复习题2，第15-20题

15、对于任意的x和y，函数满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$．证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为连续函数，

证：∵ $f(x+y)=f(x)+f(y)$，令 $y=\Delta x$ 且 $\Delta x\to 0$

原式 $=f(x+\Delta x)=f(x)+f(\Delta x)$

两边同取极限：$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0} f(x)+\lim_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)$

又∵ $\lim_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)=0$，$\lim_{\Delta x\to 0} f(x)=f(x)$

∴ $\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=f(x)$．

∴ $f(x)$ 连续，

16. $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(x^2)=f(x)$，$x\in(0,+\infty)$．证：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为常值函数．

证：∵ $f(x^2)=f(x)$　∴ $f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})$　∴ $f(x^{\frac{1}{2}})=f(x^{\frac{1}{4}})$

由此：$f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=f(x^{\frac{1}{4}})=f(x^{\frac{1}{8}})\cdots\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})$

当 $n\to\infty$ 时，令 $a_n=\frac{1}{2^n}$．∴ $\lim_{n\to\infty} a_n=2^0=1$

∴ $f(x)=f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(1)$　$(n\to\infty)$ 时．

∴ $f(x)=f(1)$ 恒为常值，

17. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，满足 $a\le f(x)\le b$，$x\in[a,b]$，假设存在常数 $L\in[0,1)$，使得对任意 $x',x''\in[a,b]$ 有 $|f(x')-f(x'')|\le L|x'-x''|$

① 证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续．

② 存在唯一 $\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=\xi$

③ 对任意的 $x_1\in[a,b]$，定义迭代序列 $x_{n+1}=f(x_n)$，$n=1,2,3,\cdots$，则 $\lim_{n\to\infty} x_n=\xi$．

解：(1) $|f(x')-f(x'')|\le L|x'-x''|$

令 $x''=x_0$，$x'\to x_0$ $(x_0\in[a,b])$．

则 $L|x'-x''|\to 0$　∵ $|f(x')-f(x'')|\ge 0$．

且 $\lim|f(x')-f(x'')|\le\lim L|x'-x''|=0$

$x'\to x_0$，$x''=x_0$

由夹逼定理

当自变量变化很小时对应函数变量也是无穷小，故连续

(2) $a\le f(x)\le b$　构造函数 $F(x)=f(x)-x$

$f(a)-a\ge 0$　由介值定理 $[a,b]$ 上必有一零点

$f(b)-b\le 0$　$f(\xi)-\xi=0$

$f(\xi)=\xi$

(3) $|f(x_n)-f(\xi)|\le L|x_n-\xi|$　∵ 且 $L\in[0,1)$

$|f(x_n)-\xi|\le L|x_n-\xi|$　$n\to\infty$　x_n 与 ξ 差 $\to 0$．

$|x_{n+1}-\xi|\le L|x_n-\xi|$（相当于 x_n 与 ξ 距离）　$\lim_{n\to\infty} x_n=\xi$

扫描全能王 创建

8. 设$f(x)$在$[0,1]$连续，$f(0)=f(1)$，证明：对任意自然数$n\geq 2$，存在$\xi_n\in[0,1]$，使得$f(\xi_n)=f(\frac{1}{n}+\xi_n)$

证：令$h(x)=f(x)-f(\frac{1}{n}+x)$ $\because$ $x\in[0,1]$，$\frac{1}{n}+x\in[0,1]$ $\therefore$ $x\in[0,1-\frac{1}{n}]$.

$\therefore$ $h(x)$在$[0,1-\frac{1}{n}]$上连续，

$\therefore$ ~~必~~ $\exists\, m, M$，使：$m\leq h(x)\leq M$

即 $m\leq h(\frac{k}{n})\leq M$，$k=0,1,2,\ldots\ldots,n-1$；$[h(x)=f(x)-f(\frac{nx+1}{n})$，当$x=n-1$时，$\frac{nx+1}{n}=1$，因此将自变量$x$写为$\frac{k}{n}$的形式$]$.

$\therefore$
$$\left.\begin{aligned} m&\leq h(\tfrac{1}{n})\leq M;\\ m&\leq h(\tfrac{2}{n})\leq M;\\ &\ \vdots\\ m&\leq h(\tfrac{n-1}{n})\leq M;\end{aligned}\right\}$$
累加得，$n\cdot m\leq\sum_{k=0}^{n-1}h(\frac{k}{n})\leq n\cdot M$.

$\Leftrightarrow$ $m\leq\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}h(\frac{k}{n})\leq M$

$\therefore$ 由介值定理，必存在一点$\xi_n\in[0,1]$，使 $h(\xi_n)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}h(\frac{k}{n})$

$\therefore$ $h(\xi_n)=h(0)+h(\frac{1}{n})+\cdots\cdots+h(\frac{n-1}{n})$

$=f(0)-f(\frac{1}{n}+0)+f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n}+\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})-f(\frac{1}{n}+\frac{2}{n})+\cdots\cdots+f(\frac{n-1}{n})-f(\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n})$

$=f(0)-f(\frac{1}{n})+f(\frac{1}{n})-f(\frac{2}{n})+f(\frac{2}{n})-f(\frac{3}{n})+\cdots\cdots+f(\frac{n-1}{n})-f(1)$

$=f(0)-f(1)=0$

$\therefore$ $h(\xi_n)=0$ 即 $f(\xi_n)-f(\frac{1}{n}+\xi_n)=0$

$\Rightarrow$ $f(\xi_n)=f(\frac{1}{n}+\xi_n)$

9. 对任意的x，函数$f(x)$满足$f(x)=f(2x)$，且$f(x)$在$x=0$处连续，证明$f(x)$为常值函数.

证：$\because$ $f(x)=f(2x)$ $\therefore$ $f(2x)=f(x)=f(\frac{x}{2})=f(\frac{x}{4})=\cdots\cdots=f(\frac{x}{2^n})$

当$n\to\infty$时，令$a_n=\frac{x}{2^n}$ $\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

即 $f(x)=f(\frac{x}{2^n})=f(0)$ $(n\to\infty)$时，

又$\because$ $f(x)$在$x=0$连续，即 ~~极~~ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ 极限存在

$\therefore$ $f(x)=f(0)$ 存在，

$\therefore$ $f(x)$为常值函数.

扫描全能王 创建

20. 对于任意的 x，总有 $\varphi(x) \le f(x) \le \phi(x)$ ~~且 $\lim_{x\to\infty}[\varphi(x)$~~ 且 $\lim_{x\to\infty}[\phi(x)-\varphi(x)]=0$，问极限 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ 是否一定存在？如果存在，证明。如果不~~成~~存在，请举例说明。

解：该极限 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ 不一定存在。

$\because \lim_{x\to\infty}[\phi(x)-\varphi(x)]=0 \not\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\phi(x)$ 与 $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)$ 存在，

不满足夹逼准则，故 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ 不一定存在。

反例 $\varphi(x)=\sin x-\frac{1}{x^2}$，$f(x)=\sin x$，$\phi(x)=\sin x+\frac{1}{x^2}$

扫描全能王 创建