习题 6.1

1.（1）✕（$f(x)$在$[a,b]$上可积一定有界，但$f(x)$有界为$f(x)$在$[a,b]$上可积最基本条件）

（2）✕（λ→0≠ $n\to\infty$）

（3）√

（4）√

2.（1）C

（2）D（由施瓦茨不等式得$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx$

其中令$f(x)=x$,$g(x)=1$ 则$\left(\int_a^b x\,dx\right)^2 \le \int_a^b x^2\,dx\,(b-a)$

即$\left(\int_0^1 x\,dx\right)^2 \le \int_0^1 x^2\,dx$）

（3）D

3. $S=\int_0^{10}(10t+1)dt=510m$

4. （1）解：令$f(x)=x, x\in[0,1]$

将$x\in[0,1]$,n等分，$\Delta x_i=\frac{1}{n}$

取$\xi_i=\frac{i}{n}(i=1,2,\dots,n)$

则$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i=\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)$

$=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n}$

当 λ→0 时，$\pi\to\infty$

故$\int_0^1 x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i=\frac{1}{2}$

（2）解：令$g(x)=e^x, x\in[0,1]$

将$x\in[0,1]$ n等分，$\Delta x_i=\frac{1}{n}$

取$\xi_i=\frac{2}{n}(i=1,2,\dots,n)$

则$\sum_{i=1}^n f\,(\xi_i)\Delta x_i=\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}e^{\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{n}e^{\frac{n}{n}}$

$=\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{3}{n}}+\cdots+e^1\right)$

$=\frac{1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}}$（等比数列）

由 $\lambda\to 0$时，$n\to\infty$时

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\bullet\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{-\frac{1}{n}}$（等价无穷小）

$=\lim\limits_{n\to\infty}(e-1)e^{\frac{1}{n}} = e-1$

5. 由定积分几何意义得 $\frac{1}{2}\cdot 2(k+8+k)=10$

$\Rightarrow 2k=2\Rightarrow k=1$

6. （1）解：令$f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$,$x\in[0,1]$

对$x\in[0,1]n$等分,$\Delta x_i=\frac{1}{n}$,取$\xi_i=\frac{2}{n}(i=1,2,\dots,n)$

则$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$

$=\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{(n+i)^2}$

当$n\to\infty$，$\lambda\to 0$

则原式$=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx$

（2）解：令$f(x)=\sin x$

在$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$分成$n$等份，则$\Delta x_i=\frac{\pi}{2n}$

取$\xi_i=\frac{i\pi}{2n}(i=0,1,2,\dots,n-1)$

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i=\frac{\pi}{2n}\left[\sin 0+\sin\frac{\pi}{2n}+\cdots+\frac{\sin(n-1)\pi}{2n}\right]$

当$n\to\infty$，$\lambda\to 0$

则原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

7. （1）解：原式$=\int_c^b f(x)\,dx+\int_b^a f(x)\,dx=\int_c^a f(x)\,dx$

（2）由积分中值定理得

平均值为$f(\xi)=\frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 e^x\,dx$

8. （1）由$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x}$在区间$[0,1]$可积，且在$[0,1]$上 $x\le\sqrt{x}$

由保序性$\int_0^1 x\,dx\le\int_0^1\sqrt{x}\,dx$

（2）同理 $x\ge\sin x$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx\ge\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

（3）因为在$[-1,0]$上 $e^{2x}\le e^x$ 所以$\int_{-1}^0 e^{2x}\,dx\le\int_{-1}^0 e^x\,dx$

两边加负号即$\int_0^{-1} e^{2x}\,dx \ge \int_0^{-1} e^{x}\,dx$

（4）由$lnx \ge (lnx)^2$在$[1,2]$上

同理$\int_1^2 lnx\,dx \ge \int_1^2 (lnx)^2\,dx$

（5）由在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上 $x \le \tan x$

同理$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx$

9. （1）由在$x \in [0,1]$内$\frac{1}{1+x^2} \in \left[\frac{1}{2},1\right]$

则$\frac{1}{2}\cdot 1 \le \int \frac{dx}{1+x^2} \le 1\cdot 1$（推论 6.1.1）

即$\frac{1}{2} \le \int \frac{dx}{1+x^2} \le 1$

（2）由于在$x \in [0,2]$，$x^2-2x \in [-1,0]$

则$e^{x^2-2x} \in \left[\frac{1}{e},1\right]$

$\frac{2}{e} \le \int_0^2 e^{x^2-2x}\,dx \le 2$

（3）在$x \in [0,2\pi]$内 $\frac{1}{1+0.5\cos x} \in \left[\frac{2}{3},2\right]$

则$\frac{4\pi}{3} \le \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0.5\cos x} \le 4\pi$

（4）在$x \in [0,100]$内 则$\frac{e^{-x}}{x+100} \in \left[\frac{\frac{1}{e^{100}}}{200},\frac{1}{100}\right]$

$\frac{1}{2e^{100}} \le \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\,dx \le 1$

10. 证明：（1）$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

由积分中值定理得

原式$= f(\xi_1)(1-0) + f(\xi_2)(2-1)$（其中$\xi_1 \in [0,1]$，$\xi_2 \in [1,2]$）

$= \frac{1}{\sqrt{1+{\xi_1}^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+{\xi_2}^3}}$

则$\frac{1}{\sqrt{1+0}} + \frac{1}{\sqrt{1+1}} \le \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx \le \frac{1}{\sqrt{1+1}} + \frac{1}{\sqrt{1+2^3}}$

即$\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \le \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx \le 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

积分中值定理

$= \sin^2\xi_1\left(\frac{\pi}{6}-0\right) + \sin^2\xi_2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\xi_3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$（$\xi_1 \in \left[0,\frac{\pi}{6}\right]$，$\xi_2 \in \left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，$\xi_3 \in \left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$）

则$\frac{\pi}{6}\sin^2 0+\frac{\pi}{6}\sin^2\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\sin^2\frac{\pi}{3}\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx\le\frac{\pi}{6}\left(\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{3}+\sin^2\frac{\pi}{2}\right)$

即$\frac{\pi}{6}\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx\le\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+1\right)=\frac{\pi}{3}$ 得证

11. 解：由题意得 $\int_0^1 f(x)\,dx$为具体值

设$f(x)=x+t$

则$2\int_0^1 f(x)\,dx=2\int_0^1(x+t)\,dx=t$

则$2\int_0^1 x\,dx+2\int_0^1 t\,dx=t$

则$2\int_0^1 x\,dx=-t$

$t=-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=-1$

故$f(x)=x-1$

习题 6.2

1. （1）$F'(x)=\sqrt{1+x^2}\quad F'(0)=1$

（2）$F'(x)=2-\frac{1}{\sqrt{x}}<0\Rightarrow x<\frac{1}{4}$　区间为$\left(0,\frac{1}{4}\right)$

（3）$F'(x)=f(e^{-x})\cdot e^{-x}(-1)-f(x)=-f(e^{-x})\cdot e^{-x}-f(x)$

（4）令$\int_0^y e^{-t^2}dt+\int_0^x sin^2 tdt=F(x)$

$F'(x)=e^{-y^2}y'+sin^2x=0\Rightarrow y'=-e^{y^2}sin^2x$

（5）因为$[-\pi,\pi]$关于原点对称 又$|sinx|$为偶函数

所以 原式$=2\int_0^\pi sinxdx=-2cosx|_0^\pi=4$

2. （1）原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{cosx^2}{1}=1$

（2）原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\int_0^x e^tdt\cdot e^x}{xe^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\int_0^x e^tdt}{xe^{2x^2-x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2e^x}{e^{2x^2-x}+xe^{2x^2-x}\cdot(4x-1)}=\frac{2\times1}{1+0\times1\times(-1)}=2$

3. （1）$\int_0^1\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2dx=\int_0^1\sqrt{x}\left(1+x-2\sqrt{x}\right)dx$

$=\int_0^1\left(\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}-2x\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-x^2\right)\Big|_0^1$

$=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-1=\frac{1}{15}$

（2）原式$=\int_0^1\frac{-(x^2+1)+2}{1+x^2}dx=\int_0^1\left(-1+\frac{2}{1+x^2}\right)dx$

$=(-x+2arctanx)|_0^1=-1+2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-1$

（3）令　$1-x=t\Rightarrow x=1-t$

$dx=-dt\quad x|_0^1\to t|_1^0$

原式$\int_1^0 e^t(-dt)=\int_0^1 e^tdt=e^x|_0^1=e-1$

（4）原式$=\int_0^1\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}d\left(\frac{1}{2}x\right)$

$=arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}-0=\frac{\pi}{6}$

（5）原式$=\int_{-1}^2\sqrt{2+x}\,d(x+2)=\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^2$

$=\frac{2}{3}\times4^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\times7=\frac{14}{3}$

（6）原式$=\int_0^{\pi}\frac{1-cos2x}{2}dx=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}dx-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}cos2xd(2x)$

$$=\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}-\left(\frac{1}{4}sin2x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

（7）原式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{sinx+cosx}{cosx}\right)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tanx+1)^2\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tan^2x+1+2tanx)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(sec^2x+2tanx)\,dx$$

$$=(tanx-2ln|cosx|)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-2ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=1+\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2}=1+\ln2$$

（8）原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2sin^2x}\,dx$

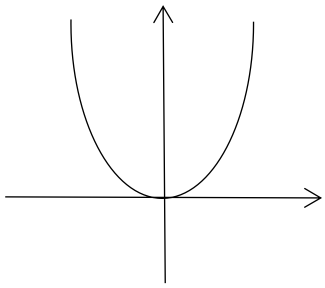
因为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$关于原点对称，又$\sqrt{2sin^2x}$为偶函数

所以原式$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}sinx\,dx=-2\sqrt{2}cosx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}$

（9）原式$=\int_0^1x^2\,dx+\int_1^2 1dx$

$$=\frac{x^2}{3}\Big|_0^1+x\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{3}+2-1=\frac{4}{3}$$



（10）原式$=\int_0^1 0\,dx+\int_1^2 sinxdx+\int_2^3 2sinxdx+\int_3^{\pi}3sinxdx$

$$=-cosx\Big|_1^2-2cosx\Big|_2^3-3cosx\Big|_3^{\pi}$$

$$=-cos2+cos1-2cos3+2cos2+3+3cos3$$

$$=cos1+cos2+cos3+3$$

4. 解：$\frac{dy}{dx}=\frac{f^2(t)f\prime(t)}{f(x)f\prime(t)}=f(t)$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{f\prime(t)}{f(t)f\prime(t)}=\frac{1}{f(t)}$$

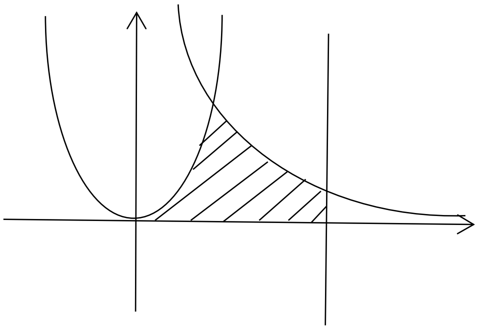
5. 证：$y'=xf(x)$

因为$f(x)$>0 当x>0 时，y'>0，$y\uparrow$

当x<0 时，y'<0，$y\downarrow$

所以当$x=0$时，y取最小值，得证

6. 解:$S=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2\frac{1}{x}dx$



$=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+lnx\Big|_1^2$

$=\frac{1}{3}+ln2$

7. （1）证：$\int_{-\pi}^{\pi}cosnxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}cosnxd(nx)$

$=\frac{1}{n}sin(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{n}[sinn\pi-sin(-n\pi)]=0$

所以得证

（2）证：$=\int_{-\pi}^{\pi}sinnxdx=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}sinnxd(nx)$

$=-\frac{1}{n}cosnx\Big|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{n}[cosn\pi-cos(-n\pi)]$

$=-\frac{1}{n}(cosn\pi-cosn\pi)=0$

所以得证

（3）证：$\int_{-\pi}^{\pi}cos^2nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+cos(2nx)}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}1dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2n}cos(2nx)d(2nx)$

$=\frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{4n}sin(2nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}$

$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+0=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$

所以得证

（4）证：$\int_{-\pi}^{\pi}sin^2nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-cos(2nx)}{2}dx$

$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}dx-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4n}cos(2nx)d(2nx)$

$=\frac{x}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{4n}sin(2nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}$

$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)-0=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$

所以得证

8. （1）证：$\int_{-\pi}^{\pi} cosmxcosnxdx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}[cos(m+n)x + cos(m-n)x]dx$（积化和差公式）

$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} cos(m+n)xdx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} cos(m-n)xdx$

$= \frac{1}{2(m+n)}\int_{-\pi}^{\pi} cos(m+n)xd(m+n)x + \frac{1}{2(m-n)}\int_{-\pi}^{\pi} cos(m-n)xd(m-n)x$

$= \frac{1}{2(m+n)} sin(m+nx)|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m-n)} sin(m-n)x|_{-\pi}^{\pi}$

$= 0 + 0 = 0$

所以得证

（2）证：$\int_{-\pi}^{\pi} sinmxsinnxdx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[-\frac{1}{2}cos(m+n)x + \frac{1}{2}cos(m-n)x\right]dx$

$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} cos(m+n)xdx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} cos(m-n)xdx$

$= -\frac{1}{2(m+n)}\int_{-\pi}^{\pi} cos(m+n)xd(m+n)x + \frac{1}{2(m-n)}\int_{-\pi}^{\pi} cos(m-n)xd(m-n)x$

$= -\frac{1}{2(m+n)} sin(m+nx)|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m-n)} sin(m-n)x|_{-\pi}^{\pi}$

$= 0 + 0 = 0$

所以得证

（3）证：①$m \neq n$时

$$\int_{-\pi}^{\pi} sinmxcosnxdx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}[sin(m+n)x + sin(m-n)x]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} sin(m+n)xdx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} sin(m-n)xdx$$

$= -\frac{1}{2(m+n)} cos(m+n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2(m-n)} cos(m-n)x|_{-\pi}^{\pi}$

$= -\frac{1}{2(m+n)}[cos(m+n)\pi - cos(-(m+n)\pi)]$

$-\frac{1}{2(m-n)}[cos(m-n)\pi - cos(-(m-n)\pi)]$

$= 0 - 0 = 0$

②$m = n$时

$\int_{-\pi}^{\pi} sinmxcosnx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} sin2mxdx = 0$（第 7.（2）的结论）

习题 6.3

1.（1）$\int_0^1 (2x-3)^2 d\mathrm{x}$

令$2\mathrm{x}-3=\mathrm{t} \Rightarrow x=\frac{3+t}{2}$

（积分变量变化时，积分区间也要相应变化）

$\Rightarrow \int_0^1 (2x-3)^2 d\mathrm{x}=\int_{-3}^{-1} t^2 d\left(\frac{3+t}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_{-3}^{-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{3}-\frac{-27}{3}\right)=\frac{13}{3}$

（2）$\mathrm{f}(x)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上连续可导$\Rightarrow f(x)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上可积

$\int_0^1 f'\left(\frac{1-x}{2}\right) d\mathrm{x}$　令$\frac{1-x}{2}=\mathrm{t} \Rightarrow x=1-2\mathrm{t}$，　$\frac{1-x}{2}\Big|_0^1 \to t\Big|_{\frac{1}{2}}^0$

$\Rightarrow \int_0^1 f'\left(\frac{1-x}{2}\right) d\mathrm{x}=\int_{\frac{1}{2}}^0 f'(t) d(1-2t)=2\int_0^{\frac{1}{2}} f'(t) d\mathrm{t}=2f(t)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=2\left(f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)\right)$

2.（1）$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{dx}$（令$\sqrt{1-x}=\mathrm{t}$）

$=\int_1^0 t\cdot(1-t^2)\mathrm{d}(1-t^2)$

$=2\int_0^1 (t^2-t^4) d\mathrm{t}$

$=2\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^1-2\cdot\frac{t^4}{5}\Big|_0^1$

$=2\left(\frac{1}{3}-0\right)-2\left(\frac{1}{5}-0\right)$

$=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$

（2）$\int_0^1 x(2-x^2)^5 dx$

$=-\frac{1}{2}\int_0^1 (2-x^2)^5 d(2-x^2)$

$=-\left(\frac{1}{12}-\frac{2^6}{12}\right)=\frac{21}{4}$

(3)$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$（令$\mathrm{x}=\tan t$，积分上下限改变为$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{4}$）

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 t\cdot\sec t}\cdot\sec^2 t\cdot dt$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{dt}$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 t}\mathrm{d}\sin t$

$$=-\frac{1}{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(4) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$（令$e^x = $ t，则积分上下限改变为e，1）

$$=\int_1^e \frac{1}{t+\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{dt}$$

$$=\int_1^e \frac{1}{1+t^2}\mathrm{dt}$$

$$=\arctan t|_1^e$$

$$=\arctan e-\frac{\pi}{4}$$

(5) $\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\mathrm{d\,x}$（令$e^x=$t，则积分上下限改变为e，1）

$$=\int_1^e \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{dt}$$

$$=\int_1^e \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)d\mathrm{t}$$

$$=\ln t\,|_1^e-\ln(1+t)_1^e$$

$$=1-0-\ln(1+e)+\ln 2$$

$$=1+\ln 2-\ln(1+e)$$

$$=\ln\frac{2e}{1+e}$$

(6) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{dx}$(令x $=\sin t$，则积分上下限改变为$\frac{\pi}{2}$，$\frac{2}{4}$)

$$=\int_{\frac{2}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\mathrm{dt}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2 t-1)d\mathrm{t}$$

$$=-\cot t\,\Big|_{2}^{\pi}-t\Big|_{4}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-(0-1)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=1-\frac{\pi}{4}$$

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cost}{sint+cost}\mathrm{dt}$（令x $=a\sin t$,则积分上下限改变为$\frac{\pi}{2}$，0）

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)+\frac{1}{2}(\cos t-\sin t)}{\sin t+\cos t}\mathrm{dt}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{2}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+cos\,t}\right)d\,t$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(sint+cost)\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}+(|n|-|n|)$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

(8) $\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}$(半余法)

a.$(\mathrm{I}+\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2})$

b.$[\ \mathrm{I}-\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}(\sin\theta+\cos\theta)$

$\Rightarrow I-\mathrm{T}=-\ln(\sin\theta+\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-(\ln 1-\ln 1)=0\ ]$

$\Rightarrow\ \frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}=\mathrm{I}=\frac{\pi}{4}\ \ \frac{\mathrm{a}-b}{2}=J=\frac{\pi}{4}$

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}(a,b>0)$ (令u=tan$x$，则积分上下限改变为+∞，0)

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2\cdot\frac{u^2}{1+u^2}+b^2\frac{1}{1+u^2}}\ \mathrm{darctanu}$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1+u^2}{a^2u^2+b^2}\cdot\frac{1}{1+u^2}du$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{au^2+b^2}du$$

$$=\frac{1}{b^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{a}{b}u\right)^2}\left(d\left(\frac{a}{b}u\right)\right)\cdot\frac{b}{a}$$

$=\frac{1}{ab}\arctan\ \frac{a}{b}u\Big|_0^{+\infty}$ （$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan\frac{a}{b}x=\frac{\pi}{2}$,可认为$\arctan\ \frac{a}{b}u=\frac{\pi}{2}$（$u\to+\infty$)）

$$=\frac{1}{ab}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)$$

(10) $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\le 0\\ e^{-x}, & x>0\end{cases}$

$\int_1^3 f(x-2)d\,x$（令$x-2=t$，则积分上下限改变为 1，-1）

$$=\int_{-1}^1 f(t)d\,t$$

$=\int_{-1}^0 f(t)d\,t+\int_0^1 f(t)d\,t$（分段函数将积分区间相应分段）

$$=\int_{-1}^0(1+t^2)d\,t+\int_0^1 e^{-t}d\,t$$

$= t1_{-1}^{0} + \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{0} - e^{-t}|_0^1$

$= 1 + \frac{1}{3} - e^{-1} + 1$

$= \frac{7}{3} - \frac{1}{e}$

3.证明：因为$f(x)$在$[-a,a]$上连续

$\Rightarrow f(x)$在$[-a,a]$上可积

$\int_{-a}^{a} x\big(f(x)+f(-x)\big)d\,x = \int_{-a}^{a} x\,f(x)dx + \int_{-a}^{a} x\,f(-x)dx$

$\Rightarrow \int_{-a}^{a} x\,f(-x)dx$（令$-x=t$，则积分上下限改变为$-a,a$）$\int_{a}^{-a}(-t)f(t)d(-t) =$

$\int_{a}^{-a} t\,f(t)dt = \int_{a}^{-a} x\,f(x)dx$

$\Rightarrow \int_{-a}^{a} x\big(f(x)+f(-x)\big)d\,x = \int_{-a}^{a} x\,f(x)dx + \int_{a}^{-a} x\,f(x)dx = 0$

4 证明：

$\int_0^1 x^m(1-x)^n d\,x \xrightarrow[t|_1^0]{1-x=t} \int_1^0 (1-t)^m t^n d(1-t) = \int_0^1 t^n(1-t)^m d\,t = \int_0^1 x^n(1-$

$x)^m d\,x$(等于右式)

综上：$\int_0^1 x^m(1-x)^n d\,x = \int_0^1 x^n(1-x)^m d\,x$

5.证明：令$t=\frac{1}{u}$　$(x>0)$（$x>0\Rightarrow t>0$即可$\Rightarrow t=\frac{1}{u}(u>0)$）

$t|_x^1 \Rightarrow u|_{\frac{1}{x}}^{1}$

$\Rightarrow \int_x^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+u^2}du = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$

综上：$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$　$(x>0)$

6.证明：$f(x)$为连续函数⇒在$x\in D$时可积

（1）因为$f(x)$为奇函数

所以$f(x) = -f(-x)$

令$F(x) = \int_0^x f(t)d\,t$，则　$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)d\,t$

令$t=-u$，$t|_0^{-x} \to u|_0^x$

$\Rightarrow F(-x) = \int_0^x f(t)d\,t = \int_0^x f_0 f(-u)d(-u) = \int_0^x -f(-u)d\,u = \int_0^x f(u)d\,x =$

$\int_0^x f(t)d\,t = F(x)$

故$\int_0^{-x} f(t)\,dt$ 在$f(x)$为奇函数时，为偶函数。

（2）因为$f(x)$为偶函数

所以$f(x) = f(-x)$

令$G(x)=\int_0^x f(t)d\,t$，$G(-x)=\int_0^{-x} f(t)d\,t$

令$t=-k$，　$t|_0^{-x} \to k|_0^x$

$\Rightarrow G(-x)=\int_0^x f(t)d\,t=\int_0^x f(-k)d(-k)=-\int_0^x f(k)d\,k=-G(x)$

故当$f(x)$为偶函数时，$\int_0^x f(t)\,dt$为奇函数。

习题 6.4

1.（1）解：

$\int_0^1 xe^x dx$

$=xe^x|_0^1-\int_0^1 e^x dx$

$=xe^x|_0^1-e^x|_0^1$

$=1$

（2）解：

$\int_0^{\frac{1}{2}} arcsinxdx$

$=x\cdot \arcsin x|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=x\cdot \arcsin x|_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

$=x\cdot \arcsin x|_0^{\frac{1}{2}}+\sqrt{1-x^2}|_0^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$

（3）解：

由推导结论：

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx\cos^2 xdx$

$=\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$

$=\frac{16}{35}$

（4）解：

同理：

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx^6 dx$

$=\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$

$=\frac{5\pi}{32}$

结论推导：

$A_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n xdx$ (n≥2)

$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sinx)^{n-1}d(cosx)$

$=-(sinx)^{n-1}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}cosxd(sinx)^{n-1}$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}cosx(sinx)^{n-2}cosxdx$

$=(n-1)(A_{n-2}-A_n)$

$\therefore nA_n=(n-1)A_{n-2}$

$\Rightarrow A_n=\frac{n-1}{n}A_{n-2}$

$\because A_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sinx)^0dx=\frac{\pi}{2}$

$A_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sinx)^1dx=1$

$$\boxed{\therefore A_n=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2} & (n=2k)\\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & (n=2k+1)\end{cases}}$$

易证：

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n xdx}$$

2. （1）解：

$\int_0^{\pi} xsin\frac{x}{2}dx$

$=-2\int_0^{\pi} xdcos\frac{x}{2}$

$=-2(x\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi} xdcos\frac{x}{2}dx)$

$=2(2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}-x\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi})$

=4

（2）解：

$$\int_0^e x\,ln^2\,x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^e ln^2\,x\,dx^2$$

$$=\frac{1}{2}(x^2\,ln^2\,x\,|_0^e-\int_0^e 2x\,ln\,x\,dx)$$

$$=\frac{1}{2}[x^2\,ln^2\,x\,|_0^e-(x^2\,ln\,x-\int_0^e xdx)]$$

$$=\frac{1}{2}[x^2\,ln^2\,x+\frac{1}{2}x^2-x^2\,ln\,x)|_0^e$$

$=\frac{e^2}{4}$（正确答案）

$\int_1^e x\,ln^2\,x\,dx=\frac{1}{4}(e^2-1)$（改正后的题目答案）

（3）

$$\int_0^1 x\,arctan\,x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 arctan\,x\,dx^2$$

$$=\frac{1}{2}(x^2\,arctan\,x\,|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{x^2+1}dx)$$

$$=\frac{1}{2}(x^2\,arctan\,x\,|_0^1-\int_0^1 dx+\int_0^1\frac{dx}{x^2+1})$$

$$=\frac{1}{2}(x^2\,arctan\,x\,|_0^1-x|_0^1+arctan\,x\,||_0^1$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

（4）

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} d \sin x$$

$$= e^{2x} \sin x \,|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{sin}x dx$$

$$= e^{2x} \sin x \,|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} d \cos x$$

$$= e^{2x} \sin x \,|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2(e^{2x} \cos x \,|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx)$$

移项得:

$$原式 = \frac{1}{5}(e^{\pi} - 2)$$

（5）

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$$

$$令 -\sqrt{x} = t$$

$$\Rightarrow x = t^2$$

$$dx = 2tdt$$

$$原式 = \int_0^{-1} 2te^t dt$$

$$= -2\int_{-1}^{0} te^t dt$$

$$= -2e^t(t-1)|_{-1}^{0}$$

$$= 2 - 4e^{-1}$$

（6）

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$$

$$= \int_{1}^{e} \ln x\, dx - \int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x\, dx$$

$$= (x\ln x - x)|_1^e - (x\ln x - x)|_{\frac{1}{e}}^{1}$$

$$= 2 - \frac{2}{e}$$

$$\boxed{\int \ln x dx = x\ln x - x + c}$$

（7）

$$\int_{1}^{e} \sin(\ln x) dx$$

$$= [x\sin(\ln x)]|_1^e - \int_{1}^{e} \cos(\ln x) dx$$

$$= [x\sin(\ln x)|_1^e - [x\cos(\ln x)]|_1^e - \int_{1}^{e} \sin(\ln x) dx$$

移项得:

$$原式 = \frac{1}{2}(e\sin 1 - e\cos 1 + 1)$$

（8）

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x\arcsin x\, d\arcsin x$$

令 $\mathrm{arcsinx} = t \Rightarrow x = \mathrm{sint}$

原式

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} t\sin t\, dt$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int x\sin ax dx\\ &= \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax + C\end{aligned}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{12}$$

3. 解：

$$\int_0^2 x^2 f''(x)dx$$

$$=\int_0^2 x^2 d(f'(x))$$

$$=x^2 f'(x)|_0^2-2(\int_0^2 xf'(x)dx)$$

$$=x^2 f'(x)|_0^2+2\int_0^2 \quad f(x)-2xf(x)|_0^2$$

$$代入数据得原式=0$$

4. 证明：

（1）

$$\because (f^2(x))'=2f(x)f'(x)$$

$$\therefore \int_a^b xf(x)f'(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b xd(f^2(x))$$

$$=\frac{x}{2}f^2(x)|_a^b-\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx$$

$$=\frac{b}{2}f^2(b)|_a^b-\frac{a}{2}f^2(a)-\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

（2）

由施瓦茨不等式得$(P169)$

$$\left(\int_a^b (f(x)\cdot xf'(x))dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b (xf'(x))^2dx$$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \le \int_a^b x^2(f'(x))^2\,dx$*得证*

5. 证明:

(1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)+f''(x)]\sin x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f''(x)\sin x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx+\sin x\cdot f'(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos x\,dx$$

$$=f'(\frac{\pi}{2})+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,df(x)$$

$$=f'(\frac{\pi}{2})+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx-(\cos x\cdot f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx)$$

$$=f(0)+f'(\frac{\pi}{2})$$

（2）

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)+f''(x)]\cos x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,df'(x)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx+\cos x\,f'(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\sin x\,dx$$

$$=-f'(0)+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,df(x)$$

$$= -f'(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx + \sin x\, f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx$$

$$= f(\frac{\pi}{2}) - f'(0)$$

6. 解（1）

$$f(x) = x^2, f'(x) = 2x, f(0) = 0, f'(\frac{\pi}{2}) = \pi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 2)\sin x\,dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$

$$= \pi + 2\cos x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi - 2$$

（2）

$$f(x) = x^4, f'(x) = 4x^3, f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^4}{16}, f'(0) = 0$$

$$g(x) = x^2, g'(x) = 2x, g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}, g'(0) = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \cos x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^4 + 12x^2)\cos x\,dx - 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^4 + 12x^2)\cos x\,dx - 12\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 2)\cos x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\,dx\right)$$

$= \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24$*（课本后答案错误）*

习题 6.5

1. （1）× $x=0$为奇点

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x}dx=ln|x|\Big|_{-1}^{0+\varepsilon}①+ln|x|\Big|_{0+\varepsilon}^{1}② \quad （\varepsilon\to 0）$$

①$\to +\infty$ ②$\to -\infty$

①②左右两边极限均不存在，所以原式极限不存在（P189）

（2）× $x=0$为$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$奇点

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=-\left(\underbrace{\frac{1}{x}\Big|_{-\infty}^{0}}_{①}+\underbrace{\frac{1}{x}\Big|_{0}^{+\infty}}_{②}\right)$$

①$\to +\infty$ ②$\to -\infty$

左右两边极限不存在，原式极限不存在（P189 课本）

（3）× $\int sindx=-cosx$ 当$x\to\infty$时，$-cosx$无极限，发散

（4）× 反例：令$p=0$ $\int_{0}^{2}\frac{1}{1-x}dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{1-x}dx+\int_{1}^{2}\frac{1}{1-x}dx$

等式右侧两极限均不存在

（5）√ $\int\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}x^{1-p}$

$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_{0+\varepsilon}^{+\infty}$ （$\varepsilon\to 0$）

①$1-p<0$时，$x\to+\infty$时x^{1-p}为0，

$x\to 0$，$x^{1-p}\to+\infty$，发散

②$1-p>0$且$1-p<1$时 $x\to+\infty$，$x^{1-p}\to+\infty$，

$x\to 0$，$x^{1-p}\to 0$，发散

2. （1）$\int_{1}^{+\infty}\frac{lnx}{x^2}dx=\int_{1}^{+\infty}\frac{lnx-1}{x^2}dx+\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$

$$=-\frac{lnx}{x}\Big|_{1}^{+\infty}-\frac{1}{x}\Big|_{1}^{+\infty}$$

$$=-(0-0)-(0-1)=1$$

（2）$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=arcsinx\Big|_{0}^{1}=\frac{\pi}{2}$

（3）$\int_{0}^{1}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=2\int_{0}^{1}e^{\sqrt{x}}d\sqrt{x}=2e^{\sqrt{x}}\Big|_{0}^{1}=2(e-1)$

（4）$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|x|}dx=\int_{-\infty}^{0}e^{ax}dx+\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}dx$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{a}-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{a}e^{ax}-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a}e^{-ax}+\frac{1}{a}$$

↓ ↓

$= 0 \qquad\qquad = 0$

$= \frac{2}{a}$

3. （1）$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} dx$ （配方）

$$= \frac{4}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1} d\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

（2）$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$

$$= \frac{1}{3}\int_{2}^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx \quad \text{（裂项）}$$

$$= \frac{1}{3}\left(ln|x-1|\Big|_{2}^{+\infty} - ln|x+2|\Big|_{2}^{+\infty}\right)$$

$$= \frac{2}{3}ln2 \quad \text{（注：}\lim_{x\to+\infty} ln|x-1| = \lim_{x\to+\infty} ln|x+2|\text{）}$$

（3）$\int_0^1 x^2 lnxdx = \frac{1}{3}\int_0^1 lnxdx^3$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2 lnx\big|_0^1 - \int_0^1 x^3 dlnx\right)$$

$$= \frac{1}{3}x^3\left(lnx-\frac{1}{3}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{9}$$

（4）令$\sqrt{x} = t$

$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt^2 = \int_0^{+\infty} 2t\cdot e^{-t}dt$

$$= -2(1+t)e^{-t}\big|_0^{+\infty}$$
$$= -2\cdot(-1) = 2$$

（5）题目错误，原题应为：$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$

令$\sqrt{x-1} = t, x = t^2+1$

原式$= \int_0^1 (1+t^2)dt = \left(t+\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{8}{3}$

（6）$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$

令$\sqrt{1-x} = t, \sqrt{x} = \sqrt{1-t^2}$

原式$= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} d(1-t^2)$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$$

$= 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

（令$f(t) = \sqrt{1-t^2} \Rightarrow f^2(t) + t^2 = 1$， $(x^2+y^2) = 1$为圆方程而$\sqrt{1-t^2} \geq 0$，所以为半圆，那么从-1积到1的面积为$\frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{2}$）

（7）$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx$

$(x-a)(b-x) = bx - x^2 - ab + ax = -x^2 + (a+b)x - ab$

$= -\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ （这一步就是配方）

$= \frac{|b-a|}{2}\left[1 - \left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{\frac{|a-b|}{2}}\right)^2\right]$

所以原式$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{a+b}{2}}{\frac{|a-b|}{2}}\right)^2}} dx \cdot \frac{2}{|b-a|}$

令$\left(\frac{x-\frac{a+b}{2}}{\frac{|a-b|}{2}}\right)^2$为①，把①看成整体

发现$\frac{2}{|a-b|} dx = d\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}\right)$ （任意常数，根据整体配）

所以原式$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-①^2}} d①$

$= arcsin①\Big|_a^b$　　　　$x = b \to ① = +1$

$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$　　　　$x = a \to ① = -1$

注：3.（7）看似复杂，实则为对关于x的一元二次多项式配方，化成$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$或$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$，达到求积分的目的

（8）$\int_0^1 (lnx)^2 dx = x(lnx)^2\Big|_0^1 - \int_0^1 x\, d[(lnx)^2]$

$= x(lnx)^2\Big|_0^1 - 2\int_0^1 lnxdx$

$= [(lnx)^2 - 2lnx + 2]\Big|_0^1 = 2$

4. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(lnx)^k} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(lnx)^k} dlnx$

令$lnx = m$

$\int_{ln2}^{+\infty} \frac{1}{m^k} dm = \frac{1}{1-k} \cdot m^{1-k}\Big|_{ln2}^{+\infty}$

$= \lim_{m \to +\infty} \frac{m^{1-k}}{1-k} \cdot \frac{(ln2)^{1-k}}{1-k}$ （$k \neq 1$时，该项为常值）

若收敛，则$1-k<0$，才能使$m^{1-k} \to 0, k>1$

5. （1）因为$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{x^2}{x^4-x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{x^2}}+\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{x^4}}}=1$

所以$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4-x^2+1}$收敛

注：用来判断敛散性的一种方法：极限审敛法（与书上不太相同）

1. 对于无穷限广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ ：$f(x)$在$[a,+\infty)$连续且非负

①若$\exists P>1,\lim\limits_{x\to+\infty}x^P f(x)=C<+\infty$,则$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$收敛

②若$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=d>0$（或$=+\infty$）则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散

2. 对于非负积分$\int_a^b f(x)dx,a$为瑕点，$f(x)$在$[a,b]$连续且非负

①若$\exists 0<q<1,\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)$存在，则$\int_a^b f(x)\,dx$收敛

②若$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)f(x)=d>0$（或$=+\infty$），则$\int_a^b f(x)dx$发散

（2）因为$x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}>x\cdot x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{5}{3}}$

所以$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}dx<\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}dx$

因为$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}dx$收敛（比较判别法）

所以$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}dx$收敛

（3）$\int_0^2\frac{dx}{lnx}$

$x=0,x=1$为可能瑕点

原式$=\int_0^1\frac{dx}{lnx}+\int_1^2\frac{dx}{lnx}$

主要上述两式任意一式不收敛，原式不收敛，否则收敛

$\int_1^2\frac{dx}{lnx}$ 利用极限审敛法

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{(x-1)}{lnx}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-1}{\underset{\substack{\downarrow\\ \text{等价无穷小}}}{x-1}}=1$存在极限

$\int_1^2\frac{dx}{lnx}$发散，所以原式发散

（4）$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{x^{n+1}}dx\le\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{x^n}dx$

$\int_0^{+\infty}x^{m+n}dx=\frac{1}{m-n+1}x^{m-n+1}\Big|_0^{+\infty}$

所以当$m-n+1<0$时，原式收敛，否则不收敛

（5）利用极限审敛法：

若$n=p>1, x^{p}\cdot\frac{arctanx}{x^{p}}=arctanx$

$x\rightarrow+\infty, arctanx\rightarrow\frac{\pi}{2}$存在极限为满足原式收敛的一个必要条件

另：$\lim_{x\rightarrow0}(x-0)^{q}\cdot\frac{arctanx}{x^{n}}=\frac{arctanx}{x^{n-q}}$（0为可能奇点）

因为$n>1, n>q\big(q\in(0,1)\big)$

所以该极限为$\frac{0}{0}$型，用洛必达：

$\lim_{x\rightarrow0}\frac{\frac{1}{1+x^{2}}}{\frac{x^{n-q-1}}{n-q}}=\lim_{x\rightarrow0}\frac{n-q}{x^{n-q-1}}$

要使该极限存在，则$n-q-1\Rightarrow n<q+1$

所以$n<2$

综上，$1<n<2$时，原式收敛，否则不收敛

（6）用比较判别法的极限形式：

$\int_{0}^{+\infty}\frac{sin^{2}x}{x}dx\leq\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x}dx=lnx|_{0}^{+\infty}$

①　　②

因为$\tau=1$ 所以①与②有相同的敛散性（P189~P191）

因为$lnx|_{0}^{+\infty}$极限不存在

所以原式发散

（8）因为$\lim_{x\rightarrow1^{-}}\frac{lnx}{1-x^{2}}=\lim_{x\rightarrow1^{-}}\frac{x-1}{1-x^{2}}=\lim_{x\rightarrow1^{-}}\frac{-1}{1+x}=-\frac{1}{2}$

所以只有$x=0$为$\int_{0}^{1}\frac{lnx}{1-x^{2}}dx$的可能奇点、瑕点

利用极限审敛法：

$\lim_{x\rightarrow0}\frac{(x-0)^{q}\cdot lnx}{1-x^{2}}=\lim_{x\rightarrow0}\frac{lnx}{x^{-q}-x^{2-q}}$属于$\frac{\infty}{\infty}$型

洛必达法则：∃q ∈ (0,1)则$\lim_{x\rightarrow0}\frac{\frac{1}{x}}{-q\cdot x^{-q-1}-\underset{q\in(0,1)\text{则该项为}0}{\underset{\downarrow}{(2-q)x^{1-q}}}}=\lim_{x\rightarrow0}\frac{\frac{1}{x}}{-qx^{-q-1}}=-\frac{1}{q}x^{q}=0$

所以原式收敛

注：对于本题判断敛散性，用比较判别法和极限审敛法，若用极限审敛法，则找到所用瑕点，再去判断

6. （1）$\int_{x}^{1}\frac{cost}{t^{2}}dt\leq\int_{x}^{1}\frac{1}{t^{2}}dt$

由等价无穷小$x\rightarrow0$时$1-cosx\sim\frac{1}{2}x^{2}$

所以$cost\sim1-\frac{1}{2}t^{2}$

所以$\int_{x}^{1}\frac{1-\frac{t^{2}}{2}}{t^{2}}dt=\int_{x}^{1}\frac{cost}{t^{2}}dt\leq\int_{x}^{1}\frac{1}{t^{2}}dt$

由夹逼定理：$-\frac{3}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\leq\int_{x}^{1}\frac{cost}{t^{2}}dt\leq-1+\frac{1}{x}$（$x\rightarrow0$）

所以$\lim\limits_{x\to 0}\int_x^1 \frac{cost}{t^2}dt = 1$

（2）$\int_0^x \sqrt{1+t^4}dt > \int_0^x \sqrt{t^4}dt = \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}t^3|_0^x$

因为$x \to \infty$

所以$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{3}t^3\Big|_0^x \to +\infty$

所以原式为$\frac{\infty}{\infty}$型，用洛必达法则

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{1+t^4}}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{3}$

7. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = -0-(-1)] = 1$收敛

所以$\int_1^{+\infty}\left[f^2(x)+\frac{1}{x^2}\right]dx$收敛

$f^2(x) \to a^2, \frac{1}{x^2} \to b^2$

因为$ab < \frac{1}{2}(a^2+b^2)$基本不等式

所以$\left|f(x)\cdot\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}\left[f^2(x)+\frac{1}{x^2}\right]$

所以$\frac{\left|\frac{f(x)}{x}\right|}{f^2(x)+\frac{1}{x^2}} < \frac{1}{2} = \tau$

由比较判别法$\tau \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$

又因为$\int_1^{+\infty}\left[f^2(x)+\frac{1}{x^2}\right]dx$收敛

所以$\int_1^{+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right|dx$收敛

即$\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$绝对收敛

习题 6.6

1.

$$(1)S=\int_0^4\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\left[\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}\times\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$=\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}\times\left[\left(1+\frac{9}{4}\times 4\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]=\frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

$$(2)x'=\frac{y}{2}-\frac{1}{2y}$$

$$S=\int_1^e\sqrt{1+(x')^2}\,dy=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}-\frac{1}{2y}\right)^2}\,dy$$

$$=\int_1^e\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)d\,y=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}y^2+ln\,y\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}e^2+1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}(e^2+1)$$

(3)由题目可知，$x\geq 0$，$y\geq 0$

$$y=\left(1-\sqrt{x}\right)^2\quad y'=\frac{dy}{dx}=2\left(1-\sqrt{x}\right)\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$S=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dx$$

$$=2\int_0^1\sqrt{2x-2\sqrt{x}+1}\,d\sqrt{x}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

(4)设$x=a\cos^3 t\quad y=a\sin^3 t\,(0\leq t\leq 2\pi)$

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{[(a\cos^3 t)']^2+[(a\sin^3 t)']^2}\,dt$$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\,dt$$

$$= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt = 6a.$$

$$(5)S = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left[\left(a(\cos t+t\sin t)\right)'\right]^2+\left[\left(a(\sin t-t\cos t)\right)'\right]^2}\,dt$$

$$= |a|\int_0^{2\pi}\sqrt{(t\cos t)^2+(t\sin t)^2}\,dt$$

$$= |a|\int_0^{2\pi} t\,dt = 2\pi^2|a|$$

$$(6)S = \int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\,d\theta = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8a$$

2.

$(1)\int_a^b |f(x)-g(x)|dx.$

面积$A \geq 0$，且$f(x)$、$g(x)$的大小无法确定

故面积为$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

$(2)\pi\int_a^b |f^2(x)-g^2(x)|dx$

在区间$[a,b]$上，由曲线$y = f(x)$，y

$= g(x)$所围成的平面绕 x 轴旋转

一周所成的旋转体的体积微元为

$dV = \pi|f^2(x)-g^2(x)|dx$

$\therefore V = \pi\int_{a}^{b}|f^2(x) - g^2(x)|dx$

3.

(1)由$\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$得$x = 1$ 或$x = -2$

$S = \int_{-2}^{1}(2 - x - x^2)d\,x = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$

(2)$S = \int_{\frac{1}{e}}^{1}|ln\,x|dx + \int_{1}^{e} ln\,x \cdot dx$

$= \int_{1}^{\frac{1}{e}} ln\,x\,dx + \int_{1}^{e} ln\,x\,dx$

$= (x\,ln\,x - x)|_{1}^{\frac{1}{e}} + (x\,ln\,x - x)|_{1}^{e}$

$= 2 - \frac{2}{e}$

(3)令$x = a\,sin\,t$，$y = b\cos t$

则$S = 4\int_{0}^{a} y\,dx = \frac{4b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_{a}^{4b}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a^2\,cos^2\,t\,dt$

$= 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1 + cos\,2\,t}{2}dt = 2ab\left[t + \frac{1}{2}sin\,2\,t\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi$

(4)$S = \int_{0}^{1}(e^x - e^{-x})dx = [e^x - (-e^{-x})]_{0}^{1}$

$= e + e^{-1} - 2$

(5)$S = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(cos\,x - sin\,x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(cos\,x - sin\,x)dx$

$= (sin\,x + cos\,x)|_{0}^{\frac{\pi}{4}} + (-\,cos\,x - sin\,x)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2} - 2$

(6)由$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$ 得两曲线的交点为$(-2,2),(2,2)$

则$S_1=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx=2\int_{0}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx$

$=2\left[4\arcsin\frac{x}{\sqrt{8}}+\frac{1}{2}x\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{6}x^3\right]\Big|_0^2$

$=2\pi+\frac{4}{3}$

$S_2=S-S_1=\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\pi-\frac{4}{3}=6\pi-\frac{4}{3}$

4.

(1)$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2d\theta$

$x_2=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\theta+1}{2}d\theta$

$=(\sin 2\theta+2x)|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$

(2)$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r^2d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2a^2\cos 2\theta d\theta$

$=\left(\frac{1}{2}a^2\sin 2\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4\times\frac{a^2}{2}\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2a^2$

(3)$0\le \mathrm{t}\le 2\pi$，该图形关于x轴与y轴都对称

$x'=-3a\cos^2 t\sin t$

$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}|a\sin^3 t\,(-3a\cos^2 t\sin t)|dt$

$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\,dt=\frac{3}{8}\pi a^2$

5.

(1)两曲线交点为(0,0)与(1,1)的旋转体体积

$$V=\pi\int_0^1\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-(x^2)^2\right]d\,x=\pi\int_0^1(x-x^4)d\,x=\frac{3}{10}$$

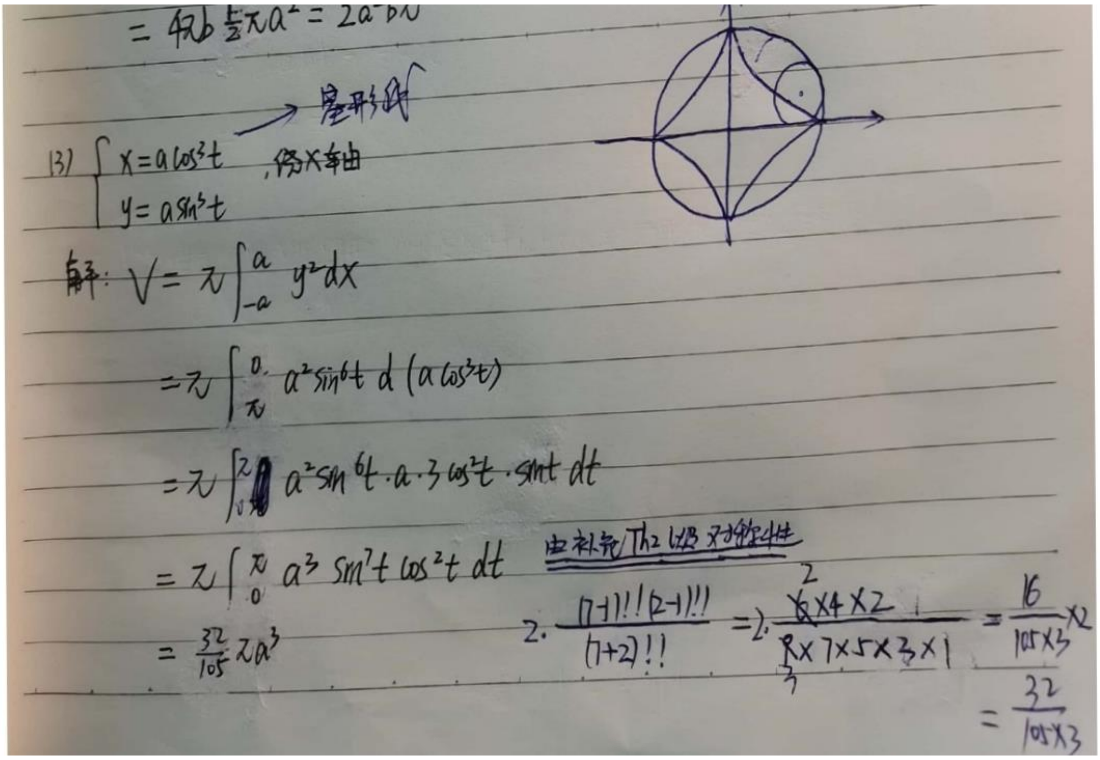
$$(2)V=\pi\int_{-a}^{a}\left[\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2-\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\right]dx$$

$$=4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=2\pi^2a^2b$$

$$(3)V=\pi\int_{-a}^{a}y^2dx=3\pi a^3\int_0^{\pi}\sin^7t\cos^2t\,dt$$

$$=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7t-\sin^9t)dt=\frac{32}{105}\pi a^3$$

详细解释如下：



$= 4\pi b\cdot\frac{1}{2}\pi a^2 = 2a^2b\pi$

星形线

(3) $\begin{cases}x=a\cos^3t\\ y=a\sin^3t\end{cases}$,绕x轴

解: $V=\pi\int_{-a}^{a}y^2dx$

$=\pi\int_{\pi}^{0}a^2\sin^6t\,d(a\cos^3t)$

$=\pi\int_{0}^{\pi}a^2\sin^6t\cdot a\cdot 3\cos^2t\cdot\sin t\,dt$

$=\pi\int_{0}^{\pi}a^3\sin^7t\cos^2t\,dt$

$=\frac{32}{105}\pi a^3$

由补充Th2 (4.8)对称性

$2\cdot\frac{(7-1)!!(2-1)!!}{(7+2)!!}=2\cdot\frac{6\times4\times2}{9\times7\times5\times3\times1}=\frac{16}{105\times3}\times2=\frac{32}{105\times3}$

Th2：令 $I(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx$

（这里根据不定积分那里：$\int\cos^m x\sin^n x\,dx=\int\cos^{m-1}x\sin^n x\,d(\sin x)=\frac{1}{n+1}\int\cos^{m-1}x\,d(\sin^{n+1}x)$，找到递推式）

$$\Rightarrow I(m,n)=\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)=\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2)$$

$$\Rightarrow I(m,n)=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!\,(n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & m,n\text{ 都为偶数时}\\[2ex] \dfrac{(m-1)!!\,(n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot 1, & m,n\text{ 一奇一偶时或 } m,n\text{ 都为奇数时}\end{cases}$$

特别地

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=I(n,0)=I(0,n)=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶时}\\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{ 为奇时}\end{cases}$$

注：$0!=1!=1$，$1!!=1$，$2!!=2$

6. 证明：旋转曲面的方程为$\pm\sqrt{y^2+z^2}=f(x)$，由旋转曲面的对称性，取次曲面的上半部分$\Sigma: z=\sqrt{f^2(x)-y^2}$

Σ在 x-O-y 面上的投影区域为

$D=\{(x,y)\mid -f(x)\le y\le f(x)\quad a\le x\le b\}$

$$S=2\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$=2\iint_D\sqrt{1+\left[\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\right]^2+\left[\frac{-y}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\right]^2}\,dxdy$$

$$=2\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\int_{-f(x)}^{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\,dy$$

$$=2\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\cdot\left[arcsin\frac{y}{f(x)}\right]_{-f(x)}^{f(x)}\,dx$$

$$=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

$(1) y' = 2x^{-\frac{1}{2}}$

$$S = 2\pi \int_0^1 2\,x^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \left(2x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx$$

$$= 4\pi \int_0^1 \sqrt{x+4}\, dx = 4\pi \times \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$

$$= \frac{8\pi}{3}\left(5\sqrt{5} - 8\right)$$

$(2) y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3a\, sin^2\, t\, cos\, t}{-3a\, cos^2\, t\, sin\, t} = -\,tan\, t$

由对称性知

$$S = 2\int_0^a 2\,\pi y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

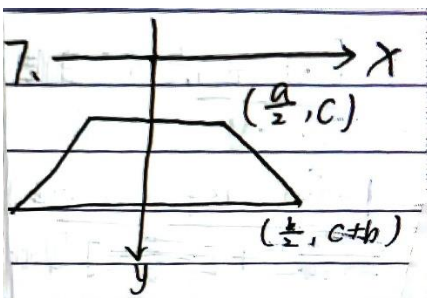
$$= -4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\, sin^3\, t\, \sqrt{1 + tan^2\, t}\, (-3a\, cos^2\, t\, sin\, t) dt$$

$$= 12a^2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4\, t\, sec\, t\, cos^2\, t\, dt$$

$$= 12a^2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4\, t\, d\, sin\, t$$

$$= \frac{12}{5} a^2 \pi$$

7.



如图，AB 的方程为$y = \frac{2h}{b-a}\left(x - \frac{a}{2}\right) + c$对于薄板上每一点$(x, y)$的压力$dF\ = \rho g y \cdot x dy$

由对称性可知

$$P=2\int_{c}^{c+h} d\,F=\int_{c}^{c+h}\left[a+\frac{b-a}{h}(y-c)\right]\rho g y\,dy$$

$$=\frac{1}{6}\rho g h(3ac+3bc+ab+2bh)$$

8. 球的密度与水相同⟹球在水中移动时不做功，x 为积分变量，x∈[0,2r]。把球体分为很多薄层，将相应于$[x,x+dx]$的那一层球体抬到水面时不做功，从离开水面时开始做功且 x-0-y 面上方圆的方程为$(x-r)^2+y^2=r^2$，可知，将相应于$[x,x+dx]$的那一薄层球体提升到$[x-2r,x+dx-2r]$位置时所做的功微元为（ρ为水密度）

$$dW=\rho g(2r-x)\pi y^2dx=\rho g\pi(2r-x)[r^2-(x-r)^2]dx$$

$$=\rho g\pi(2r-x)(2rx-x^2)dx=\rho g\pi(x^3-4rx^2+4r^2x)dx$$

故$W=\int_0^{2r} dw=\rho g\pi\int_0^{2r}(x^3-4rx^2+4r^2x)dx$

$$=\rho g\pi\left(\frac{x^4}{4}-\frac{4rx^3}{3}+2r^2x^2\right)\Big|_0^{2r}=\frac{4}{3}\rho g\pi r^4$$

第 6 章复习题

1、

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{t方}-1)\ dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2*2x}}{2}=0$$

故 a=0

(2)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{x^2-1})\ dt}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2-1}}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

3、

(1)

$$\int_1^2\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int_1^2\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int_1^2\frac{d(x-\frac{1}{x})}{2+(x-\frac{1}{x})^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}|_1^2=\frac{1}{\sqrt{2}}arctan\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

(2)

$$\int_0^{\Pi}\frac{sin\theta d\theta}{\sqrt{1-2acos\theta+a^2}}=-\int_0^{\Pi}\frac{dcos\theta}{\sqrt{1-2acos\theta+a^2}}=\frac{\sqrt{1-2acos\theta+a^2}}{a}|_0^{\Pi}=\frac{2}{a}$$

(3)

$$\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\int_0^1\frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

令 x=sint

$$原式=\int_0^{\frac{\Pi}{2}}\frac{sint(1-sint)}{cost}costdt=\int_0^{\frac{\Pi}{2}}(sint-sin^2 t)dt=(-cost)|_1^{\frac{\Pi}{2}}-\frac{\Pi}{4}=1-\frac{\Pi}{4}$$

(4)

$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{|lnx|}{1+x}$dx　令 t=$\frac{1}{x}$

原式=$\int_{2}^{1}-\frac{ln\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}}$*(- $\frac{1}{t^2}$)dt+$\int_{1}^{2}\frac{lnx}{1+x}$dx

=$\int_{1}^{2}\frac{lnt}{t*(1+t)}$dt+$\int_{1}^{2}\frac{lnt}{1+t}$

=$\int_{1}^{2}lntd(lnt)=\frac{1}{2}(lnt)^2|_1^2$=$\frac{(ln2)^2}{2}$

(5)

$\int_{2}^{e}\frac{1+lnx}{x^2ln^2x}$dx=　$\int_{2}^{e}\frac{d(xlnx)}{(xlnx)^2}$dx=-$\frac{1}{xlnx}$ $|_2^e$=$\frac{1}{2ln2}$-$\frac{1}{e}$

（6）$\int_{0}^{3}arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$dx　令 t=$arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$　x=tan^2t

原式=$\int_{0}^{\frac{\Pi}{3}}td\,tan^2$t=t$tan^2t|_0^{\frac{\Pi}{3}}$-$\int_{0}^{\frac{\Pi}{3}}tan^2$tdt

=Π-$\int_{0}^{\frac{\Pi}{3}}(sec2-1)dt$

=Π-(tant-t) $|_0^{\frac{\Pi}{3}}$

=$\frac{4\Pi}{3}$-√3

4、（1）

令 x=Π-t,则 dx=-dt

$\int_{0}^{\Pi}xf(sinx)dx=-\int_{\Pi}^{0}(\Pi-t)(\sin(\Pi-t))dt$

=$\int_{0}^{\Pi}(\Pi-t)f(sint)dt$

=Π$\int_{0}^{\Pi}f(sint)dt$-$\int_{0}^{\Pi}tf(sint)dt$

=Π$\int_{0}^{\Pi}f(sinx)dx$-$\int_{0}^{\Pi}xf(sinx)dx$

有$\int_{0}^{\Pi}xf(sinx)dx$=$\frac{\Pi}{2}\int_{0}^{\Pi}f(sinx)dx$

$\int_{0}^{\Pi}\frac{xsinx}{1+cos^2x}$dx=$\frac{\Pi}{2}$ $\int_{0}^{\Pi}\frac{sinx}{1+cos^2x}$dx=-$\frac{\Pi}{2}\int_{0}^{\Pi}\frac{dcosx}{1+cos^2x}$=-$\frac{\Pi}{2}$arctan(cosx) $|_0^{\Pi}$

$=\frac{\Pi^2}{4}$

(2)

$\int_0^{\Pi^2} sin^2\sqrt{x}$dx　　令 x=$t^2$

原式=2 $\int_0^{\Pi} tsin^2tdt$=∏$\int_0^{\Pi} sin^2tdt$

=∏$\int_0^{\frac{\Pi}{2}} sin^2tdt$+∏$\int_{\frac{\Pi}{2}}^{\Pi} sin^2tdt$

=2∏$\int_{\frac{\Pi}{2}}^{\Pi} sin^2tdt$

=$\frac{\Pi^2}{2}$

5、

证明：$\int_0^{\frac{\Pi}{2}} sin^nxcos^nxdx$=$\frac{1}{2^n}\int_0^{\frac{\Pi}{2}}(2sinxcosx)^ndx$

=$\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\frac{\Pi}{2}} sin^n2xd2x$

=$\frac{1}{2^n}\int_0^{\frac{\Pi}{2}} sin^nxdx$

6、

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$=ln|x+$\sqrt{1+x^2}$|　$|_0^1$=ln(1+√2)

$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$dx=$\sqrt{1+x^2}|_0^1$=$\sqrt{2}-1$

又$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} >$　$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$dx

所以 ln(1+√2)>　$\sqrt{2}-1$

7、

f(x)=　$\int_1^x e^{-xt^2}$dt

f'(x)=　e^{-x^3}

f'(1)=　e^{-1}

8．设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$F(x)=\int_a^x (x-t)f(t)\,d\mathrm{t}$，$\mathrm{x}\epsilon[\mathrm{a},\mathrm{b}]$，证明：

$\langle 1\rangle F''(x)=f(x)$　　　　　　　　$\langle 2\rangle F(x)=\int_a^x[\int_a^u f(t)dt]du$

解：$\langle 1\rangle \because \mathrm{f(x)}$在$[\mathrm{a},\mathrm{b}]$连续

$$F(x)=\int_a^x(x-t)f(t)dt=\int_a^x[xf(t)-tf(t)]dt=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$$

$$\therefore F'(x)=\int_a^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_a^x f(t)dt$$

$$\therefore F''(x)=f(x)$$

$\langle 2\rangle \because$ 由$\langle 1\rangle$可知$,\mathrm{F''(x)}=f(x)$

$$\therefore F'(x)=\int_a^u f(t)dt$$

$$\therefore F(x)=\int_a^x[\int_a^u f(t)dt]du$$

9．设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续可导，当 $\mathrm{x}\neq 0$ 时，$\mathrm{f(x)}\neq 0$，且$\int_0^{f(x)} t^2dt=\int_0^x f^2(t)e^{-f(t)}\,dt$，求$f(x)$.

解：　$\because \int_0^{f(x)} t^2dt=\int_0^x f^2(t)e^{-f(t)}\,dt$

$$\therefore f'(x)f^2(x)=f^2(x)e^{-f(x)}$$
$$\therefore y'=e^{-y}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y}$$
$$\therefore e^y dy=dx$$
$$\Rightarrow e^y=x+c$$
$$\Rightarrow y=\ln(x+c)$$

又$\because$ 当 $\mathrm{x}=0,\mathrm{f(x)}=0$

$$\therefore f(x)=\ln(x+1)$$

10.

设$f(x)$在$[2,4]$上连续可导，且$f(2)=f(4)=0$.证明：$\left|\int_2^4 f(x)dx\right| \le \max\limits_{2\le x\le 4}|f'(x)|$

解：取$x\in[2,4]$,在$[2,x]$和$[x,4]$上分别对$f(x)$使用

拉格朗日中值定理，则 $\exists\varepsilon_1\in[2,x],\varepsilon_2\in[x,4]$,使得

$f(x)-f(2)=f'(\varepsilon_1)(x-2)\Rightarrow f(x)=f'(\varepsilon_1)(x-2)$

$f(4)-f(x)=f'(\varepsilon_2)(4-x)\Rightarrow f(x)=f'(\varepsilon_2)(x-4)$

令$M=\max|f'(x)|(x\in[2,4])$

$|f(x)|\le M(x-2)$

$|f(x)|\le M(4-x)$

又$\because\left|\int_2^4 f(x)dx\right|\le\int_2^4|f(x)|dx\le\int_2^3 M(x-2)dx+\int_3^4 M(4-x)dx=M$

$\therefore\max\limits_{2\le x\le 4}|f'(x)|\ge\left|\int_2^4 f(x)dx\right|$

11.

设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx=f(0)$.试证：在（0,1）内至少存在一点$\xi$,使$f'(\xi)$

$\because 3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx=f(0)$

由积分中值定理可知：$\exists\xi_1\in(\frac{2}{3},1)$

$f(\xi_1)=f(0)$

由罗尔中值定理可知,$\exists\xi\in(0,\xi_1)\in(0,1)$

使得$f'(\xi)=0$

12.设 f(x)在[0,1]上可导，且 $2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\,dx=f(1)$.证明：在(0,1)内至少存在一点ξ，使$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

解：令$\mathrm{F(x)=xf(x)}$

$$F'(x)=f(x)+xf'(x)$$

$$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\,dx=0$$

$$\therefore\int_0^{\frac{1}{2}}[f(1)-xf(x)]\,dx=0$$

由积分中值定理$\exists x_1\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，$x_1f(x_1)=f(1)$

$\therefore F(x_1) = F(1)$

$\therefore \exists \xi \in (x_1, 1) \quad F'(\xi)$=0

即$f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$

13. 曲线 y=ax²+bx 在[0,1]上的一段位于 x 轴上方，且与直线 x=1 及 x 轴所围成图形的面积为$\frac{1}{3}$，确定 a、b 的值，使得该图形绕 x 轴一周所得旋转体的体积最小.

解：$\mathrm{f(x) = ax^2 + bx}$

$\int_0^1 (ax^2 + bx)\,dx = \frac{1}{3}$

$\therefore \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3}$

$\therefore 2\mathrm{a} + 3\mathrm{b} = 2$

$b = \frac{2-2a}{3}$

$V = \int_0^1 \pi(ax^2 + bx)^2\,dx$

$= \pi\int_0^1 (a^2x^4 + b^2x^2 + 2abx^3)\,dx$

$= \pi\left(\frac{1}{5}a^2x^5 + \frac{1}{3}b^2x^3 + \frac{1}{2}abx^4\right)\Big|_0^1$

$= \frac{a^2}{5}\pi + \frac{b^2}{3}\pi + \frac{ab}{2}\pi$

$\mathrm{V'(a)} = \frac{2}{5}\pi\mathrm{a} + \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{2-2\mathrm{a}}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\pi\mathrm{a}\right)$

$= \frac{2}{5}\pi a - \frac{8}{27}\pi + \frac{8}{27}\pi a + \frac{\pi}{3} - \frac{18}{27}\pi a$

$= \frac{1}{27}\pi + \frac{2}{5}\pi a - \frac{10}{27}\pi a = 0$时得$a = -\frac{5}{4}$

$\therefore a = -\frac{5}{4} \qquad b = \frac{3}{2}$

14.设在（−∞，＋∞）内 f(x)>0.f'(x)连续，设 F(x)=$\begin{cases} \dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

<1>求 F'(x)

<2>证明 F'(x)在（−∞，＋∞）连续

<3>证明 F(x)在（−∞，＋∞）内单调递增

<1>当 $x \neq 0$时

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt}{[\int_0^x f(t)dt]^2}=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{[\int_0^x f(t)dt]^2}$$

当 $x = 0$时

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{\int_0^x f(t)dt+xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+xf'(x)}{2f(x)+xf'(x)}$$

又因为在（−∞，＋∞）f(x)>0

所以 F'(0)=$\frac{1}{2}$

综上所诉 F'(x)=$\begin{cases} \dfrac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{[\int_0^x f(t)dt]^2} & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$

<2>当 $x \neq 0$时 $\lim\limits_{x\to x_0} F'(x)$=F'($x_0$)

当 $x = 0$时$\lim\limits_{x\to 0} F'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt}{[\int_0^x f(t)dt]^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\int_0^x f(t)dt+xf'(x)\int_0^x f(t)dt+xf^2(x)-f'(x)\int_0^x tf(t)dt-xf^2(x)}{2f(x)\int_0^x f(t)dt}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\int_0^x f(t)dt+f'(x)\int_0^x (t-1)f(t)dt}{2f(x)\int_0^x f(t)dt}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)\int_0^x f(t)dt+f^2(x)+f''(x)\int_0^x (t-1)f(t)dt+f'(x)(x-1)f(x)}{2f'(x)\int_0^x f(t)dt+2f^2(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)}{2f^2(x)}=\frac{1}{2}$$

（3）$x = 0$时，$F'(x) = \frac{1}{2} > 0$

$x \neq 0$时

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)d\,t-f(x)\int_0^x t\,f(t)dt}{\left[\int_0^x f(t)d\,t\right]^2}$$

设$g(x)=xf(x)\int_0^x f(t)d\,t-f(x)\int_0^x t\,f(t)dt.$

$$=f(x)\left[x\int_0^x f(t)d\,t-\int_0^x t\,f(t)dt\right]$$

$$h(x)=x\int_0^x f(t)d\,t-\int_0^x t\,f(t)dt.$$

$$h^{'}(x)=\int_0^x f(t)d\,t+xf(x)-xf(x)$$

$$=\int_0^x f(t)d\,t$$

$h^{''}(x)=f(x)>0\quad\therefore h(x)$递增

又因为$h^{'}(0)=0$

$x<0$时　$h^{'}(x)<0$　$x>0$时$h^{'}(x)>0$ $\therefore h(x)$在$\left(-\infty,0\right)\downarrow\left(0,+\infty\right)\uparrow$

又$\because h(0)=0\quad\therefore h(x)>0\quad(x\neq 0$时)

即$x\neq 0$ 时，$g(x)>0$即$F^{'}(x)>0$

综上所述$F(x)$在$\left(-\infty,+\infty\right)$内单调递增。