习题 2.4

1.（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-4x}{x}$=$\lim\limits_{x\to 0}(3x-4)$=-4$\neq 0$ ∴$3x^2$-4x=O(x)

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 sin\frac{1}{x}}{x}$=$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$=0 ∴ x^2sin$\frac{1}{x}$=o(x)

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{xsinx^2}{x^3}$=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx^2}{x^2}$=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx^2}{x^2}$=1 ∴ $xsinx^2 \sim x^3$

(4)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1-2x}{x^2}$=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}$=1 ∴ $(1+x)^2-1-2x\sim x^2$

2. (1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+1}{x^2+1}*x=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2+x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{x-1}{x^2+1})$=1 ∴ $\frac{x+1}{x^2+1}\sim\frac{1}{x}$

(2)令 t=$\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^2 sin\frac{1}{t}}{t}$ =0(同 1.（2）) ∴ $t^2 sin\frac{1}{t}=o(t)$ ∴ $\frac{1}{x^2}sinx=o(\frac{1}{x})$

(3)令 t=$\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{2tsint}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2sint}{t}=2\neq 0$, ∴ $2tsint=O(t^2)$,即$\frac{2}{x}sin\frac{1}{x}=O(\frac{1}{x^2})$

(4)令 t=$\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^2-1-2t}{t^2}$=1(同 1.（4）) ∴ $(1+t)^2-1-2t\sim t^2$

$$\therefore (1+\frac{1}{x})^2-1-\frac{2}{x}\sim\frac{1}{x^2}$$

3. (1)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha x}{\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$

(2)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^m}{x^m}=1$

(3)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{x}=\frac{1}{2}$

(4)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}$=1

(5)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$=$\frac{1}{2}$

(6)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n}\sin x}{\tan x}$=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n}x}{x}$=$\frac{1}{n}$

(7)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}$=2

(8)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin\beta x}$=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\beta x}$=$\frac{1}{\beta}$

(9)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x(\sin x)^2}$=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x*\frac{1}{2}}{x*x^2}x^2$=$\frac{1}{2}$

(10)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}$=1

4.均设为关于 x 的 k 阶无穷小量

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{3+\sin x^2}}{x^k}$=$\lim\limits_{x\to 0}(x^{3-k}+100x^{2-k})$

当 k=2 时，原式=100≠ 0 ∴是 x 的二阶无穷小量

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+\sin x^2}{x^k}$=$\lim\limits_{x\to 0}(x^{2-k}+\frac{\sin x^2}{x^k})$

当 k=2 时，原式=2≠ 0 ∴是 x 的二阶无穷小量

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(1+x)}{x^k(1+\sqrt[3]{x})}$=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}$=1

当 k=2 时，原式=1≠ 0 ∴是 x 的二阶无穷小量

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{x^k}$= $\lim\limits_{x\to 0}x^{3-k}$

当 k=3 时，原式=1≠ 0 ∴是 x 的三阶无穷小量

附：额外三角等价无穷小替换

$\tan x$-x~$\frac{1}{3}x^3$

$$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$$

$$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$$