习题 4.1

1. $f(1)=0. \quad f(-1)=0.$

   $f'(x)=3x^2-1$

   当 $\varepsilon=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时. $f'(x)=0. \therefore \varepsilon=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$

2. $f'(x)=\frac{1}{x}$

   当 $\varepsilon=\frac{1}{\ln 2}$ 时. $f'(\varepsilon)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\ln 2. \quad \therefore \varepsilon=\frac{1}{\ln 2}$

3. $\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{4x^3}{2x}=2x^2$

   当 $\varepsilon=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 时. $\frac{f'(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}=\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=5. \quad \therefore \varepsilon=\frac{\sqrt{10}}{2}.$

4. $f(x): \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$

   $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$

   $f_2(x): \quad \lim\limits_{x\to 0}f_2(x)=\infty\neq f(0)=1$

   极限值 $\neq$ 函数值 $\Longrightarrow$ 不连续.

   $f_3(x):$ 在 $[0,1]$ 上没有相等的两点.

5. 设 $F(x)=a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\frac{1}{3}a_2x^3+\cdots+\frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}$

   $F(0)=F(1)=0.$

   由罗尔中值定理可知.

   $F'(x)=f(x)=a_0+\frac{1}{2}a_1x+\cdots+\frac{1}{n+1}a_nx^n$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

6. (1) 令 $F(x)=\arcsin x+\arccos x$

   $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0.$

   由拉格朗日中值定理可知.

   $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 是常数. $F(0)=\frac{\pi}{2}$

   $\therefore \arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}, x\in[-1,1].$

   (2) 令 $F(x)=3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)$

   $F'(x)=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^2)^2}}=0.$

   由拉格朗日中值定理可知

   $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 内是常数. $F(0)=\pi.$

   $\therefore 3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi. \quad x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$

7. (1) 当 $x=y$ 时，等号显然成立. 设 $f(x)=\sin x.f'(x)=\cos x$. 由拉格朗日中值定理有.

$\frac{\sin x-\sin y}{x-y}=\cos\varepsilon$

$\because |\cos\varepsilon|\leq 1 \quad \therefore |\sin x-\sin y|\leq |x-y| \quad ,x,y\in R.$

(2) 当 $x=y$ 时，等号显然成立. 设 $f(x)=\arctan x.f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. 由拉格朗日中值定理有.

$\frac{\arctan x-\arctan y}{x-y}=\frac{1}{1+\varepsilon^2}.$

$\because \frac{1}{1+\varepsilon^2}\geqslant 1 \quad \therefore |\arctan x-\arctan y|\leqslant |x-y|.$

(3) $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$

$\Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}$

$f(x)=\ln x \quad (0<a\leq x\leq b).$

$f'(x)=\frac{1}{x}$

由拉格朗日中值定理, $\exists\varepsilon\in(a,b)$.

使得 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{\varepsilon}$

$\because \frac{1}{b}<\frac{1}{\varepsilon}<\frac{1}{a}.$

$\therefore \frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}$ 即 $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}.$

(4) 题目错误，改成 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$

设 $f(x)=x^n, \quad f'(x)=nx^{n-1}.$

由拉格朗日中值定理, $\exists\varepsilon\in(a,b)$.

$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(\varepsilon)$ 即 $a^n-b^n=n\varepsilon^{n-1}(a-b)$

$\therefore nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$

8. (1) $2x[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)\,f'(x).$

$\Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(x)}{2x}$

令 $g(x)=x^2. \quad g'(x)=2x\neq 0, \quad x\in(a,b).$

由柯西中值定理. $\exists\varepsilon\in(a,b)$

$\frac{f(b+f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ 即 $\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\varepsilon)}{2\varepsilon}$

$\therefore$ 在 (a,b) 内, $2x[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)\,f'(x)$ 至少存在一个实根.

(2) 证明：设 x_1, x_2 为 $f(x)=0$ 的两个相异的根.

设 $x_1<x_2$. 令 $F(x)=e^{\alpha x}f(x)$

$F'(x)=e^{\alpha x}(\alpha f(x)+f'(x))$

$F(x_1)=F(x_2)=0.$

由罗尔中值定理可知

$f'(x)+\alpha f(x)=0.$

(3) 题目错误，改成“使得 $f'(x)=-f(\varepsilon)\cot\varepsilon$”.

证明：令 $F(x)=\sin x f(x)$

$F'(x)=\sin x(f'(\varepsilon)+f(\varepsilon)\cot\varepsilon)$

$F(0)=F(\pi)=0.$

由罗尔中值定理可知

$f'(\varepsilon)+f(\varepsilon)\cot\varepsilon=0,$

即 $f'(\varepsilon)=-f(\varepsilon)\cot\varepsilon.$

9. 由拉格朗日中值定理有 $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(\varepsilon), \varepsilon\in(x_0, x_0+\Delta x).$

$\because f(x_0+\Delta)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x \qquad \therefore \varepsilon=x_0+\theta\Delta x.$

$\theta=\frac{\varepsilon-x_0}{\Delta x}. \therefore \lim\limits_{\Delta\to 0}\theta=\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{\varepsilon-x_0}{\Delta x}$

$\because f(x)=\frac{1}{x} \qquad \therefore f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{1}{x_0+\Delta}-\frac{1}{x_0}=\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x}=f'(\varepsilon)\Delta x$

$\therefore f'(\varepsilon=-\frac{1}{x_0(x_0+\Delta x)}. \quad f'(\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon^2} \qquad -\frac{1}{\varepsilon^2}=-\frac{1}{x_0(x_0+\Delta x)}$

$\varepsilon=\sqrt{x_0(x_0+\Delta x)}$ 代入 $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{\varepsilon-x_0}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0(x_0+\Delta x)}-x_0}{\Delta x}\overset{}{\underset{\text{洛必达}}{=\!=\!=}}\dfrac{x_0}{2\sqrt{x_0(x_0+\Delta x)}}=\dfrac{1}{2}.$

10. (1) 由拉格朗日中值定理可知, $\exists\varepsilon\in(x, x+1)$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$

令 $\varepsilon=x+\theta(x) \qquad \therefore \sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$

化简可得 $\theta(x)=\dfrac{1+2\sqrt{x(x+1)}-2x}{4}, x=0$ 时，$\theta(x)=\dfrac{1}{4}.$

$\because 2x<2\sqrt{x(x+1)}<(x+1) \qquad \therefore \theta(x)\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right).$

(2) 由 (1) 可知，$\theta(x)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}[\sqrt{x(x+1)}-x]$

$$\lim_{x\to 0^+} \theta(x) = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \theta(x) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} \lim_{x\to +\infty} \tfrac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x} = \tfrac{1}{2}.$$

习题 4.2

1. 对于 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$ 或 $-\infty$ 的情形，证明定理 4.2.1.

   证明：由于函数在 $x=x_0$ 处的值与 $x\to x_0^+$ 时的极限无关.

   因此可以补偿定义 $f(x_0)=g(x_0)=0$.

   这样，对任意的 $x\in(x_0,x_0+\delta)$, 函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在 $[x_0,x]$ 上满足柯西中值定理的所有条件，故存在 $\xi\in(x_0,x)$, 使得

   $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'\left(\frac{3}{3}\right)}{g'(\xi)}$

   注意到，当 $x\to x_0^+$ 时，$\xi\to x_0^+$, 故

   $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim\limits_{\xi\to x_0^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$

   即证对于 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$ 或 $-\infty$ 的情形，定理 4.2.1 依然成立.

2. (1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{m-1}}{x^n-1}(m>0,n>0)$.

   解：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{m\cdot x^{n-1}}{n\cdot x^{n-1}}=\frac{m}{n}$

   (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

   解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$

   (3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$.

   解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1=\cos x}{\cos^2 x}=2.$

   (4)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{x^2}-1}{\cos x-1}$

   解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}{-\cos x}=-2.$

   (5)$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$

   解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{\frac{5}{\cos^2 5x}}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{3\cos 3x\cdot\cos^2 5x}{5}=-\frac{3}{5}.$

   (6)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\sin 4x}$

   解：原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4\cos^2 x\cos 4x}=-\frac{1}{2}.$

   (7)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}$

   解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(3^x\ln 3-2^x\ln 2)=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}.$

   (8)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^2 x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{2\cos 2x}=-\frac{1}{4}$

(9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+\sin x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}(e^x+\cos x)=2$

(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$

解：原式 $==\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{x+1}}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=1$

(11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{5x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{5e^x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{5+\frac{5}{e^x}}=\frac{1}{5}$

(12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+\ln x}{x\ln x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\frac{1}{x}}{\ln x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=+\infty$

(13) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

解：$\because\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\tan\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$

又 $\because\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\ln x}{\cot x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x=0$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\tan x\ln\left(\frac{1}{x}\right)}=e^0=1.$

(14) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$ 解：$\because\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\sin x\ln x}.$

又 $\because\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to0}x=0.$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\sin x\ln x}=e^0=1.$

(15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

解: $\because\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{x^3}\cdot\frac{x^2}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}=\frac{2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x+\frac{1}{x}}=0$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=e^0=1.$

(16) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(e^{x^2}-1)\sin x^2}{x^2(1-\cos x)}$

解：原式 $=\frac{x^2\sin x^2}{x^2\cdot\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{4x\cos x^2}{2x}=2$

(17) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{x}-e}{x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}=e\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x}=e\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}$

$=e\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-1}{x^2}=e\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=e\lim\limits_{x\to0}-\frac{1}{2(1+x)}=-\frac{e}{2}$

(18) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\tan x}-e^{x}}{\tan x-x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}(x^{\tan x-x}-1)}{\tan x-x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}(\tan x-x)}{\tan x-x}=1$

(19) $\lim\limits_{x\to1}\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$

解：$\because\lim\limits_{x\to1}\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1}e^{\tan\frac{\pi x}{2}\cdot\ln\left(\tan\frac{\pi}{4}x\right)}$.

又 $\because\lim\limits_{x\to1}\tan\frac{\pi x}{2}\cdot\ln\left(\tan\frac{\pi}{4}x\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(\tan\frac{\pi}{4}x}{\cot\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}x}\cdot\frac{\frac{\pi}{4}}{\cos^2\frac{\pi}{4}x}}{-\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{2}x}}$

$=-\lim\limits_{x\to1}\sin\frac{\pi}{2}x=-1$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to1}e^{\tan\frac{\pi x}{2}\cdot\ln\left(\tan\frac{\pi}{4}x\right)}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

(20) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$

解：$\because\lim\limits_{x\to0}(\frac{\frac{2}{\pi}\arccos x^{\frac{1}{x}}}{)}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln\frac{2}{\pi}\arccos x}{x}}$

又 $\because\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{2}{\pi}\arccos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\frac{2}{\pi}\arccos x}\cdot\frac{-\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to0}-\frac{1}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}=-\frac{2}{\pi}$

$\because$ 原式 $=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln\frac{2}{\pi}\arccos x}{x}}=e^{-\frac{2}{\pi}}$

(21) $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x\ln^2 x}{1-x}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\ln^2 x+2\ln x}{-1}=0$

(22) $\lim\limits_{x\to0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}/e\right)^{\frac{1}{x}}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}/e]}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1]}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{-\frac{1}{2(1+x)}}=e^{-\frac{1}{2}}$

(23) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x-x\cos x}{2\cos x-x\sin x}=0$

或原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sec^2 x}{2x}=$
$\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sec^2 x\tan x}{2}=0$

(24) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{m}\left(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x\right)^{\frac{1}{x}}\right.\left(a_1,a_2,\ldots,a_m>0\right)$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m}}{x}}$

$\therefore\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{a_1x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{m}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}\cdot\frac{1}{m}\left(a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_m^x\ln a_m\right)$

$=\frac{1}{m}\left(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_m\right)=\ln\left(a_1a_2\cdots a_m\right)^{\frac{1}{m}}$

$\therefore$ 原式 $=e^{\ln\left(a_1a_2\cdots a_m\right)^{\frac{1}{m}}}=\left(a_1a_2\cdots a_m\right)^{\frac{1}{m}}$

3. 说明不能用洛必达法则求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$

解：当 $x\to+\infty$ 时，$\left(\frac{x+\sin x}{x-\sin x}\right)'=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$ 极限不存在.

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$ 不能用洛必达法则求极限.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

解：当 $x\to0$ 时，$\left(\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}\right)'=\frac{2x\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 极限不存在.

故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 不能用洛必达法则求极限.