习题 4.1

1. $f(1) = 0. \quad f(-1) = 0.$

   $f'(x) = 3x^2 - 1$

   当 $\varepsilon = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时. $f'(x) = 0. \therefore \varepsilon = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. $f'(x) = \frac{1}{x}$

   当 $\varepsilon = \frac{1}{\ln 2}$ 时. $f'(\varepsilon) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \ln 2. \quad \therefore \varepsilon = \frac{1}{\ln 2}$

3. $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{4x^3}{2x} = 2x^2$

   当 $\varepsilon = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 时. $\frac{f'(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = \frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = 5. \quad \therefore \varepsilon = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

4. $f(x): \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

   $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$

   $f_2(x): \quad \lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = \infty \neq f(0) = 1$

   极限值 $\neq$ 函数值 $\Longrightarrow$ 不连续.

   $f_3(x)$: 在 $[0,1]$ 上没有相等的两点.

5. 设 $F(x) = a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}$

   $F(0) = F(1) = 0.$

   由罗尔中值定理可知.

   $F'(x) = f(x) = a_0 + \frac{1}{2}a_1x + \cdots + \frac{1}{n+1}a_nx^n$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

6. (1) 令 $F(x) = \arcsin x + \arccos x$

   $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$

   由拉格朗日中值定理可知.

   $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 是常数. $F(0) = \frac{\pi}{2}$

   $\therefore \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1,1].$

   (2) 令 $F(x) = 3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3)$

   $F'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^2)^2}} = 0.$

   由拉格朗日中值定理可知

   $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 内是常数. $F(0) = \pi$.

   $\therefore 3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi. \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$

7. (1) 当 $x=y$ 时，等号显然成立. 设 $f(x)=\sin x.f'(x)=\cos x$. 由拉格朗日中值定理有.

$\frac{\sin x-\sin y}{x-y}=\cos\varepsilon$

$\because |\cos\varepsilon|\leq 1 \quad \therefore |\sin x-\sin y|\leq|x-y| \quad ,x,y\in R.$

(2) 当 $x=y$ 时，等号显然成立. 设 $f(x)=\arctan x.f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. 由拉格朗日中值定理有.

$\frac{\arctan x-\arctan y}{x-y}=\frac{1}{1+\varepsilon^2}.$

$\because \frac{1}{1+\varepsilon^2}\geqslant 1 \quad \therefore |\arctan x-\arctan y|\leqslant|x-y|.$

(3) $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$

$\Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}$

$f(x)=\ln x \quad (0<a\leq x\leq b).$

$f'(x)=\frac{1}{x}$

由拉格朗日中值定理, $\exists\varepsilon\in(a,b)$.

使得 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{\varepsilon}$

$\because \frac{1}{b}<\frac{1}{\varepsilon}<\frac{1}{a}.$

$\therefore \frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}$ 即 $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}.$

(4) 题目错误，改成 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$

设 $f(x)=x^n, \quad f'(x)=nx^{n-1}.$

由拉格朗日中值定理, $\exists\varepsilon\in(a,b)$.

$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(\varepsilon)$ 即 $a^n-b^n=n\varepsilon^{n-1}(a-b)$

$\therefore nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$

8. (1) $2x[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)\,f'(x).$

$\Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(x)}{2x}$

令 $g(x)=x^2. \quad g'(x)=2x\neq 0, \quad x\in(a,b).$

由柯西中值定理. $\exists\varepsilon\in(a,b)$

$\frac{f(b+f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ 即 $\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\varepsilon)}{2\varepsilon}$

$\therefore$ 在 (a,b) 内, $2x[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)\,f'(x)$ 至少存在一个实根.

(2) 证明：设 x_1, x_2 为 $f(x)=0$ 的两个相异的根.

设 $x_1 < x_2$. 令 $F(x)=e^{\alpha x}f(x)$

$F'(x)=e^{\alpha x}(\alpha f(x)+f'(x))$

$F(x_1)=F(x_2)=0.$

由罗尔中值定理可知

$f'(x)+\alpha f(x)=0.$

(3) 题目错误，改成“使得 $f'(x)=-f(\varepsilon)\cot\varepsilon$”.

证明：令 $F(x)=\sin x f(x)$

$F'(x)=\sin x(f'(\varepsilon)+f(\varepsilon)\cot\varepsilon)$

$F(0)=F(\pi)=0.$

由罗尔中值定理可知

$f'(\varepsilon)+f(\varepsilon)\cot\varepsilon=0,$

即 $f'(\varepsilon)=-f(\varepsilon)\cot\varepsilon.$

9. 由拉格朗日中值定理有 $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(\varepsilon), \varepsilon\in(x_0, x_0+\Delta x).$

$\because f(x_0+\Delta)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x \qquad \therefore \varepsilon=x_0+\theta\Delta x.$

$\theta=\frac{\varepsilon-x_0}{\Delta x}. \therefore \lim\limits_{\Delta\to 0}\theta=\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{\varepsilon-x_0}{\Delta x}$

$\because f(x)=\frac{1}{x} \qquad \therefore f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{1}{x_0+\Delta}-\frac{1}{x_0}=\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x}=f'(\varepsilon)\Delta x$

$\therefore f'(\varepsilon=-\frac{1}{x_0(x_0+\Delta x)}. \quad f'(\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon^2} \qquad -\frac{1}{\varepsilon^2}=-\frac{1}{x_0(x_0+\Delta x)}$

$\varepsilon=\sqrt{x_0(x_0+\Delta x)}$ 代入 $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{\varepsilon-x_0}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0(x_0+\Delta x)}-x_0}{\Delta x}\xlongequal[\text{洛必达}]{}\dfrac{x_0}{2\sqrt{x_0(x_0+\Delta x)}}=\dfrac{1}{2}.$

10. (1) 由拉格朗日中值定理可知, $\exists\varepsilon\in(x, x+1)$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$

令 $\varepsilon=x+\theta(x) \quad \therefore \sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$

化简可得 $\theta(x)=\dfrac{1+2\sqrt{x(x+1)}-2x}{4}, x=0$ 时，$\theta(x)=\dfrac{1}{4}.$

$\because 2x<2\sqrt{x(x+1)}<(x+1) \quad \therefore \theta(x)\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right).$

(2) 由 (1) 可知，$\theta(x)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}[\sqrt{x(x+1)}-x]$

$$\lim_{x\to 0^+} \theta(x) = \frac{1}{4}$$
$$\lim_{x\to +\infty} \theta(x) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} \lim_{x\to +\infty} \tfrac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x} = \tfrac{1}{2}.$$

习题 4.2

1. 对于 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$ 或 $-\infty$ 的情形，证明定理 4.2.1.

   证明：由于函数在 $x=x_0$ 处的值与 $x\to x_0^+$ 时的极限无关.

   因此可以补偿定义 $f(x_0)=g(x_0)=0$.

   这样，对任意的 $x\in(x_0,x_0+\delta)$, 函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在 $[x_0,x]$ 上满足柯西中值定理的所有条件，故存在 $\xi\in(x_0,x)$, 使得

   $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'\left(\frac{3}{3}\right)}{g'(\xi)}$

   注意到，当 $x\to x_0^+$ 时，$\xi\to x_0^+$, 故

   $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim\limits_{\xi\to x_0^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$

   即证对于 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$ 或 $-\infty$ 的情形，定理 4.2.1 依然成立.

2. (1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{m-1}}{x^n-1}(m>0,n>0)$.

   解：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{m\cdot x^{n-1}}{n\cdot x^{n-1}}=\frac{m}{n}$

   (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

   解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$

   (3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$.

   解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1=\cos x}{\cos^2 x}=2.$

   (4)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{x^2}-1}{\cos x-1}$

   解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}{-\cos x}=-2.$

   (5)$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$

   解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{\frac{5}{\cos^2 5x}}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{3\cos 3x\cdot\cos^2 5x}{5}=-\frac{3}{5}.$

   (6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\sin 4x}$

   解：原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4\cos^2 x\cos 4x}=-\frac{1}{2}.$

   (7)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}$

   解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(3^x\ln 3-2^x\ln 2)=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}.$

   (8)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^2 x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{2\cos 2x}=-\frac{1}{4}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(e^x+\cos x)=2$

(10) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$

解：原式 $==\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{x+1}}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1+x^2}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=1$

(11) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{5x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{5e^x+5}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{5+\frac{5}{e^x}}=\frac{1}{5}$

(12) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2+\ln x}{x\ln x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x+\frac{1}{x}}{\ln x+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=+\infty$

(13) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

解：$\because\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\tan\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$

又 $\because\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\ln x}{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\tan x\ln\left(\frac{1}{x}\right)}=e^0=1.$

(14) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$ 解：$\because\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\sin x\ln x}.$

又 $\because\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0}x=0.$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\sin x\ln x}=e^0=1.$

(15) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

解: $\because\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x=\lim\limits_{x\to +\infty}e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$

又 $\lim\limits_{x\to +\infty}x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-\frac{2}{x^3}\cdot\frac{x^2}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}=\frac{2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2}{x+\frac{1}{x}}=0$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to +\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=e^0=1.$

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1)\sin x^2}{x^2(1-\cos x)}$

解：原式 $=\frac{x^2\sin x^2}{x^2\cdot\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x\cos x^2}{2x}=2$

(17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-e}{x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x}=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}$

$=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-1}{x^2}=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=e\lim\limits_{x\to 0}-\frac{1}{2(1+x)}=-\frac{e}{2}$

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{\tan x-x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x(x^{\tan x-x}-1)}{\tan x-x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x(\tan x-x)}{\tan x-x}=1$

(19) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$

解：$\because\lim\limits_{x\to 1}\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to 1}e^{\tan\frac{\pi x}{2}\cdot\ln\left(\tan\frac{\pi}{4}x\right)}$.

又 $\because\lim\limits_{x\to 1}\tan\frac{\pi x}{2}\cdot\ln\left(\tan\frac{\pi}{4}x\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(\tan\frac{\pi}{4}x}{\cot\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}x}\cdot\frac{\frac{\pi}{4}}{\cos^2\frac{\pi}{4}x}}{-\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{2}x}}$

$=-\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{\pi}{2}x=-1$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}e^{\tan\frac{\pi x}{2}\cdot\ln\left(\tan\frac{\pi}{4}x\right)}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

(20) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$

解：$\because\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\frac{2}{\pi}\arccos x^{\frac{1}{x}}}{)}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln\frac{2}{\pi}\arccos x}{x}}$

又 $\because\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{2}{\pi}\arccos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{2}{\pi}\arccos x}\cdot\frac{-\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}-\frac{1}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}=-\frac{2}{\pi}$

$\because$ 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln\frac{2}{\pi}\arccos x}{x}}=e^{-\frac{2}{\pi}}$

(21) $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x\ln^2 x}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\ln^2 x+2\ln x}{-1}=0$

(22) $\lim\limits_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}/e\right)^{\frac{1}{x}}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}/e]}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1]}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{2(1+x)}}=e^{-\frac{1}{2}}$

(23) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cos x}{2\cos x-x\sin x}=0$

或原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{2x}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sec^2 x\tan x}{2}=0$

(24) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{m}\left(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x\right)^{\frac{1}{x}}\right.\left(a_1,a_2,\ldots,a_m>0\right)$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m}}{x}}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{a_1x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{m}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}\cdot\frac{1}{m}\left(a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_m^x\ln a_m\right)$

$=\frac{1}{m}\left(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_m\right)=\ln\left(a_1a_2\cdots a_m\right)^{\frac{1}{m}}$

$\therefore$ 原式 $=e^{\ln(a_1a_2\cdots a_m)^{\frac{1}{m}}}=\left(a_1a_2\cdots a_m\right)^{\frac{1}{m}}$

3. 说明不能用洛必达法则求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$

解：当 $x\to+\infty$ 时，$\left(\frac{x+\sin x}{x-\sin x}\right)'=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$ 极限不存在.

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$ 不能用洛必达法则求极限.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

解：当 $x\to 0$ 时，$\left(\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}\right)'=\frac{2x\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 极限不存在.

故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 不能用洛必达法则求极限.

习题 4.3

1.

$f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4 \quad f(4)=-56$

$f'(x)=4x^3-15x^2+2x-3 \quad f'(4)=21$

$f''(x)=12x^2-30x+2 \quad f''(4)=74$

$f^{(3)}(x)=24x-30 \quad f^{(3)}(4)=66$

$f^{(4)}(x)=24 \quad f^{(4)}(4)=24$

$f(x)$在$x=4$ 的泰勒公式为

$$f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f^{(3)}(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(4)}{4!}(x-4)^4$$

$$=(x-4)^4+11(x-4)^3+37(x-4)^2+21(x-4)-56$$

2.

(1)$f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^k\cdot k!}{x^{k+1}} \quad f^{(k)}(-1)=\dfrac{(-1)^k\cdot k!}{(-1)^{k+1}}=-k! \quad (k=0,1,2,\cdots,n)$

则$f(x)$在$x=-1$ 的n阶泰勒公式为

$$f(x)+f'(x)(x+1)+\frac{f''(x)}{2!}(x+1)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x+1)^n+o((x+1)^n)$$

$$=f(-1)+f'(-1)(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n+o((x+1)^n)$$

$$=-1-(x+1)-(x+1)^2-(x+1)^3-\cdots-(x+1)^n+o((x+1)^n)$$

(2)设$f(x)=\ln(1-x)$ 定义域$(-\infty,1)$

$$f^{(k)}(x)=-\frac{(k-1)!}{(1-x)^k},k=1,2,\cdots,n$$

$$f^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{(k-1)!}{\left(\frac{1}{2}\right)^k}=-(k-1)!\cdot 2^k,k=1,2,\cdots,n$$

$f(x)$在$x=\frac{1}{2}$的n阶泰勒公式为

$$f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{2!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)}{n!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n+o\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$=-\ln 2-2\left(x-\frac{1}{2}\right)-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{8}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3-\cdots-\frac{2^n}{n}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n+o\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

(3)设$f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

$$f^{(k)}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}), & k\text{为偶数}\\ \frac{1}{2}(e^x-e^{-x}), & k\text{为奇数}\end{cases}$$

$$f^{(k)}(0)=\begin{cases}1, & k\text{为偶数}\\ 0, & k\text{为奇数}\end{cases}(k=0,1,2,\cdots,n)$$

则$f(x)$在$x=0$ 的 20 阶泰勒公式为

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(20)}(0)}{20!}x^{20}+o(x^{20})$$

$$=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{1}{20!}x^{20}+o(x^{20})$$

(4)设$f(x)=xe^x$

$f^{(k)}(x)=(x+k)\cdot e^x\quad f^{(k)}(0)=k\quad ,k=0,1,2,\cdots,n$

$f(x)$在$x=0$ 的n阶泰勒公式为

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!} + o(x^n)$$

3.

(1)解：由泰勒公式知

$$(1+x^2)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$

$$\text{则原式} = \lim_{x\to 0} \frac{\left[1 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)\right] - \left[1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)\right]}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$$

(2)解：由泰勒公式知

$$\cos x^2 = 1 - \frac{1}{2!}x^4 + o(x^4)$$

$$x^2 \cos x = x^2 - \frac{1}{2!}x^4 + o(x^4)$$

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + o(x^6)$$

$$\text{则原式} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + o(x^4)}{x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + o(x^6)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1 + \frac{o(x^4)}{x^2}}{1 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{o(x^6)}{x^2}} = \frac{-1}{1} = -1$$

(3)解：由泰勒公式知

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$$

$$\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2} \quad \cos 4x = 1 - \frac{1}{2!}(4x^2) + 0(x^2)$$

则原式$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{8x^2-o(x^2)}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{o(x^2)}{x^2}}{8-\frac{o(x^2)}{x^2}}=0$

(4)解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{[x\ln(1+x)-x^2]\left(\sqrt{\tan x+1}+\sqrt{1+\sin x}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x}{2(x\ln(1+x)-x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right]-\frac{1}{2}\left[2x-\frac{8}{3!}x^3+o(x^3)\right]}{-x^3+o(x^3)}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

4.

解：(1)*因为*$f(x)=\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}$

$$\approx 1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3$$

$$=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3,$$

$$R_3(x)=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}(1+\xi)^{\frac{1}{3}-4}x^4,$$

其中 ξ 介于 $0,x$之间. 故

$$\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{27+3}=3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}}\approx 3\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{5}{81}\left(\frac{1}{9}\right)^3\right]$$

$$\approx 3.10724.$$

误差 $|R_3|=3\cdot\left|\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}(1+\xi)^{\frac{1}{3}-4}\left(\frac{1}{9}\right)^4\right|,$

ξ介于 0 与$\dfrac{1}{9}$之间, 即 $0 < \xi < \dfrac{1}{9}$, 因此

$$|R_3| = \left|\frac{80}{4! \cdot 3^{11}}\right| \approx 1.88 \times 10^{-5}.$$

5.

解：设$f(x) = 2^x \quad f^{(k)}(x) = 2^x (ln\,2)^k \quad (k = 0,1,2,\cdots,n)$

$f(x)$在$x = 0$ 的n阶泰勒公式为

$$1 + ln\,2 \cdot x + \frac{(ln\,2)^2}{2!} x^2 + \frac{(ln\,2)^3}{3!} x^3 + \cdots + \frac{(ln\,2)^n}{n!} x^n$$

则$2^{\frac{1}{5}} \approx 1 + ln\,2 \times \dfrac{1}{5} + \dfrac{(ln\,2)^2}{2!} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 + \dfrac{(ln\,2)^3}{3!} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^3 \approx 1.149$

6.

$$\lim_{x\to 0}\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x+\frac{f(x)}{x}} \cdot \frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}} = e^3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(x + \frac{f(x)}{x}\right) = 0 \quad \lim_{x\to 0}\frac{x + \frac{f(x)}{x}}{x} = 3$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0 \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = 2$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{f(x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}} = e^2$$

7.

由待定系数法

构造函数$P(x)=\frac{x^3}{2}+\left(\frac{1}{2}-f(0)\right)x^2+f(0)$

设$F(x)=f(x)-P(x)$，显然$F(x)$在$[-1,1]$上有连续的三阶导数

且$F(-1)=F(1)=F(0)=F'(0)=0$

对$F(x)$在$[-1,0],[0,1]$用罗尔定理得

存在$-1<\theta_1<0\quad 0<\theta_2<1$

使$F'(\theta_1)=F'(\theta_2)=0$

对$F'(x)$在$[\theta_1,0],[0,\theta_2]$上用罗尔定理得

存在$-1<\theta_1<\eta_1<0\quad 0<\eta_2<\theta_2<1$

$$F''(\eta_1)=F''(\eta_2)=0$$

对$F''(x)$在$[\eta_1,\eta_2]$上用罗尔定理得

存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subsetneq(-1,1)$

$F'''(\xi)=0$ 即 $f'''(\xi)=3$

8. 由泰勒公式得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+o(h^2)$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+o(h^2)$$

$$f(x)\le\frac{1}{2}[f(x-h)+f(x+h)]$$

$$\Rightarrow f''(x)+o(h^2)\ge 0$$

令 $h\to 0$ 则 $f''(x)\ge 0$

习题 4.4

1. (1) $Y=2x^3-6x^2-18x-7$

$Y'=6x^2-12x-18$

$=6(x-3)(x+1)$

令 y'>0 得 x>3 或 x<-1

令 y'<0 得 -1<x<3

所以 Y=2x3-6x2-18x-7 在(-∞,-1) (3,+∞)上单调递增

在(-1,3)上单调递减

(2) $y=2x+\frac{8}{x}$

$y'=2-\frac{8}{x^2}=\frac{2x^2-8}{x^2}$

令 y'>0 得 x>2 或 x<-2

令 y'<0 得 -2<x<0 或 0<x<2

所以 $y=2x+\frac{8}{x}$ 在(-∞,-2) (2,+∞)上单调递增

在(-2,0) (0,2)上单调递减

(3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$y'=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$ 恒成立

所以 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$在 R 上单调递增

(4) $Y=x^ne^{-x}$ (n>0,x≥0)

$Y'=nx^{n-1}e^{-x}-x^ne^{-x}=(n-x)x^{n-1}e^{-x}$

因为 x≥0 ，所以$x^{n-1}e^{-x}>0$

令 Y'>0，得 0<x<n；令 y'<0，得 x>n

所以 $Y=x^ne^{-x}$ (n>0,x≥0) 在[0,n)上单调递增

在(n,+∞)上单调递减

2. (1) $\sin x<x$ $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

令 $f(x)=\sin x-x$

所以 $f(x)'=\cos x-1\le0$ 在 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$上恒成立

所以 f(x)在 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减

所以 f(x)<0；即$\sin x$< x　　x $\in (0,\frac{\pi}{2})$得证

(2) e^x>1+x　(x≠0)

f(x)= e^x-1-x　　f(x)'= e^x-1

令 f(x)'>0　得 x>0

令 f(x)'<0　得 x<0

所以 f(x)在(-∞,0)上单调递减，在(0,+∞)上单调递增

$f(x)_{min}$=f(0)=0

所以 f(x)≥0，又因为 x≠0

所以 f(x)>0，即e^x>1+x　(x≠0)得证

(3) $\ln(x+1)$<x　x>0

f(x)=$\ln(x+1)$- x

f(x)'= $\frac{-x}{x+1}$　　又因为 x>0

所以 f(x)'<0 在 x>0 时恒成立

f(x)max<f(0)=0

所以$\ln(x+1)$<x　x>0 得证

(4) $\sin x$+$\tan x$ > 2x　　x∈ $(0,\frac{\pi}{2})$

令 f(x)= $\sin x$+$\tan x$ - 2x

f(x)'=$\cos x$+$\frac{1}{(\cos x)^2}$ -2

令 f(x)'>0　得 $(\cos x)^3$- $2(\cos x)^2$+1>0 恒成立

所以 f(x)在 x∈ $(0,\frac{\pi}{2})$上单调递增

所以 $f(x)_{min}$>f(0)=0

所以 $\sin x$+$\tan x$ > 2x　　x∈ $(0,\frac{\pi}{2})$得证

3. (1) y=2x^3-3x^2

y'=6x^2-6x=6x(x-1)

令 y'>0　得 x>1 或 x<0

令 y'<0　得 0<x<1

所以 y 在(-∞,0) (1,+∞)上单调递增，y 极大=0

在(0,1)上单调递减，y 极小= -1

(2)

y=$\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$

y=4-$\frac{x^2}{x^2+x+1}$，　y'=-$\frac{x^2+2x}{x^2+x+1}$

令 y'<0，x>0 or x<-2

令 y'>0，-2<x<0

所以 x=-2 时，y 极小=$\frac{3}{8}$

X=0 时，y 极大=4

（3）

y=x-ln(1+x)

y'=1-$\frac{1}{x+1}$

y=x-ln(1+x)在（-1，0）单调递减，在（0，+∞）单调递增

x=0，y 取得极小=0，无极大值

（4）

y=e^{x}cosx

y'=e^{x}(cosx-sinx)

y 极大=$\frac{-\sqrt[2]{2}}{2}$ $e^{2k\Pi+4\backslash\Pi}$

y 极小=$\frac{-\sqrt[2]{2}}{2}$ $e^{（2k+1）\Pi+4\backslash\Pi}$

（5）

y=x+$\sqrt{1-x}$

y'=1-$\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$

令 y'>0，x<$\frac{3}{4}$; 令 y'<0，-$\frac{3}{4}$<x<1

y 极大值为$\frac{5}{4}$,无极小值

（6）

y=2e^{x}+e^{-x}

y'=2e^{x}-e^{-x}

令 y'>0，x>-$\frac{ln2}{2}$，令 y'<0，x<-$\frac{ln2}{2}$

y 极小=2$\sqrt{2}$，无极大值

4、（1）

f(x)=x+2$\sqrt{x}$, x 属于[0,4]

f'(x)在[0.4]上大于 0 恒成立,

所以 f(x)在[0,4]上单调递增

f(x)max=f(4)=8, f(x)min=0

（2）

f(x)=$\frac{x-1}{x+1}$, x 属于[0,4]

f'(x)=$\frac{2}{(x+1)^2}$>0 在[0,4]上恒成立

所以 f(x)在[0,4]上单调递增

f(x)max=f(4)=3\5, f(x)min=f(0)=-1

(3)

f(x)=xlnx , x 属于（0, +∞）

f'(x)=lnx+1

f'(x)>0, x>$\frac{1}{e}$

f'(x)<0, 0<x<$\frac{1}{e}$

f(x)min=f(1/e)=- $\frac{1}{e}$, f(x)无最大值

(4)

f(x)=x^4-2x^2+5 x 属于[-2,2]

令 t=x^2 t 属于[0,4]

g(t)=t^2-2t+5=$(t-1)^2$+4

g(t)min=g(1)=4, g(t)max=g(4)=13

5.

解得交点$(1,3),(-3,-5)$ 设$C(x,4-x^2)$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|-d$$

$$|AB|=\sqrt{(-3-1)^2+(-5-3)^2}=4\sqrt{5}$$

$$d=\frac{|x^2+2x-3|}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore S^2=4(x^2+2x-3)^2 \ \ x\in[-3,1]$$

$$\therefore 当x=-1 时S^2=4(x^2+2x-3)^2$$

$$\therefore S^2=64$$

$$\therefore 当C为(-1,3)时S=8$$

6.

$(1)a>-1+\ln 2$

要证$x^2-2ax+1<e^x$

即证$x+\frac{1}{x}<\frac{e^x}{x}+2a$

构造$f(x)=x+\frac{1}{x}-\frac{e^x}{x}$

$f'(x)=\frac{[(x+1)-e^x](x-1)}{x^2}$

$g(x)=(x+1)-e^x$

易证$g(x)<0$ 恒成立

$\therefore$ 令$f'(x)>0\quad 0<x<1$

令$f'(x)<0\quad x>1$

$\therefore y=f'(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减

$f(x)_{max}=f(1)=2-e<-\frac{1}{2}$

$\because a>-1+ln\,2$

$a>ln\frac{2}{e}>-\frac{1}{2}$

$\therefore a>f(x)_{max}$

$\therefore x^2-2ax+1<e^x(x>0)$

$\therefore$ 得证

$(2)e^x-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\le\frac{x^2}{n}e^{-x}$

构造$f(x)=x^2+n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^x-n\quad x\in(-\infty,n]$

$f'(x)=x\left[2-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}e^x\right]$

$f'(0)=0\quad f(0)=0$

$\because \exists \xi \in (-\infty, n] \quad \xi \neq 0$

$f'(\xi) = 0 \quad \left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^{n-1} e^{\xi} = 2$

$\therefore f(\xi) = \xi^2 + n\left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^{n} e^{\xi} - n$

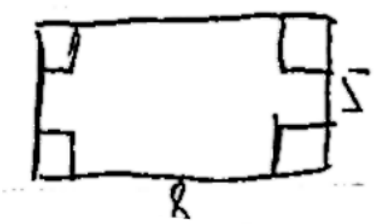
$\qquad = (\xi - 1)^2 + n - 1$

$f(x)_{min} = f(0) \quad \therefore f(x) \geq 0$

$x \in (-\infty, n]$

$\therefore x \leq n$时 $\quad e^x - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{x^2}{n} e^{-x}$得证

7.



设正方体边长为x

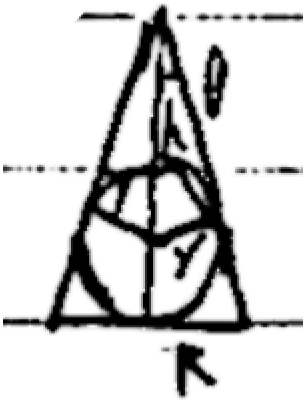
$V = (8 - 2x)(5 - 2x)x \quad x \in \left[0, \frac{5}{2}\right)$

$V' = 12x^2 - 52x + 40$

$V' = 0 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{10}{3}$(舍)

$x = 1$ 时容量最大

8.



$$h=\frac{r}{\sin\theta}+r=\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta}r$$

$$R=h\tan\theta$$

$$V=\frac{1}{3}\pi(h\tan\theta)^2h$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^3\frac{(\sin\theta+1)^3}{\sin\theta\cdot\cos^2\theta}$$

$$x=\sin\theta$$

$$\frac{1}{3}\pi r^3\quad\frac{(x+1)^3}{x(1-x^2)}$$

令$\left(\frac{(1+x)^3}{x(1-x^2)}\right)'=0\quad x=\frac{1}{3}$或$-1$(舍)

$$V_{min}=\frac{8}{3}\pi r^3$$

习题 4.5

1. 求下列函数的凸性区间和拐点

(1) 解：令 y=f(x)，则 f’(x)=$3x^2-10x+3$

f”(x)=6x-10

可知 f(x)在（$-\infty$，$\frac{5}{3}$）上凸，在$\left(\frac{5}{3}，+\infty\right)$下凸

（$\frac{5}{3}$，$\frac{20}{27}$）为拐点

(2) 解：令 y=f(x)，则 f’(x)=$e^{-x}-xe^{-x}$

f”(x)= $-e^{-x}-\ -e^{-x}+\ xe^{-x}=\ e^{-x}$(x-2)

可知 f(x)在（$-\infty$，2）上凸，在$(2，+\infty)$下凸

（2，$\frac{2}{e^2}$）为拐点

(3)解：令 y=f(x)，则 f’(x)=$\frac{2x}{1+x^2}$

f”(x)=$\frac{2(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}$

可知 f(x)在（-1，1）上凸，在$(-\infty，-1)$和$(1,+\infty)$下凸

（-1，$ln2$） 和（1，ln2）为拐点

(4) 解：令 y=f(x)，则 f’(x)=1+cosx

f”(x)=-sinx

可知 f(x)在$(2k\pi，\pi+2k\pi)$下凸，在$(\pi+2k\pi，2k\pi)$上凸

（kπ，kπ）为拐点

2. 利用函数的凸性，证明下列不等式

(1)解：设 f(x)= e^x

∵f”(x)= e^x>0 ∴f(x)下凸（严格）

故 f($\frac{x_1+x_2}{2}$)<$\frac{1}{2}$(f(x_1)+f(x_2))

则$e^{\frac{x+y}{2}}<\frac{1}{2}(e^x+e^y)$

(2)解：设 f(x)= x^n, 则 f’(x)= ln nx^n

∵ f“(x)= $\ln^2$nx^n>0∴f(x)下凸（严格）

故 f($\frac{x+y}{2}$)<$\frac{1}{2}$(f(x)+f(y))

则$(\frac{x+y}{2})^n<\frac{1}{2}(x^n+y^n)$

3．求下列函数的渐近线

(1) 解:$a_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$=0

$b_1=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$=0

当 x$\to-\infty$时同理

故渐近线为 y=0

(2)解:$a_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$=$\lim_{x\to+\infty}(e^{\frac{2}{x}}+\frac{1}{x})=1$

$b_1=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$=$\lim_{x\to+\infty}x(e^{\frac{2}{x}}-1)+1$

令 t=1/x, 则上式=$\lim_{t\to0}\frac{e^{2t}-1}{t}$+1

用洛必达易得b_1=3，渐近线 1 为 y=x+3

a_1 =$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-1}{x}=0, b=1$

渐近线 2 为 y=1

（3）解：$a_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$=0

$b_1=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$=+$\infty$ 故不存在

当$x\to+0^+$时，$f(x)$=-∞

故垂直渐近线为 x=0

（4）解：$a_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$=$\lim_{x\to+\infty}(2+\frac{artan\frac{x}{2}}{x})$ =2

$b_1=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$=$\frac{\pi}{2}$

渐近线 1：y=2x+$\frac{\pi}{2}$

$a_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$=2

$b_2=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$=-$\frac{\pi}{2}$

渐近线 2：y=2x-$\frac{\pi}{2}$

4、

（1）

证明：根据下凸函数定义

有 f(λx+(1-λ)y)<=λf(x)+(1-λ)f(y)成立

取 x=x_1, y=x_2, λ=λ_1, 1-λ=1-λ_1=λ_2

则 f($\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$)<=$\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$

(2)

证明：

将 $\lambda_3 x_3 + \lambda_2 x_2$ 合并为 $\lambda_4 x_4$

两次使用（1）结论可得结果

（3）

令 $\lambda_k \lambda_{k+1} = \lambda_{k^、}$, $\frac{\lambda_k}{\lambda_{k^、}} x_k + \frac{x_{k+1}}{\lambda_{k^、}} x_{k+1} = x_{k^、}$

则 $x_{k^、} \in (a, b)$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots \lambda_k + \lambda_{k^、} = 1$

易知 x_1，x_2，x_{k-1}，$x_{k^、}$ 是 (a, b) 内不全相等 k 个数

由归纳法假设有

$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots \lambda_{k^、} x_{k^、}) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots \lambda_{k^、} f(x_{k^、})$

因为 $\frac{\lambda_k}{\lambda_{k^、}}$， $\frac{\lambda_k+1}{\lambda_{k^、}} \in R^+$，且 $\frac{\lambda_k}{\lambda_{k^、}} + \frac{\lambda_k+1}{\lambda_{k^、}} = 1$

故上式 $<= \frac{x_k}{\lambda_{k^、}} f(xk) + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}$

因此 $f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) <= \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k x_k)$

习题 4.7

1. 求下列曲线在指定点处的曲率

（1）曲线 xy=4，点（2,2）

$$y' = \frac{4}{x^2}, y'(2) = -1;$$

$$y'' = \frac{8}{x^3}, y''(2) = 1;$$

由曲率公式$k = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$，带入得 $\mathrm{k} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

（2）曲线 $y=4x-x^2$, 点（0,0）

$$y' = 4 - 2x，y'(0) = 4$$

$$y'' = -2，y''(0) = -2$$

由曲率公式$k = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$，带入得 $\mathrm{k} = \frac{2}{\sqrt{17^3}}$

（3）曲线$y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$，点（0,0）

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}，y'(0) = 1$$

$$y'' = -x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}，y''(0) = 0$$

由曲率公式$k = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$，带入得 $\mathrm{k} = 0$

（4）曲线 y=lnx，点（1,0）

$$y' = \frac{1}{x}，y'(1) = 1$$

$$y' = -\frac{1}{x^2}，y''(1) = -1$$

由曲率公式$k=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$，带入得 $\mathrm{k}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

2. 请证明公式（4. 7. 4）

证明：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{\alpha x}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)}{dt}\frac{dt}{\mathrm{dx}}=\frac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^2}\frac{1}{x'(t)}$$

分别将y'和y''带入 $\mathrm{k}=\frac{|\mathrm{y}''|}{(1+(\mathrm{y}')^2)^{\frac{3}{2}}}$式中得：

$$k=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{[x'(t)^2]^{\frac{3}{2}}\left(1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{\left[\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

3. 求由下列参数方程表示的曲线在指定参数处的曲率

(1)曲线$\begin{cases}x=3t^2\\y=3t-t^3\end{cases}$，$\mathrm{t}=1$;

$x'(t)=6t,x'(1)=6;x''(t)=6,x''(1)=6;$

$y'(t)=3-3t^2,y'(1)=0;y''(t)=-6t,y''(1)=-6;$

由 $\mathrm{k}=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{\left[\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$,得 $\mathrm{k}=\frac{1}{6}$

(2)曲线$\begin{cases}x=a(cost+tsint)\\y=a(sint-tcost)\end{cases}$,$t=\frac{\pi}{2}$，其中$a>0$.

$x'(t)=atcost,x'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$

$x''(t)=a(cost-tsint),x''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi a}{2};$

$y'(t)=atsint, y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi a}{2}$;

$y''(t)=a(sint+tcost), y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=a;$

由$k=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{\left[\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$,得$k=\frac{2}{\pi a}$

4.求曲线 $y=x^2$ 上任一点处的曲率，并问哪一点处曲率最大？

由 $y'=2x, y''=2$

带入公式 $k=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$，得；$k=\frac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$

所以当 x=0 时，k 取最大值，

即曲线 $y=x^2$ 在 x=0 处曲率最大。

5.求椭圆周$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上任一点处的曲率，并问哪一点处曲率最大？其中 a>b>0.

设$\begin{cases} x=acost \\ y=bsint \end{cases}$(a>b>0)

则$x'(t)=-asint$;$x''(t)=-acost$;

$y'(t)=bcost; y''(t)=-bsint$;

$$\Rightarrow k=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{\left[\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

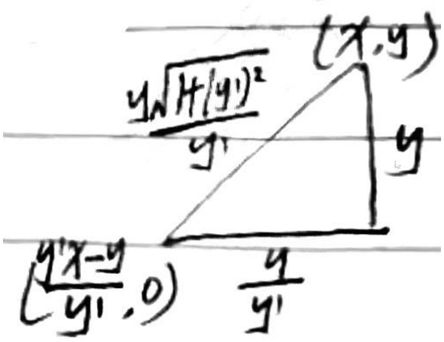
$$\Rightarrow k=\frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

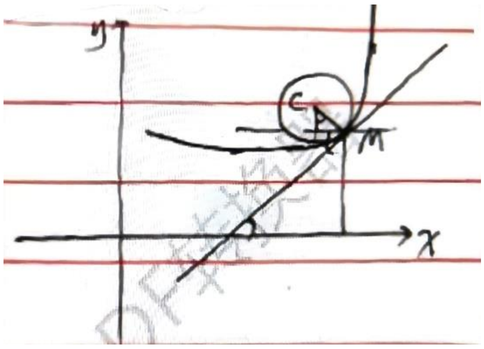
$$\Rightarrow k=\frac{ab}{(a^2(1-cos^2t)+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow k=\frac{ab}{\left(a^2+(b^2-a^2)\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}$$

所以当 cost=0，即 t=$\pm\frac{\pi}{2}$时，k 取最大值，此时 x=$\pm a$

6.





M点处曲率为$k=\frac{|y''|}{(H+(y)^2)^{\frac{2}{2}}}=\frac{|y''(x)|}{\left(1+(y'(x)^2)^{\frac{2}{2}}\right)}$

M点处切线为$\alpha=y't-y'x+y$

$C(\alpha,\beta)$

$\alpha=x-r\,sin\,arctan\,y'$

$\beta=y+r\,cos\,arctan\,y'$

$r=\frac{1}{k}$

$sin\,arctan\,y'=\frac{1}{\sqrt{1+(y)^2}}$

$cos\,arctan\,y'=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$

则$\begin{cases}\alpha=x-\frac{(1+(y'')^2)y'}{y''}\\ \beta=y+\frac{1+(y')^2}{y''}\end{cases}$

7.

解：$y=ln\,x$ 与x轴交点为$(1,0)$

$$y' = \frac{1}{x}, y'' = \frac{-1}{x^2}, k = \frac{1}{(2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

则$\rho = \frac{1}{k} = 2\sqrt{2}$

设圆心为(α, β)

$$a = x - \frac{(1 + (y')^2)y'}{y''} = 1 - \frac{2}{-1} = 3$$

$$\beta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''} = \frac{2}{1} = -2$$

则方程为$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$

复习题 4

1 证明：$\because f(x)$在$[a,b]$上不恒为常数

则存在$c\in(a,b)$使$f(c)\ \neq f(a)$

$\because f(a)=f(b)$则$f(c)\ \neq f(b)$

设$f(c)>f(a)$

由拉格朗日中值定理得

∃ξ∈(a,c),η∈(c,b)

f'(ξ)=$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$>0,f'(η)=$\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$<0 证毕

2 证明：设y、x,将区间[x,y]n 等分，有

|f(y)-f(x)|=|$\sum_{k=1}^{n}[f(x+\frac{k}{n}(y-x))-f(x+\frac{k-1}{n}(y-x))$|

≤$\sum_{k=1}^{n}|f(x+\frac{k}{n}(y-x))-f(x+\frac{k-1}{n}(y-x))|$

≤$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}(y-x)^2$=$\frac{(y-x)^2}{n}$

当 n→∞时，右边会无限趋向于 0

∴f(x)-f(y)=0.f(x)在(-∞,+ ∞)内为常数

3 证明：设 F(x)=$\frac{f(x)}{x}$

∴F'(x)=$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

由拉格朗日中值定理得

∃ξ∈（0，x）$\frac{f(x)-f(0)}{x}$=f'(ξ)

∴f(x)=xf'(ξ)

∴F'(x)=$\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x}$

$\because f'(x)$严格单调增加

$\therefore f'(x)>f'(\xi)$

$\therefore F'(x)>0$

∴$\frac{f(x)}{x}$严格单调增加

4 证明：$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}$=$\lim_{x\to0}\frac{2f(x)}{x^2}$=$\lim_{x\to0}\frac{2}{x^2}(f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f'(0)+o(x^2))$=A

∵A 是常数

$\therefore f(x)=0,f'(x)=0,f''(x)=A$

5

(1) 证明：设 f(x)=$\frac{\tan x}{x}$,0<x<$\frac{\pi}{2}$

∴f'(x)=$\frac{x-\sin x\cos x}{x^2(\cos x)^2}$

设 g(x)=x-$\sin x\cos x$ g'(x)=1-$\cos 2x$>0

∴g(x)>g(0)=0 ∴f'(x)>0 ∴$\frac{\tan x}{x}$<$\frac{\tan y}{y}$

(2) 证明：设 f(x)=e^x-x-1(x ≠0)

∴f'(x)=e^x-1

∴$在x\in(-\infty,0)时，\ f'(x)=\ e^x$-1<0

$在x\in(0,+\infty)时，\ f'(x)=\ e^x$-1>0

∴$f(x)>f(0)=0$

∴e^x>1+x

(3) 证明：设 f(x)=x-$\sin x$ g(x)=$\sin x$-x+$\frac{x^3}{6}$

∴f'(x)=1-$\cos x$得 f(x)在[0, + ∞]上单增

∴f(x)>f(0)=0 ∴x>$\sin x$

g'(x)=$\cos x$-1+$\frac{x^2}{2}$=2[($\frac{x}{2}$)^2-($\sin\frac{x}{2}$)^2]

当$\frac{x}{2}$∈[0, π]时，($\frac{x}{2}$)^2>$\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$

当$\frac{x}{2}$⩾π 时，($\frac{x}{2}$)^2⩾π^2>1⩾$\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$

∴g'(x)>0 g(x)在[0, + ∞]上单增

g(x)>g(0)=0 ∴$\sin x$>x-$\frac{x^3}{6}$

∴x-$\frac{x^3}{6}$<$\sin x$<x,x>0

(4) 证明：对不等式取对数得

x$\ln(1+\frac{1}{x})$<1<(x+1)$\ln(1+\frac{1}{x})$

设 1+$\frac{1}{x}$=y (y>1)

∴1-$\frac{1}{y}$<$\ln y$<y-1

设 f(y)=$\ln y$+$\frac{1}{y}$-1

∴f'(y)=$\frac{1}{y}$-$\frac{1}{y^2}$=$\frac{y-1}{y^2}$>0

∴f(y)>f(1)=0 ∴$\ln y$>1-$\frac{1}{y}$

设 g(y)=$\ln y$-y+1

$g'(y)=\frac{1}{y}-1<0$

$\therefore g(y) < g(1) = 0 \quad \therefore \ln y<y-1$

$\therefore 1-\frac{1}{y}<\ln y<y-1$

$\therefore (1+\frac{1}{x})^{x}<e<(1+\frac{1}{x})^{x+1}$

(5) 证明：设 f(x)=$\frac{\tan x}{x}$ $0<x<\frac{\pi}{2}$

$\therefore f'(x)=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2-(\cos x)^2}$

设 g(x)=x-$\sin x\cos x$ g'(x)=1-$\cos 2x$>0

$\therefore g(x) > g(0) = 0 \quad \therefore f'(x) > 0 \quad \therefore \frac{\tan x}{x}<\frac{\tan y}{y}$

$\frac{y}{x}<\frac{\tan y}{\tan x}$

(6) 证明：设$f(x) =$ （$1+x$）$(\ln(1+x))^2$ $\therefore$ f(0)=0

f'(x)=$(\ln(x+1))^2$+2$\ln(1+x)$-2x f'(0)=0

f''(x)=$\frac{2}{1+x}$[$\ln(1+x)$-x] f''(0)=0

f'''(x)=-$\frac{2\ln(1+x)}{(1+x)^2}$<0

$\therefore f''(x)$在（0，$+\infty$）单调递减 $\therefore f''(x) < 0$

$f'(x)$在（0，$+\infty$）单调递减 $\therefore f'(x) < 0$

$f(x)$在（0，$+\infty$）单调递减 $\therefore f(x) < 0$

$(1+x)(\ln(1+x))^2<x^2$

6. 由题意可知 $u = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

由泰勒展开得 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$

因为 $f(0) = f'(0) = 0$

所以$\lim_{x\to 0}\frac{xf(\mu)}{\mu f(x)} = \frac{x\frac{f^n(\eta)u^2}{2}}{\mu\frac{f^n(\xi)x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{u}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{u}{x}=\lim_{x\to 0}(1-\frac{f(x)}{xf'(x)})=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{xf'(x)}$$

由洛必达法则得 $\lim_{x\to 0}\frac{u}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{xf''(x)}{xf''(x)+f'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{f''(x)+\frac{f'(x)}{x}}=\frac{1}{2}$

7. 证:

因为 $s+t=1$

所以下证: $f[(1-t)x_1+tx_2]<(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$①

不妨设 $x_1<x_2$

将①转化为

$$t(f(x_2)-f[(1-t)x_1+tx_2])>(1-t)(f[(1-t)x_1+tx_2]-f(x_1))$$

因为 $f(x)$在$[x_1,x_2]$连续且可导

故由拉格朗日中值定理可得

$$\frac{f(x_2)-f[(1-t)x_1+tx_2]}{(x_2-x_1)(1-t)}=f'(n_1),n_1\in((1-t)x_1+tx_2,x_2)$$

$$\frac{f[(1-t)x_1+tx_2]-f(x_1)}{t(x_2-x_1)}=f'(n_2),n_2\in(x_1,(1-t)x_1+tx_2)$$

因为 $f''(x)>0$

故 $f'(n_1)>f'(n_2)$

所以$t(1-t)f'(n_1)(x_2-x_1)>t(1-t)f'(n_2)(x_2-x_1)$

$$\Leftrightarrow t(f(x_2)-f[(1-t)x_1+tx_2])>(1-t)(f[(1-t)x_1+tx_2]-f(x_1))$$

即原证明式成立

8. 证:

因为 $f(0)=-1<0,f(-1)>0,f(1)>0$

所以 $\begin{matrix} f(0)f(-1)<0 \\ f(0)f(1)<0 \end{matrix}$

由零点存在性定理可得, $f(x)$在（$-1,0$）和（$0,1$）有两个零点

$f'(x)=(2x+1)e^{2x}+\sin x-2$

$f''(x)=4(x+1)e^{2x}+\cos x$

当$x<-1$时，$f'(x)<0, f(x)\downarrow$

$f(x)>f(-1)>0,$故$f(x)$在（$-\infty,-1]$无实零点

当$x>-1$时，$f''(x)>0, f'(x)$在（$-1,+\infty$）$\uparrow$

$f'(-1)<0, f(e)>0$

故$f(x)$在（$-1,+\infty$）先$\uparrow$后$\downarrow$

即$f(x)$在（$-1,+\infty$）至多存在2个零点

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$

$$\begin{cases}\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)\\ \sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)\end{cases}$$

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\dfrac{2}{3}x^3+o(x^3)}{x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\dfrac{2}{3}x^3+o(x^3)-x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)}{1-(x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3))}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\dfrac{1}{6}x^3}=6$

10. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^5}=A$

$$\begin{cases}\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^6)\\ \sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+o(x^6)\end{cases}$$

故原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(a+b(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^6))(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+o(x^6))}{x^5}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-a-b)x+\dfrac{(a+4b)x^3}{3!}-(\dfrac{a}{5!}+\dfrac{b}{12}+\dfrac{b}{4!}+\dfrac{b}{5!})x^5+o(x^5)}{x^5}$

因为 $\begin{cases}1-a-b=0\\ a+4b=0\end{cases}$

故 $\begin{cases}a=\dfrac{4}{3}\\ b=-\dfrac{1}{3}\\ A=\dfrac{1}{30}\end{cases}$

11.由泰勒展开式可知:

$0=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)+sinx}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)+x(f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2))\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(1+f(0)\right)x+f'(0)x^2+\left(\frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)\right]$

则$\mathrm{f}(0)=-1,\mathrm{f}'(0)=0,\mathrm{f}''(0)=\frac{1}{3}$

12. f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+$\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(x-a)^3$

结合已知:$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$+$\frac{f''(\xi)}{2!}(\mathrm{x}-\mathrm{a})^2$

则有$\mathrm{f}''(\mathrm{a})-\mathrm{f}''(\xi)=\frac{1}{3}f'''(\xi_1)(x-a)$即$x-a$=3$\frac{f''(a)-f''(\xi)}{f'''(\xi_1)}$

代入所求极限,$\lim\limits_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to a}\frac{(\xi-a)f'''(\xi_1)}{f''(a)-f''(\xi)}$

因为$\mathrm{x}\to\mathrm{a}$,$\xi\to\mathrm{a}$,$\xi_1\to a$

所以$\lim\limits_{x\to a}\frac{\xi-a}{f''(a)-f''(\xi)}=\frac{1}{f'''(a)}$, $\lim\limits_{x\to a}f'''(\xi_1)=f'''(a)$

故$\lim\limits_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{3}$

13. ⑴任取一个x_0,若$\mathrm{f}(x_0)=f(0)+x_0f'(x_0\theta_1)$中θ 不是唯一的话,则另有一$\theta_2$使其成立

即 $\mathrm{f}(x_0)=f(0)+x_0f'(x_0\theta_2)$,由于 $\mathrm{f}(x_0)$,$f(0)$,x_0均为固定值

所以$\mathrm{f}'(x_0\theta_1)=f'(x_0\theta_2)$即 f'(x)单调

所以$\theta_1=\theta_2$,唯一成立

⑵$\mathrm{f(x)}=\mathrm{f}(0)+\mathrm{xf}'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+o(x^2)$

又因为$\mathrm{f(x)}=\mathrm{f}(0)+\mathrm{xf}'(\theta(\mathrm{x})\mathrm{x})=\mathrm{f}(0)+\frac{1}{2}f''(0)+o(x^2)$

两边同除以x^2，再令 $x \to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(\theta(x))-f'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}f''(0)+\frac{o(x^2)}{x}\right]$

故$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$

14. 设$x=m$时$f(m)$为最大值,$x=n$时$f(n)$为最小值

当 m<n 时，因为$|f'(x)|\le 1$

所以 $f(m)-f(0)<m$ ①

$f(m)-f(n)<n-m$ ②

$f(1)-f(n)<1-n$ ③

令①+②+③，$2f(m)-2f(n)+f(1)-f(0)<1$

因为$f(0)=f(1)$

所以$|f(m)-f(n)|<\frac{1}{2}$

当 n<m 时，同理可得$|f(m)-f(n)|<\frac{1}{2}$

故 f(x)极值差小于$\frac{1}{2}$

所以$|f(x_1)-f(x_2)|\le\frac{1}{2}$

15. 由中值定理得：$\exists\xi_1\in(0,x)$使$f(x)=f(0)+f'(\xi_1)(x_1-1)\ge f(0)+kx$

则$\exists x_0$使$f(x_0)>0$，又因为$f(0)<0$

此时由介值定理得：$\exists\,\xi\in(0,x_0)\subset(0,+\infty)$使$f(\xi)=0$

又因为$f'(x)>0$

所以 f(x)为单增函数

即在(0，+∞)上存在唯一ξ使得 f(ξ)=0

16 .设$f(x)$在（$-\infty$，$+\infty$）内可导,并且$f(x)+f'(x)\ne 0$,证明$f(x)$在（$-\infty$，$+\infty$）内最多存在一个零点.（此题原为证明$f(x)$有且仅有一个零点，但无法证明，故进行改动）

证明: $\because f(x)+f'(x)\ne 0$

$\because$可分为两种情况:（1）$f(x)+f'(x)<0$；（2）$f(x)+f'(x)>0$

不妨取（1）进行证明.

根据$f(x)+f'(x)$可构造$F(x)=e^x f(x)$

$\therefore F'(x)=e^x\big(f(x)+f'(x)\big)<0$

$\therefore F(x)$在（$-\infty$，$+\infty$）单调递减

进行分类讨论

（1） $\lim_{x\to-\infty} F(x)\cdot \lim_{x\to+\infty} F(x)<0$

由单调函数零点存在定理，存在一个点 $c\in(-\infty,+\infty)$ 使得 $F(c)=0$，即 $f(c)=0$

(2) $\lim_{x\to-\infty} F(x)\cdot \lim_{x\to+\infty} F(x)>0$

并且 $F(x)$ 单调递减，∴不存在点 c 使得 $F(c)=0$，即不存在点 c 使得 $f(c)=0$，

(3) $\lim_{x\to-\infty} F(x)\cdot \lim_{x\to+\infty} F(x)=0$

∴存在一点 c 使得 $F(c)=0$，即 $f(c)=0$

综上：最多存在一个点 c 使得 $f(x)=0$

同理证得（2）情况

∴证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内最多存在一个零点.

17.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，且 $f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$,

证明：（1）存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\eta)=\eta$;

（2）对于任意实数 λ，必存在 $\xi\in(0,\eta)$ 使得 $f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)=1$;

证明：

（1） 构造函数 $F(x)=f(x)-x$,

易知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导

又∵ $F(\frac{1}{2})\cdot F(0)<0$，∴由零点存在定理必存在一点 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $F(\eta)=0$

即 $f(\eta)-\eta=0$，也就是 $f(\eta)=\eta$

（2） 构造函数 $H(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$，易知 $H(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导

∴ $H'(x)=-\lambda e^{-\lambda x}[f(x)-x]+e^{-\lambda x}[f'(x)-1]=e^{-\lambda x}(f'(x)-1-\lambda[f(x)-x])$,

又∵ $H(0)=0=H(\eta)$

由罗尔定理得：必存在一点 $\xi\in(0,\eta)$ 使得 $H'(\xi)=0$

∴ $e^{-\lambda\xi}(f'(\xi)-1-\lambda[f(\xi)-\xi])=0$

∴ $f'(\xi)-1-\lambda[f(\xi)-\xi]=0$

即 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$

证毕

18. 设函数$f(x)$在[0,1]上连续，（0，1）内可导，且$f(0)=0, f(1)=1$.证明：对任意的正数a,b,在区间$(0，1)$内存在不同的ξ，η，使得$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$.

证：取一点 $c\in(0，1)$，$\because f(x)$在[0,1]上连续，（0，1）内可导

$\therefore$由拉格朗日中值定理可得：必存在一点$\xi\in$（0，c），使得$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}$

同理：必存在一点$\eta\in$（c，1），使得$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}$

由于ξ，η分别处于不同区间，$\therefore$在区间$(0，1)$内存在不同的ξ，η

将$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}$，$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}$带入待证等式$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$

化简整理：$\frac{ac}{f(c)}+\frac{b(1-c)}{1-f(c)}=a+b$

$\therefore\frac{a}{(a+b)f(c)}c+\frac{b}{(a+b)(1-f(c))}(1-c)=1$

解得：$\mathbf{f(c)=c}$ **(1)**

猜得：$\frac{a}{(a+b)f(c)}$=1，解得$f(c)=\frac{a}{a+b}$ **(2)**,

再验证**（1）（2）**舍取

选用介值定理进行判断**（2）**的舍取

$\because f(c)=\frac{a}{a+b}$ 易得$0<f(c)=\frac{a}{a+b}<1$

$\therefore 0<f(c)=\frac{a}{a+b}<1 \ \leftrightarrow\ f(0)<f(c)=\frac{a}{a+b}<f(1)$

由介值定理可得存在 $c\in(0，1)$使得$f(c)=c$

$\therefore$(2)取

$f(c)=c$ $(\mathbf{1})$舍去，此处不证明啦（使用介值定理或零点定理证明不存 c 即可）

$$\therefore f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{a}{c(a+b)}$$

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{1-\dfrac{a}{a+b}}{1-c}=\frac{b}{(1-c)(a+b)}$$

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a\cdot\frac{c(a+b)}{a}+b\frac{(1-c)(a+b)}{b}=ac+bc+a+b-ac-bc=a+b$$

证毕.

19.(达布定理)设函数$f(x)$在[a,b]上可导，证明

（1）若$f'(a)f'(b) < 0$,则必存在$\xi \in$（a,b）,使得$f'(\xi) = 0$

（2）若常数 c 介于任意$f'(a), f'(b)$之间，则必存在$\eta \in$ （a,b）,使得$f'(\eta) = c$

证明：（1）不妨设$f'(a) > 0, f'(b) < 0$

由导数定义:$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$

由极限局部保号性：$f(x) - f(a) > 0$

同理：$f(x) - f(b) > 0$

即$f(x) > f(a)$，$f(x) > f(b)$

$\therefore f(a)$，$f(b)$均不是$f(x)$最大值

又$\because$ $f(x)$在[a,b]可导，$\therefore f(x)$在[a,b]上连续

$\therefore$由闭区间连续函数的性质可知：$f(x)$必在（a，b）内取到最大值

故存在一点$\xi \in (a,b)$,使得$f(\xi)$为最大值，即$f'(\xi) = 0$

（2）不妨令$F(x) = f(x) - cx$，$f'(a) < c < f'(b)$

则$F'(a) = f'(a) - c < 0$．$F'(b) = f'(b) - c > 0$.

由导数定义：$F'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} < 0$,局部保号性得$F(x) > F(a)$，同理$F(x) > F(b)$

$\because F(x) = f(x) - cx$，$\therefore F(x)$在$[a,b]$连续

又$\because F(a)$，$F(b)$均不是最大值

$\therefore F(x)$必在(a,b)内取得最大值

故存在一点$\eta \in (a,b)$,使得$F(\eta)$为最大值，即$F'(\eta) = 0$

$\therefore f'(\eta) = c$

证毕

达布定理也叫导数的介值定理，不可用零点定理证明，因为其导函数连续性未知，使用零点定理就默认其导函数连续，这就错了.

20.（广义罗尔中值定理）设(a,b)为有限或无穷区间，f(x)在(a,b)内可导，且满足

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = A$,证明：存在$\xi \in (a,b)$,使得$f'(\xi) = 0$

证明：（1）当(a,b)为有限区间时，　　(后续证明需要使用闭区间连续函数性质)

补充定义：

$\boxed{f(x) \quad x \in (a,b)}$

$F(x)=$

$$\boxed{A \quad x=a,b}$$

$\because\ F(a)=\ F(b)=A$，且$F(x)$在$[a,b]$上连续

由罗尔定理可知：存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$F'(x)$=0

即$f'(\xi)=0$

(2)当(a,b)为无穷区间时，即（-∞，+∞）

不妨设$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

在开区间内不适用罗尔定理，故通过一系列方法转化为有限区间，必要时可仿照(1)进行补充定义。

令$x=\varphi(t)=\log\frac{1+t}{1-t}\quad t\in(-1,+1)$ （构造一个无底数对数）

则$\lim\limits_{t\to-1^+}\varphi(t)=-\infty$ ，$\lim\limits_{t\to1^-}\varphi(t)=+\infty$

再令$g(t)=f(\varphi(t))\ \ t\in(-1,+1)$

则$\lim\limits_{t\to-1^+} g(t)=\lim\limits_{t\to+1^-} g(t)=A$

补充定义：$g(-1)=\ g(1)=A$

$\therefore g(t)$在[-1,+1]上为连续函数

又$\because g(-1)=\ g(1)=A$

$\therefore$由罗尔定理可知：存在一点$\xi\in(-1,+1)$，使得$g'(\xi)$=0

$\because g'(t)=\ f'(\varphi(t))\cdot\ \varphi'(t)$，又$\because x=\varphi(t)$

$\therefore g'(t)=f'(x)\frac{dx}{dt}=\ f'(x)\frac{1}{1-t^2}$

即$g'(\xi)=f'(\xi)\ \frac{1}{1-\xi^2}$=0

故$f'(\xi)=0$

证毕

补充：

a为有限实数,b为无穷;a为无穷，b为有限实数这两种情况就请同学们查阅资料进行证明