习题 3.4

1. 求下列函数的二阶导数

（1）$y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

解：$y' = 3x^2 + 4x + 3$

$y'' = 6x + 4$

（2）$y = x^4 \ln x$

解：$y' = 4x^3 \ln x + x^3$

$y'' = 12x^2 \ln x + 4x^2 + 3x^2$

$= 12x^2 \ln x + 7x^2$

（3）$y = \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}$

解：$y = x^2(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore y' = 2x(1+x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^2(1+x)^{-\frac{3}{2}}$

$$y'' = 2(1+x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot 2x(1+x)^{-\frac{3}{2}} - x(1+x)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^2(1+x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$= (1+x)^{-\frac{5}{2}}\left[2(1+x)^2 - x(1+x) - x(1+x) + \frac{3}{4}x^2\right]$$

$$= (1+x)^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{4}x^2 + 2x + 2\right)$$

（4）$y = \frac{\ln x}{x^2}$

解：$y = x^{-2} \ln x$

$\therefore y' = -2x^{-3} \ln x + x^{-3}$

$y'' = 6x^{-4} \ln x + (-2)x^{-4} - 3x^{-4}$

$= (6 \ln x - 5)x^{-4}$

（5）$y = \sin x^2$

解：$y' = \cos x^2 \cdot 2x$

$y'' = 2\cos x^2 + 2x(-\sin x^2 \cdot 2x)$

$= -4x^2 \sin x^2 + 2\cos x^2$

（6）$y = x^3 \cos\sqrt{x}$

解：$y' = 3x^2 \cos\sqrt{x} + x^3\left(-\sin\sqrt{x}\right)\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}$

$= 3x^2 \cos\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} \sin\sqrt{x}$

$y'' = 6x\cos\sqrt{x} + 3x^2\left(-\sin\sqrt{x}\right)\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}$

$-\left(\frac{5}{4}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}\cos\sqrt{x}\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}\right)$

$= 6x\cos\sqrt{x} - \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x} - \frac{5}{4}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^2\cos\sqrt{x}$

$= \left(6x - \frac{1}{4}x^2\right)\cos\sqrt{x} - \frac{11}{4}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x}$

（7）$y = x^2 e^{3x}$

解：$y' = 2xe^{3x} + x^2 \cdot 3e^{3x}$

$$y'' = 2e^{3x} + 2xe^{3x} \cdot 3 + 2x \cdot 3e^{3x} + 3x^2 \cdot 3e^{3x}$$

$$= e^{3x}(2 + 6x + 6x + 9x^2)$$

$$= (9x^2 + 12x + 2)e^{3x}$$

（8）$y = e^{-x^2} arcsin\, x$

解：$y' = -2xe^{-x^2} arcsin\, x + e^{-x^2} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y'' = -2xe^{-x^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2xe^{-x^2}(-2x)\, arcsin\, x - 2e^{-x^2} arcsin\, x$$

$$+ e^{-x^2}(-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} +$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-x^2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)$$

$$\therefore y'' = -2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} arcsin\, x - 2e^{-x^2} arcsin\, x$$

$$- 2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-x^2} + xe^{-x^2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= (4x^2 - 2)e^{-x^2} arcsin\, x - 4xe^{-x^2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$+ xe^{-x^2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

（9）$y = x^2 cos\, 3\, x$

解：$y' = 2x\, cos\, 3\, x + x^2(-sin\, 3\, x) \cdot 3$

$$y'' = 2\, cos\, 3\, x + 2x(-sin\, 3\, x) \cdot 3 + 6x(-sin\, 3\, x) - 3x^2 cos\, 3\, x \cdot 3$$

$$= 2\, cos\, 3\, x - 6x\, sin\, 3\, x - 6x\, sin\, 3\, x - 9x^2 cos\, 3\, x$$

$$= (2 - 9x^2)\, cos\, 3\, x - 12x\, sin\, 3\, x$$

（10）$y = x^2 ln\, x$

解：$y' = 2x\,ln\,x + x$

$y'' = 2\,ln\,x + 2 + 1$

$= 2\,ln\,x + 3$

2. 求下列函数的 n 阶导数

（1）$y = ln(x+1)$

解：$y' = \dfrac{1}{x+1}$ $\qquad y'' = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$

$y''' = \dfrac{2}{(1+x)^3}$ $\qquad y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$

（2）$y = sin^2(\omega x)$

解：$y = sin^2(\omega x) = \dfrac{1 - cos(2\omega x)}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}cos(2\omega x)$

$y^{(n)} = -2^{n-1}\omega^n\,cos\left(2\omega x + \dfrac{n}{2}\pi\right)$

（3） $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$

解：$y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$

又由：$\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}}$

$\therefore y^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{(x-2)^{n+1}} - (-1)^n \dfrac{n!}{(x-1)^{n+1}}.$

$= (-1)^n n!\left[(x-2)^{-(n+1)} - (x-1)^{-(n+1)}\right]$

（4）$y=cos^2(\omega x)$

解：$y=cos^2(\omega x)=\dfrac{1+cos(2\omega x)}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}cos(2\omega x)$

$y^{(n)}=2^{n-1}\omega^n cos\left(2\omega x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$

3. 求下列函数的高阶导数

（1）$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, 求$y^{(n)}, y^{(n+1)}$;

解: $y^{(n)}=n!\,a_0 \quad y^{(n+1)}=0$

（2）$y=x^2(1+x)^3(2+x)^4$, 求 $y^{(9)}, y^{(10)}$;

解: $y^{(9)}=9! \quad y^{(10)}=0$

（3）$y=x^2e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$;

解：$\because (x^2)'=2x \quad (x^2)''=2 \quad (x^3)'''=0$

由莱布尼茨公式可知：$y^{(n)}$

$$=C_{20}^0x^2(e^{2x})^{(20)}+C_{20}^1 2x(e^{2x})^{(19)}+C_{20}^2 2(e^{2x})^{(18)}$$

$y^{(n)}=2^{20}x^2e^{2x}+20\cdot 2^{20}xe^{2x}+\dfrac{20x19}{2}2^{19}e^{2x}$

$=2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)$

（4）$y=x\,ln\,x$，求$y^{(5)}$;

解：$\because (x)'=1 \quad (x)''=0 \quad (ln\,x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

$y^{(5)}=C_5^0x(ln\,x)^{(5)}+C_5^1(ln\,x)^{(4)}$

$=x\dfrac{4!}{x^5}+5\left(-\dfrac{3!}{x^4}\right)$

$=24x^{-4}-30x^{-4}=-6x^{-4}$

（5）$y(n)=\left(\sqrt{2}\right)^{n}e^{x}\sin\left(x+\frac{n}{4}\pi\right)$

当$n=1$ 时$y'=\sqrt{2}\cdot e^{x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\pi\right)$

$y(k)=\left(\sqrt{2}\right)^{k}e^{x}\sin\left(x+\frac{k}{4}x\right)$

$y^{(k+1)} \ =\left(y^{(k)}\right)'=\left(\sqrt{2}\right)^{k}e^{x}\left[\sin\left(x+\frac{k}{4}\pi\right)+\cos\left(x+\frac{k}{4}\pi\right)\right]$

$=\left(\sqrt{2}\right)^{k}e^{x}\cdot\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{k}{4}\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\left(\sqrt{2}\right)^{k+1}e^{x}\sin\left(x+\frac{k+1}{4}\pi\right)$

4. 求下列函数的二阶微分

（1）$y=\sin x$

解：$y''=-\sin x$

$\therefore d^{2}y=-\sin x\,dx^{2}$

（2）$y=xe^{x}$

解：$y'=e^{x}+xe^{x}$

$y''=e^{x}+e^{x}+xe^{x}=2e^{x}+xe^{x}$

$\therefore d^{2}y=(2e^{x}+xe^{x})dx^{2}$

（3）$y=x\ln x$

解：$y'=\ln x+1 \quad y''=\frac{1}{x}$

$\therefore dy^2 = \frac{1}{x} dx^2$

（4）$y = x \sin x$

解：$y' = \sin x + x \cos x$

$y'' = \cos x + \cos x - x \sin x$

$\therefore d^2y = (2\cos x - x \sin x)dx^2$

5. 设 x 为中间变量，求下列函数的二阶微分

（1）$y = \sin x\,, x = at + b$， 其中a，b为常数

解：$y = \sin(at + b)$　$y' = \cos(at + b) \cdot a$

$y'' = -a^2 \sin(at + b)$

$\therefore d^2y = -a^2 \sin(at + b)\, dt^2$

（2）$y = e^x, x = at^2 + bt + c$，其中 a、b、c 为常数

解：$y = e^{at^2+bt+c}$

$y' = (2at + b)e^{at^2+bt+c}$

$y'' = (2a)e^{at^2+bt+c} + (2at + b)^2 e^{at^2+bt+c}$

$= (4a^2t^2 + 4abt + b^2 + 2a)e^{at^2+bt+c}$

$\therefore d^2y = (4a^2t^2 + 4abt + b^2 + 2a)e^{at^2+bt+c} dx^2$