习题 2.1

1. 利用数列极限定义证明下列各式

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$

对于 $\forall\varepsilon > 0$, 要使 $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$

只需要 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$

取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n > N$ 时

有 $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$

由定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1 + \frac{(-1)}{n}\right]^n = 1$

对于 $\forall\varepsilon > 0$ 要使 $\left|1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$

即使 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$

取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$，则当 $n > N$ 时

有 $\left|1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1\right| < \varepsilon$

由定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1 + \frac{(-1)}{n}\right]^n = 1$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$

对于 $\forall\varepsilon>0$ 要使 $\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\varepsilon$

只需要 $\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$ 即 $n>\frac{1}{\varepsilon^2}$

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$,则当 $n>N$ 时

有 $\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$

由定义知：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$($\alpha$ 为正常数)

对于 $\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon$

只需要 $n>\sqrt[\alpha]{\frac{1}{\varepsilon}}$

取 $N=\left[\sqrt[\alpha]{\frac{1}{\varepsilon}}\right]+1$,则当 $n>N$

有 $\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|<\varepsilon$

由定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$

2、

(1)若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，其中 $a\neq0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$；问反之是否成立

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\forall\varepsilon>0,\exists N_0$

当 $n>N_0$时，$|a_n-a|<\varepsilon$

则$\forall\varepsilon>0$，取 $N=N_0$，当 $n>N$ 时，$\left||a_n|-|a|\right|<|a_n-a|<\varepsilon$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$

反之不成立，如：$a_n = (-1)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n| = 1$

但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \neq 1$

(2)试证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, \forall\varepsilon > 0, \exists N$

当 $n > N$ 时, $|a_n - 0| < \varepsilon$

则 $\forall\varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, $\big||a_n| - 0\big| < \varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$

而当 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0, \forall\varepsilon > 0, \exists N$

当 $n > N$ 时, $\big||a_n| - 0\big| < \varepsilon$

则 $\forall\varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - 0| < \varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

综上所述，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$

3. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^5 - 4n^3 + 5n}{n^6 + 4n + 1}$

解：原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{3}{n} - \dfrac{4}{n^3} + \dfrac{5}{n^5}}{1 + \dfrac{4}{n^5} + \dfrac{1}{n^6}} = \dfrac{3\times 0 - 4\times 0 + 5\times 0}{1 + 4\times 0 + 0} = 0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3 + 3n^2 + 1}{n^3 + 1}$

解：原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^3}}{1 + \dfrac{1}{n^3}} = \dfrac{1 + 3\times 0 + 0}{1 + 0} = 1$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}{\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}+1}=\dfrac{\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}}{0+1}=\dfrac{1}{3}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{2}=\dfrac{1}{2}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}\right]$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=1$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\frac{n(n+1)}{n}}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n}{2n+4}=-\dfrac{1}{2}$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2+3+\cdots+K)^{\frac{1}{n}}$，（K 为正整数）

解：$\because \lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^{\frac{1}{h}}=1$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}-n\right)$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)-n^2}{\sqrt{(n+1)(n+2)}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2)n+2}{\sqrt{(n+1)(n+2)}+n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\frac{2}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}+1}=\dfrac{3}{2}$

4. 利用单调有界原理求下列数列的极限

(1)$a_1=\frac{1}{5}$，$a_{n+1}=\frac{n}{3n+2}a_n$，$n=1,2,3,\cdots$

解：$\because 0<\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{3n+2}<1$

$a_1=\frac{1}{5}$，由数学归纳法知：$a_n>0$

又$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$，则$\{a_n\}$是单调递减的且有下界 0

$\therefore \{a_n\}$ 有极限

对 $a_{n+1}=\frac{n}{3n+2}a_n$两边同时取极限

则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

(2)$a_1=\sqrt{2},a_{n+1}=\sqrt{2+a_n},n=1,2,\ldots$

解：$\because a_1=\sqrt{2}\quad a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$

由数学归纳法知：$a_{n+1}>a_n$

$\therefore \{a_n\}$单调递增

则$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}>a_n \Rightarrow a_n<2$

且$\{a_n\}$有界 $\therefore \{a_n\}$有极限

两边取极限, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+a_n}$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$

5. 利用夹逼定理求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$

解：$4^n\le 1+2^n+3^n+4^n\le 4\cdot 4^n$

$$(4^n)^{\frac{1}{n}} \le (1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}} \le (4\cdot 4^n)^{\frac{1}{n}}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}(4^n)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}(4\cdot 4^n)^{\frac{1}{n}} = 4$

则由夹逼定理知：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}} = 4$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha - n^\alpha]$, 其中常数 $\alpha\in(0,1)$

解：$0 \le (n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right]$

$\le n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^1 - 1\right] = n^\alpha\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right) = 0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$

6. 试用子列证明下列数列发散

(1)$a_n = (-1)^n\frac{n}{n+1}$

证明：$a_{2k-1} = (-1)\cdot\frac{2k-1}{2k}\quad a_{2k} = \frac{2k}{2k+1}$

$\because \lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1} = -1$， $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1} \ne \lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}$， $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k} = 1$

$\therefore \{a_n\}$ 发散

(2)$a_n = 2+(-1)^n$

证明：$a_{2k-1} = 2-1 = 1\quad a_{2k} = 2+1 = 3$

$\because \lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1} \ne \lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}$

$\therefore \{a_n\}$ 发散

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\frac{4}{n}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right)$

证明：令$a_n = \frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\frac{4}{n}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}$

则$a_{2k}=\dfrac{1-2+3-4+\cdots-2k}{2k}=\dfrac{-k}{2k}=-\dfrac{1}{2}$

$a_{2k+1}=\dfrac{1-2+3-4+\cdots+2k+1}{2k+1}=\dfrac{k+1}{2k+1}$

$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=-\dfrac{1}{2}\quad\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k+1}{2k+1}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\{a_n\}$ 发散

7. 试证明：对于数列$\{a_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的充要条件是$\{a_n\}$的奇子列和偶子列均收敛于 a，即$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=a$

证明：$\because\lim\limits_{n\to a}a_n=a$

则 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n\ge N$ 得 $|a_n-a|<\varepsilon$, 当 $k>N$ 时,

$n_k\ge K>N$

则 $|a_{nk}-a|<\varepsilon$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{nk}=a$

$\therefore\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=a$

又$\{a_{2k-1}\}$、$\{a_{2k}\}$包含了$\{a_n\}$的所有项

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

则 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

8. 利用柯西收敛准则证明下列数列是收敛的

$(1)a_n=\dfrac{\sin 1}{1^2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{n^2}$

证明：令 $n>m$

则$|a_n-a_m|=\left|\dfrac{\sin\ (m+1)}{(m+1)^2}+\dfrac{\sin\ (m+2)}{(m+2)^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{n^2}\right|$

$<\left|\dfrac{1}{(m+1)^2}+\dfrac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right|$

$$< \left|\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right|$$

$$=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\right)+\cdots+(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})$$

$$=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$$

$$<\frac{1}{m}$$

又$\forall\varepsilon<\frac{1}{2}$，存在 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $m>N$ 时，$\frac{1}{m}<\varepsilon$

即 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>m>N$ 时，$|a_n-a_m|<\varepsilon$

由柯西收敛准则，$\{a_n\}$收敛。

$(2)a_n=\frac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\frac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{\cos n!}{n(n+1)}$

证明：令 $m>n$

则

$$|a_m-a_n|<\left|\frac{1}{(m+1)m}+\cdots+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right|$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$$

$\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 当 $n>N$ 时, $|a_m-a_n|<\varepsilon$

由柯西收敛准则，$\{a_n\}$收敛。

9. 利用柯西收敛准则证明下列数列是发散的

$(1)a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

证明：取 $\varepsilon=\frac{1}{4}, \forall N\in N^+$取 $n=N+1, m=2N+2$

则 有 $n, m > N$

则$|a_m - a_n| = \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \cdots + \frac{1}{2N+2} > \frac{N+1}{2N+2} = \frac{1}{2} > \varepsilon$

由柯西收敛准则，$\{a_n\}$发散

(2)$a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

证明：取 $\varepsilon = \frac{1}{4}, \forall N \in N^+$取 $n = N+1, m = 2N+2$

则有 $n, m > N$

$$\text{则 } |a_m - a_n| = \frac{1}{\sqrt{N+2}} + \frac{1}{\sqrt{N+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2N+2}}$$

$$> \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \cdots + \frac{1}{2N+2} > \frac{N+1}{2N+2} = \frac{1}{2} > \varepsilon$$

由柯西收敛准则，$\{a_n\}$发散

习题 2.2

1. 证明：

(1)对于$\forall\varepsilon>0$，要使$|(2x+1)-3|<\varepsilon$

只需 $2|x-1|<\varepsilon$

即$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$

令$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，则当$|x-1|<\delta$时

恒有$|(2x+1)-3|<\varepsilon$

$\therefore \lim_{x\to1}(2x+1)=3$

(2)对于$\forall\varepsilon>0$，要使$|(3x+1)-7|<\varepsilon$

只需 $3|x-2|<\varepsilon$

即$|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$

令$\delta=\frac{\varepsilon}{3}$，则当$|x-2|<\delta$时

恒有$|(3x+1)-7|<\varepsilon$

$\therefore \lim_{x\to2}(3x+1)=7$

(3)对于$\forall\varepsilon\geq0$，要使$|sin\,x-\ sin\,x_0|<\varepsilon$

即 $2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|<\varepsilon$

$\Leftarrow 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|<\varepsilon$

$\Leftarrow |x-x_0|<\varepsilon$

令$\delta=\varepsilon$,则当$|x-x_0|<\delta$时

恒有$|sin\,x-\ sin\,x_0|<\varepsilon$

即$\lim_{x\to0}\sin x=\sin x_0$

2. 证明

(1) $\lim\limits_{x\to 0}[x]=0$

对于$\forall\varepsilon>0$，取δ为ε，则当 $0<x<\delta$时

有$|[x]-0|=0<\delta=\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+}[x]=0$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}[x]=-1$

$\because$ 当$x\in[-1,0)$时，$[x]=-1$

$\therefore$ 对于$\forall\varepsilon>0$，取δ为ε，则当 $-\delta<x<0$ 时

有$|[x]+1|=0<d=$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}[x]=-1.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,sgnx=0$

$\because$ 当$x>0$ 时$, xsgnx=x$

$\therefore$ 对于$\forall\varepsilon>0$，取δ为ε，则当 $0<x<\delta$时

有$|x\,\mathrm{sgn}\,x-0|=|x|<\delta=\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+} x\,sgnx=0$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^-} x\,sgnx=0$

$\because$ 当$x<0$ 时$, xsgnx=-x$

$\therefore$ 对于$\forall\varepsilon>0$，取δ为ε，则当 $-\delta<x<0$ 时

有$|x\,\mathrm{sgn}\,x-0|=-x<\delta=\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^-} x\,sgnx=0$

3.

(1)解：对于$\forall\varepsilon>0$，取$X=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，则当$|x|>X$时，

$$\left|\frac{x^2+1}{x^2+2}-1\right|=\left|\frac{1}{x^2+2}\right|=\frac{1}{x^2+2}<\frac{1}{X^2}=\varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2+2}=1.$$

(2)解：对于$\forall\varepsilon>0$，取$X=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，则当$|x|>X$时，

$$\left|\frac{1}{x^2+1}-0\right|=\left|\frac{1}{x^2+1}\right|=\frac{1}{x^2+1}<\frac{1}{X^2}=\varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=0.$$

(3)解：$\because \left|\left|\sqrt{x^2+1}-x\right|-0\right|=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

当$x\to\infty$时，不妨设$x>1$，有$\sqrt{x^2+1}+x>x$

$$\therefore \left|\left|\sqrt{x^2+1}-x\right|-0\right|<\frac{1}{x}$$

对于$\forall\varepsilon>0$，可取$X=\max\left\{1,\frac{1}{\varepsilon}\right\}$

只要$x>X$时，就有$\left|\left|\sqrt{x^2+1}-x\right|-0\right|<\frac{1}{x}<\frac{1}{X}=\varepsilon$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$$

(4) $\because \left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}\right|=\left|\frac{x+2-3}{(x-1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}\right|=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}$

$$<\frac{1}{\sqrt{x+2}}<\frac{1}{\sqrt{x}}$$

对于$\forall\varepsilon>0$，可取$X=\frac{1}{\varepsilon^2}$

只要$x>X$时，就有$\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}\right|<\frac{1}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{X}}=\varepsilon$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}=0$$

4.

解：由题意$f(x)=\begin{cases}2, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$

$$\therefore \lim_{x\to0^+} f(x)=2,$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=0$$

$$\because \lim_{x\to0^+} f(x)\neq \lim_{x\to0^-} f(x)$$

$\therefore \lim\limits_{x\to0} f(x)$不存在

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

$$\because \lim_{x\to-\infty} f(x)\neq \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$不存在

5.

(1)解：$\dfrac{x+1}{x^2+2}=\dfrac{1+1}{1+2}=\dfrac{2}{3}$

(2)解：$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x^2+2}=\dfrac{-1+1}{1+2}=0$

(3)解：$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$

(4)解：$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}(x-2)=-4$

(5)解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x+1}{x^3+2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=1$

(6)解： $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^4+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^4}}=0$

(7)解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x+1}=1$

(8)解： $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{x^2+1}=1$

(9)解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)=2$， $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

($\sin x$是有界变量，$\frac{1}{x}$ 是无穷小量，无穷小量与有界变量的乘积是无穷小量)

$\therefore \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}=2^0=1$

(10) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x-a}}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{x-a}{x^{\frac{2}{3}}+(ax)^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}}{(x-a)^{\frac{1}{3}}}=\lim\limits_{x\to a}\frac{(x-a)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+(ax)^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}=0$

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$\Rightarrow x-y=\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$

$\therefore x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}=\frac{x-y}{x^{\frac{2}{3}}+(xy)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}$

6.

解： $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\frac{x+5}{x^2+1}+5\right)=\frac{1+5}{1+1}+5=8$

$\lim\limits_{x\to1^+}\left(6+\frac{x^2-1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1^+}(6+x+1)=7+1=8$

$\because \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=8$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}f(x)=8$

7.

(1)要证 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+1}{x}=\infty$

即证 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\infty$

只需证 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$

只需证 $\lim\limits_{x\to0}x=0$

对于$\forall\varepsilon>0$，取δ为ε，则当 $0<|x-0|<\delta$时

有$|x-0|=|x|<\delta=\varepsilon$

$\therefore\lim\limits_{x\to0}x=0$, 即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+1}{x}=\infty$

(2)要证 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$

即证 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}}=0$

对于$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=-\frac{1}{\ln\varepsilon}$, $0<|x-0|<\delta$

有 $\left|e^{-\frac{1}{x}}-0\right|=e^{-\frac{1}{x}}<\delta=\varepsilon$

$\therefore\lim\limits_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}}=0$, 即 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$

(3)要证 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$

即证 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$

对于$\forall\varepsilon>0$，取$X=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，则当$|x|>X$时，

有 $\left|\frac{1}{x^2}-0\right|=\frac{1}{x^2}<\frac{1}{X^2}=\varepsilon$

$\therefore\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$

(4)要证 $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

即证 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

对于$\forall\varepsilon > 0$，取$X = \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$，则当$|x| > X$时，

有 $\left|\frac{1}{x^3} - 0\right| = \left|\frac{1}{x^3}\right| < \frac{1}{X^3} = \varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$，即 $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

8.

解：①当$m = n$时

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m + a_{m-1} + \frac{1}{x} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{m-1}} + a_0\frac{1}{x^m}}{b_n + b_n - \frac{1}{x} + \cdots + b_1\frac{1}{x^{n-1}} + b_0\frac{1}{x^n}} = \frac{a_m}{b_n}$$

②当 $m<n$ 时

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m\frac{1}{x^{n-m}} + a_{m-1}\frac{1}{x^{n-m+1}} + \cdots + a_0\frac{1}{x^n}}{b_n + b_{n=1}\frac{1}{x} + \cdots + b_0\frac{1}{x^n}} = 0$$

③当 $m>n$ 时

令$g(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

$h(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

由②得 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \infty.$

习题 2.3

1. 证明定理 2. 3. 1

$\forall\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\Rightarrow \quad |g(x)-A|<\varepsilon\Rightarrow A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon$

同理：$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A\Rightarrow A-\varepsilon<h(x)<A+\varepsilon$

$\because g(x)\le f(x)\le h(x)$

$\therefore A-\varepsilon<g(x)\le f(x)\le h(x)<A+\varepsilon$

$\Rightarrow A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon\Rightarrow \quad |f(x)-A|<\varepsilon\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

2. 利用夹逼定理，求下列函数极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}$

$x-1\le[x]\le x$

①对于$x\to+\infty$时，有$\frac{x-1}{x}\le\frac{[x]}{x}\le\frac{x}{x}\le 1$

且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1-0=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x}=1$

②对于$x\to-\infty$时，有$\frac{x-1}{x}\ge\frac{[x]}{x}\ge 1$

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1+0=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}1=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{[x]}{x}=1$

综上所述 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^{\alpha}}}(\alpha>0)$

当$x\to+\infty,\alpha>0$ 时，$1+\frac{1}{x^{\alpha}}>1$

故有 $1<\sqrt{1+\frac{1}{x^{\alpha}}}<1+\frac{1}{x^{\alpha}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}1=1,\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^{\alpha}}\right)=1+0=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^{\alpha}}}=1$

(3) $\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}$

①对于$x\to0^+$时，有 $1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\le1$

$\lim\limits_{x\to0^+}(1-x)=1-0=1,\lim\limits_{x\to0^+}1=1$

由夹逼定理知 $\lim\limits_{x\to0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

②对于$x\to0^-$， $1\le x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x$

$\lim\limits_{x\to0^-}1=1,\lim\limits_{x\to0^-}(1-x)=1-0=1$

由夹逼定理知 $\lim\limits_{x\to0^-}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

综上 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0^-} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$

3. 应用海涅定理，证明下列函数极限不存在

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

设$x_n' = \frac{1}{2n\pi}$，$x_n'' = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，其中$n$为非 0 整数

显然$x_n' \neq 0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n' = 0; x_n'' \neq 0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n'} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin 2n\pi = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n''} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right) = 1$

根据海涅定理，$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$不存在

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$

设$f(x) = \frac{1}{\cos x}$, 设$x_n' = \frac{1}{2n\pi}, x_n'' = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}, |n| \in N^*$

显然$x_n' \neq 0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n' = 0;\quad x_n'' \neq 0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = \lim\limits_{n\to\infty} \cos 2n\pi = 1, \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'') = \lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right) = 0$

根据海涅定理，$\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$不存在

4. 求下列函数极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x} (\beta \neq 0)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\alpha x}{\alpha x} \cdot \frac{\beta x}{\sin\beta x} \cdot \frac{\alpha x}{\beta x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\beta x}{\sin\beta x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x}{\beta x}$$

$$=1\cdot 1\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\alpha x}{\tan\beta x}(\beta\neq 0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}\cdot\dfrac{\cos\beta x}{\cos\alpha x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\beta x}{\cos\alpha x}$

$$=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\cos 0}{\cos 0}=\frac{\alpha}{\beta}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}$$

(4)设$y=x-\dfrac{\pi}{4}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{2}-2\cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos y+\sqrt{2}\sin y}{\sin y}$$

$$=\sqrt{2}\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{\sin y}+\sqrt{2}=\sqrt{2}\lim_{y\to 0}\frac{2-2\cos^2\frac{y}{2}}{2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}}+\sqrt{2}$$

$$=\sqrt{2}\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\frac{y}{2}}{2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}}+\sqrt{2}$$

$$=\sqrt{2}\lim_{y\to 0}\tan\frac{y}{2}+\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot 0+\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

5. 求下列函数极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{3x}}\right)^{-\frac{1}{3x}\cdot(-3)}$$

$$= \left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{-\frac{1}{3x}}\right)^{-\frac{1}{3x}}\right]^{-3}$$

$$= e^{-3}$$

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-x^2}{1-x}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2+x}\right)^{1+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(2+x)}\right)^{-(2+x)\cdot\frac{x+1}{-(2+x)}}$$

$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(2+x)}\right)^{-(2+x)}\right]^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2+x}-1\right)}$$

$$= e^{-1}$$

(3) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{3\csc x}$

$$= \left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{\sin x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{3}$$

$$= e^{3}$$

(4) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}$$

$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}}$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{\frac{2}{1-0}}$$

$$= e^{2}$$

习题 2.4

1.（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-4x}{x}$=$\lim\limits_{x\to 0}(3x-4)$=-4$\neq 0$ ∴$3x^2$-4x=O(x)

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 sin\frac{1}{x}}{x}$=$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$=0 ∴ x^2sin$\frac{1}{x}$=o(x)

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{xsinx^2}{x^3}$=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx^2}{x^2}$=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx^2}{x^2}$=1 ∴ $xsinx^2 \sim x^3$

(4)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1-2x}{x^2}$=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}$=1 ∴ $(1+x)^2-1-2x\sim x^2$

2. (1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+1}{x^2+1}*x=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2+x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to \infty}(1+\frac{x-1}{x^2+1})$=1 ∴ $\frac{x+1}{x^2+1}\sim\frac{1}{x}$

(2)令 t=$\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^2 sin\frac{1}{t}}{t}$ =0(同 1.（2）) ∴ $t^2 sin\frac{1}{t}=o(t)$ ∴ $\frac{1}{x^2}sinx=o(\frac{1}{x})$

(3)令 t=$\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{2tsint}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2sint}{t}=2\neq 0$, ∴ $2tsint=O(t^2)$,即$\frac{2}{x}sin\frac{1}{x}=O(\frac{1}{x^2})$

(4)令 t=$\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^2-1-2t}{t^2}$=1(同 1.（4）) ∴ $(1+t)^2-1-2t\sim t^2$

$$\therefore (1+\frac{1}{x})^2-1-\frac{2}{x}\sim\frac{1}{x^2}$$

3. (1)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha x}{\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$

(2)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^m}{x^m}=1$

(3)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{x}=\frac{1}{2}$

(4)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}$=1

(5)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$=$\frac{1}{2}$

(6)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n}\sin x}{\tan x}$=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n}x}{x}$=$\frac{1}{n}$

(7)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}$=2

(8)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin\beta x}$=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\beta x}$=$\frac{1}{\beta}$

(9)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x(\sin x)^2}$=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x*\frac{1}{2}}{x*x^2}x^2$=$\frac{1}{2}$

(10)原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}$=1

4.均设为关于 x 的 k 阶无穷小量

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{3+\sin x^2}}{x^k}$=$\lim\limits_{x\to 0}(x^{3-k}+100x^{2-k})$

当 k=2 时，原式=100≠ 0 ∴是 x 的二阶无穷小量

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+\sin x^2}{x^k}$=$\lim\limits_{x\to 0}(x^{2-k}+\frac{\sin x^2}{x^k})$

当 k=2 时，原式=2≠ 0 ∴是 x 的二阶无穷小量

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(1+x)}{x^k(1+\sqrt[3]{x})}$=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}$=1

当 k=2 时，原式=1≠ 0 ∴是 x 的二阶无穷小量

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{x^k}$= $\lim\limits_{x\to 0}x^{3-k}$

当 k=3 时，原式=1≠ 0 ∴是 x 的三阶无穷小量

附：额外三角等价无穷小替换

$\tan x$-x~$\frac{1}{3}x^3$

$$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$$

$$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$$

习题 2.5

$f(x_0) = f(x_0^-) = f(x_0^+) \Rightarrow f(x)$在 x_0 处连续

1.(1) 证明： $f(x_0^-) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \cos x_0$

$f(x_0^+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \cos x_0$

$f(x_0) = \cos x_0 = f(x_0^-) = f(x_0^+)$

∴f (x)在 x_0 处连续.

(2) 证明： $f(x_0^-) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = a^{x_0}$

$f(x_0^+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a^{x_0}$

$f(x_0) = a^{x_0} = f(x_0^-) = f(x_0^+)$

∴f (x)在 x_0 处连续.

2.(1) $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x\geq 0 \\ x, & x<0 \end{cases}$

分段点：x=0　　f (0) =1

$f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$　　$f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0$

∴f (x)在分段点处不连续.

(2) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x>0 \\ 1, & x=0 \\ 2+x, & x<0 \end{cases}$

分段点：x=0　　f (0) =1

$f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$　　$f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 2$

∴f (x)在分段点处不连续.

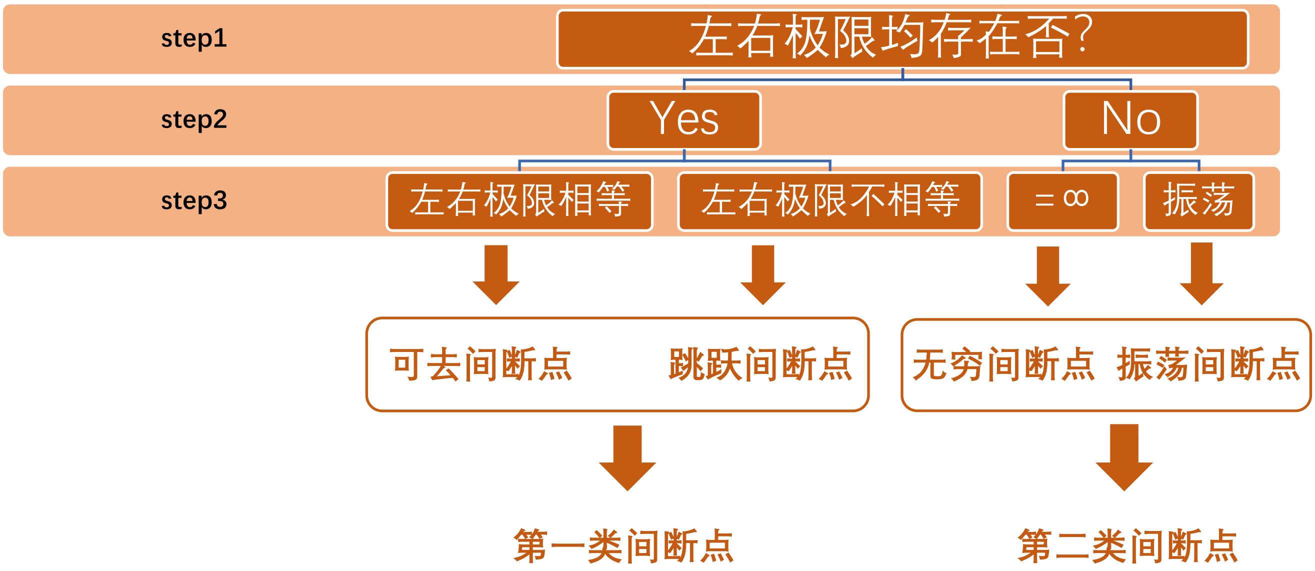
3.[补充 1] x_0 为 f (x)的间断点的三种情况：

①f (x)在 x_0 处无定义

② $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在

③ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

[补充 2]判断间断点类型



(1) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$

$f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ $\qquad f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

∴x=0 为 f (x)的可去间断点.

(2) $f(x) = [x]$

$f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} [x] = 0$ $\qquad f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} [x] = -1$

∴x=0 为 f (x)的跳跃间断点.

(3) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

$f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sin x} = \infty$ $\qquad f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{\sin x} = \infty$

∴x=0 为 f (x)的无穷间断点.

(4) f (x) = $sin\frac{1}{x}$

f (0) = $\lim\limits_{x\to 0} sin\frac{1}{x}$,不存在

∴x=0 为 f (x)的振荡间断点.

(5) f (x) = $\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$

f (0) = $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 不存在

∴x=0 为 f (x)的振荡间断点.

(6) f (x) = $\frac{\tan x}{x}$

f (0^+) = $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x}$ = 1 f (0^-) = $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{x}$ = 1

∴x=0 为 f (x)的可去间断点.

4.(1) f (x) = x-[x]

对 ∀ x_0∈Z : f (x_0^+) = $\lim\limits_{x\to x_0^+}(x-[x])$ = 0

f (x_0^-) = $\lim\limits_{x\to x_0^-}(x-[x])$ = 1

∴f (x)在所有整数点处不连续，而在其他点处是连续的.

(2) f (x) = $\frac{x}{\sin x}$

间断点：x=nπ, n∈Z (无定义)

∴f (x)在 x=nπ（n∈Z）处不连续，而在其他点是连续的.

(3) f (x) = $\cot x$ = $\frac{\cos x}{\sin x}$

x=nπ, n∈Z 时无定义，同上

∴f (x)在 x=nπ（n∈Z）处不连续，而在其他点是连续的.

(4) f (x) = $\sqrt{\frac{(x-1)(x-3)}{x+1}}$

$\frac{(x-1)(x-3)}{x+1}\geqslant 0$ ⇒ 定义域：[-1,1]∪[3,+∞)

∴f (x)在其定义域上连续.

5.

（1） $\lim_{x\to 0^+} arcsin\frac{1-x}{1-x^2}$

$=\lim_{x\to 0^+} arcsin\frac{1-x}{(1-x)(1+x)}$

$=\lim_{x\to 0^+} arcsin\frac{1}{1+x}$

$=\frac{\pi}{2}$

(2)$\lim_{x\to 0}\ln(1+e^x)$

$=ln\lim_{x\to 0}(1+e^x)$

$=\ln 2$

(3)令 F（x） $=\frac{\sqrt[3]{x+1}\ln(2+x^2)}{(1-x^3)+\cos x}$

由于初等函数在其定义域内连续

故$\lim_{x\to 0}F(x)$=F(0)=$\frac{\ln 2}{2}$

(4)令 F（x） $=\frac{x^2+e^{1-x}}{\ln(2+x)}$

同（3）$\lim_{x\to 1}F(x)$=F(1)=$\frac{2}{\ln 3}$

(5) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{2}{1-x}-1}$

=1

(6)$\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sin(\pi x+\frac{\pi}{2})}$

$=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}=1$

6.证明:（1） ∵f(x)在x_0处连续 ∴ $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$\therefore\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$

当$0<|x-x_0|<\delta,有|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$

$\because|f(x)-f(x_0)|\geq\big||f(x)|-|f(x_0)|\big|$

$\therefore\big||f(x)|-|f(x_0)|\big|<\varepsilon,即|f(x)|在x_0处连续$

故$|f(x)^2-f(x_0)^2|$=$[f(x)+f(x_0)][f(x)-f(x_0)]<\varepsilon$

$\therefore f(x)^2在x_0处连续$

（2）反之不成立

例如 $f(x)=\begin{cases}1,x\geq 0\\-1,x<0\end{cases}$在 x=0 处不连续

7.$|x|>1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+(a-1)x^n-1}{x^{2n}-ax^n-1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{a-1}{x^n}-\frac{1}{x^{2n}}}{1-\frac{a}{x^n}-\frac{1}{x^{2n}}}=x$$

$|x|<1$ 时，原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{0+0-1}{0-0-1}=1(|x|<1,n\to\infty$时$,x^n\to 0)$

$x=-1$ 时，$f(-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1+(-1)^n(a-1)-1}{1-(-1)^n a-1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+(-1)^n(a-1)}{(-1)^{n+1}a}$$

$$=\begin{cases}-\frac{a+1}{a}，n\text{为奇}\\\frac{3-a}{a},n\text{为偶}\end{cases}$$故 f（-1）不存在

$x=1$ 时，$f(-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a-1-1}{1-a-1}=\frac{1-a}{a}$

$$\therefore f(x)\begin{cases}1,|x|<1\\\frac{1-a}{a},x=1\\x,|x|>1\end{cases}\quad\text{在}x=-1\text{ 无定义}$$

要使 f(x)在$[0，+\infty)$上连续，$\frac{1-a}{a}=1$， $\therefore a=\frac{1}{2}$

习题 2.6

1.（1）证明：

$$\forall x_0 \in [0,2](x \neq 1)$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x_0-1} = f(x_0)$$

当$x_0 = 1$时有 $\lim_{x\to 1^+} - f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$

故$f(x)$在闭区间[0,2]上除点$x = 1$外时连续的。

（2）证明：1.假设$\exists x_0 \in [0,2]$使$f(x_0)$为最大值

则$f(x_0) = \frac{1}{x_0-1}$且$f(x_0)$>0

不妨取$x_1 = \frac{1}{f(x_0)+1} + 1 \in [0,2]$且$x_1 \neq 1$

$f(x_1) = \frac{1}{x_1-1} = \frac{1}{\frac{1}{f(x_0)+1}+1-1} = f(x_0) + 1 > f(x_0)$ 这与条件矛盾。

2.假设$\exists x_0' \in [0,2]$使$f(x_0')$为最小值

则$f(x_0') = \frac{1}{x_0'-1}$且$f(x_0')$<0

不妨取$x_2 = \frac{1}{f(x_0')-1} + 1 \in [0,2]$且$x_2 \neq 1$

$f(x_2) = \frac{1}{x_2-1} = \frac{1}{\frac{1}{f(x_0')-1}+1-1} = f(x_0') - 1 < f(x_0')$ 这与条件矛盾

综上$f(x)$在闭区间[0,2]上既无最大值也无最小值。

2. 证明： 1.假设$\exists x_0 \in (0,1) f(x_0)$为最大值

则$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$（$f(x_0)$>0），不妨取$x_1 = \frac{1}{f(x_0)+1} \in (0,1)$

此时$f(x_1) = f(x_0) + 1 > f(x_0)$（矛盾）

2.同理假设$\exists x_0' \in (0,1) f(x_0')$为最小值（$f(x_0')$>1）

取$x_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}(f(x_0')+1)} \in (0,1)$

此时$f(x_2) = \frac{1}{2}(f(x_0') + 1) < \frac{1}{2} \cdot 2f(x_0') = f(x_0')$（矛盾）

综上$f(x)$在闭区间[0,2]上既无最大值也无最小值。

3. 证明:（1）记$f(x)=x^3-5x+1$

由所有基本初等函数在其定义域内均连续得$f(x)$在闭区间[0,1]上连续。

由$f(0)=1, f(1)=-3 \quad f(0)\cdot f(1)<0$

故由零点定理得至少存在一点$\xi\in(0,1)$使得$f(\xi)=0$ 即方程

$x^3-5x+1=0$在（0，1）内至少有一根。

（2）记$g(x)=x-2\sin x$ 同（1）中论述$g(x)$在闭区间$[\frac{\pi}{2},\pi]$上连续

由$g(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-2<0, g(\pi)=\pi>0 \quad g(\frac{\pi}{2})\cdot g(\pi)<0$

故由零点定理得至少存在一点$\xi\in(\frac{\pi}{2},\pi)$使得$g(\xi)=0$即方程

$x-2\sin x=0$有根。

4.证明: 记$g(x)=f(x)-x$

由$f(x)$，x均在$[a,b]$上连续得$g(x)$在$[a,b]$上连续

$g(a)=f(a)-a\geq 0, g(b)=f(b)-b\leq 0$

1.当$g(a)=0$或$g(b)=0$时 $f(a)=a$或$f(b)=b$（原式显然成立）

2.当$g(a)>0, g(b)<0$时 $g(a)\cdot g(b)<0$

由零点定理得在（a,b）上存在一点ξ使得$g(\xi)=0$ 综上原式得证。

5.证明: 由$AB<0$不妨设$A>0, B<0$

则$f(a)=A>0$ 由$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B<0$（极限的局部保号性得）

一定$\exists X>a$,当$x>X$时$f(x)<0$成立

不妨取$b=x+1$，则$f(b)<0$,则$f(a)\cdot f(b)<0$

由$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续得$f(x)$在$[a,b]$上连续

故由零点定理得至少存在一点$\xi\in$（a,b），使得$f(\xi)=0$

即$f(x)$在$[a,+\infty)$上至少有一个零点。

6.证明：　由$|f(x)| \leqslant e^{\sin x}-1$得

$|f(0)| \leq e^{\sin 0}-1=0 \Rightarrow f(0)=0$

由$0 \leqslant |f(x)| \leqslant e^{\sin x}-1$得

$\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0$（夹逼定理）

即$(\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0)=f(0)$ 则函数$f(x)$在$x=0$处连续。

（由$\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0$推得$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$为教材 2.1 习题 2.（2）结论，使

用　定义很好证明）

第 2 章复习题

1. 证明：反证法：

假设$\{a_n+b_n\}$收敛

因为：$b_n=a_n+b_n-a_n$　又$\{a_n\}$收敛

则$\{b_n\}$收敛，与$\{b_n\}$发散矛盾

则假设不成立 ，即$\{a_n+b_n\}$发散

$\{a_nb_n\}$不一定发散，如：a_n=0，　b_n=n ，$a_nb_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$

2. 不能，如：a_n=n，b_n=−n，a_n+b_n=0，$\{a_n+b_n\}$收敛

a_n=（−1）^{n}，b_n=（−1）^{n}，$a_n b_n$=1，$\{a_nb_n\}$收敛

3. 不能，如：$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，b_n=n，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$=0

但$a_nb_n=\sqrt{n}$不收敛

所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n b_n$不存在

4. 不能，如：a_n=2（n 为奇），0（n 为偶）

b_n=0（n 为奇），2（n 为偶）

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n b_n$=0，但$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$都不存在

5.

（1）

$$a_n \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}} = 1$$

则由夹逼定理知：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ =1

（2）令 max{A,B,C,D}=a 则：

$$\sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{A^n+B^n+C^n+D^n} \leq \sqrt[n]{4a^n}$$

$$a \leq \sqrt[n]{A^n+B^n+C^n+D^n} \leq a\sqrt[n]{4}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}$（$a\sqrt[n]{4}$）=a，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ =max{A,B,C,D}

6

(1)证明：单调性：∵ $0<a_1<1$

由数学归纳法知 an>0

则 $a_{n+1}-a_n=-a_n^2<0$

∴ $0<a_{n+1}<a_n$

则｛a_n｝单调递减

有界性：∵ $a_n>0$

∴｛a_n｝收敛

令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$=a,则= $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n(1-a_n)$

∴ a=a(1-a)

∴ a=0

则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

(2)证明：单调性：$a_1=\sqrt{2}$,$a_2=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$,则 $a_2>a_1$

设 $a_{k+1}>a_k$,则 ak+2=$\sqrt{3+2a_{k+1}}>\sqrt{3+2a_k}$=$a_k$+1

由数学归纳法知，｛a_n｝单调递增

有界性：n=1, $a_1=\sqrt{2}<3$

假设 n=k，$a_k<3$

则 n=k+1 时，$a_{k+1}=\sqrt{3+2a_k}<3$ 成立

∴$a_n<3$

∴｛a_n｝收敛

令 $\lim_{n\to\infty} a_n$=a，则 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3+2a_n}$

$a=\sqrt{3+2a}$

有极限的保号性知 a=3

则 $\lim_{n\to\infty} a_n=3$

7、求下列数列极限

（1） $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^{n+1}$

解：原式$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^{-(n-2)*\frac{n+1}{-(n-2)}}=e^{-1}$ 1^{∞}

（2） $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{n}$

解：原式$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{-(n+2)*\frac{n}{-(n+2)}}=e^{-1}$ 1^{∞}

（3） $\lim_{n\to\infty} \mathrm{nsin}\frac{1}{n}$

解：原式$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$

（4） $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)*\sqrt{n}$

解：原式$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]*\sqrt{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$

=0

（5） $\lim_{n\to\infty}\tan^{n}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)$

解：原式$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\tan\frac{2}{n}+2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}*\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}}$

$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n*\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}}$

$=e^{\frac{4}{1-0}}\quad =e^4$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$

解：令 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$ 由于 $\forall 1\le k\le n$ 有 $\frac{n+k}{n^2+n}\le\frac{n+k}{n^2+k}\le\frac{n+k}{n^2+1}$

则 $\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+n}\le a_n\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+1}$

即 $\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}\le a_n\le\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}$

$$由夹逼定理知\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}\ 即\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}=\frac{3}{2}$$

8、求下列函数极限

（1）解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{x+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$

（2）解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(2x+3)^{20}*(3x+2)^{30}}{(3x)^{20}*(3x)^{30}}}{\frac{(2x+1)^{50}}{(3x)^{50}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{x}\right)^{20}*\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{30}}{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3x}\right)^{50}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{20}*1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{50}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{30}$

(3)解：当 m=n 时，原式=1

当 m>n 时，原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt[n]{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt[n]{x}}}=\frac{0-0}{1-0}=0$

当 m<n 时，原式=+∞

(4)解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1+1\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\lim\limits_{x\to}\frac{\frac{9}{2}x^2}{x^2}=4$

(5)解：令 t=1-x,则当 x⟶1 时，t⟶0

原式$=\lim\limits_{t\to 0}t\tan\frac{\pi}{2}(1-t)=\lim\limits_{t\to 0}t\cos\frac{t}{2}t=\mathop{lim}\limits_{t\to 0}t\frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}=\lim\limits_{t\to 0}t\frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}=\frac{2}{\pi}$

(6)解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$-$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{2+0}{1+0}$-1=1

9

解：$\lim_{x\to1} f(x)$=$\lim_{x\to1}[3x^2$+2x$\lim_{x\to1} f(x)$]=3+2$\lim_{x\to1} f(x)$

可以解得$\lim_{x\to1} f(x)$=-3

代入原式得$f(x)$=$3x^2$-6x

10

(1) 解：显然 3x 和$\sqrt{ax^2+bx+1}$是同阶无穷大量

∴a=9

$\lim_{x\to\infty}\frac{-b-\frac{1}{x}}{3+\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}}$=2

∴b=-12

(2) 解：x^2+ax+b 和 x-1 是同阶无穷小

当$x\to1, x^2+ax+b\to1+a+b\to0$

再洛必达$2x+a=5$，$\therefore a=3, b=-4$

11.⑴解：因为$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-cosx}$=$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}$

则$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$=2

所以$\lim_{x\to0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}$=$\lim_{x\to0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{x}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x^2}}$=$\lim_{x\to0}e^{\frac{f(x)}{x^2}}$=$e^2$

⑵解：因为$\sqrt{1+f(x)sinx^2}$ −1→ 0（x→ 0）

$f(x)sinx^2\to0$（x → 0）

所以$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)sinx^2}-1}{1-cosx}$=$\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x)sinx^2}{\frac{1}{2}x^2}$=$\lim_{x\to0}\frac{f(x)x^2}{x^2}$=3

即$\lim_{x\to0} f(x)$=3

12.⑴解：$\lim_{x\to0^+} f(x)=\frac{1}{x+1}=1$

$\lim_{x\to0^-} f(x)=-\frac{1}{x+1}=-1$

X=0 为第一类间断点中的跳跃间断点

$\lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

而$f(1) = 0$，x=1 为第一类间断点中的可去间断点

同理，x= -1 为第一类间断点中的可去间断点

⑵解：当 x=kπ 时，$\sin x = 0$

$\lim\limits_{x\to 2k\pi^+} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 2k\pi^-} f(x) = -1$

X=2kπ为第一类间断点中的跳跃间断点

同理，X=（2k+1）π为第一类间断点中的跳跃间断点

13.证：反证法：假设 f（x）在 R 上无界

①f（x）在 x=x_0时，有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$

则 x=x_0是 f（x）的无穷间断点

不满足连续条件

②f（x）在$x\to\infty$时，有$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

则 f（x）不满足周期条件

故 f（x）有界

14.把分段点找到，令其左右相等即可

①当|x|<1 时，$\lim\limits_{x\to\infty} |x^n| = 0$

f（x）=$ax^2 + bx$

②当|x|=1 时，f（x）=a+b|x|

③当|x|>1 时，f（x）=$\frac{1}{x}$

$$
即f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < -1 \\ a-b, & x = -1 \\ ax^2 + bx, & -1 < x < 1 < 1 \\ a+b, & x=1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}
$$

任意取分段点左右极限相等，联立方程

这里取-1 和 1

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=f(-1)\\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)\end{cases}$$

则$\begin{cases}a-b=-1\\ a+b=1\end{cases}$解得：$\begin{cases}a=0\\ b=1\end{cases}$

15.

证：因为$f(x+y)=f(x)+f(y)$，令 y=Δx 且$\Delta x\to 0$

原式=$f(x+\Delta x)=f(x)+f(\Delta x)$

两边同时取极限：$\lim\limits_{\Delta x\to0}f(x+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}f(x)+\lim\limits_{\Delta x\to0}f(\Delta x)$

又因为$\lim\limits_{\Delta x\to0}f(\Delta x)=0$，$\lim\limits_{\Delta x\to0}f(x)=f(x)$

所以$\lim\limits_{\Delta x\to0}f(x+\Delta x)=f(x)$

则 f（x）连续

16.

设$f(x)$在$(0,\ +\infty)$上连续，且满足$f(x^2)=f(x),x\in(0,+\infty)$.证明$f(x)(0,\ +\infty)$上为常值函数.

证明： $\because f(x^2)=f(x)$

$\therefore f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=f(x^{\frac{1}{4}})=f(x^{\frac{1}{4}})=\cdots\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})$

$\because$ $n\to\infty$*时*，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}}=1$

$\therefore$*当*$n\to\infty$*时*,$f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=f(x^{\frac{1}{4}})=f(x^{\frac{1}{4}})=\cdots\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(\lim\limits_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}})=f(1)$

$\therefore f(x)=f(1)$*为常值函数*

17.

设$f(x)$在[a,b]上有定义，满足 $a\leqslant f(x)\leqslant b$，$x\in[a,b]$，假设存在常数 $L\in[0.1)$,使得任意x'，$x''\in[a,b]$，$|f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|$.

试证明：（1）$f(x)$在[a,b]上连续。

（2）存在唯一$\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\xi$

（3）对于任意的$x_1\in[a,b]$，定义迭代序列$x_{n+1}=f(x_n)$,n=1,2,3……$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$

证明:

(1) $\because |f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|$，不妨令$x''=x_0$，$x'\to x_0\in[a,b]$

$\therefore L|x'-x_0|\to 0$

又$\because |f(x')-f(x_0)|\geqslant 0$，$\lim\limits_{x'\to x_0}|f(x')-f(x_0)|\leqslant\lim\limits_{x'\to x_0}L|x'-x_0|=0$

$\therefore \lim\limits_{x'\to x_0}|f(x')-f(x_0)|=0$，$\therefore \lim\limits_{x'\to x_0}f(x')=f(x_0)$

故连续.

(2) 根据题意设F（x）$=f(x)-x$,

$\because a\leqslant f(x)\leqslant b$，所以$F(a)\geq 0$，$F(b)\leq 0$

并且 F（a）·F(b)≤0，由零点存在定理：必存在唯一ξ∈[a,b]，使得 F（ξ）=0，
$\therefore f(\xi)=\xi$（

(3) 由题意：$|f(x_n)-f(\xi)|\leqslant L|x_n-\xi|$
由（2）：$f(\xi)=\xi$，$\therefore |f(x_n)-\xi|\leqslant L|x_n-\xi|$

$\therefore |x_{n+1}-\xi|\leqslant L|x_n-\xi|$，设数列$x_n$存在且为 A，则有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$

$\therefore$当 $n\to\infty$时，$|A-\xi|\leqslant L|A-\xi|$，又因为 $L\neq 1$，则 $A=\xi$

故假设成立，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=\xi$

证毕.

18.

函数$f(x)$在[0,1]上连续，$f(0)=f(1)$，证明：对于任意的自然数 $n\geqslant 2$，存在ξ_n，使得$f(\xi_n)=f(\frac{1}{n}+\xi_n)$.

证：令$F(x)=f(x)-f\left(\frac{1}{n}+x\right)$ $\because f(x)$在$x\in[0,1]$上连续，$\therefore \frac{1}{n}+x\in[0,1]$

$\therefore F(x)=f(x)-f\left(\frac{1}{n}+x\right)$在$[0,1-\frac{1}{n}]$上连续，即$F(x)$在$[0,\frac{n-1}{n}]$上连续

$\because$函数$F(x)$连续，$\therefore$由连续函数性质：存在m,M满足$m\leq F(x)\leq M$,

令$x=\frac{k}{n}$，$k=0$，1，2，3……n-1（注意自变量范围），

$\therefore m \le F(\frac{0}{n}) \le M$

$m \le F(\frac{1}{n}) \le M$

....

....

....

$m \le F(\frac{n-1}{n}) \le M$

$\boxed{\text{将}n\text{个式子相加，得} nm \leqslant F\left(\frac{0}{n}\right) + F\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + F(\frac{n-1}{n}) \leqslant nM}$

$\therefore m \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n-1} F(x)}{n} \leqslant M$，由介值定理，存在$\xi_n \in [0,1]$，使得$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} F(x)}{n} = F(\xi_n)$

展开：

$$nF(\xi_n) = F\left(\frac{0}{n}\right) + F\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + F(\frac{n-1}{n})$$

$$= f(0) - f\left(\frac{1}{n} + 0\right) + f(\frac{1}{n}) - f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n}\right) \cdots\cdots + f(\frac{n-1}{n}) - f\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\right)$$

$$= f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right) + f(\frac{1}{n}) - f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{3}{n}\right) \cdots\cdots + f(\frac{n-1}{n}) - f\left(\frac{n}{n}\right)$$

$$= f(0) - f(1) = 0$$

$\therefore nF(\xi_n) = 0$，$F(\xi_n) = 0$，即$F(\xi_n) = f(\xi_n) - f\left(\frac{1}{n} + \xi_n\right) = 0$，

$\therefore f(\xi_n) = f(\frac{1}{n} + \xi_n)$.

证毕.

19.

对于任意的x,函数满足$f(x) = f(2x)$,且$f(x)$在$x = 0$处连续，证明：$f(x)$为常值函数

证明：$\because f(x) = f(2x)$

$\therefore f(x) = f(\frac{x}{2}) = f(\frac{x}{4}) = f(\frac{x}{8}) = \cdots\cdots = f(\frac{x}{2^n})$

当 $n \to \infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{2^n} = 0$

$\therefore$ 当$n \to \infty$时，$f(x) = f(\frac{x}{2}) = f(\frac{x}{4}) = f(\frac{x}{8}) = \cdots\cdots = f(\frac{x}{2^n}) = f(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{2^n}) = f(0)$

$\because f(x)$在$x = 0$处连续，$\therefore f(0)$存在

故$f(x) = f(0)$ 恒为常数.

20.

对于任意的x，总有$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$,且$\lim\limits_{x\to\infty}(\varphi(x)-\psi(x))$=0. 问：极限$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$是否存在，给出理由.

解：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$*不一定存在*，理由如下

$\because \lim\limits_{x\to\infty}(\varphi(x)-\psi(x))$=0 不等价于$\varphi(x)$，$\psi(x)$极限存在，

$\therefore$不满足夹逼准则，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$*不一定存在*

反例如：$\varphi(x) = sinx - \frac{1}{x}$，$f(x) = sinx$，$\psi(x) = sinx + \frac{1}{x}$