习题 3.1

1. (1)

$f(x) = x^2$, $x_0 = 1$

$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2-(x_0)^2}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2+\Delta x)$

$=2$

(2)

$f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x_0 = 2$

$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{(x_0+\Delta x)^2}-\frac{1}{(x_0)^2}}{\Delta x}$

$=- \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0+\Delta x}{{x_0}^2(x_0+\Delta x)^2}$

$=-\frac{2}{{x_0}^3}$

$=-\frac{1}{4}$

(3)

$f(x)=x(x+1)\dots(x+2020)$, $x_0 = 0$

$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)(x_0+1+\Delta x)\dots(x_0+2020+\Delta x)-x_0(x_0+1)\dots(x_0+2020)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x_0[(x_0+1+\Delta x)\dots(x_0+2020+\Delta x)-x_0(x_0+1)\dots(x_0+2020)]}{\Delta x}$

$+\lim\limits_{\Delta x \to 0}(x_0+1+\Delta x)\dots(x_0+2020+\Delta x)$

$=\lim_{\Delta x \to 0}(x_0+1+\Delta x)\ldots(x_0+2020+\Delta x)$

=2020!

2. (1)

$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}$

$=+\infty$

$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$

$=+\infty$

∴f(x)在 x=0 处不可导

(2)

$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-1}{x}$

$=\lim_{x\to 0^-}x^2$

=0

$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}$

$=\lim_{x\to 0^+}x$

=0

∵ $f'(0)=f'_+(0)=f'_-(0)=0$

∴ f(x)在 x=0 处可导

3. (1)

∵ $y'|_{x=0} = e^{x}|_{x=0} = 1$

∴ $k_{切}=1$，$k_{法}=-1$

$L_{切}$：$y = x+1$

$L_{法}$：$y =-x+1$

（2）

设 $P(x_o,\ln x_o)$，则 $y|_{x=x_o}=\frac{1}{x}$ 令$\frac{1}{x_o}=\frac{1}{2}$，解得 $x_o=2$， 即 $P(2,\ln 2)$.

4. 在 x=1 处可导=> f(x)在 x=1 处连续=> $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = f(1)$,

在 x=1 处可导=>左右导数存在且相等，$\lim\limits_{x\to 1-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1+} f'(x)$

即 $\lim\limits_{x\to 1-} 2x = \lim\limits_{x\to 1+} a$ ②

解①②得：$\mathbf{a}=2$，$\boldsymbol{b}=-1$

5.证明：左边= $\lim\limits_{\hbar\to\infty}\frac{f(x0+\hbar)-f(x0)+f(x0)-f(x0-\hbar)}{\hbar}$

$= \lim\limits_{\hbar\to 0}\frac{f(x0+\hbar)-f(x0)}{(x0+\hbar)-x0} + \lim\limits_{\hbar\to 0}\frac{f(x0)-f(x0-\hbar)}{x0-(x0-\hbar)}$

$= 2f'(x_0)$

= 右边

6.证明：①偶函数满足：$f(x)= f(-x)$

两边同时求导：f' (x)=-f' (-x)

即偶函数导数为奇函数；

②奇函数满足：**- f(x) =- f(-x)**

两边同时求导**:**- f' *(x)=- f' (-x)*

=> f' (x)= f' (-x)

即奇函数的导数为偶函数；

③周期函数满足：f(x)= f(x+T)

两边同时求导：f' (x)= f' (x+T)

即周期函数的导数为周期函数。

7.解：$f(x)=\begin{cases} -1, -1 \le x < 0 \\ 0, 0 \le x < 1 \\ 1, x = 1 \end{cases}$

①f'_+(0)= $\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$= $\lim\limits_{\Delta x\to 0-}(-\frac{1}{\Delta x})$=+∞；(其为函数在 x=0 点的左导数)

②f'_+(0)= $\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$=0；

③因f'_+(0)≠f'_-(0),故f'(0)不存在；

④$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=0$ (其为在 x 趋向于 0 时函数的导数值)。

8.解：|f(0)|≤1-cos0=0 ,即f(0)=0

①如果要证明连续性：cosx-1≤ f(x)≤1-cosx

因$\lim\limits_{x\to 0-}(cos0-1)$= $\lim\limits_{x\to 0+}(1-cos0)=0=f(0)$

则f(x)在 x=0 处连续；

②证明可导性：

$$\lim_{x\to0-}\frac{-(\mathrm{cosx}-1)-[-(cos0-1)]}{\mathrm{x}-0}$$

$$\leq\lim_{x\to0-}\frac{f(\mathrm{x})-f(0)}{\mathrm{x}-0}\leq\lim_{x\to0-}\frac{(\mathrm{cosx}-1)-(cos0-1)}{\mathrm{x}-0}$$

因 $\lim_{x\to0-}\frac{1-\mathrm{cosx}}{\mathrm{x}}=\lim_{x\to0-}\frac{\mathrm{cosx}-1}{\mathrm{x}}=0$(等价无穷小)

由夹逼定理可得，$f'_{+}(0)=0$,同理可得，$f'_{-}(0)=0$

则$f'(0)=0$，f(x)在 x=0 处可导。