

习题 6.5

1. (1) \times $x=0$ 为奇点

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{-1}^{0+\varepsilon} \textcircled{1} + \ln|x| \Big|_{0+\varepsilon}^1 \textcircled{2} \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

$$\textcircled{1} \rightarrow +\infty \quad \textcircled{2} \rightarrow -\infty$$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ 左右两边极限均不存在, 所以原式极限不存在 (P189 课本)

- (2) \times $x=0$ 为 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 奇点

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\left(\frac{1}{x} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{x} \Big|_0^{+\infty}\right)$$

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \rightarrow +\infty \quad \textcircled{2} \rightarrow -\infty$$

左右两边极限不存在, 原式极限不存在 (P189 课本)

- (3) \times $\int \sin x dx = -\cos x$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $-\cos x$ 无极限, 发散

- (4) \times 反例: 令 $p=0$ $\int_0^2 \frac{1}{1-x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1-x} dx + \int_1^2 \frac{1}{1-x} dx$

等式右侧两极限均不存在

- (5) \checkmark $\int \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} x^{1-p}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_{0+\varepsilon}^{+\infty} \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

$$\textcircled{1} 1-p < 0 \text{ 时, } x \rightarrow +\infty \text{ 时 } x^{1-p} \text{ 为 } 0,$$

$$x \rightarrow 0, x^{1-p} \rightarrow +\infty, \text{ 发散}$$

$$\textcircled{2} 1-p > 0 \text{ 且 } 1-p < 1 \text{ 时 } x \rightarrow +\infty, x^{1-p} \rightarrow +\infty,$$

$$x \rightarrow 0, x^{1-p} \rightarrow 0, \text{ 发散}$$

2. (1) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x - 1}{x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

$$= -\frac{\ln x}{x} \Big|_1^{+\infty} - \frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty}$$

$$= -(0-0) - (0-1) = 1$$

$$(2) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$(3) \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^1 e^{\sqrt{x}} d\sqrt{x} = 2e^{\sqrt{x}} \Big|_0^1 = 2(e-1)$$

$$(4) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} dx = \int_{-\infty}^0 e^{ax} dx + \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{a} e^{-ax} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{a} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{a} e^{ax} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} e^{-ax} + \frac{1}{a}$$

\downarrow

\downarrow

$$= 0 \quad = 0$$

$$= \frac{2}{a}$$

$$3. \quad (1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \quad (\text{配方})$$

$$= \frac{4}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1} d\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi$$

$$(2) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{1}{3} \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx \quad (\text{裂项})$$

$$= \frac{1}{3} (\ln|x-1| \Big|_2^{+\infty} - \ln|x+2| \Big|_2^{+\infty})$$

$$= \frac{2}{3} \ln 2 \quad (\text{注: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln|x-1| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln|x+2|)$$

$$(3) \int_0^1 x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \ln x dx^3$$

$$= \frac{1}{3} \left(x^2 \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 x^3 d \ln x \right)$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{9}$$

$$(4) \text{ 令 } \sqrt{x} = t$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt^2 = \int_0^{+\infty} 2t \cdot e^{-t} dt$$

$$= -2(1+t)e^{-t} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= -2 \cdot (-1) = 2$$

$$(5) \text{ 题目错误, 原题应为: } \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$\text{令 } \sqrt{x-1} = t, x = t^2 + 1$$

$$\text{原式} = \int_0^1 (1+t^2) dt = \left(t + \frac{t^3}{3}\right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3}$$

$$(6) \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$$

$$\text{令 } \sqrt{1-x} = t, \sqrt{x} = \sqrt{1-t^2}$$

$$\text{原式} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} d(1-t^2)$$

$$= 2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

$$= 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

(令 $f(t) = \sqrt{1-t^2} \Rightarrow f^2(t) + t^2 = 1$, $(x^2 + y^2) = 1$ 为圆方程而 $\sqrt{1-t^2} \geq 0$, 所以

为半圆, 那么从 -1 积到 1 的面积为 $\frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{2}$)

$$(7) \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx$$

$$(x-a)(b-x) = bx - x^2 - ab + ax = -x^2 + (a+b)x - ab$$

$$= -\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad (\text{这一步就是配方})$$

$$= \frac{|b-a|}{2} \left[1 - \left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{\frac{|a-b|}{2}} \right)^2 \right]$$

$$\text{所以原式} = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{\frac{|a-b|}{2}} \right)^2}} dx \cdot \frac{2}{|b-a|}$$

$$\text{令} \left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{\frac{|a-b|}{2}} \right)^2 \text{ 为} \textcircled{1}, \text{ 把} \textcircled{1} \text{ 看成整体}$$

$$\text{发现} \frac{2}{|a-b|} dx = d\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}\right) \quad (\text{任意常数, 根据整体配})$$

$$\text{所以原式} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1 - \textcircled{1}}} d\textcircled{1}$$

$$= \arcsin \textcircled{1} \Big|_a^b \quad x = b \rightarrow \textcircled{1} = +1$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \quad x = a \rightarrow \textcircled{1} = -1$$

注: 3. (7) 看似复杂, 实则为对关于 x 的一元二次多项式配方, 化成 $\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$ 或 $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$,

达到求积分的目的

$$(8) \int_0^1 (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 x d[(\ln x)^2]$$

$$= x(\ln x)^2 \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \ln x dx$$

$$= [(\ln x)^2 - 2\ln x + 2] \Big|_0^1 = 2$$

$$4. \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^k} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^k} d\ln x$$

$$\text{令} \ln x = m$$

$$\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{m^k} dm = \frac{1}{1-k} \cdot m^{1-k} \Big|_{\ln 2}^{+\infty}$$

$$= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m^{1-k}}{1-k} \cdot \frac{(\ln 2)^{1-k}}{1-k} \quad (k \neq 1 \text{ 时, 该项为常值})$$

若收敛, 则 $1-k < 0$, 才能使 $m^{1-k} \rightarrow 0, k > 1$

$$5. (1) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = 1$$

$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$

所以 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} dx$ 收敛

注：用来判断敛散性的一种方法：极限审敛法（与书上不太相同）

1. 对于无穷限广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$: $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 连续且非负

① 若 $\exists P > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^P f(x) = C < +\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛

② 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = d > 0$ (或 $= +\infty$) 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散

2. 对于非负积分 $\int_a^b f(x) dx$, a 为瑕点, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续且非负

① 若 $\exists 0 < q < 1, \lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)^q f(x)$ 存在, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛

② 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a) f(x) = d > 0$ (或 $= +\infty$), 则 $\int_a^b f(x) dx$ 发散

$$(2) \text{ 因为 } x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 1} > x \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{5}{3}}$$

$$\text{所以 } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}} dx < \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} dx$$

因为 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} dx$ 收敛（比较判别法）

$$\text{所以 } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}} dx \text{ 收敛}$$

$$(3) \int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$$

$x = 0, x = 1$ 为可能瑕点

$$\text{原式} = \int_0^1 \frac{dx}{\ln x} + \int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$$

主要上述两式任意一式不收敛, 原式不收敛, 否则收敛

$$\int_1^2 \frac{dx}{\ln x} \text{ 利用极限审敛法}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\underset{\downarrow}{x-1}} = 1 \text{ 存在极限}$$

等价无穷小

$$\int_1^2 \frac{dx}{\ln x} \text{ 发散, 所以原式发散}$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{x^{n+1}} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{x^n} dx$$

$$\int_0^{+\infty} x^{m+n} dx = \frac{1}{m-n+1} x^{m-n+1} \Big|_0^{+\infty}$$

所以当 $m - n + 1 < 0$ 时, 原式收敛, 否则不收敛

(5) 利用极限审敛法:

$$\text{若 } n = p > 1, x^p \cdot \frac{\arctan x}{x^p} = \arctan x$$

$x \rightarrow +\infty, \arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 存在极限为满足原式收敛的一个必要条件

$$\text{另: } \lim_{x \rightarrow 0} (x-0)^q \cdot \frac{\arctan x}{x^n} = \frac{\arctan x}{x^{n-q}} \quad (0 \text{ 为可能奇点})$$

因为 $n > 1, n > q (q \in (0,1))$

所以该极限为 $\frac{0}{0}$ 型, 用洛必达:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{x^{n-q-1}}{n-q}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n-q}{x^{n-q-1}}$$

要使该极限存在, 则 $n - q - 1 \Rightarrow n < q + 1$

所以 $n < 2$

综上, $1 < n < 2$ 时, 原式收敛, 否则不收敛

(6) 用比较判别法的极限形式:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_0^{+\infty}$$

① ②

因为 $\tau = 1$ 所以 ① 与 ② 有相同的敛散性 (课本 P189~P191)

因为 $\ln x \Big|_0^{+\infty}$ 极限不存在

所以原式发散

$$(8) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{1+x} = -\frac{1}{2}$$

所以只有 $x = 0$ 为 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ 的可能奇点、瑕点

利用极限审敛法:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-0)^q \cdot \ln x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-q} - x^{2-q}} \text{ 属于 } \frac{\infty}{\infty} \text{ 型}$$

$$\text{洛必达法则: } \exists q \in (0,1) \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\underset{\substack{\downarrow \\ q \in (0,1) \text{ 则该项为 } 0}}{-q \cdot x^{-q-1} - (2-q)x^{1-q}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-qx^{-q-1}} = -\frac{1}{q} x^q = 0$$

所以原式收敛

注: 对于本题判断敛散性, 用比较判别法和极限审敛法, 若用极限审敛法, 则找到所用瑕点, 再去判断

$$6. (1) \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt \leq \int_x^1 \frac{1}{t^2} dt$$

由等价无穷小 $x \rightarrow 0$ 时 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$

所以 $\cos t \sim 1 - \frac{1}{2} t^2$

$$\text{所以 } \int_x^1 \frac{1 - \frac{t^2}{2}}{t^2} dt = \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt \leq \int_x^1 \frac{1}{t^2} dt$$

$$\text{由夹逼定理: } -\frac{3}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \leq \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt \leq -1 + \frac{1}{x} \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\text{所以} \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt = 1$$

$$(2) \int_0^x \sqrt{1+t^4} dt > \int_0^x \sqrt{t^4} dt = \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^x$$

因为 $x \rightarrow +\infty$

$$\text{所以} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^x \rightarrow +\infty$$

所以原式为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+t^4}}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{3}$$

$$7. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = -0 - (-1) = 1 \text{ 收敛}$$

$$\text{所以} \int_1^{+\infty} \left[f^2(x) + \frac{1}{x^2} \right] dx \text{ 收敛}$$

$$f^2(x) \rightarrow a^2, \frac{1}{x^2} \rightarrow b^2$$

因为 $ab < \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ 基本不等式

$$\text{所以} \left| f(x) \cdot \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{2} \left[f^2(x) + \frac{1}{x^2} \right]$$

$$\text{所以} \frac{\left| \frac{f(x)}{x} \right|}{f^2(x) + \frac{1}{x^2}} < \frac{1}{2} = \tau$$

由比较判别法 $\tau \in (0, \frac{1}{2})$

$$\text{又因为} \int_1^{+\infty} \left[f^2(x) + \frac{1}{x^2} \right] dx \text{ 收敛}$$

$$\text{所以} \int_1^{+\infty} \left| \frac{f(x)}{x} \right| dx \text{ 收敛}$$

$$\text{即} \int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \text{ 绝对收敛}$$