习题 6.5

1. （1）× $x=0$为奇点

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x}dx=ln|x|\Big|_{-1}^{0+\varepsilon}① + ln|x|\Big|_{0+\varepsilon}^{1}②$$ （ε → 0）

①→ $+\infty$ ②→ $-\infty$

①②左右两边极限均不存在，所以原式极限不存在（P189）

（2）× $x=0$为$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$奇点

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=-\left(\underbrace{\frac{1}{x}\Big|_{-\infty}^{0}}_{①}+\underbrace{\frac{1}{x}\Big|_{0}^{+\infty}}_{②}\right)$$

①→ $+\infty$ ②→ $-\infty$

左右两边极限不存在，原式极限不存在（P189 课本）

（3）× $\int sindx=-cosx$ 当$x\to\infty$时，$-cosx$无极限，发散

（4）× 反例：令$p=0$ $\int_{0}^{2}\frac{1}{1-x}dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{1-x}dx+\int_{1}^{2}\frac{1}{1-x}dx$

等式右侧两极限均不存在

（5）√ $\int\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}x^{1-p}$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_{0+\varepsilon}^{+\infty}$$ （ε → 0）

①$1-p<0$时，$x\to+\infty$时x^{1-p}为0，

$x\to 0$，$x^{1-p}\to+\infty$，发散

②$1-p>0$且$1-p<1$时 $x\to+\infty$，$x^{1-p}\to+\infty$，

$x\to 0$，$x^{1-p}\to 0$，发散

2. （1）$\int_{1}^{+\infty}\frac{lnx}{x^2}dx=\int_{1}^{+\infty}\frac{lnx-1}{x^2}dx+\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$

$$=-\frac{lnx}{x}\Big|_{1}^{+\infty}-\frac{1}{x}\Big|_{1}^{+\infty}$$

$$=-(0-0)-(0-1)=1$$

（2）$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=arcsinx\Big|_{0}^{1}=\frac{\pi}{2}$

（3）$\int_{0}^{1}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=2\int_{0}^{1}e^{\sqrt{x}}d\sqrt{x}=2e^{\sqrt{x}}\Big|_{0}^{1}=2(e-1)$

（4）$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|x|}dx=\int_{-\infty}^{0}e^{ax}dx+\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}dx$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{a}-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{a}e^{ax}-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a}e^{-ax}+\frac{1}{a}$$

↓ ↓

$= 0$ $\qquad = 0$

$= \frac{2}{a}$

3. （1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$ （配方）

$=\frac{4}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}dx$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}d\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty}$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

（2）$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}=\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)(x+2)}$

$=\frac{1}{3}\int_{2}^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$ （裂项）

$=\frac{1}{3}\left(ln|x-1|\Big|_{2}^{+\infty}-ln|x+2|\Big|_{2}^{+\infty}\right)$

$=\frac{2}{3}ln2$ （注：$\lim\limits_{x\to+\infty}ln|x-1|=\lim\limits_{x\to+\infty}ln|x+2|$）

（3）$\int_0^1 x^2lnxdx=\frac{1}{3}\int_0^1 lnxdx^3$

$=\frac{1}{3}\left(x^2lnx\big|_0^1-\int_0^1 x^3dlnx\right)$

$=\frac{1}{3}x^3\left(lnx-\frac{1}{3}\right)\Big|_0^1=-\frac{1}{9}$

（4）令$\sqrt{x}=t$

$\int_0^{+\infty}e^{-t}dt^2=\int_0^{+\infty}2t\cdot e^{-t}dt$

$=-2(1+t)e^{-t}\big|_0^{+\infty}$

$=-2\cdot(-1)=2$

（5）题目错误，原题应为：$\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$

令$\sqrt{x-1}=t,x=t^2+1$

原式$=\int_0^1(1+t^2)dt=\left(t+\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{8}{3}$

（6）$\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$

令$\sqrt{1-x}=t,\sqrt{x}=\sqrt{1-t^2}$

原式$=\int_0^1\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}d(1-t^2)$

$=2\int_0^1\sqrt{1-t^2}dt$

$=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

（令$f(t)=\sqrt{1-t^2}\Rightarrow f^2(t)+t^2=1$，$(x^2+y^2)=1$为圆方程而$\sqrt{1-t^2}\geq 0$，所以为半圆，那么从$-1$积到1的面积为$\frac{1}{2}\times\pi\times 1^2=\frac{\pi}{2}$）

（7）$\int_a^b\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx$

$(x-a)(b-x)=bx-x^2-ab+ax=-x^2+(a+b)x-ab$

$=-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ （这一步就是配方）

$=\frac{|b-a|}{2}\left[1-\left(\frac{x-\frac{a+b}{2}}{\frac{|a-b|}{2}}\right)^2\right]$

所以原式$=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{a+b}{2}}{\frac{|a-b|}{2}}\right)^2}}dx\cdot\frac{2}{|b-a|}$

令$\left(\frac{x-\frac{a+b}{2}}{\frac{|a-b|}{2}}\right)^2$为①，把①看成整体

发现$\frac{2}{|a-b|}dx=d\left(\frac{2}{b-a}x-\frac{a+b}{b-a}\right)$ （任意常数，根据整体配）

所以原式$\int_a^b\frac{1}{\sqrt{1-①^2}}d①$

$=arcsin①\big|_a^b$ $\qquad x=b\rightarrow ①=+1$

$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$ $\qquad x=a\rightarrow ①=-1$

注：3.（7）看似复杂，实则为对关于x的一元二次多项式配方，化成$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$或$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$，达到求积分的目的

（8）$\int_0^1(lnx)^2dx=x(lnx)^2\big|_0^1-\int_0^1 x\,d[(lnx)^2]$

$=x(lnx)^2\big|_0^1-2\int_0^1 lnxdx$

$=[(lnx)^2-2lnx+2]\big|_0^1=2$

4. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(lnx)^k}dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{(lnx)^k}dlnx$

令$lnx=m$

$\int_{ln2}^{+\infty}\frac{1}{m^k}dm=\frac{1}{1-k}\cdot m^{1-k}\big|_{ln2}^{+\infty}$

$=\lim\limits_{m\rightarrow+\infty}\frac{m^{1-k}}{1-k}\cdot\frac{(ln2)^{1-k}}{1-k}$ （$k\neq 1$时，该项为常值）

若收敛，则$1-k<0$，才能使$m^{1-k}\rightarrow 0,k>1$

5. （1）因为$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{x^2}{x^4-x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{x^2}}+\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{x^4}}}=1$

所以$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4-x^2+1}$收敛

注：用来判断敛散性的一种方法：极限审敛法（与书上不太相同）

1. 对于无穷限广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ ：$f(x)$在$[a,+\infty)$连续且非负

①若$\exists P>1,\lim\limits_{x\to+\infty}x^P f(x)=C<+\infty$,则$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$收敛

②若$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=d>0$（或$=+\infty$）则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散

2. 对于非负积分$\int_a^b f(x)dx,a$为瑕点，$f(x)$在$[a,b]$连续且非负

①若$\exists 0<q<1,\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)$存在，则$\int_a^b f(x)\,dx$收敛

②若$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)f(x)=d>0$（或$=+\infty$），则$\int_a^b f(x)dx$发散

（2）因为$x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}>x\cdot x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{5}{3}}$

所以$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}dx<\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}dx$

因为$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}dx$收敛（比较判别法）

所以$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}dx$收敛

（3）$\int_0^2\frac{dx}{lnx}$

$x=0,x=1$为可能瑕点

原式$=\int_0^1\frac{dx}{lnx}+\int_1^2\frac{dx}{lnx}$

主要上述两式任意一式不收敛，原式不收敛，否则收敛

$\int_1^2\frac{dx}{lnx}$ 利用极限审敛法

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{(x-1)}{lnx}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-1}{\underset{\substack{\downarrow\\ \text{等价无穷小}}}{x-1}}=1$存在极限

$\int_1^2\frac{dx}{lnx}$发散，所以原式发散

（4）$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{x^{n+1}}dx\le\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{x^n}dx$

$\int_0^{+\infty}x^{m+n}dx=\frac{1}{m-n+1}x^{m-n+1}\Big|_0^{+\infty}$

所以当$m-n+1<0$时，原式收敛，否则不收敛

（5）利用极限审敛法：

若$n=p>1, x^p \cdot \frac{arctanx}{x^p}=arctanx$

$x\to+\infty, arctanx\to\frac{\pi}{2}$存在极限为满足原式收敛的一个必要条件

另：$\lim\limits_{x\to0}(x-0)^q\cdot\frac{arctanx}{x^n}=\frac{arctanx}{x^{n-q}}$（0为可能奇点）

因为$n>1, n>q\big(q\in(0,1)\big)$

所以该极限为$\frac{0}{0}$型，用洛必达：

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{x^{n-q-1}}{n-q}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{n-q}{x^{n-q-1}}$

要使该极限存在，则$n-q-1\Rightarrow n<q+1$

所以$n<2$

综上，$1<n<2$时，原式收敛，否则不收敛

（6）用比较判别法的极限形式：

$\int_0^{+\infty}\frac{sin^2x}{x}dx\le\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}dx=lnx|_0^{+\infty}$

①　　　②

因为$\tau=1$ 所以①与②有相同的敛散性（P189~P191）

因为$lnx|_0^{+\infty}$极限不存在

所以原式发散

（8）因为$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{lnx}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x-1}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-1}{1+x}=-\frac{1}{2}$

所以只有$x=0$为$\int_0^1\frac{lnx}{1-x^2}dx$的可能奇点、瑕点

利用极限审敛法：

$\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-0)^q\cdot lnx}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{lnx}{x^{-q}-x^{2-q}}$属于$\frac{\infty}{\infty}$型

洛必达法则：$\exists q\in(0,1)$则$\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-q\cdot x^{-q-1}-\underset{\substack{\downarrow\\ q\in(0,1)\text{则该项为}0}}{(2-q)x^{1-q}}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-qx^{-q-1}}=-\frac{1}{q}x^q=0$

所以原式收敛

注：对于本题判断敛散性，用比较判别法和极限审敛法，若用极限审敛法，则找到所用瑕点，再去判断

6. （1）$\int_x^1\frac{cost}{t^2}dt\le\int_x^1\frac{1}{t^2}dt$

由等价无穷小$x\to0$时$1-cosx\sim\frac{1}{2}x^2$

所以$cost\sim1-\frac{1}{2}t^2$

所以$\int_x^1\frac{1-\frac{t^2}{2}}{t^2}dt=\int_x^1\frac{cost}{t^2}dt\le\int_x^1\frac{1}{t^2}dt$

由夹逼定理：$-\frac{3}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\le\int_x^1\frac{cost}{t^2}dt\le-1+\frac{1}{x}$（$x\to0$）

所以$\lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{cost}{t^2}dt = 1$

（2）$\int_0^x \sqrt{1+t^4}dt > \int_0^x \sqrt{t^4}dt = \int_0^x t^2dt = \frac{1}{3}t^3|_0^x$

因为$x \to \infty$

所以$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}t^3\Big|_0^x \to +\infty$

所以原式为$\frac{\infty}{\infty}$型，用洛必达法则

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+t^4}}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{3}$

7. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = -0-(-1)] = 1$收敛

所以$\int_1^{+\infty}\left[f^2(x)+\frac{1}{x^2}\right]dx$收敛

$f^2(x) \to a^2, \frac{1}{x^2} \to b^2$

因为$ab < \frac{1}{2}(a^2+b^2)$基本不等式

所以$\left|f(x)\cdot\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}\left[f^2(x)+\frac{1}{x^2}\right]$

所以$\frac{\left|\frac{f(x)}{x}\right|}{f^2(x)+\frac{1}{x^2}} < \frac{1}{2} = \tau$

由比较判别法$\tau \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$

又因为$\int_1^{+\infty}\left[f^2(x)+\frac{1}{x^2}\right]dx$收敛

所以$\int_1^{+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right|dx$收敛

即$\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$绝对收敛