复习题2

1、设数列$\{a_n\}$收敛，而数列$\{b_n\}$发散。证明：数列$\{a_n+b_n\}$必发散。试问数列$\{a_nb_n\}$也发散吗？

证明：反证法：

假设$\{a_n+b_n\}$收敛

$\because b_n=a_n+b_n-a_n$ 又$\{a_n\}$收敛

则$\{b_n\}$收敛，与$\{b_n\}$发散矛盾

则假设不成立 即$\{a_n+b_n\}$发散

$\{a_nb_n\}$不一定发散，如：$a_n=0$ $b_n=n$ $a_nb_n=0$ $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$

2、设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均发散，可否断定数列$\{a_n+b_n\}$与$\{a_nb_n\}$也发散？

解：不能，如：$a_n=n$ $b_n=-n$ $a_n+b_n=0$ $\{a_n+b_n\}$收敛

$a_n=(-1)^n$ $b_n=(-1)^n$ $a_nb_n=1$ $\{a_nb_n\}$收敛

3、设数列$\{a_n\}$收敛于0，$\{b_n\}$为任意数列，能否断定$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$？

解：不能，如：$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ $b_n=n$ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

但$a_nb_n=\sqrt{n}$ 不收敛

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$ 不存在

4、设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，可否得出$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$或$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

解：不能，如：$a_n=\begin{cases}2, & n\text{为奇数}\\ 0, & n\text{为偶数}\end{cases}$

$$b_n=\begin{cases}0, & n\text{为奇数}\\ 2, & n\text{为偶数}\end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ 但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 均不存在

5. 用夹逼定理求下列数列的极限

(1) $a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

解: $a_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

$a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right)=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\right)=1$

则由夹逼定理知: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$

(2) $a_n=\sqrt[n]{A^n+B^n+C^n+D^n}$，其中 A,B,C,D 为正数

解: 令 $\max\{A,B,C,D\}=a$

则 $\sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{A^n+B^n+C^n+D^n} \leq \sqrt[n]{4a^n}$

$a \leq \sqrt[n]{A^n+B^n+C^n+D^n} \leq a\sqrt[n]{4}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}(a\sqrt[n]{4})=a$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\max\{A,B,C,D\}$

6. 用单调有界原理证明下列数列收敛，并求其极限

(1) $0<a_1<1,\ a_{n+1}=a_n(1-a_n),\ n=1,2,3,\cdots;$

证明：单调性：$\because 0<a_1<1$

由数学归纳法知：$a_n>0$

则 $a_{n+1}-a_n=-a_n^2<0$

$\therefore 0<a_{n+1}<a_n$

则 $\{a_n\}$ 单调递减

有界性：$a_n>0$

$\therefore \{a_n\}$ 收敛

令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} a_n(1-a_n)$

$a=a(1-a)$

$\Rightarrow a=0$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

(2) $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{3+2a_n}$，$n=1,2,3,\cdots$

证明：单调性：$a_1=\sqrt{2}$　$a_2=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ 则 $a_2>a_1$

设 $a_{k+1}>a_k$ 则 $a_{k+2}=\sqrt{3+2a_{k+1}}>\sqrt{3+2a_k}=a_{k+1}$

由数学归纳法知：$\{a_n\}$ 单调递增

有界性：$n=1$，$a_1=\sqrt{2}<3$

假设 $n=k$，$a_k<3$

则 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=\sqrt{3+2a_k}<3$ 成立

$\therefore a_n<3$

$\therefore \{a_n\}$ 收敛

令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3+2a_n})$

$a=\sqrt{3+2a}$

由极限保号性知：$a=3$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=3$

7、求下列数列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^{n+1}$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^{-(n-2)\cdot\frac{n+1}{-(n-2)}}=e^{-1}$ $\quad 1^{\infty}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{n}$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{-(n+2)\cdot\frac{n}{-(n+2)}}=e^{-1}$ $\quad 1^{\infty}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sqrt{n}$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]\cdot\sqrt{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$

$=0$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^{n}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-\tan\frac{2}{n}+2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{2\tan\frac{2}{n}\cdot n}{1-\tan\frac{2}{n}}}$

$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n\cdot\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}}=e^{\frac{4}{1-0}}=e^{4}$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$

解：令 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$ 由于 $\forall\, 1\le k\le n$，有 $\frac{n+k}{n^2+n}\le\frac{n+k}{n^2+k}\le\frac{n+k}{n^2+1}$

则 $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(n+k)}{n^2+n}\le a_n\le\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(n+k)}{n^2+1}$

即 $\frac{n^2+\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n}\le a_n\le\frac{n^2+\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+1}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}=\frac{3}{2}$

由夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}=\frac{3}{2}$

8. 求下列函数极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{(2x+3)^{20}(3x+2)^{30}}{(3x)^{20}\cdot(3x)^{30}}}{\frac{(2x+1)^{50}}{(3x)^{50}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\frac{2}{3}+\frac{1}{x})^{20}\cdot(1+\frac{2}{3x})^{30}}{(\frac{2}{3}+\frac{1}{3x})^{50}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\frac{2}{3})^{20}\cdot 1}{(\frac{2}{3})^{50}}=(\frac{3}{2})^{30}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$（$m,n$ 为正整数）

解：当 $m=n$ 时，原式 $=1$

当 $m>n$ 时，原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt[n]{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt[n]{x}}}=\frac{0-0}{1-0}=0$

当 $m<n$ 时，原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{\sqrt[m]{x}}}{x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}-\frac{1}{\sqrt[m]{x}}}=+\infty$

综上，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\begin{cases}+\infty, & m<n\\ 1, & m=n\\ 0, & m>n\end{cases}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+1-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$

又 $\begin{cases}1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2 \quad (x\to 0)\\ 1-\cos 3x\sim\frac{1}{2}(3x)^2=\frac{9}{2}x^2 \quad (x\to 0)\end{cases}$

则原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{9}{2}x^2}{x^2}=4$

(5) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

解：令 $t=1-x$，则当 $x\to 1$ 时，$t\to 0$

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}t\tan\frac{\pi}{2}(1-t)=\lim\limits_{t\to 0}t\cdot\cot\frac{\pi}{2}t=\lim\limits_{t\to 0}t\cdot\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}=\lim\limits_{t\to 0}t\cdot\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}$

$=\frac{2}{\pi}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}-\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{2+0}{1+0}-1=1$