习题6.1

1.(1) × ($f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积一定有界)

但 $f(x)$ 有界 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积最基本条件)

(2) × ($\lambda \to 0 \neq n \to \infty$)

(3) ~~×~~ √　　　(4) √

2.(1) C　　(2) D (由施瓦茨不等式得 $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$

其中令 $f(x)=x$, $g(x)=1$

则 $\left(\int_a^b x\,dx\right)^2 \le \int_a^b x^2dx\,(b-a)$

即 $\left(\int_0^1 x\,dx\right)^2 \le \int_0^1 x^2dx$

(3) D

3. $S=\int_0^{10}(10t+1)dt = 510m$

4. 解 (1) 令 $f(x)=x$, $x\in[0,1]$

将 $x\in[0,1]$ n等份, $\Delta x_i=\frac{1}{n}$

取 $\xi_i=\frac{i}{n}$ $(i=1,2\cdots n)$

则 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \cancel{\frac{1}{n}}\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)$

$=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n}$

当 $\lambda\to 0$ 时, $n\to\infty$

故 $\int_0^1 x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{1}{2}$

(2) 令 $g(x)=e^x$, $x\in[0,1]$

将 $x\in[0,1]$ n等份, $\Delta x_i=\frac{1}{n}$

取 $\xi_i=\frac{i}{n}$ $(i=1,2\cdots n)$

则 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}e^{\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{n}e^{\frac{n}{n}}$

$=\frac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{i}{n}}+\cdots+e^1)$

$=\frac{1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ (等比数列)

由 $\lambda\to 0$ 时, $n\to\infty$ 时

$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{-\frac{1}{n}}$ (等价无穷小)

$=\lim_{n\to\infty}(e-1)e^{\frac{1}{n}}=e-1$

5. 由定积分几何意义得

$\frac{1}{2}\cdot 2(k+8+k)=10$

$\Rightarrow 2k=2 \Rightarrow k=1$

6.(1) 解: 令 $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$, $x\in[0,1]$

对 $x\in[0,1]$, n条等份, $\Delta x_i=\frac{1}{n}$

取 $\xi_i=\frac{i}{n}$ $(i=1,2\cdots n)$

则 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{(n+i)^2}$

当 $n\to\infty$, $\lambda\to 0$

则原式 $=\cancel{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx}\ \int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx$

(2) 解: 令 $f(x)=\sin x$

在 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 分成n条等份, 则 $\Delta x_i=\frac{\pi}{2n}$

取 $\xi_i=\frac{i\pi}{2n}$ $(i=0,1,2\cdots n-1)$

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{\pi}{2n}[\sin 0+\sin\frac{\pi}{2n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}]$

当 $n\to\infty$, $\lambda\to 0$

则原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

7.(1) 解：原式 $=\int_c^b f(x)dx+\int_b^a f(x)dx$

$=\int_c^a f(x)dx$

(2) 由积分中值定理得

平均值为 $f(\xi)=\frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 e^x dx$

8. (1) 由 $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x}$ 在区间 $[0,1]$ 可积，且在 $[0,1]$ 上 $x\le\sqrt{x}$

由保序性 $\int_0^1 x dx\le\int_0^1\sqrt{x}dx$

(2) 同理 $x\ge\sin x$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x dx\ge\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$

(3) $\because e^{2x}\le e^x$ 在 $[-1,0]$ 上

$\therefore \int_{-1}^0 e^{2x}dx\le\int_{-1}^{0}e^x dx$

两边加负号即 $\int_0^{-1}e^{2x}dx\ge\int_0^{-1}e^x dx$

(4) 由 $\ln x\ge(\ln x)^2$ 在 $[1,2]$ 上

同理 $\int_1^2\ln x dx\ge\int_1^2(\ln x)^2dx$

(5) 由 $x\le\tan x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上

同理 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan x dx$

9. (1) 由在 $x\in[0,1]$ 内

$\frac{1}{1+x^2}\in[\frac{1}{2},1]$

则 $\frac{1}{2}\cdot 1\le\int\frac{dx}{1+x^2}\le 1\cdot 1$ (推论6.1.1)

即 $\frac{1}{2}\le\int\frac{dx}{1+x^2}\le 1$

(2) 由于在 $x\in[0,2]$，$x^2-2x\in[-1,0]$

则 $e^{x^2-2x}\in[\frac{1}{e},1]$

$\frac{2}{e}\le\int_0^2 e^{x^2-2x}\le 2$

(3) 在 $x\in[0,2\pi]$ 内

$\frac{1}{1+0.5\cos x}\in[\frac{2}{3},2]$

则 $\frac{4\pi}{3}\le\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+0.5\cos x}\le 4\pi$

(4) 在 $x\in[0,100]$ 内

则 $\frac{e^{-x}}{x+100}\in[\cancel{\frac{1}{100}}\ \frac{\frac{1}{e^{100}}}{200},\frac{1}{100}]$

$\frac{1}{2e^{100}}\le\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}\le 1$

10. 证：(1) $\int_0^2\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx+\int_1^2\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx$

由积分中值定理得

原式 $=f(\xi_1)(1-0)+f(\xi_2)(2-1)$ (其中 $\xi_1\in[0,1]$，$\xi_2\in[1,2]$)

$=\frac{1}{\sqrt{1+\xi_1^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+\xi_2^3}}$

则 $\frac{1}{\sqrt{1+0}}+\frac{1}{\sqrt{1+1}}\le\int_0^2\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx\le\frac{1}{\sqrt{1+1}}+\frac{1}{\sqrt{1+2^3}}$

即 $\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\le\int_0^2\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx\le 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\,dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$

积分中值定理

$= \sin^2\xi_1\left(\frac{\pi}{6}-0\right) + \sin^2\xi_2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\xi_3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$ ($\xi_1 \in [0,\frac{\pi}{6}]$, $\xi_2 \in [\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$, $\xi_3 \in [\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$)

则 $\frac{\pi}{6}\sin^2 0 + \frac{\pi}{6}\sin^2\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\sin^2\frac{\pi}{3} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx \le \frac{\pi}{6}\left(\sin^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{2}\right)$

即 $\frac{\pi}{6} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx \le \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+1\right) = \frac{\pi}{3}$

得证

11. 解: 由题意得 $\int_0^1 f(x)\,dx$ 为具体值

设 $f(x) = x + t$

则 $2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 (x+t)\,dx = t$

则 $2\int_0^1 x\,dx + 2\int_0^1 t\,dx = t$

则 $2\int_0^1 x\,dx = -t$

$t = -2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = -1$

故 $f(x) = x - 1$

制作人：吴华东