1.(1) $xy=4 \Rightarrow y=\frac{4}{x}$，点 $(2,2)$

解：$y'=\frac{-4}{x^2}$　$y''=\frac{8}{x^3}$　$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

由 $k=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

(2) $y=4x-x^2$，点 $(0,0)$

解：$y'=4-2x$　$y''=-2$，$x\in R$

由 $k=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$

$=\frac{2}{\sqrt{17^3}}$

(3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，点 $(0,0)$

解 $y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　$y''=-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$，$x\in R$

$k=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$

$=\frac{0}{1}=0$

(4) $y=\ln x$，点 $(1,0)$

解：$y'=\frac{1}{x}$，$y''=\frac{-1}{x^2}$，$x>0$

$k=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

2. 证明：

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad k=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} \quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^2}\frac{1}{x'(t)}$$

$$y'=\frac{y'(t)}{x'(t)} \quad \text{则 } k=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{[(x'(t))^2]^{\frac{3}{2}}\left(1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{[(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}$$

3. 由公式 $k=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{[(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}$

(1) $x'(t)=6t$，$x''(t)=6$

$y'(t)=3-3t^2$　$y''(t)=-6t$

$k=\frac{36}{36^{\frac{3}{2}}}$

$=\frac{1}{6}$

(2) $x'(t)=at\cos t$　$x''(t)=a(\cos t-t\sin t)$

$y'(t)=-at\sin t$　$y''(t)=-a(\sin t+t\cos t)$

$k=\frac{\left(\frac{\pi a}{2}\right)^2}{\left(\frac{\pi a}{2}\right)^3}$

$=\frac{2}{\pi a}$

4.解 $k=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$ $y=x^2$

$y'=2x$ $y''=2$ $x\in R$

$k=\frac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$

则在点 $(0,0)$ 处曲率最大

此时 $k=2$

5.解: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

设 $\begin{cases} x=a\sin t \\ y=b\cos t \end{cases}$

$y'(t)=-b\sin t$ $y''(t)=-b\cos t$

$x'(t)=a\cos t$ $x''(t)=-a\sin t$

$K=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{[(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}$

$=\frac{ab}{(a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}$

令 $\alpha=|\sin t|$ $\alpha\in[0,1]$ $\cos t=\sqrt{1-\alpha^2}$

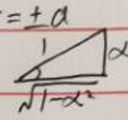
$a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t$

$=a^2(1-\alpha^2)+b^2\alpha^2$

$=a^2+\alpha^2(b^2-a^2)$ $b<a$.

则当 $\alpha=1$ 时 k 取最大.

此时取 $x=\pm a$



6.解:(见图4-7.3)

M点处曲率为 $K=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|y''(x)|}{(1+(y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$

M点处切线为 $\alpha=y't-y'x+y$

$C(\alpha,\beta)$

$\alpha=x-r\sin\arctan y'$

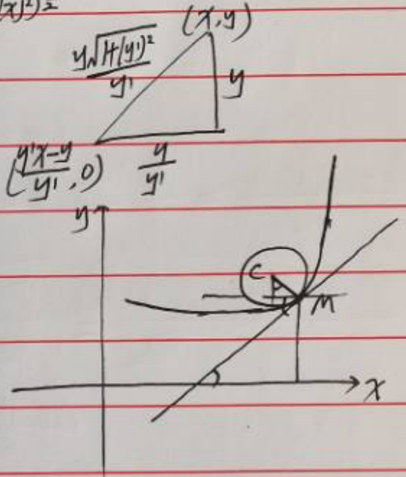
$\beta=y+r\cos\arctan y'$

$r=\frac{1}{K}$

$\sin\arctan y'=\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$

$\cos\arctan y'=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$

则 $\begin{cases} \alpha=x-\frac{(1+(y')^2)y'}{y''} \\ \beta=y+\frac{1+(y')^2}{y''} \end{cases}$



7.解: $y=\ln x$ 与 x 轴交点为 $(1,0)$

$y'=\frac{1}{x}$, $y''=\frac{-1}{x^2}$

$k=\frac{1}{(2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

则 $\rho=\frac{1}{k}=2\sqrt{2}$

设圆心为 (α,β)

$\alpha=x-\frac{(1+(y')^2)y'}{y''}=1-\frac{2}{-1}=3$

$\beta=y+\frac{1+(y')^2}{y''}=\frac{2}{-1}=-2$

则方程为 $(x-3)^2+(y+2)^2=8$