△ 微分的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，存在一个只与 x_0 有关而与 Δx 无关的常数A，使得 $\Delta x \to 0$ 时，有

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 可微，$A\Delta x$ 为 $f(x)$ 在 x_0 的微分，记为dy，即

$$dy = A\Delta x$$

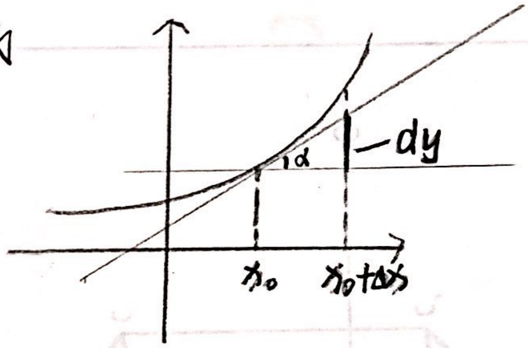
若函数 $y=f(x)$ 在某一区间上的每一点都可微，则 $f(x)$ 在该区间上可微.

△ $y=f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，且 $dy=f'(x_0)dx$

可导 $\Longleftrightarrow$ 可微

判断 $f(x)$ 在 x_0 可微 $\begin{cases} \text{定义} \\ \text{判断是否可导} \end{cases}$

△ 几何意义



$k=\tan\alpha=f'(x_0)$

$dy=f'(x_0)\cdot\Delta x$

$\quad=\tan\alpha\cdot\Delta x$

$\quad=dy$

△ 微分的四则运算法则

(1) $d(u(x)\pm v(x)) = du(x)\pm dv(x)$；

(2) $d(u(x)v(x)) = u(x)dv(x)+v(x)du(x)$；

(3) $d\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right) = \dfrac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{v(x)^2}$

对于复合函数的微分

$$df(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\,dx$$

习题3.3

(1) 求函数 $y=x^2$ 在点 $x=1$ 的微分. 其中自变量的增量 Δx 分别如下:

(1) $\Delta x=0.1$ (2) $\Delta x=0.01$ (3) $\Delta x=0.001$

解: 由公式可得 $dy|_{x=1}=f'(1)\Delta x$. 分别代入 Δx.

可得 $\boxed{dy=0.2;\quad dy=0.02;\quad dy=0.002}$

(2) 求下列函数微分.

(1) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ (2) $y=\tan x+\sec x$ (3) $y=\arccos\frac{1}{x}$ (4) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$

(5) $y=\arctan\frac{x^2-1}{x^2+1}$ (6) $y=(x^2+4x+1)(x^2-\sqrt{x})$

解: 由 $dy=f'(x)dx$ 可知分别求出 $f'(x)$ 即可得出结果.

(1) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ $\therefore y=\frac{x^2+1-2}{x^2+1}=1-\frac{2}{x^2+1}$ $\therefore y'=(0-\frac{-2\cdot 2x}{(x^2+1)^2})=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

$\therefore \boxed{dy=\frac{4x}{(x^2+1)^2}dx}$

(2) $y=\tan x+\sec x$ $\therefore y=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}$ $\therefore y'=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\cos^2x}+\frac{\sin x}{\cos^2x}=\sec^2x+\sec x\tan x$

$\boxed{\therefore dy=(\sec^2x+\sec x\tan x)dx}$

(3) $y=\arccos\frac{1}{x}$ $\therefore y'=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot(\frac{1}{-x^2})=\frac{1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}}$

$\therefore \boxed{dy=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx,\ 且(|x|>1)}$

(4) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$ $\therefore y'=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\cdot(-2x)=\frac{1}{\sqrt{x^2}}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$

$\boxed{\therefore dy=\frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}dx\ 且(|x|<1)}$

(5) $y=\arctan\frac{x^2-1}{x^2+1}$ $\therefore y'=\frac{1}{1+(\frac{x^2-1}{x^2+1})^2}\cdot(\frac{x^2-1}{x^2+1})'$. 由(1)知 $(\frac{x^2-1}{x^2+1})'=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{1}{2x^4+2}\cdot 4x=\frac{2x}{x^4+1}$

$\therefore \boxed{dy=\frac{2x}{x^4+1}dx}$

(6) $y=(x^2+4x+1)(x^2-\sqrt{x})$

$\therefore y'=(2x+4)(x^2-\sqrt{x})+(x^2+4x+1)(2x-\frac{1}{2\sqrt{x}})=2x^3-2x^{\frac{3}{2}}+4x^2-4x^{\frac{1}{2}}+2x^3-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}+8x^2-2x^{\frac{1}{2}}+2x-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$=4x^3+12x^2-\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}+2x-6x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore \boxed{dy=(4x^3+12x^2-\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}+2x-6x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})dx}$

3. 求复合函数微分

(1) $y=\ln u,\ u=\sqrt{1+x^2}$　(2) $y=\arcsin u,\ u=\frac{1}{x}$　(3) $y=\arctan u,\ u=\sqrt{x}$　(4) $y=e^u,\ u=\sin x$

解：(1) $y=\ln\sqrt{1+x^2}$　$\therefore y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x=\frac{x}{1+x^2}$

$\boxed{\therefore dy=\frac{x}{1+x^2}dx}$

(2) $y=\arcsin\frac{1}{x}$　$\therefore y'=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}\cdot(-\frac{1}{x^2})=\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}\cdot(-\frac{1}{x^2})=\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1}{-|x|^2}$

$=\frac{1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}}$

$\boxed{\therefore dy=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx\ (\frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}}dx)}$

(3) $y=\arctan\sqrt{x}$　$\therefore y'=\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$

$\boxed{\therefore dy=\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}dx}$

(4) $y=e^{\sin x}$　$\therefore y'=e^{\sin x}\cdot\cos x$　$\therefore \boxed{dy=(e^{\sin x}\cdot\cos x)dx}$

4. 求下列各式近似值

(1) $\sqrt[3]{1.02}$　(2) $\ln 1.005$

解：由微分定义：$\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$，即 $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$

$\therefore f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$

(1)

令 $\sqrt[3]{1.02}=\sqrt[3]{1+0.02}$　$\therefore f(x)=x^{\frac{1}{3}}$　$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$．$\Delta x=0.02$

$\therefore \boxed{f(1.02)\approx f(1)+f'(1)\cdot 0.02=1+\frac{1}{3}\times 0.02=1.006\approx 1.007}$

(2) 令 $\ln 1.005=\ln(1+0.005)$　$\therefore f(x)=\ln x$．$f'(x)=\frac{1}{x}$　$\Delta x=0.005$

$\therefore \boxed{f(1.005)\approx f(1)+f'(1)\cdot 0.005=0+1\times 0.005=0.005}$