习题 4.5

1. 求下列函数的凸性区间和拐点，

思路：凸性 = $f''(x)$ 正负性　拐点，= $(f''(x)=0)$

(1) $y=x^3-5x^2+3x+5$

解：令 $y=f(x)$，则 $f'(x)=3x^2-10x+3$

$f''(x)=6x-10$

可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{5}{3})$ 上凸，在 $(\frac{5}{3},+\infty)$ 上下凸

$(\frac{5}{3},\frac{20}{27})$ 为拐点，

(2) $y=xe^{-x}$

解：令 $y=f(x)$，则 $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$

$f''(x)=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}(x-2)$

可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上凸，在 $(2,+\infty)$ 下凸

$(2,\frac{2}{e^2})$ 为拐点，

(3) $y=\ln(1+x^2)$

解：令 $y=f(x)$，则 $f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

$f''(x)=\frac{2(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}$

可知 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上凸，在 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 下凸

$(-1,\ln 2)$ 和 $(1,\ln 2)$ 为拐点，

(4) $y=x+\sin x$

解：令 $y=f(x)$，则 $f'(x)=1+\cos x$，

$f''(x)=-\sin x$

可知：$f(x)$ 在 $(2k\pi,\pi+2k\pi)$ 上下凸，在 $(-\pi+2k\pi,2k\pi)$ 上凸，$k\in$

$(k\pi,k\pi)$ 为拐点，

2. 利用函数的凸性，证明下列不等式

思路：①证明上凸下凸 ②套用 $f(\frac{x_1+x_2}{2})$ 与 $\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$ 的不等式

(1) $e^{\frac{x+y}{2}}<\frac{1}{2}(e^x+e^y)$，$x\neq y$

解：设 $f(x)=e^x$

$\because f''(x)=e^x>0$ $\therefore f(x)$ 下凸（严格）

故 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$

则 $e^{\frac{x+y}{2}}<\frac{1}{2}(e^x+e^y)$

(2) ~~生~~ $(\frac{x+y}{2})^n<\frac{1}{2}(x^n+y^n)$，$x>0, y>0, x\neq y, n>1$

解：设 $f(x)=x^n$，则 $f'(x)=\ln n\, x^n$

$\because f''(x)=\ln^2 n\, x^n>0$ $\therefore f(x)$ 下凸（严格）

故 $f(\frac{x+y}{2})<\frac{1}{2}(f(x)+f(y))$

则 $(\frac{x+y}{2})^n<\frac{1}{2}(x^n+y^n)$

3. 求下列函数的渐近线

思路：找到 $y=ax+b$，$a=\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)}\frac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)}(f(x)-ax$

(1) $y=\frac{1}{x^2-4x+5}$

解：$a_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

$b_1=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=0$

当 $x\to-\infty$ 时同理

故渐近线为 $y=0$

(2) $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$

解：$a_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{\frac{2}{x}}+\frac{1}{x})=1$

$b_1=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(e^{\frac{2}{x}}-1)+1$.

令 $t=\frac{1}{x}$，则上式 $=\lim\limits_{t\to0}\frac{e^{2t}-1}{t}+1$

用洛必达易得 $b_1=3$，渐近线$_1$为 $y=x+3$

$a_1=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-1}{x}=0$，$b=1$.

渐近线$_2$为 $y=1$

(3) $y=\ln x$

解：$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=+\infty$ 不存在

当 $x\to0^+$ 时，$f(x)=-\infty$

故垂直渐近线为 $x=0$

(4) $y=2x+\arctan\frac{x}{2}$

解: $a_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}2+\frac{\arctan\frac{x}{2}}{x}=2$

$b_1=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\frac{\pi}{2}$

渐近线$_1$: $y=2x+\frac{\pi}{2}$

$a_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$.

$b_2=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=-\frac{\pi}{2}$

渐近线$_2$ $y=2x-\frac{\pi}{2}$

4、证明

(1) $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 下凸, $\lambda_1+\lambda_2=1$

证: 根据下凸函数定义

有 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)fy$ 成立

取 $x=x_1$, $y=x_2$, $\lambda=\lambda_1$, $1-\lambda=1-\lambda_1=\lambda_2$

则 $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$

(2) $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)\leq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\lambda_3f(x_3)$

证: 将 $\lambda_2x_2+\lambda_3x_3$ 合并为 λ_4x_4

两次使用(1)结论可得

(3) 令 $\lambda_k+\lambda_{k+1}=\lambda_k'$, $\frac{\lambda_k}{\lambda_k'}x_k+\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k'}x_{k+1}=x_k'$

则 $x_k'\in(a,b)$, $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{k-1}+\lambda_k'=1$

易知 $x_1,x_2,\cdots,x_{k-1},x_k'$ 是 (a,b) 内不全相等 k 个数

由归纳法假设有

$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_k'x_k')<\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_k'f(x_k')$

$\because \frac{\lambda_k}{\lambda_k'},\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k'}\in R^+$, 且 $\frac{\lambda_k}{\lambda_k'}+\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k'}=1$

故上式 $\le\frac{x_k}{\lambda_k'}f(x_k)+\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k'}$

因此 $f(\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k)\le\sum_{k=1}^{n}f(\lambda_kx_k)$