习题2.6

制作人：吴华东

1. (1) 证：

① $\forall x_0 \in [0,2]\ (x \neq 1)$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x_0-1} = f(x_0)$

② 当 $x_0 = 1$ 时

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$

故 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上除点 $x=1$ 外是连续的

(2) 证：① 假设 $\exists x_0 \in [0,2]$ 是 $f(x_0)$ 为最大值

则 $f(x_0) = \frac{1}{x_0-1}$ 且 $f(x_0) > 0$

不妨取 $x_1 = \frac{1}{f(x_0)+1} + 1 \in [0,2]$ 且 $x_1 \neq 1$

$f(x_1) = \frac{1}{x_1-1} = \frac{1}{\frac{1}{f(x_0)+1}+1-1} = f(x_0)+1 > f(x_0)$

这与条件矛盾

② 假设 $\exists x_0' \in [0,2]$ $f(x_0')$ 为最小值

则 $f(x_0') = \frac{1}{x_0'-1}$ 且 $f(x_0') < 0$

不妨取 $x_2 = \frac{1}{f(x_0')-1} + 1 \in [0,2]$ 且 $x_2 \neq 1$

$f(x_2) = \frac{1}{x_2-1} = \frac{1}{\frac{1}{f(x_0')-1}+1-1} = f(x_0')-1 < f(x_0')$

与条件矛盾

综上 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上无最大值也无最小值

2. 证：① 假设存在 $x_0 \in (0,1)$ $f(x_0)$ 为最大值

则 $f(x_0) = \frac{1}{x_0}$ $(f(x_0) > 0)$

不妨取 $x_1 = \frac{1}{f(x_0)+1} \in (0,1)$

此时 $f(x_1) = f(x_0)+1 > f(x_0)$（矛盾）

② 同理假设存在 $x_0' \in (0,1)$ $f(x_0')$ 为最小值 $(f(x_0') > 1)$

取 $x_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}f(x_0')+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}(f(x_0')+1)} \in (0,1)$

此时 $f(x_2) = \frac{1}{2}(f(x_0')+1) < \frac{1}{2} \cdot 2f(x_0') = f(x_0')$（矛盾）

综上 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 既无最大也无最小值

3. 证：(1) 记 $f(x)=x^3-5x+1=0$

由所有基本初等函数在其定义域内均连续

得 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续 (闭区间) (容易忘写)

由 $f(0)=1$, $f(1)=-3$

$f(0)f(1)<0$

故零点定理得至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=0$ (开区间)

即方程 $x^3-5x+1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一根

(2) 记 $g(x)=x-2\sin x$

同(1)论述 $g(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 上连续

由 $g(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-2<0$, $g(\pi)=\pi>0$

$g(\frac{\pi}{2})\cdot g(\pi)<0$

故由零点定理得至少存在一点 $\xi\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 使得方程

$x-2\sin x=0$ 有根

4. 证：(x) 记 $g(x)=f(x)-x$

由 $f(x)$, x 均在 $[a,b]$ 上连续得 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

$g(a)=f(a)-a\geq 0$, $g(b)=f(b)-b\leq 0$

① 当 $g(a)=0$ 或 $g(b)=0$ 时

$f(a)=a$ 或 $f(b)=b$ (原式显然成立)

② 当 $g(a)>0$, $g(b)<0$ 时

由零点定理得在 (a,b) 上存在点 ξ 使得 $g(\xi)=0$

即 $f(\xi)=\xi$

综上原式得证

5. 证：由 $AB<0$，不妨设 $A>0$，$B<0$

则 $f(a)=A>0$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B<0$（极限局部保号性得）

一定 $\exists X>a$，当 $x>X$ 时 $f(x)<0$ 成立

不妨取 $b=X+1$，则 $f(b)<0$

则 $f(a)\cdot f(b)<0$

由 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

故由零点定理得 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$

即 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上至少有个零点

6. 证：由 $|f(x)|\le e^{\sin x}-1$ 得

$|f(0)|\le e^{\sin 0}-1=0 \Rightarrow f(0)=0$

由 $0\le|f(x)|\le e^{\sin x}-1$ 得

$\lim\limits_{x\to0}|f(x)|=0$（夹逼定理）

即 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0=f(0)$（书上2-1习题2.(2)结论，用定义很好证）

则函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续