习题 7.6

1. 设放射性元素铀的衰变速度与当时未衰变的铀原子的含量 M 成正比。已知$t=0$时铀的含量为 M。求在衰变过程中铀含量 M 与时间t的函数关系。

解：衰变速度为$\frac{dM}{dt}$

因为与 M 成正比

所以$\frac{dM}{dt}=-\lambda M$,$\lambda>0$（加"$-$"是因为 M 在减少）

利用分离变量求解

$$\frac{dM}{M}=-\lambda dt$$

$$\int\frac{dM}{M}=\int-\lambda dt$$

$$lnM=-\lambda t+C$$

$$M=Ce^{-\lambda t}$$

因为$M|_{t=0}=M$

所以$C=M_0$

所以$M=M_0e^{-\lambda t}$

2. 设有一个由电阻$R=10\Omega$，电感$L=2H$和电源电压$E=20sin5tV$串联组成的电路。开关S合上后，电路中有电流通过。求电流I与时间t的关系。（$E=RI+L'(t)$）

解：代入数值知

$I'(t)+5I(t)=10sin5t$，$I(0)=0$

一阶非齐次线性微分方程，套公式

通解：$I(t)=e^{-\int 5dt}\left[\int 10sin5te^{\int 5dt}dt+C\right]=e^{-5t}[e^{5t}(sin5t-cos5t)+C]$

$\int 10sin5te^{5t}dt$ 利用分部积分法来求

代入$I(0)=0$，$C=1$

所以$I(t)=sin5t-cos5t+e^{-5t}$

3. 位于$P_0(l,0)$的军舰向位于原点的目标发射制导鱼雷并始终对准目标。设目标始终以速度a沿y轴正方向运动，鱼雷的速度为b，求鱼雷轨迹的曲线方程。若设$l=1$海里，$b=5a$海里/秒（1 海里=1.852 千米），问目标行驶多远经多少时间将被鱼雷击中？

解：设时刻t，动点$P(x,y)$

则Q的位置是$(0,at)$

记$S=\overset{\frown}{_{P_0P}}$

所以$\frac{dy}{dx}=\frac{y-at}{x-0}$,$\frac{ds}{dt}=b$

连立$x\frac{dy}{dx}=y-at\Rightarrow x\frac{d^2y}{dx^2}=-a\frac{dt}{dx}$

而$\frac{dt}{dx}=\frac{dt}{ds}\cdot\frac{ds}{dx}=-\frac{1}{b}\sqrt{1+y'^2}$

$$\begin{cases} y''=\frac{a}{bx}\sqrt{1+y'^2} \\ y|_{x=l}=0, y'|_{x=t}=0 \end{cases}$$

令$y'=P$，并记$k=\frac{a}{b}$，则

$ln\left(P+\sqrt{1+P^2}=lnx^k-lnC_1{}^k\right)$

$P+\sqrt{1+P^2}=\left(\frac{x}{C_1}\right)^k$

所以$y'(l)=P(l)=0\Rightarrow C_1=l$

故$P+\sqrt{1+P^2}=\left(\frac{x}{l}\right)^k$ ①

等式①取倒，并将分子、分母同乘共轭因

得$P-\sqrt{1-P^2}=-\left(\frac{x}{l}\right)^{-k}$ ②

联立①②

所以$P=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^k-\left(\frac{x}{l}\right)^{-k}\right]$

$$y=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+k}\left(\frac{x}{l}\right)^{1+k}-\frac{1}{1-k}\left(\frac{x}{l}\right)^{1-k}\right]+C_2$$

代入$y(l)=0\Rightarrow C_2=\frac{kl}{1-k^2}$

所以$y=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+k}\left(\frac{x}{l}\right)^{1+k}+\frac{1}{k-1}\left(\frac{x}{l}\right)^{1-k}\right]+\frac{kl}{1-k^2}$

代入$l=1, k=\frac{a}{b}=\frac{1}{5}, x=0$

所以$y=\frac{5}{24}$