复习题3 11~18

11. 证函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处 n 阶可导，且 $f^{(n)}(0)=0$，其中 $n\in N$

解　当 $x\neq 0$ 时 $f'(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\left(\frac{2}{x^3}\right)$

又∵ $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{xe^{\frac{1}{x^2}}}=0$

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}\left(\frac{2}{x^3}\right)=0$

∴ $f'(0)=0$ 且 $f'(x)$ 在 $x=0$ 时连续

∴ $f'(x)=\begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$　　$f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=0$

$f''(x)=\begin{cases} \left(\frac{-6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$　（关于 $\frac{1}{x}$ 的6次多项式）

设 $f^{(n)}(x)=\begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$　~~（$P_n(\frac{1}{x})$ 是关于 $\frac{1}{x}$ 的3n次多项式）~~

则 $f^{(n+1)}(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\frac{\frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}}=0$

$(x\neq 0)$　$f^{(n+1)}(x)=\left(\frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}P'\left(\frac{1}{x}\right)\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$

显然 $P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)$ 是关于 $\frac{1}{x}$ 的 $3(n+1)$ 次多项式

∴ $f^{(n+1)}(x)=\begin{cases} P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

∴由上述数学归纳法可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 n 阶可导，且 $f^{(n)}(0)=0$

12. 设函数$\varphi(x)$在$x=a$处连续，在$x=a$某邻域内定义

$$f(x)=(x-a)\varphi(x),\quad g(x)=|x-a|\varphi(x)$$

<1> 证明：$f(x)$在点$x=a$可导，并求$f'(a)$；

<2> 在什么条件下，函数$g(x)$在点$x=a$可导？

解：<1> $\because \varphi(x)$在$x=a$处连续 $\therefore f(x)$在$x=a$处连续

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\varphi(a)=\varphi(a)$$

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\varphi(a)=\varphi(a)$$

$\therefore f(x)$在$x=a$处可导，且$f'(a)=\varphi(a)$.

<2> $$g'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{|x-a|\varphi(x)}{x-a}=\varphi(a)$$

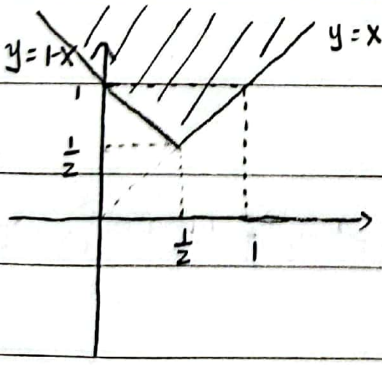
$$g'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{|x-a|\varphi(x)}{x-a}=-\varphi(a)$$

又$\because g(x)$在点$x=a$处可导 $\therefore g'_+(a)=g'_-(a)$

即 $\varphi(a)=0$.

13. 设$f(x)$为多项式函数，且当$x\in(-\infty,+\infty)$时，$f(x)\geqslant x$，$f(x)\geqslant 1-x$. 证明$f(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}$

解：



$\because f(x)$为多项式函数.

$\therefore f(x)$可导

由于$f(x)\geqslant x$ $\quad\therefore f(\frac{1}{2})\geqslant\frac{1}{2}$

假设$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore f(\frac{1}{2})$为极小值

由费马定理 $f'(\frac{1}{2})=0$ ①

当$x>\frac{1}{2}$时，$f(x)\geqslant x$ 则 $f'_+(\frac{1}{2})\geqslant 1$ 则与①矛盾

$\therefore f(\frac{1}{2})\neq\frac{1}{2}$ 故 $f(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}$

14. 设 $f(0)>0$，且 $f'(0)$ 存在，求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(\frac{1}{x})/f(0)\right)^x$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(\frac{1}{x})}{f(0)}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{f(\frac{1}{x})-f(0)}{f(0)}\right)^x$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{f(\frac{1}{x})-f(0)}{f(0)}\right)^{\frac{f(0)}{f(\frac{1}{x})-f(0)}\cdot x\cdot\frac{f(\frac{1}{x})-f(0)}{f(0)}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\frac{f(\frac{1}{x})-f(0)}{f(0)}}$ 令 $x=\frac{1}{t}$ $x\to\infty$，$t\to 0$

$\therefore\lim\limits_{x\to\infty}x\frac{f(\frac{1}{x})-f(0)}{f(0)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t\,f(0)}=f'(0)/f(0)$

$\therefore$ 原式 $=e^{f'(0)/f(0)}$

15、设当 $0\le x<1$ 时，$f(x)=x(1-x^2)$，且 $f(x+1)=af(x)$，试确定 a 的值，使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，并求 $f'(0)$.

解：$f(x)=-x^3+x$ $f(x+1)=-x^3-3x^2-2x=af(x)$ $x\in[-1,0)$

$f(x)$ 中 $x\in[0,1)$ $f(x+1)$ 中 $x\in[-1,0)$

$\therefore f(x)=\begin{cases}-x^3+x & x\in[0,1)\\ \frac{1}{a}(-x^3-3x^2-2x)\end{cases}$

$\because f(0)=0$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ $\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{1}{a}(-x^2-3x-2)=\frac{-2}{a}$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0+}-x^2+1=1$

又 $\because f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $\therefore f'_-(0)=f'_+(0)$ $\therefore a=-2$ $f'(0)=1$

16. 设$f(x)$具有任意阶导数，且$f'(x)=f^2(x)$，$f(0)=2$，求$f^{(n)}(0)$，其中$n\geq 2$

解：$\because f'(x)=f^2(x)$ $\therefore f'(0)=f^2(0)=4$

$f''(0)=(f^2(0))'=2f(x)f'(0)=2f^3(0)=2\times 2^3$

$f'''(0)=6f^4(0)=6\times 2^4$

设 $f^{(n)}(0)=n!\cdot 2^{n+1}=n!f(0)^{n+1}$

则 $f^{(n+1)}(0)=[n!f^{n+1}(0)]'=(n+1)!f^n(0)\cdot f^2(0)$

$=(n+1)!f(0)^{n+2}$

$\therefore$ 由数学归纳法可知 $f^{(n)}(0)=n!\cdot 2^{n+1}$

17. 设$f(x)$在$(0,+\infty)$内有定义，且对于任意的$x,y\in(0,+\infty)$，$f(xy)=f(x)+f(y)$，$f'(1)=a$。证明：$f'(x)=\frac{a}{x}$，$x\in(0,+\infty)$.

解：$\because f(xy)=f(x)+f(y)$ $\therefore f(x)=f(x)+f(1)$ $\therefore f(1)=0$

又$\because f(1)=f(x)+f(\frac{1}{x})=0$

$\therefore f(x)=-f(\frac{1}{x})$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(\frac{1}{x_0})}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+\frac{h}{x_0})}{h}$$

由洛必达可知 $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}f'(1+\frac{h}{x_0})\frac{1}{x_0}=\frac{f'(1)}{x_0}=\frac{a}{x_0}$

$\therefore f'(x)=\frac{a}{x}$ $x\in(0,+\infty)$

18. 设$f(x)$在$x=a$可导且$f(a)=0$. 试证明：$|f(x)|$在$x=a$可导的充要条件是$f'(a)=0$

解：①充分性：若$f(x)$在$x=a$可导且$f'(a)=0$, $f(a)=0$

则$|f(x)|$在$x=a$可导

$\because f(a)=0 \quad f'(a)=0 \quad \therefore \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=0$

$\therefore |f(a)|=0$

$$|f'_+(a)|=\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|}{x-a}=0$$

$$|f'_-(a)|=\lim_{x\to a^-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{|f(x)|}{x-a}=0$$

$\therefore |f(x)|$在$x=a$处可导且$|f(a)|'=0$

②必要性：若$|f(x)|$在$x=a$可导且$f(a)=0$

则$f'(a)=0$.

$\because |f(x)|$在$x=a$可导

$$\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|}{x-a}=-\lim_{x\to a-}\frac{|f(x)|}{x-a}$$

$\therefore \lim\limits_{x\to a}\frac{|f(x)|}{x-a}=0 \qquad \therefore f'(a)=0$