7.4

1.解：(1). 线性无关. ∵ $\frac{x^{-2}}{x^3}=x^{-5}$ (不是常数).

(2). 线性无关. ∵ $\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$ (不是常数).

(3). 线性无关. ∵ $\frac{e^x}{xe^x}=\frac{1}{x}$ (不是常数).

(4). 线性相关. ∵ $\frac{0}{e^x}=0$ (为常数).

原题式子有误.

2. 解：证明 $y_1=e^{-x}$ 和 $y_2=e^{3x}$ 都是 $\boxed{y''-2y'-3y=0}$ 的解，并求出该方程的通解.

$(y_1)'=-e^{-x}$ $\qquad$ $(y_2)'=3e^{3x}$

$(y_1)''=e^{-x}$ $\qquad$ $(y_2)''=9e^{3x}$

$y_1''-2y_1'-3y_1=e^{-x}+2e^{-x}-3e^{-x}=0$ (成立). $\qquad$ $y_2''-2y_2'-3y_2=9e^{3x}-6e^{3x}-3e^{3x}=0$ (成立).

∵ 原式的特征方程为：$\lambda^2-2\lambda-3=0$

$$\Rightarrow \lambda_1=3, \lambda_2=-1$$

∴ 该方程的通解为 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$

3 解：由题意：齐次方程通解为：$Y=C_1x^2+C_2$

对于特征方程：$\lambda^2-\frac{1}{x}\lambda=0$，$\Delta=\frac{1}{x^2}>0$

~~[illegible]~~ 令 $f(x)=x$，由 P_{229} 页下面公式得：

$$y=C_1x^2+C_2+\frac{x^3}{3}$$

∴ 方程的通解为 $C_1x^2+C_2+\frac{x^3}{3}$.

扫描全能王 创建

4.解：$y''-y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-1=0$

解得 $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$

$\therefore$ 齐次方程通解为 $c_1e^x+c_2e^{-x}$

设特解 $y^*=a\sin x+b\cos x$

$(y^*)'=a\cos x-b\sin x$

$(y^*)''=-a\sin x-b\cos x$

代入非齐次方程得：$-a\sin x-b\cos x-a\sin x-b\cos x$

$=-2a\sin x-2b\cos x=\cos x$

$\therefore \begin{cases} a=0 \\ b=-\frac{1}{2}. \end{cases}$

$\therefore y^*=-\frac{1}{2}\cos x$

$\therefore$ 方程通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x$.

扫描全能王 创建