习题 2.1

1. 试用数列极限定义证明下列各式

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

解: (1) 对于 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$

只需要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$ 即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 则当 $n>N$ 时,

有 $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon$

由定义知: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]=1$

解: (2) 对于 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|=\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|<\varepsilon$

即使 $\frac{1}{n}<\varepsilon$ 即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时,

有 $\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|<\varepsilon$

由定义知: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]=1$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$

解: (3) 对于 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\varepsilon$

只需要 $\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$ 即 $n>\frac{1}{\varepsilon^2}$

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$, 则当 $n>N$ 时,

有 $\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$

由定义知: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$ (α为正常数)

解:(4) 对于$\forall\varepsilon>0$, 要使$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon$

只需要$n>\sqrt[\alpha]{\frac{1}{\varepsilon}}$

取$N=\left[\sqrt[\alpha]{\frac{1}{\varepsilon}}\right]+1$, 则当$n>N$时,

有$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|<\varepsilon$

由定义知: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$

2、(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 其中$a\neq0$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$; 问反之是否成立?

解: $\because\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_0$

当$n>N_0$时, $|a_n-a|<\varepsilon$

则$\forall\varepsilon>0$, 取$N=N_0$, 当$n>N$时, $\big||a_n|-|a|\big|\leq|a_n-a|<\varepsilon$

因此, $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$

反之不成立, 如: $a_n=(-1)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$

但是$\left|\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right|=\left|\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\right|\neq1$

(2) 试证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$

证明: $\because\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$

当$n>N$时, $|a_n-0|<\varepsilon$

则$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当$n>N$时, $\big||a_n|-0\big|<\varepsilon$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$

而当 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$

当 $n>N$ 时，$||a_n|-0|<\varepsilon$

则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，$|a_n-0|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

综上所述，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$

3. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^5-4n^3+5n}{n^6+4n+1}$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3}{n}-\frac{4}{n^3}+\frac{5}{n^5}}{1+\frac{4}{n^5}+\frac{1}{n^6}}=\dfrac{3\times0-4\times0+5\times0}{1+4\times0+0}=0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2+1}{n^3+1}$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=\dfrac{1+3\times0+0}{1+0}=1$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{3}\cdot(\frac{-2}{3})^n+\frac{1}{3}}{(\frac{-2}{3})^{n+1}+1}=\dfrac{\frac{1}{3}\times0+\frac{1}{3}}{0+1}=\dfrac{1}{3}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{2}=\dfrac{1}{2}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}\right]$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})=1$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n}{2n+4}=-\dfrac{1}{2}$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2+\cdots+k)^{\frac{1}{n}}$（$k$为正整数）

解：$\because \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$ （a为正常数）

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^{\frac{1}{n}}=1$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)(n+2)}-n)$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)-n^2}{\sqrt{(n+1)(n+2)}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+2)n+2}{\sqrt{(n+1)(n+2)}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{\sqrt{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})}+1}=\frac{3}{2}$

4. 利用单调有界原理求下列数列的极限

(1) $a_1=\frac{1}{5}$，$a_{n+1}=\frac{n}{3n+2}a_n$，$n=1,2,\ldots$

解：$\because 0<\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{3n+2}<1$

又 $a_1=\frac{1}{5}$ 由数学归纳法知：$a_n>0$

又 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ 则 $\{a_n\}$ 是单调递减的且有下界 0

$\therefore \{a_n\}$ 有极限

对 $a_{n+1}=\frac{n}{3n+2}a_n$ 两边取极限

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}a_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

(2) $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$，$n=1,2,\ldots$

解：$\because a_1=\sqrt{2}$ $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$

由数学归纳法知：$a_{n+1}>a_n$

$\therefore \{a_n\}$ 单调递增

则 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}>a_n \Rightarrow a_n<2$

且 $\{a_n\}$ 有界 $\therefore \{a_n\}$ 有极限

两边取极限，$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+a_n}$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$

5、利用夹逼定理求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$

解：$4^n \le 1+2^n+3^n+4^n \le 4\cdot 4^n$

$(4^n)^{\frac{1}{n}} \le (1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}} \le (4\cdot 4^n)^{\frac{1}{n}}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}(4^n)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}(4\cdot 4^n)^{\frac{1}{n}} = 4$

则由夹逼定理知：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}} = 4$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha - n^\alpha]$，其中常数 $\alpha\in(0,1)$

解：$0 \le (n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha[(1+\frac{1}{n})^\alpha - 1] \le n^\alpha[(1+\frac{1}{n})^1 - 1] = n^\alpha\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^{1-\alpha}}) = 0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$

6、试用子列证明下列数列发散

(1) $a_n = (-1)^n\frac{n}{n+1}$

证明：$a_{2k-1} = (-1)\cdot\frac{2k-1}{2k}$ $\quad a_{2k} = \frac{2k}{2k+1}$

$\because \lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1} = -1$ $\quad \lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1} \ne \lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}$

$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k} = 1$

$\therefore \{a_n\}$ 发散

(2) $a_n = 2+(-1)^n$

证明：$a_{2k-1} = 2-1 = 1$ $\quad a_{2k} = 2+1 = 3$

$\because \lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1} \ne \lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}$

$\therefore \{a_n\}$ 发散

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\frac{4}{n}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right)$

证明：令 $a_n=\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\frac{4}{n}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}$

则 $a_{2k}=\frac{1-2+3-4+\cdots-2k}{2k}=\frac{-k}{2k}=-\frac{1}{2}$

$a_{2k+1}=\frac{1-2+3-4+\cdots+2k+1}{2k+1}=\frac{k+1}{2k+1}$

$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=-\frac{1}{2}$　　$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k+1}{2k+1}=\frac{1}{2}$

$\therefore\{a_n\}$ 发散

7. 试证明：对于数列 $\{a_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的充要条件是 $\{a_n\}$ 的奇子列和偶子列均收敛于 a，即 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=a$

证明：$\because\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

则 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n\geqslant N$ 得 $|a_n-a|<\varepsilon$，当 $k>N$ 时，

$n_k\geqslant k>N$

则 $|a_{n_k}-a|<\varepsilon$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n_k}=a$

$\therefore\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=a$

又 $\{a_{2k-1}\}$、$\{a_{2k}\}$ 包含了 $\{a_n\}$ 的所有项

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

则 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

8. 利用柯西收敛准则证明下列数列是收敛的

(1) $a_n=\frac{\sin 1}{1^2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{n^2}$

证明：令 $n>m$

则 $|a_n-a_m| = \left|\frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}} + \frac{\sin(m+2)}{2^{m+2}} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}\right|$

$\leq \left|\frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}}\right| + \left|\frac{\sin(m+2)}{2^{m+2}}\right| + \cdots + \left|\frac{\sin n}{2^n}\right|$

$\leq \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

$= \frac{1}{2^m}\left(1-\frac{1}{2^{n-m}}\right) < \frac{1}{2^m}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

又对 $\forall \varepsilon < \frac{1}{2}$ 存在 N，当 $n>N$ 时，$\frac{1}{2^n} < \varepsilon$

即 $N = [\log_2 \frac{1}{\varepsilon}] + 1$ 当 $n>m>N$ 时，$|a_n - a_m| < \varepsilon$

由柯西收敛准则，$\{a_n\}$ 收敛

(2) $a_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$

证明：令 $m>n$

则 $|a_m - a_n| < \left|\frac{1}{(m+1)m} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right|$

$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

$\forall \varepsilon > 0$，取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$ 当 $n>N$ 时，$|a_m - a_n| < \varepsilon$

由柯西收敛准则，$\{a_n\}$ 收敛

9、利用柯西收敛准则证明下列数列是发散的

(1) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$

证明：取 $\varepsilon = \frac{1}{4}$，$\forall N \in N^+$ 取 $n = N+1$，$m = 2N+2$

则有 n、$m > N$

则 $|a_m-a_n| = \frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}+\cdots+\frac{1}{2N+2} > \frac{N+1}{2N+2} = \frac{1}{2} > \varepsilon$

由柯西收敛准则知：$\{a_n\}$ 发散

(2) $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$

证明：取 $\varepsilon=\frac{1}{4}$，$\forall N\in N^+$ 取 $n=N+1$，$m=2N+2$

则有 n、$m>N$

则 $|a_m-a_n| = \frac{1}{\sqrt{N+2}}+\frac{1}{\sqrt{N+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2N+2}} > \frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}+\cdots+\frac{1}{2N+2} > \frac{N+1}{2N+2} = \frac{1}{2} > \varepsilon$

由柯西收敛准则知：$\{a_n\}$ 发散