习题 2.6

1.（1）证明：

$$\forall x_0 \in [0,2](x \neq 1)$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x_0-1} = f(x_0)$$

当$x_0 = 1$时有 $\lim_{x\to 1^+} - f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$

故$f(x)$在闭区间[0,2]上除点$x = 1$外时连续的。

（2）证明：1.假设$\exists x_0 \in [0,2]$使$f(x_0)$为最大值

则$f(x_0) = \frac{1}{x_0-1}$且$f(x_0)$>0

不妨取$x_1 = \frac{1}{f(x_0)+1} + 1 \in [0,2]$且$x_1 \neq 1$

$f(x_1) = \frac{1}{x_1-1} = \frac{1}{\frac{1}{f(x_0)+1}+1-1} = f(x_0) + 1 > f(x_0)$ 这与条件矛盾。

2.假设$\exists x_0' \in [0,2]$使$f(x_0')$为最小值

则$f(x_0') = \frac{1}{x_0'-1}$且$f(x_0')$<0

不妨取$x_2 = \frac{1}{f(x_0')-1} + 1 \in [0,2]$且$x_2 \neq 1$

$f(x_2) = \frac{1}{x_2-1} = \frac{1}{\frac{1}{f(x_0')-1}+1-1} = f(x_0') - 1 < f(x_0')$ 这与条件矛盾

综上$f(x)$在闭区间[0,2]上既无最大值也无最小值。

2. 证明： 1.假设$\exists x_0 \in (0,1) f(x_0)$为最大值

则$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$（$f(x_0)$>0），不妨取$x_1 = \frac{1}{f(x_0)+1} \in (0,1)$

此时$f(x_1) = f(x_0) + 1 > f(x_0)$（矛盾）

2.同理假设$\exists x_0' \in (0,1) f(x_0')$为最小值（$f(x_0')$>1）

取$x_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}(f(x_0')+1)} \in (0,1)$

此时$f(x_2) = \frac{1}{2}(f(x_0') + 1) < \frac{1}{2} \cdot 2f(x_0') = f(x_0')$（矛盾）

综上$f(x)$在闭区间[0,2]上既无最大值也无最小值。

3. 证明:（1）记$f(x)=x^3-5x+1$

由所有基本初等函数在其定义域内均连续得$f(x)$在闭区间[0,1]上连续。

由$f(0)=1, f(1)=-3 \quad f(0)\cdot f(1)<0$

故由零点定理得至少存在一点$\xi\in(0,1)$使得$f(\xi)=0$ 即方程

$x^3-5x+1=0$在（0，1）内至少有一根。

（2）记$g(x)=x-2\sin x$ 同（1）中论述$g(x)$在闭区间$[\frac{\pi}{2},\pi]$上连续

由$g(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-2<0, g(\pi)=\pi>0 \quad g(\frac{\pi}{2})\cdot g(\pi)<0$

故由零点定理得至少存在一点$\xi\in(\frac{\pi}{2},\pi)$使得$g(\xi)=0$即方程

$x-2\sin x=0$有根。

4.证明: 记$g(x)=f(x)-x$

由$f(x)$，x均在$[a,b]$上连续得$g(x)$在$[a,b]$上连续

$g(a)=f(a)-a\geq 0, g(b)=f(b)-b\leq 0$

1.当$g(a)=0$或$g(b)=0$时 $f(a)=a$或$f(b)=b$（原式显然成立）

2.当$g(a)>0, g(b)<0$时 $g(a)\cdot g(b)<0$

由零点定理得在（a,b）上存在一点ξ使得$g(\xi)=0$ 综上原式得证。

5.证明: 由$AB<0$不妨设$A>0, B<0$

则$f(a)=A>0$ 由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B<0$（极限的局部保号性得）

一定$\exists X>a$,当$x>X$时$f(x)<0$成立

不妨取$b=x+1$，则$f(b)<0$,则$f(a)\cdot f(b)<0$

由$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续得$f(x)$在$[a,b]$上连续

故由零点定理得至少存在一点$\xi\in$（a,b），使得$f(\xi)=0$

即$f(x)$在$[a,+\infty)$上至少有一个零点。

6.证明: 由$|f(x)| \leqslant e^{\sin x}-1$得

$|f(0)| \leq e^{\sin 0}-1=0 \Rightarrow f(0)=0$

由$0 \leqslant |f(x)| \leqslant e^{\sin x}-1$得

$\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0$（夹逼定理）

即$(\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0)= f(0)$ 则函数$f(x)$在$x=0$处连续。

（由$\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0$推得$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$为教材 2.1 习题 2.（2）结论，使用 定义很好证明）