习题 4.4

1. (1) $Y=2x^3-6x^2-18x-7$

$Y'=6x^2-12x-18$

$=6(x-3)(x+1)$

令 y'>0 得 x>3 或 x<-1

令 y'<0 得 -1<x<3

所以 Y=2x3-6x2-18x-7 在(-∞,-1) (3,+∞)上单调递增

在(-1,3)上单调递减

(2) $y=2x+\frac{8}{x}$

$y'=2-\frac{8}{x^2}=\frac{2x^2-8}{x^2}$

令 y'>0 得 x>2 或 x<-2

令 y'<0 得 -2<x<0 或 0<x<2

所以 $y=2x+\frac{8}{x}$ 在(-∞,-2) (2,+∞)上单调递增

在(-2,0) (0,2)上单调递减

(3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$y'=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$ 恒成立

所以 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$在 R 上单调递增

(4) $Y=x^n e^{-x}$ (n>0,x≥0)

$Y'=nx^{n-1}e^{-x}-x^n e^{-x}=(n-x)x^{n-1}e^{-x}$

因为 x≥0 ，所以$x^{n-1}e^{-x}>0$

令 Y'>0，得 0<x<n；令 y'<0，得 x>n

所以 $Y=x^n e^{-x}$ (n>0,x≥0) 在[0,n)上单调递增

在(n,+∞)上单调递减

2. (1) $\sin x<x$ $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

令 $f(x)=\sin x-x$

所以 $f(x)'=\cos x-1\le 0$ 在 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$上恒成立

所以 f(x)在 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减

所以 f(x)<0；即$\sin x < x$　$x \in (0,\frac{\pi}{2})$得证

(2) $e^x>1+x$　($x\neq0$)

f(x)= e^x-1-x　f(x)'= e^x-1

令 f(x)'>0　得 x>0

令 f(x)'<0　得 x<0

所以 f(x)在(-∞,0)上单调递减，在(0,+∞)上单调递增

$f(x)_{min}$=f(0)=0

所以 f(x)≥0，又因为 x≠0

所以 f(x)>0，即$e^x>1+x$　(x≠0)得证

(3) $\ln(x+1)<x$　x>0

f(x)=$\ln(x+1)$- x

f(x)'= $\frac{-x}{x+1}$　又因为 x>0

所以 f(x)'<0 在 x>0 时恒成立

f(x)max<f(0)=0

所以$\ln(x+1)<x$　x>0 得证

(4) $\sin x+\tan x > 2x$　$x\in(0,\frac{\pi}{2})$

令 f(x)= $\sin x+\tan x$ - 2x

f(x)'=$\cos x+\frac{1}{(\cos x)^2}$ -2

令 f(x)'>0　得 $(\cos x)^3-2(\cos x)^2+1>0$ 恒成立

所以 f(x)在 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$上单调递增

所以 $f(x)_{min}$>f(0)=0

所以 $\sin x+\tan x > 2x$　$x\in(0,\frac{\pi}{2})$得证

3. (1) $y=2x^3-3x^2$

$y'=6x^2-6x=6x(x-1)$

令 y'>0　得 x>1 或 x<0

令 y'<0　得 0<x<1

所以 y 在(-∞,0) (1,+∞)上单调递增，y 极大=0

在(0,1)上单调递减，y 极小= -1

(2)

$y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$

$y=4-\frac{x^2}{x^2+x+1}$，　$y'=-\frac{x^2+2x}{x^2+x+1}$

令 y'<0，x>0 or x<-2
令 y'>0，-2<x<0

所以 x=-2 时，y 极小=$\frac{3}{8}$

X=0 时，y 极大=4

（3）

y=x-ln(1+x)

y'=1-$\frac{1}{x+1}$

y=x-ln(1+x)在（-1，0）单调递减，在（0，+∞）单调递增
x=0，y 取得极小=0，无极大值

（4）

y=e^xcosx
y'=e^x(cosx-sinx)

y 极大=$\frac{-\sqrt[2]{2}}{2}$ $e^{2k\Pi+4\backslash\Pi}$

y 极小=$\frac{-\sqrt[2]{2}}{2}$ $e^{（2k+1）\Pi+4\backslash\Pi}$

（5）

y=x+$\sqrt{1-x}$

y'=1-$\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$

令 y'>0，x<$\frac{3}{4}$; 令 y'<0，-$\frac{3}{4}$<x<1

y 极大值为$\frac{5}{4}$,无极小值

（6）

y=2e^x+e^{-x}
y'=2e^x-e^{-x}

令 y'>0，x>-$\frac{ln2}{2}$，令 y'<0，x<-$\frac{ln2}{2}$

y 极小=2$\sqrt{2}$，无极大值

4、（1）

f(x)=x+2$\sqrt{x}$, x 属于[0,4]
f'(x)在[0.4]上大于 0 恒成立,
所以 f(x)在[0,4]上单调递增
f(x)max=f(4)=8, f(x)min=0

(2)

f(x)=$\frac{x-1}{x+1}$, x 属于[0,4]

f'(x)=$\frac{2}{(x+1)^2}$>0 在[0,4]上恒成立

所以 f(x)在[0,4]上单调递增

f(x)max=f(4)=3\5, f(x)min=f(0)=-1

(3)

f(x)=xlnx , x 属于（0，+∞）

f'(x)=lnx+1

f'(x)>0，x>$\frac{1}{e}$

f'(x)<0， 0<x<$\frac{1}{e}$

f(x)min=f(1/e)=- $\frac{1}{e}$, f(x)无最大值

(4)

f(x)=x^4-2x^2+5　x 属于[-2,2]

令 t=x^2　t 属于[0,4]

g(t)=t^2-2t+5=$(t-1)^2$+4

g(t)min=g(1)=4，g(t)max=g(4)=13

5.

解得交点$(1,3),(-3,-5)$ 设$C(x,4-x^2)$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|-d$$

$$|AB|=\sqrt{(-3-1)^2+(-5-3)^2}=4\sqrt{5}$$

$$d=\frac{|x^2+2x-3|}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore S^2=4(x^2+2x-3)^2\ \ x\in[-3,1]$$

$\therefore$ 当$x=-1$ 时$S^2=4(x^2+2x-3)^2$

$$\therefore S^2=64$$

$\therefore$ 当C为$(-1,3)$时$S=8$

6.

$(1)a>-1+\ln 2$

要证$x^2-2ax+1<e^x$

即证$x+\frac{1}{x}<\frac{e^x}{x}+2a$

构造$f(x)=x+\frac{1}{x}-\frac{e^x}{x}$

$f'(x)=\frac{[(x+1)-e^x](x-1)}{x^2}$

$g(x)=(x+1)-e^x$

易证$g(x)<0$ 恒成立

$\therefore$ 令$f'(x)>0 \quad 0<x<1$

令$f'(x)<0 \quad x>1$

$\therefore y=f'(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减

$f(x)_{max}=f(1)=2-e<-\frac{1}{2}$

$\because a>-1+ln\,2$

$a>ln\frac{2}{e}>-\frac{1}{2}$

$\therefore a>f(x)_{max}$

$\therefore x^2-2ax+1<e^x(x>0)$

$\therefore$ 得证

$(2)e^x-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\leq\frac{x^2}{n}e^{-x}$

构造$f(x)=x^2+n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^x-n \quad x\in(-\infty,n]$

$f'(x)=x\left[2-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}e^x\right]$

$f'(0)=0 \quad f(0)=0$

$\because \exists \xi \in (-\infty, n] \quad \xi \neq 0$

$f'(\xi) = 0 \quad \left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^{n-1} e^{\xi} = 2$

$\therefore f(\xi) = \xi^2 + n\left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^n e^{\xi} - n$

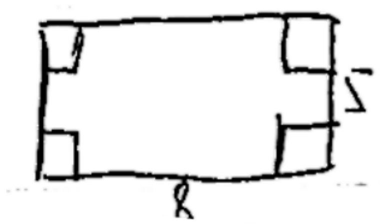
$= (\xi - 1)^2 + n - 1$

$f(x)_{min} = f(0) \quad \therefore f(x) \geq 0$

$x \in (-\infty, n]$

$\therefore x \leq n$时 $\quad e^x - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{x^2}{n} e^{-x}$得证

7.



设正方体边长为x

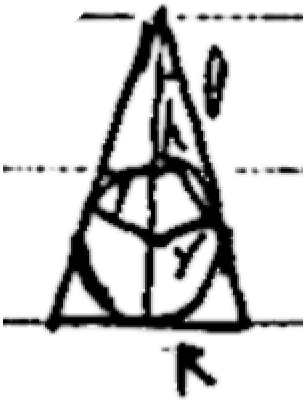
$V = (8 - 2x)(5 - 2x)x \quad x \in \left[0, \frac{5}{2}\right)$

$V' = 12x^2 - 52x + 40$

$V' = 0 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{10}{3}$(舍)

$x = 1$ 时容量最大

8.



$$h = \frac{r}{\sin\theta} + r = \frac{1+\sin\theta}{\sin\theta} r$$

$$R = h\tan\theta$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(h\tan\theta)^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3 \frac{(\sin\theta+1)^3}{\sin\theta\cdot\cos^2\theta}$$

$$x = \sin\theta$$

$$\frac{1}{3}\pi r^3 \quad \frac{(x+1)^3}{x(1-x^2)}$$

$$令\left(\frac{(1+x)^3}{x(1-x^2)}\right)' = 0 \quad x = \frac{1}{3}或-1(舍)$$

$$V_{min} = \frac{8}{3}\pi r^3$$