1.证明:(1) 对于 $\forall\varepsilon>0$,要使 $|(2x+1)-3|<\varepsilon$

只需 $2|x-1|<\varepsilon$

即 $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$

令 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$,则当 $|x-1|<\delta$ 时

恒有 $|(2x+1)-3|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}(2x+1)=3$.

(2) 对于 $\forall\varepsilon>0$,要使 $|(3x+1)-7|<\varepsilon$

只需 $3|x-2|<\varepsilon$

即 $|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$

令 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$,则当 $|x-2|<\delta$ 时,

恒有 $|(3x+1)-7|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to2}(3x+1)=7$

(3). 对于 $\forall\varepsilon>0$,要使 $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$

即 $2|\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}|<\varepsilon$

$\Leftarrow 2|\sin\frac{x_0-x_0}{2}|<\varepsilon$

$\Leftarrow |x-x_0|<\varepsilon$

令 $\delta=\varepsilon$,则当 $|x-x_0|<\delta$ 时,

恒有 $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$

2.证明(1). $\lim\limits_{x\to0^+}[x]=0$

对于 $\forall\varepsilon>0$,取 δ 为 ε,则当 $0<x<\delta$ 时,

有 $|[x]-0|=0<\delta=\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to0^+}[x]=0$

(2) $\lim\limits_{x\to0^-}[x]=-1$

$\because$ 当 $x\in[-1,0)$ 时,$[x]=-1$

$\therefore$ 对于 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $-\delta<x<0$ 时,

有 $|[x]+1|=0<\delta=\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to0^-}[x]=-1$.

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}x\operatorname{sgn}x=0$

$\because$ 当 $x>0$ 时,$x\operatorname{sgn}x=x$

$\therefore$ 对于 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<x<\delta$ 时

$|x\operatorname{sgn}x-0|=|x|<\delta=\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to0^+}x\operatorname{sgn}x=0$

(4). $\lim\limits_{x\to0^-}x\operatorname{sgn}x=0$

$\because$ 当 $x<0$ 时,$x\operatorname{sgn}x=-x$

$\therefore$ 对于 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $-\delta<x<0$ 时,

有 $|x\operatorname{sgn}x-0|=-x<\delta=\varepsilon$

$\therefore$ ~~对于任意~~ $\therefore \lim\limits_{x\to0^-}x\operatorname{sgn}x=0$

3解：证明：(1) 对 $\forall \varepsilon>0$，取 $X=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，则当 $|x|>X$ 时，

$$\left|\frac{x^2+1}{x^2+2}-1\right|=\left|\frac{1}{x^2+2}\right|=\frac{1}{x^2+2}<\frac{1}{X^2}=\varepsilon.$$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2+2}=1.$

(2) 对于 $\forall \varepsilon>0$，取 $X=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，则当 $|x|>X$ 时，

$$\left|\frac{1}{x^2+1}-0\right|=\left|\frac{1}{x^2+1}\right|=\frac{1}{x^2+1}<\frac{1}{X^2}=\varepsilon$$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$

(3) $\because \left|(\sqrt{x^2+1}-x)-0\right|=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

当 $x\to+\infty$ 时，不妨设 $x>1$，有 $\sqrt{x^2+1}+x>x$

$\therefore \left|(\sqrt{x^2+1}-x)-0\right|<\frac{1}{x}$

对于 $\forall \varepsilon>0$，可取 $X=\max\{1,\frac{1}{\varepsilon}\}$

只要 $x>X$ 时，就有 $\left|(\sqrt{x^2+1}-x)-0\right|<\frac{1}{x}<\frac{1}{X}=\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=0.$

(4) $\because \left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}\right|=\left|\frac{x+2-3}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3})}\right|=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}<\frac{1}{\sqrt{x+2}}<\frac{1}{\sqrt{x}}$

对于 $\forall \varepsilon>0$，可取 $X=\frac{1}{\varepsilon^2}$

只要 $x>X$ 时，就有 $\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}\right|<\frac{1}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{X}}=\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}=0$

4.解：由题意：$f(x)=\begin{cases}2, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$， $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$

$\because \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ $\because \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\neq \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在 $\therefore \lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ 不存在.

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$\Rightarrow x-y=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$

$\therefore \boxed{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}=\dfrac{x-y}{x^{\frac{2}{3}}+(xy)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}}$ 5(10).

5.解：(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2+2}=\dfrac{1+1}{1+2}=\dfrac{2}{3}$ (2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+2}=\dfrac{-1+1}{1+2}=0$

(3). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$ (4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x-2)=-4$

(5). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x+1}{x^3+2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})}=1$

(6). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^4+1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^4}}$

$=0$

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+2}{x+1}=1$ (8). $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+2}{x^2+1}=1$

(10). $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x-a}}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{x-a}{x^{\frac{2}{3}}+(ax)^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}}{(x-a)^{\frac{1}{3}}}=$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+(ax)^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}$

$=0$

(9). $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$

$\because \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)=2$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$（$\sin x$是有界变量，$\frac{1}{x}$是无穷小量，无穷小量与有界变量的乘积是无穷小量）

$\therefore \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}=2^0=1.$

6.解: $\lim\limits_{x\to1^-}(\frac{x+5}{x^2+1}+5)=\frac{1+5}{1+1}+5=8$

$\lim\limits_{x\to1^+}(6+\frac{x^2-1}{x-1})=\lim\limits_{x\to1^+}(6+x+1)=7+1=8$

$\because \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=8$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}f(x)=8$

7.解:(1) 要证 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+1}{x}=\infty$

即证 $\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{1}{x})=\infty$

只需证 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$

只需证 $\lim\limits_{x\to0}x=0$

对于 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 当 $0<|x-0|<\delta$ 时,

有 $|x-0|=|x|<\delta=\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}x=0$, 即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+1}{x}=\infty$.

(2) 要证 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$

即证 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}}=0$

对于 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=-\frac{1}{\ln\varepsilon}$, 当 $0<|x-0|<\delta$ 时

有 $|e^{-\frac{1}{x}}-0|=e^{-\frac{1}{x}}<\delta=\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}}=0$, 即 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$

(3). 要证 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$

即证 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$

对于 $\forall\varepsilon>0$, 取 $X=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, 则当 $|x|>X$ 时,

有 $|\frac{1}{x^2}-0|=\frac{1}{x^2}<\frac{1}{X^2}=\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$, 即 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$

(4). 要证 $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

即证 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0$

对于 $\forall\varepsilon>0$, 取 $X=\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$, 则当 $|x|>X$ 时,

有 $|\frac{1}{x^3}-0|=|\frac{1}{x^3}|<\frac{1}{X^3}=\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0$, 即 $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

8解：①当$m=n$时，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_m+a_{m-1}\frac{1}{x}+\cdots+a_1\frac{1}{x^{m-1}}+a_0\frac{1}{x^m}}{b_n+b_{n-1}\frac{1}{x}+\cdots+b_1\frac{1}{x^{n-1}}+b_0\frac{1}{x^n}}=\dfrac{a_m}{b_n}$

②当$m<n$时，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_m\frac{1}{x^{n-m}}+a_{m-1}\frac{1}{x^{n-m+1}}+\cdots+a_0\frac{1}{x^n}}{b_n+b_{n-1}\frac{1}{x}+\cdots+b_0\frac{1}{x^n}}=0$

③当$m>n$时，令$g(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$h(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$

由②得$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{h(x)}{g(x)}=0$

$\therefore\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{h(x)}=\infty$.