frac{2x}{x^2+1}z=\frac{1}{2}x$

$z=e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx+c\right)$

$=\frac{1}{4}(x^2+1)(ln(x^2+1)+c)$

由$y(0)=0$ $\therefore c=0$

$\therefore$将$z=y^{\frac{1}{2}}$代入上式$y=\frac{1}{16}(x^2+1)^2\,ln^2(x^2+1)$

6、$\frac{dy}{dx}=2x+y$且$y(0)=0$

$y=e^{\int dx}\left(c+\int 2xe^{-x}\,dx\right)$

$=e^x\left(c-2\int x\,de^{-x}\right)$

$=e^x\left(c-2\left(xe^{-x}-\int e^{-x}\,dx\right)\right)$

$=e^x(c-2xe^{-x}-2e^{-x})$

$=ce^x-2x-2$

代入$y(0)=0$ $\therefore c=2$

$\therefore$所求曲线方程为$y=2e^x-2x-2$

7. 解: $y'+\frac{y}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\arcsin x}$

$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$

积分 $ln|y|=-ln|\arcsin x|+c_1$

$y=c\frac{1}{\arcsin x}$

$y=u\frac{1}{\arcsin x}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\frac{1}{\arcsin x}+u\frac{1}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2}$

$\frac{du}{dx}\frac{1}{\arcsin x}=\frac{1}{\arcsin x}$

$du=dx$

积分 $u = x + c$

$y = \frac{x+c}{\arcsin x}$

代入$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ $\frac{1}{2} + c = 0$

$c = -\frac{1}{2}$

$y = \frac{x - \frac{1}{2}}{\arcsin x}$

8、$\frac{dy(x)}{dx} = y(x) + e^x$

$y(x) = e^x(x + c)$

$y(0) = 1$

$\therefore c = 1$

$\therefore y(x) = e^x(x + 1)$

9、证（1）$\phi_1'(x) + P(x)\phi_1(x) = 0$

$\phi_2'(x) + P(x)\phi_2(x) = 0$

$\phi_1'(x) + \phi_2'(x) + P(x)[\phi_1(x) + \phi_2(x)] = 0$

$[\phi_1(x) + \phi_2(x)]' + P(x)[\phi_1(x) + \phi_2(x)] = 0$

故$\phi_1(x) + \phi_2(x)$ 为$y' + P(x)y = 0$的解

（2）同（1）

（3） $\phi_1'(x) + P(x)\phi_1(x) = 0$

$\psi_1'(x) + P(x)\psi_1(x) = Q(x)$

$[\phi_1'(x) + \psi_1'(x)] + P(x)[\phi_1(x) + \psi_1(x)] = Q(x)$

$[\phi_1(x) + \psi_1(x)]' + P(x)[\phi_1(x) + \psi_1(x)] = Q(x)$

故$\phi_1(x) + \psi_1(x)$为$y' + P(x)y = Q(x)$的解

习题 7.4

1.

(1)线性无关：$\because \dfrac{x^{-2}}{x^3}=x^{-5}$ (不是常数)

(2)线性无关：$\because \dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x$ (不是常数)

(3)线性无关：$\because \dfrac{e^x}{xe^x}=\dfrac{1}{x}$ (不是常数)

(4)线性相关：$\because \dfrac{0}{e^x}=0$ (为常数)

2.

解：证明$y_1=e^{-x}$和$y_2=e^{3x}$都是$y''-2y'-3y=0$（原题式子有误）的解，并求出该方程的通解。

$(y_1)'=-e^{-x}$ $(y_2)'=3e^{3x}$

$(y_1)''=e^{-x}$ $(y_2)''=9e^{3x}$

$y_1''-2y_1'-3y_1'=e^{-x}+2e^{-x}-3e^{-x}=0$(成立)

$y_2''-2y_2'-3y_2=9e^{3x}-6e^{3x}-3e^{3x}=0$(成立)

$\because$ 原式的特征方程为：$\lambda^2-2\lambda-3=0$

$\Rightarrow \lambda_1=3, \lambda_2=-1$

$\therefore$ 该方程的通解为$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$

3.

解：由题意知齐次方程通解为$Y=C_1x^2+C_2$

对于特征方程：$\lambda^2-\dfrac{1}{x}\lambda=0, \Delta=\dfrac{1}{x^2}>0$

令$f(x)=x$，由P_{229}页下面公式得：

$y = C_1x^2 + C_2 + \frac{x^3}{3}$

$\therefore$ 方程的通解为$C_1x^2 + C_2 + \frac{x^3}{3}$

4.

解：$y'' - y = 0$ 的特征方程为$\lambda^2 - 1 = 0$

解得：$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

$\therefore$ 齐次方程通解为$C_1e^x + C_2e^{-x}$

设特解$y^* = a\sin x + b\cos x$

$$(y^*)' = a\cos x - b\sin x$$

$$(y^*)'' = -a\sin x - b\cos x$$

代入非齐次方程得： $-a\sin x - b\cos x - a\sin x - b\cos x$

$= -2a\sin x - 2b\cos x = \cos x$

$\therefore \begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\therefore y^* = -\frac{1}{2}\cos x$

$\therefore$ 方程通解为$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x$

习题 7.5

1. 证明$\boldsymbol{y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2(\cos x + x\sin x)}$是$\boldsymbol{y'' - y = 4x\sin x}$的通解。

思路：代入即可

$y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2\cos x + 2x\sin x$

$\therefore y'' - y = 4x\sin x$

代入即可得

2. 求下列微分方程的通解

(1)$y'' - y' + y = 0;$

特征方程：$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

$\because \Delta < 0$

求共轭副根

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{2}i}{2}, \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore y = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

(2)$y'' + 2y' - 3y = 0;$

特：$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

解：$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$

$\therefore y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$

(3)$y'' - 8y'' + 16y = 0$

特：$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$

解：$\lambda_1 = \lambda_2 = 4$

$y = (C_1 + C_2 x)e^{4x}$

$(4) y'' + y = 0$

特：$\lambda^2 + 1 = 0$

$\Delta < 0$

$\therefore \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$

$\therefore y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$(5) y'' - y = \cos x$

对应齐次方程的特征方程为：

$\lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

故对应齐次方程的通解：$Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

又 $\because 0$ 不是特征方程的根

故设方程的特解为$y^* = Q_1 \cos x + Q_2 \sin x$

代入$y'' - y = \cos x$,

解得$Q_1 = -\dfrac{1}{2}, Q_2 = 0$

$\therefore y^* = -\dfrac{1}{2} \cos x$

故通解：

$y = C_1 e^x + C_2\, e^{-x} - \dfrac{1}{2}\ \cos x$

$(6) y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

对应齐次方程的特征方程为

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$\lambda_1=\lambda_2=-2$

$\therefore$ 齐次方程通解：$Y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$

$\because -2$ 是特征方程的重根

$\therefore$ 设方程的特解为$y^*=x^2b_0e^{-2x}$

代入$y''+4y'+4y=e^{-2x}$

解得$b_0=\dfrac{1}{2}$

$\therefore y^*=\dfrac{x^2}{2}e^{-2x}$

$\therefore$ 方程通解：

$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\dfrac{x^2}{2}e^{-2x}$

(7)$y''+2y'+2y=2e^{-x}\sin x$;

特征方程：$\lambda^2+2\lambda+2=0$

$\therefore \lambda_1=-1+i,\lambda_2=-1-i$

$\therefore$ 齐次的通解：$Y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

$\because -1+i$是特征方程的根

$\therefore$ 设方程的特解：$y^*=xe^{-x}(Q_1\cos x+Q_1\sin x)$

代入$y''+2y'+2y=2e^{-x}\sin x$

解：$Q_1=-1,\quad Q_2=0$

$\therefore$ 通解：$e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)-xe^{-x}\cos x$

(8)$y''-5y'+6y=x^2e^x-xe^{3x}$;

特征方程：$\lambda^2-5\lambda+6=0$

$\lambda_1=2,\lambda_2=3$

$\therefore$ 齐次通解：$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

设特解$y^*=(b_0+b_1x+b_2x^2)e^x+x(b_3+b_4x)e^{3x}$

代入$y''-5y'+6y=x^2e^x-xe^{3x}$

得$b_0=\frac{7}{4},b_1=\frac{3}{2},b_2=\frac{1}{2},b_3=1,b_4=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ 通解为：$y=C_1e^{2x}+C_2e^x+e^x\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}\right)-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)e^{3x}$

(9)$x^2y''+4xy'+2y=0(x>0)$

设$x=e^t$，则原方程转化为

$D(D-1)y+4Dy+2y=0$

$D^2+3Dy+2y=0$

特征方程：$\lambda^2+3\lambda+2=0$

$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$

$\therefore y=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$

$$=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x_2}$$

(10)$x^3y'''+x^2y''-4xy'=3x^2$

齐次方程：$x=e^t,t=ln\,x$

$\therefore D(D-1)(D-2)y+D(D-1)y-4Dy=0$

特征方程：$\lambda^3-2\lambda^2-2\lambda=0$

$\lambda_1=0,\lambda_2=-1,x_3=3$

$\therefore Y=C_1+\frac{C_2}{x}+C_3x^3$

设特解$y^*=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4$

代入$x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$

得$b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 = -\frac{1}{2}, b_3 = b_4 = 0$

$\therefore y^* = -\frac{x^2}{2}$

$\therefore y = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3x^3 - \frac{x^2}{2}$

思路：先求齐次欧拉方程的通解，随后求特解

3. 求下列微分方程的特解

(1) $\because y'' + 3y' + 2y = \sin x, y(0) = 0, y'(0) = 0$

$\because$ 特征方程$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ 的根为

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

$\therefore$ 对应齐次方程的通解$Y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$

$\because 0 + i$不是特征方程的根

设方程的特解$y^* = Q_1 \cos x + Q_2 \sin x$

代入$y'' + 3y' + 2y = \sin x$

解得$Q_1 = -\frac{3}{10}Q_2 = \frac{1}{10}$

$\therefore$ 通解$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$

$y(0) = 0, y'(0) = 0$

$C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = -\frac{1}{5}$

$\therefore$ 特解：$y = \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{5}e^{-2x} - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$

$(2) y'' + 2y' + 2y = xe^{x}, y(0) = 0, y'(0) = 0$

特征方程：$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i$

$\therefore$ 对应齐次方程通解$Y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

$\because -1$ 不是特征方程的根

设方程的特解$y^* = (b_0 + b_1 x)e^{-x}$

代入$y' + 2y' + 2y = xe^{-x}$

解得$b_0 = 0 \quad b_1 = 1$

$\therefore$ 通解：$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + xe^{-x}$

代入$y(0) = 0, y'(0) = 0$

$C_1 = 0$，$C_2 = -1$

$\therefore$ 特解$y = e^{-x}(x - \sin x)$

4. 设二阶常系数线性微分方程$y'' + ay' + by = Ce^{x}$的一个特解为$y = e^{3x} + \left(1 + \frac{x}{4}\right)e^{x}$，试确定 a, b, c ，并求通解。

①代入特解$y' = -3e^{-3x} + e^{x} + \dfrac{e^{x} + xe^{x}}{4}, y'' = 9e^{-3x} + \dfrac{3}{2}e^{x} + \dfrac{xe^{x}}{4}$

得：

$$9e^{-3x} + \frac{3}{2}e^{x} + \frac{xe^{x}}{4} + a(-3)e^{-3x} + \frac{5ae^{x}}{4} + \frac{axe^{x}}{4} + be^{-3x} + be^{x} + \frac{bxe^{x}}{4} = Ce^{x}$$

$$\begin{cases} 9 - 3a + b = 0 \\ \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{4}a + b = c \\ \dfrac{1}{4} + \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{4} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ 原方程为$y'' + 2y' - 3y = e^{x}$

特征方程：$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \quad \lambda_1 = -3 \lambda_2 = 1$

$\therefore$ 对应齐次方程的通解：$Y = C_1e^{-3x} + C_2e^{x}$

$\because$ 1 是特征方程的解

$\therefore$ 设特解$\mathrm{y}^{*} = \mathrm{x}b_0\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$

代入$y'' + 2y' - 3y = e^{x}$得$b_0 = \dfrac{1}{4}$

$\therefore$ 通解：$y = C_1e^{-3x} + C_2e^{x} + \dfrac{x}{4}e^{x}$

第 7 章复习题

1. 求下列微分方程的通解或在给定条件下的特解

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{y^4+1}$

$(y^4+1)dy=(x+1)dx$

$\int(y^4+1)dy=\int(x+1)dx$

$\frac{1}{2}x^2+x=\frac{1}{5}y^5+y+C$

(2) $\frac{1}{(y-1)^2+1}dy=dx$

$\int\frac{1}{(y-1)^2+1}dy=\int 1\,dx$

$arctan(y-1)=x+C$

$y-1=tan(x+C)$

(3) $\frac{1}{1+y}dy=\frac{1}{tan\,x}dx$

$\int\frac{1}{1+y}dy=\int\frac{1}{tan\,x}dx$

$ln|1+y|=ln|sin\,x|+C$

$1+y=\pm e^C\cdot sin\,x\quad(C\in R)$

$y=C_0\cdot sin\,x-1\quad(\pm C_0=e^C)$

(4) $x^2ydx-(1+x^2)(1-y^2)dy=0$

$\int\left(\frac{1}{y}-y\right)dy=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx\,(y\neq 0)$

$2\,ln|y|-y^2=2x-2\,arctan\,x+C$

当$y=0$时$x^2ydx-(1+x^2)(1-y^2)dy=0$成立。

$y=0$也是方程的解

(5) $\frac{dy}{dx}=sin\frac{x-y}{2}-sin\frac{x+y}{2}$

$=sin\frac{x}{2}cos\,x\frac{y}{2}-sin\frac{y}{2}cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}cos\frac{y}{2}-cos\frac{x}{2}sin\frac{y}{2}$

$=-2\,sin\frac{y}{2}cos\frac{x}{2}$

$\frac{1}{sin\frac{y}{2}}dy=(-2)\times cos\frac{x}{2}dx\left(sin\frac{y}{2}\neq 0\right)$

$2\,ln\left|tan\frac{y}{4}\right|=-4\,sin\frac{x}{2}+C$(通解)

当$sin\frac{y}{2}=0, y=2k\pi(k\in z)$时

$\frac{dy}{dx}=sin\frac{x-y}{2}-sin\frac{x+y}{2}$成立

$y=2k\pi(k\in z)$(通解)

(6)原方程可化为

$tan\,y\,dy=-tan\,x\,dx$

$-ln|cos\,y|=ln|cos\,x|+C$

$ln|cos\,y\cdot cos\,x|=-C(C\in R)$

$cos\,x\,cos\,y=C'(C'\in R)$

(7) $(1+e^x)y\cdot\frac{dy}{dx}=e^x$

$\int y\cdot dy=\int\frac{e^x}{1+e^x}dx$

$\frac{1}{2}y^2=ln(1+e^x)+C$(通解)

代入$y(0)=1\Rightarrow C=-ln\,2+\frac{1}{2}$

特解：$\frac{1}{2}y^2 = ln(1+e^x) - ln\,2 + \frac{1}{2}$

(8) $cot\,x\,dy = -\,cot\,y\,dx$

$$-\int tan\,y\,d\,y = \int tan\,x\,dx$$

$$-\,ln|cos\,y| = ln|cos\,x| + C$$

$cos\,x\,cos\,y = C'$(通解)

代入$y(0) = 0 \Rightarrow C = 1$

$cos\,y = \frac{1}{cos\,x} = sec\,x$ (特解)

(9) $\frac{1}{2}e^{x^2}dx^2 = (1-y^5)dy$

$$\int \frac{1}{2}e^{x^2}dx^2 = \int (1-y^5)d\,y$$

$y - \frac{1}{6}y^6 = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$(通解)

代入$y(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{6}y^6 - y = \frac{1}{2}$(特解)

(10) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y - y}{y+1}$

$$\frac{y(x^2-1)}{y+1} = \frac{dy}{dx}$$

$$\int (x^2-1)dx = \int \left(1+\frac{1}{y}\right)dy$$

$y + ln|y| = \frac{1}{3}x^3 - x + C$(通解)

代入$y(3)=-1\Rightarrow C=-7$

$$\frac{1}{3}x^3-x-y-ln|y|=7(\text{特解})$$

2.求下列微分方程的通解或在给定初值条件下的特解。

(1)设x是关于y的函数

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2},\frac{dx}{dy}=\frac{x}{2y}-\frac{y}{-x}$$

设$\frac{x}{y}=u$

则：$u+y\frac{du}{dy}=\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)$

$$\frac{1}{y}dy=\frac{2}{-u-\frac{1}{u}}du$$

$$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{2u}{-u^2-1}du$$

$$ln|y|+C=-ln(1+u^2)$$

$$\frac{1}{1+u^2}=Cy$$

代入$u=\frac{x}{y}\Rightarrow x^2+y^2=Cy$

(2)令$u=\frac{y}{x},\frac{dy}{dx}=u+\frac{du}{dx}\cdot x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^4+1}{\left(\frac{y}{3}\right)^3}$$

$$u+x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{2u^4+1}{u^3}$$

$$\frac{4}{x}dx=\frac{1}{u+u^3}du$$

对式子两边积分

$$4\,ln|x| + C = ln|u^4 + 1|$$

代入$u = \dfrac{y}{x}$

得：$y^4 = Cx^8 - x^4$

(3)令$u = \dfrac{y}{x}$

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1 + \sqrt{u}}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \left(-\frac{1}{u\sqrt{u}} - \frac{1}{u}\right)du$$

$$ln|x| + C = \frac{2}{\sqrt{u}} - ln\,u$$

代入$u = \dfrac{y}{x}$得：

$$ln|y| + C = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

(4)令$u = \dfrac{y}{x}$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1 + u^4 + 3u^2}{u}$$

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(u^2 + 1)^2}d(u^2 + 1)$$

对两边积分

$$ln|x| + C = -\frac{1}{1 + u^2} \times \frac{1}{2}$$

$$ln|x| + C = -\frac{x^2}{2(x^2 + y^2)}$$

(5)令$u=\frac{y}{x}$

$(1+u\cos u)dx=\cos u\,dy$

$\frac{1}{\cos u}+u=u+x\frac{du}{dx}$

$\int\frac{1}{x}dx=\int\cos u\,du$

$ln|x|+C=sin\frac{y}{x}$

(6)原方程可化为：

$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-1)-2(y+2)}{(y+2)-2(x-1)}$

令$m=y+2,n=x-1,u=\frac{m}{n}$

$\frac{dm}{dn}=\frac{dy}{dx}=\frac{n-2m}{m-2n}$

$\frac{dy}{dx}=u+(x-1)\frac{du}{dx}=\frac{n-2m}{m-2n}=\frac{1-2u}{u-2}$

整理得$\left(\frac{1}{x-1}\right)dx=\left[\frac{u-1}{1-u^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u+1}\right)\right]du$

对两边积分：

$ln|1-x|+C=\frac{1}{2}ln|u-1|-\frac{3}{2}ln|u+1|$

代入$u=\frac{m}{n}$得：

$(y-x+3)=C(y+x+1)^3$

(7)令$u=\frac{y}{x}$，原方程可化为：

$\frac{x^2+2xy-y^2}{x^2-2xy-y^2}=\frac{dy}{dx}$

$\frac{1+2u-u^2}{1-2u-u^2}=u+x\cdot\frac{du}{dx}$

$$\frac{1+u^2+u(u^2+1)}{1-2u-u^2}=x\frac{du}{dx}$$

$$\frac{1-2u-u^2}{1+u^2+u(u^2+1)}du=\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{(1-u)-u(1+u)}{(1+u^2)(1+u)}du=\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1+u^2-u-u^2}{(1+u^2)(1+u)}du-\frac{u}{1+u^2}du=\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{1+u}du-\frac{2u}{1+u^2}du=\frac{1}{x}dx$$

对等式两边积分：

$$ln|1+u|-ln|1+u^2|=ln|x|+C$$

代入$u=\frac{y}{x}$得：

$$\frac{y+x}{y^2+x^2}=C(\text{通解})$$

代入$y(1)=1\Rightarrow C=1$

$$\frac{y+x}{y^2+x^2}=1(\text{特解})$$

(8)令$u=\frac{y}{x}$

$$y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

$$y'=\frac{1}{u}+u$$

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}+u$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\int u\,du$$

$ln|x| + C = \frac{1}{2}u^2$

代入$y(1) = 1 \Rightarrow C = 2$

代入$u = \frac{y}{x}$：

特解：$x^2 \ln x^2 + 4x^2 = y^2$

3. 求一条曲线的方程，该曲线通过点（0,1）且曲线上任一点处的切线垂直于此点与原点的连线

设所求曲线为$y = y(t)$

由题：$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{y}{x} = -1$

$y(0) = +1$

$y\,dy \ = -x\,dx$

积分得：$x^2 + y^2 = C$

代入$y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$

$\therefore y^2 + x^2 = 1$

4. 在某池塘内养鱼，该池塘最多能养鱼 1000 尾。在第 t 个月，鱼数$\boldsymbol{y = y(t)}$是 t 的函数，其变化率与鱼数 y 及 1000-y 成正比。已知在池塘内放养鱼 100 尾，3 个月后池塘内有鱼 250 尾，求放养 t 月后池塘内鱼数$\boldsymbol{y(t)}$

由题意：$\frac{dy}{dt} = ky(1000 - y)$

$y^{-1}(1000 - y)^{-1}dy = kdt$

$\frac{1}{1000}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y - 1000}\right)dy = kdt$

积分得：$ln|y| - ln|1000-y| = 1000kt + C$

$$\frac{y}{1000-y} = Ce^{1000kt}$$

$y(0) = 100, y(3) = 250$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{9} \\ 1000k = \frac{ln\,3}{3} \end{cases}$$

$$\therefore y = \frac{1000 \cdot 3^{\frac{t}{3}}}{9 + 3^{\frac{t}{3}}}$$

5. 求下列微分方程的通解或给定初始条件下的特解

(1) $\frac{dy}{dx} = x(1+2y)$

$$\int \frac{1}{x^2 y}\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{1}{2}ln(1+2y) = \frac{1}{2}x^2 + C(C \in R)$$

$$1 + 2y = \pm e^{2c} \cdot e^{x^2}(\pm e^{2c} \in R)$$

$$y = \pm\frac{1}{2}e^{2c} \cdot e^{x^2} - \frac{1}{2}\left(\pm\frac{1}{2}e^{2c} \in R\right)$$

$$y = C_0\,e^{x^2} - \frac{1}{2}(C_0 \in R)$$

(2)当$y' + y = 0$ 解得：$y = Ce^{-x}$

由常数变易法：

$$y = C(x)e^{-x}$$

$$y' = C'(x)e^{-x} - e^{-x}C(x)$$

$$y' + y = sin\,x \Rightarrow C'(x) = e^{x}\,sin\,x$$

$C(x)=\int e^{x}\sin x\,dx=\frac{1}{2}\cdot e^{x}(\sin x-\cos x)+C$

两次分部积分，再解方程得方程通解为：

$y=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+Ce^{-x}$

(3)当$y^{2}-\frac{2}{x}y=0$ 解得：$y=Cx^{2}$

由常数变易法：$y'=C'(x)x^{2}+2x\cdot C(x)$

代入$y'-\frac{2}{x}y=\frac{2}{3}x^{4}$

$C'(x)=\frac{2}{3}x^{2}$

$C(x)=\frac{2}{9}x^{3}+C$

$y=\frac{2}{9}x^{5}+Cx^{2}\left(\text{通解}\right)$

(4)当$y'-\frac{3}{x^{2}},y=0$ 时

$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{x^{2}}y$

$y=Ce^{-\frac{3}{x}}$

$y=C(x)e^{-\frac{3}{x}}$

由常数变易法：

$y=C(x)e^{-\frac{3}{x}}$

$y'=C'(x)e^{-\frac{3}{x}}+C(x)e^{-\frac{3}{x}}$

代入$y'-\frac{3}{x^{2}},y=\frac{1}{3}x^{2}$

$$\Rightarrow C'(x)=\frac{1}{x^2}\times e^{\frac{3}{x}}$$

$$\int C'(x)=\int e^{\frac{3}{x}}d\frac{1}{x}\cdot(-1)$$

$$=-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{x}}+C$$

$$\therefore y=Ce^{-\frac{3}{x}}-\frac{1}{3}(\text{通解})$$

(5)当$y'+\frac{1}{x}\cdot y=0$ 时,解得：$y=\frac{c}{x}$

由常数变易法：$y=\frac{C(x)}{x}$

$$y'=\frac{C(x)\cdot x-C(x)}{x^2}$$

代入$y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$

$$C'(x)=\sin x$$

$$\therefore y=(-\cos x+C)\cdot\frac{1}{x}(\text{通解})$$

(6)将x看成关于y的函数

则：$y^3dx=(1-2xy^2)dy$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y^3}-\frac{2}{y}x$$

$$\frac{dx}{dy}+\frac{2}{y}\cdot x=\frac{1}{y^3}$$

当$x'+\frac{2}{y}x=0$ 时，解得$x=\frac{C}{y^2}$

令$x=\frac{C(y)}{y^2}$

$x' = \frac{C'(y)}{y^2} - \frac{2C(y)}{y^3}$

代入$x' + \frac{2}{y} \cdot x = \frac{1}{y^3}$

得$C'(y) = \frac{1}{y}$

$\therefore C(y) = ln|y| + C$

$\therefore x = (ln|y| + C) \cdot \frac{1}{y^2}$(通解)

(7)将方程改写为$\frac{dx}{dy} = x\cos y + \sin 2y$　即$\frac{dx}{dy} - \cos y \cdot x = \sin 2y$

故原方程的通解为：$x = e^{\int \cos y dy}\left[\int \sin 2y \cdot e^{-\int \cos y dy} dy + C\right]$

$$= e^{\sin y}\left[\int \sin 2y \cdot e^{-\sin y} dy + C\right]$$

$\because \int \sin 2y \cdot e^{-\sin y} dy = 2\int \sin y\, e^{-\sin y} d\sin y = -2\int \sin y\, de^{-\sin y}$

$= -2\sin y\, e^{-\sin y} + 2\int e^{-\sin y} d\sin y$

$= -2\sin y\, e^{-\sin y} - 2e^{-\sin y} + C$

$\therefore x = Ce^{\sin y} - 2(\sin y + 1)$.(其中$C$为任意常数)

(8)将原方程变形可得$\frac{dx}{dy} + \frac{1+y}{y}x = \frac{e^y}{y}$

所求通解为$x = e^{-\int \frac{xy}{y} dy}\left(C + \int \frac{e^y}{y} e^{\int \frac{1+y}{y} dy} dy\right)$

$= e^{-(\ln y + y)}\left(C + \int \frac{e^y}{y} e^{\ln y + y} dy\right)$

$= \frac{e^{-y}}{y}\left(C + \int e^{2y} dy\right) = \frac{e^{-y}}{y}\left(C + \frac{1}{2}e^{2y}\right)$

$=\frac{Ce^{-y}}{y}+\frac{e^{y}}{2y}$(其中$C$为任意常数)

(9)原式可写成$\frac{dy}{dx}-2yx=e^{x^2}\cos x$

其对应的齐次方程为$\frac{dy}{dx}-2xy=0$

变形为$\frac{dy}{y}=2xdx$

求得通解为$y=Ce^{x^2}$

令$y=C(x)e^{x^2}$，代入原式得

$2xe^{x^2}C(x)+e^{x^2}C'(x)-2xe^{x^2}C(x)=e^{x^2}\cos x$($C$为常数)

化简得$y=(\sin x+C)e^{x^2}$

即原式通解为$y=(\sin x+C)e^{x^2}$(其中C为任意常数)

(10)原式可写成$y^{-4}y'+\frac{1}{3}y^{-3}=\frac{1}{3}(1-2x)$

令$z=y^{-3}$，则$z'=-3y^{-4}y'$

原方程可化为$z'-z=1-2x$

$z=e\int dx\left[\int(1-2x)e^{-\int dx}dx+C\right]$

$=e^{x}\left[\int(1-2x)e^{-x}dx+C\right]$

$=e^{x}[(-2x-1)e^{-x}+C]$

$=-2x-1+Ce^{x}$(其中C为任意常数)

即$y^{-3}=-2x-1+Ce^{x}$为原方程通解

(11)$P(x)=-\tan x, Q(x)=\sec x$

于是所求通解为

$$y = e^{\int \tan x dx}\left(\int \sec x \cdot e^{-\int \tan x dx} dx + C\right)$$

$$= e^{-\ln \cos x}\left(\int \sec x \cdot e^{\ln \cos x} dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{\cos x}\left(\int \sec x \cdot \cos x\, dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{\cos x}(x + C)\left(\text{其中}C\text{为任意常数}\right)$$

将$y(0) = 0$ 代入，得$C = 0$

故原方程的特解为$y = \dfrac{x}{\cos x}$

(12)原方程对应的齐次方程为$y' + 2xy = 0$.

得其通解为$y = Ce^{-x^2}$(其中C为任意常数)

令$y = C(x)e^{-x^2}$,则$y' = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2}$

代入原方程得$C'(x) = 2e^{x^2}x^3$

两边同时积分得

$$C(x) = \int 2\, e^{x^2} x^3 dx = \int x^2 de^{x^2} = x^2 e^{x^2} - \int e^{x^2} dx^2$$

$= x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + C_0$(其中$C_0$为任意常数)

则原方程通解$y = x^2 - 1 + C_0 e^{-x^2}$

将$y_{(0)} = 1$ 代入得$C_0 = 2$.

故原方程对应的特解为$y = 2e^{-x^2} + x^2 - 1$

(13)$y' - \dfrac{y}{x} = 0$

将其化为$\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$,得到的通解$y = Cx$(其中$C$为任意常数)

设$y = C(x)x$.则$y' = C'(x)x + C(x)$

代入原方程得$C'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$

通过分部积分得$C(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}-C_0$

$y=C(x)x=\ln x+1-C_0x$(其中C_0为任意常数)

代入$y(1)=1$，得$C_0=0$

故原方程的特解为$y=\ln x+1$

(14)原方程可变形为$y'-\frac{1}{2x}y=\frac{-x^2}{2}$

$P(x)=-\frac{1}{2x},Q(x)=\frac{-x^2}{2}$,于是所求通解为

$$y=e^{\int\frac{1}{2x}dx}\left[\int\left(-\frac{x^2}{2}\right)\cdot e^{-\int\frac{1}{2x}dx}dx+C\right]$$

$$=e^{\frac{1}{2}\ln x}\left[\int\left(-\frac{x^2}{2}\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\ln x}dx+C\right]$$

$$=\sqrt{x}\left[\int\left(-\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{x}}dx+C\right]$$

$$=\sqrt{x}\left(-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5}+C\right)(\text{其中}C\text{为任意常数})$$

代入$y(1)=0$，得$C=\frac{1}{5}$

故原方程对应的特解为$y=\sqrt{x}\left(\frac{1-x^{\frac{5}{2}}}{5}\right)=\frac{\sqrt{x}-x^3}{5}$

6.解：由$\frac{dx}{dt}-2te^{-x}=0$得 $e^x dx=2tdt$

两边同时积分：$e^x=t^2+c$

将$x|_{t=0}$=0 待入：$c=1,\therefore e^x=t^2+1$

即：$x=\ln(1+t^2)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\ln(1+t^2)\cdot 2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)\ln(1+t^2)$$

7.解：(1)设细菌数量为y_t,时间为t，增长速度为$y|_{t-1}\cdot k$

则$y_1=y_0(k+1)$，$y_4=y_0(k+1)^4$

$$\frac{y_4}{y_1}=(1+k)^3=\frac{3000}{1000}=3$$

$$(1+k)^3=3$$

$\therefore$ $y_t=y_0(k+1)^t=y_1(k+1)^{t-1}=1000(k+1)^{t-1}=1000\cdot 3^{\frac{t-1}{3}}$

(2)当 t=0 时，$y_0=1000\cdot 3^{-\frac{1}{3}}\approx 693$

∴最初有 693 个细菌

8.解：由题设，飞机质量$m=9000kg$,着陆时的水平速度为$v_0=700km/h$,从飞机着陆开始计时，设t时刻飞机的滑行距离为$x(t)$，速度$v(t)$

由牛顿第二定律：$m\frac{dv}{dt}=-kv$

又∵$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$

联立上述等式可得：$dx=-\frac{m}{k}dv$

对$dx=-\frac{m}{k}dv$积分可得：$x(t)=-\frac{m}{k}v+c$，由于$v(0)=v_0$，$x_0=0$

$\therefore c=\frac{m}{k}v$

$\therefore x(t)=\frac{m}{k}((v_0-v(t))$

当$v(t) \to 0$，$x(t) = 1.05km$

$\therefore$飞机滑行最长距离为$1.05km$

9.（1）$y' = \frac{1}{3}e^{3x} - \cos x + c$

$y = \frac{1}{9}e^{3x} - \sin x + c_1 x + c_2$

（2）令$y' = p,\quad y'' = p'$

$p' - p - x = 0 \Rightarrow p' - p = x$

则$p = \left(\int x e^{\int -1dx} d x + c\right) e^{\int 1dx}$

$= [-(x+1)e^{-x} + c]e^{x}$

$= -(x+1) + ce^{x} = y'$

$\Rightarrow y = -\frac{x^2}{2} - x + c_1 e^{x} + c_2$

(3)令$y' = p, y'' = p'$

$(1+x^2)p' = 2xp = (1+x^2)\frac{dp}{dx}$

$\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2}dx$

$\ln p = \ln(1+x^2) + c$

$y' = p = c(1+x^2)$

$y = c_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + c_2$

（4）令$y' = p(y) \Rightarrow y'' = p', \frac{dy'}{dx} = p\frac{dp}{dy}$

原式$= yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0$

当$p = 0$时，$y = c$显然为方程解

$p \neq 0$时，$y\frac{dp}{dy} - p = 0 \Rightarrow p = c_1 y = \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{y} = c_1 dx \Rightarrow y = c_2 e^{c_1 x}$

（5）令$y' = p \quad y'' = \frac{dp}{dx}$

$\frac{dp}{dx}=p^2+1\Rightarrow\frac{dp}{p^2+1}=dx$

$\Rightarrow p=\tan(x+c_1)=y^{'}$

$\Rightarrow y=-\ln|\cos(x+c_1)|+c_2$

（6）令$p=y^{'}$， $y^{''}=p\frac{dp}{dy}$

原式$=p\frac{dp}{dy}+\frac{p^2}{1-y}=0\Rightarrow\frac{dp}{dy}=-\frac{p}{1-y}$

$\Rightarrow y^{'}=p=c_1(y-1),y\neq 1$

$\Rightarrow\quad y=1+c_2e^{c_1x}(c_2\neq 0)$

10.（1）

$\lambda^2+5\lambda+6=0\Rightarrow\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-3$

∴通解：$y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{-3x}$

（2）

$\lambda^2-4\lambda+4\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=2$

∴通解：$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}$

（3）

$$\lambda^2+8\lambda+25=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{36}}{2}=-4\pm 3\mathrm{i}$$

$\alpha=-4,\beta=3$

∴通解：$y=\mathrm{e}^{-4x}(c_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$

（4）

$$\lambda^2-3\lambda+4=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{7}\mathrm{i}}{2}$$

$$\alpha=\frac{3}{2},\beta=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

∴通解：$y = e^{\frac{3}{2}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$

（5）

$\lambda^2 + 4\lambda + 29 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm 5i$

$\alpha = -2, \beta = 5$

∴$y = e^{-2x}(c_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$

x=0，y=0⇒ $C_1 = 0$

$y' = C_2\left(-2e^{-2x} \sin 5x + 5\,e^{-2x} \cos 5x\right)$

x=0 , y'=15⇒ $C_2 = 3$

∴$y = 3e^{-2x} \sin 5x$

（6）

$4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$

$y = (c_1 x + c_2 x)e^{-\frac{1}{2}x}$

$y' = -\frac{1}{2}C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$

$\therefore y(0) = 2, y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 2, -\frac{1}{2}C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 2, C_2 = 1$

$\therefore y = 2e^{-\frac{1}{2}x} + xe^{-\frac{1}{2}x}$

11.(1)$\lambda^2 - \lambda$ -2=0

$\lambda_{1,\ 2} = 2, -1$

通解：$y=C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$　λ_0不是$\lambda^2 - \lambda$ -2=0 的根

∴ 特解$y^* = ax^2 + bx + c$

2a-2ax-b-2ax^2-2bx-2c=4x^2

a=-2　b=2　c=-3

$\therefore y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+2x-2x^2-3$

(2) $\lambda^2-\lambda-2=0$

$\lambda_{1,2}=2,-1$

通解：$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$

设特解：特解$y^*=axe^{2x}$

$4ae^{2x}+4axe^{2x}$-（$Ae^{2x}+2Axe^{2x}$）$-2axe^{2x}=e^{2x}$

$a=\frac{1}{3}$

解：$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+\frac{x}{3}e^{2x}$

(3) $\lambda^2-\lambda-2=0$

$\lambda_{1,2}=2,-1$

通解：$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$

$f(x)=\sin 2x=e^{ax}(A1\cos Bx+A2\sin bx)$

$a=0$ $B=2$

$\pm$ 2i 不为特征方程根

$k=0$

$y^*=Q1\cos 2x+Q2\sin 2x$ 将y^*带入原式

$2Q1-6Q2=1$

$6Q1+2Q2=0$

$Q1=\frac{1}{20}$ $Q2=-\frac{3}{20}$

解：$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{20}\cos 2x-\frac{3}{20}\sin 2x$

(4)$\lambda^2-6\lambda+9=0$

$\lambda_{1,2}=3,3$

通解：$y=(C_1+C_2x)e^x$

∵ $\lambda_0=0$ 不为特征方程根

∴ $y^*=ax^2+bx+c$

将y^*带入原式 $a=1\ \ b=2\ \ c=5$

解：$y=(C_1+C_2x)e^x+x^2+4x+5$

（5）解：特征方程为：λ2-6λ+9=0 ，解得λ1=λ2=3

则齐次方程通解为：y=(C1+C2x)e^{3x} ，本题α=1， β=1，1+i 不为特征方程的根，则设方程的一个特解为：y*=e^x(Acosx+Bsinx),

将 y*代入原式可得：$\begin{cases} A=\frac{3}{25} \\ B=-\frac{4}{25} \end{cases}$

解得：y=(C1+C2x)e^{3x}+（$\frac{3}{25}cosx-\frac{4}{25}sinx$）$e^x$

(6)解：另 x=e^2，则 t=lnx

D(D-1)y-2Dy+2y=t2-2t

(D2-3-+2)y=t2-2t

$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}$+2y= t2-2t

特征方程为：λ2-3λ+2=0，解得λ1=1， λ2=2

则齐次方程通解为：y=C1et+C2 e2t

设 y*=at^2 +bt+C，将 y*代入原式可得$\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{4}, \\ c=\frac{1}{4} \end{cases}$

解得：y= C1x+C2 x2+$\frac{1}{2}ln^2x\frac{1}{4}lnx+\frac{1}{4}$

(7)解：方程的特征方程为：λ2-4=0，解得λ1=2，λ2=-2

则齐次方程的通解为：y=C1e2x+C2 e-2x

λ0=0 不为特征方程的根，则设 y*=a,

代入原式可得-4a=4，a=-1.

y'(0)=0，可得 C1=C2=1

y(0)=0，可得 2C1-1=1，则 C1=C2=1

则原微分方程的特解为：y=e2x+C2 e-2x-1

(8)解：λ2-1=0，λ1=1，λ2=-1

齐次方程通解为：y= C1ex+C2 e-x，因λ0=0 为特征方程的单根，则

设 y*=（a x2+bx）ex,

代入原式得 4ax+2(a+b)=4x,解得$\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{4}, \end{cases}$

则方程的通解为：y=C1e^x+C2xe^{-x}+（x^2-x）e^x

将 y(0)=0，y'(0)=1 代入可得 C1=1，C2=-1

则原微分方程的特解为：y=(x2-2+1) e^x+e^{-x}

12.

$f(x)=c-\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$

$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\,dt$

$f''(x)=-\sin x-f(x)$

$f''(x)+f(x)=-\sin x$ ①

$f(0)=0$, $f'(0)=1$ ②

①的特征方程：$\lambda^2+1=0$ 解得$\lambda=\pm i$

∴对应的齐次方程通解：

$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$

∵特征方程有一对共轭复根

∴设方程特解 $y^*=x(a\cos x+b\sin x)$

将其带入②， 得：

$2b\cos x-(2a-1)\sin x=0$

带入 $x=0$，$x=\frac{\pi}{2}$ 解得：$a=\frac{1}{2}$， $b=0$

∴$f(x)=y^*+Y=\frac{x}{2}\cos x+C_1\cos x+C_2\sin x$

带入②解得： $f(x)=\frac{x}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$

13.

①$x\in(-\pi,0)$:

由题：$y=\frac{-x}{y}$

∴$ydy=-xdx\Rightarrow y^2=-x^2+c$

∵曲线过点（$\frac{-\pi}{\sqrt{2}}$，$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$），带入得：

$y=\sqrt{\pi^2-x^2}$

②$x\in[0,\pi)$:

该方程的特征方程解为$\lambda=\pm i$

∴通解 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$

∵$f(x)=-x=-xe^{\lambda_0 x}$，其中$\lambda_0 x=0$

∴$\lambda_0=0$

因为λ_0不是该特征方程的根（$\lambda=\pm i$），故可设

该方程特解 $y^*=ax+b$

带入原方程，得：$a=-1$， $b=0$

∴该方程通解 $y=Y+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x-x$

又∵当 $x=0$ 时，$y=\sqrt{\pi^2-0}=\pi$

∴$C_1\cos 0+C_2\sin 0-0=\pi \quad \Rightarrow \quad C_1=\pi$

∵y（x）在（$-\pi$，π）上为光滑曲线

则$y'_-(0)=y'_+(0)\Rightarrow C_2=1$

∴ $y(x)=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, -\pi<x<0\\ \pi\cos x+\sin x-x, 0\le x<\pi\end{cases}$