第 5 章复习题

1. (1) $\int(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})^2dx=$______________

原式$=\int(1-sinx)dx$

$=\int 1dx-\int sinxdx$

$=x+\cos x+C$

(2) 若 a≠0，则$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}dx=$______________

令 $x=a\tan t$

原式$=\int\frac{1}{a^3(tant)^2sect}\cdot a(sect)^2dt$

$=\frac{1}{a^2}\int\frac{sect}{(tant)^2}dt$

$=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{(sint)^2}dsint$

$=-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$

(3) $\int\frac{1+cosx}{x+sinx}dx=$______________

原式$=\int\frac{1}{x+sinx}d(x+sinx)$

$=\ln|x+\sin x|+C$

(4) $\int\frac{\sqrt{lnx}}{x}dx=$______________

原式$=\int\sqrt{lnx}\,dlnx$

$=\frac{2}{3}(lnx)^{\frac{3}{2}}+C$

2. (1) $\int\frac{arctanx}{x^2(1+x^2)}dx$

$=\int\left[arctanx(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1})\right]dx$

$=\int\frac{arctanx}{x^2}dx-\int\frac{arctanx}{x^2+1}dx$

$$=-\int \mathrm{arctanx}\,\mathrm{d}\frac{1}{\mathrm{x}}-\int \mathrm{arctanx}\,\mathrm{d}(\mathrm{arctanx})$$

$$=-\frac{\mathrm{arctanx}}{\mathrm{x}}+\int\frac{1}{\mathrm{x}(\mathrm{x}^2+1)}\mathrm{dx}-\frac{(\mathrm{arctanx})^2}{2}$$

$$=-\frac{\mathrm{arctanx}}{\mathrm{x}}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\mathrm{x}^2(\mathrm{x}^2+1)}\mathrm{dx}^2-\frac{(\mathrm{arctanx})^2}{2}$$

$$=-\frac{\mathrm{arctanx}}{\mathrm{x}}-\frac{(\mathrm{arctanx})^2}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\mathrm{x}^2}\mathrm{dx}^2-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\mathrm{x}^2+1}\mathrm{d}(\mathrm{x}^2+1)$$

$$=\frac{1}{2}ln\frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{x}^2+1}-\frac{\mathrm{arctanx}}{\mathrm{x}}-\frac{(\mathrm{arctanx})^2}{2}+\mathrm{C}$$

(2) $\int\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx$

令 $\mathrm{x}=\sin t$， $t\in(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$

原式$=\int\frac{1}{1-sint}dt$

$$=\int\frac{1+sint}{(1-sint)(1+sint)}dt$$

$$=\int\frac{1+sint}{(cost)^2}dt$$

$$=\int\frac{1}{(\cos t)^2}dt+\int\frac{sint}{(cost)^2}dt$$

$$=\mathrm{tant}+\frac{1}{\mathrm{cost}}+\mathrm{C}$$

$$=\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}+C$$

(3) $\int\frac{e^{arctanx}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

令$\mathrm{x}=\mathrm{tant}$，$\mathrm{t}=\mathrm{arctanx}$

原式$=\int e^t\cos t dt$

$$=e^t\cos t+\int e^t\sin t dt$$

$$=e^t\cos t+e^t\sin t-\int e^t\cos t dt$$

原式$=\frac{e^t\cos t+e^t\sin t}{2}+C$

$$=\frac{1+x}{2\sqrt{1+x^2}}e^{arctanx}+C$$

(4) $\int\frac{x^2-1}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}dx$

$$= \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+3}}dx$$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1}}d(x+\frac{1}{x})$$

令$x+\frac{1}{x}=tant$，$\sec t=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1}$

原式$=\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1}}d(x+\frac{1}{x})$

$=\int \sec t\, dt$

$=\ln|\sec t+\tan t|+C$

$=\ln\left|\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1}+x+\frac{1}{x}\right|+C$

(5) $\int \frac{1}{(sinx)^2+3}dx$

$=\int \frac{(secx)^2}{(tanx)^2+3(secx)^2}dx$

$=\int \frac{1}{(tanx)^2+3(secx)^2}dtanx$

$=\frac{1}{x}\int \frac{1}{4(tanx)^2+3}d(2tanx)$

$=\frac{\sqrt{3}}{6}arctan(\frac{2tanx}{\sqrt{3}})+C$

(6) $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

令$\sqrt{e^x-1}=t\,,x=ln(t^2+1)$

原式$=2\int ln(t^2+1)dt$

$=2tln(t^2+1)-4\int \frac{t^2}{t^2+1}dt$

$=2tln(t^2+1)-4\int 1\,dt+4\int \frac{1}{t^2+1}dt$

$=2tln(t^2+1)-4t+4arctant+C$

$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4arctan\sqrt{e^x-1}+C$

(7) 原式$=\int\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}dx$

$=\int\frac{\cos^4 x-2\cos^2 x+1}{\cos^4 x}dx$

$=\int 1dx \ -\int\frac{2}{\cos^2 x}dx \ +\int\frac{1}{\cos x^4}dx$

$=x-2\tan x+\int(tan2x+1)d\tan x$

$=x-2\tan x+\frac{1}{3}\tan 3x+\tan x+C$

$=x-\tan x+\frac{1}{3}\tan 3x+C$

(8) 原式$=\int\frac{arcsinx}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx$

令 $x=\sin t$, $t=\arcsin x$, $dx=\cos t dt(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$

则$\int\frac{arcsinx}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$

$=\int\frac{t}{\sin^2 t}dt$

$=-\int tdcott$

$=-t\cot t+\int cott dt$

$=-t\cot t+\int\frac{cosx}{sinx}dt$

$=-t\cot t+\int\frac{1}{sinx}d\sin t$

$=-t\cot t+\ln|\sin t|$

$=-\arcsin x\cdot\cot(\arcsin x)+\ln|x|+C$

$\int\frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int t dt=\frac{1}{2}t^2=\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$

综上，原式$=-\arcsin x\cdot\cot(\arcsin x)+\ln|x|+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C$

(9) 原式 $=\int\frac{xe^x+e^x-e^x}{(1+x)^2}dx$

$=\int\frac{(x+1)e^x}{(1+x)^2}dx-\int\frac{e^x}{(1+x)^2}dx$

$=\int \frac{e^x}{x+1}dx+\int e^x d\frac{1}{x+1}$

$=\int \frac{e^x}{x+1}dx+\frac{e^x}{x+1}-\int \frac{1}{x+1}de^x$

$=\frac{e^x}{x+1}+C$

(10) 原式$=\int \frac{x^4-x^2+1}{x^6+1}dx+\int \frac{x^2}{x^6+1}dx$

$=\int \frac{(x^2-1)^2}{x^6+1}dx+\frac{1}{3}\int \frac{1}{x^6+1}dx^3$

$=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan x^3+C$

(11) 原式$=\int \frac{e^x}{\cos x+1}dx+\int \frac{\sin x}{\cos x+1}dx$

$=\int \frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\ e^x dx$

$=\int e^x d(\tan\frac{x}{2})dx+\ \int e^x\tan\frac{x}{2}dx$

$=e^x\tan\frac{x}{2}-\int \tan\frac{x}{2}e^x dx+\ \int e^x\tan\frac{x}{2}dx$

$=e^x\tan\frac{x}{2}+C$

(12) 原式$=\int e^{x\ln x}(\ln x+1)dx$

$=\int e^{x\ln x}d(x\ln x)$

$=e^{x\ln x}+C+$

$=x+C$

(13) 原式$=\int \frac{(x+a)\ln(x+a)+(x+b)\ln(x+b)}{(x+a)(x+b)}dx$

$=\int \frac{\ln(x+a)}{x+b}dx+\int \frac{\ln(x+b)}{x+a}dx$

$=\int \frac{\ln(x+a)}{x+b}dx+\ln(x+b)d\ln(x+a)$

$=\int \frac{\ln(x+a)}{x+b}dx+\ln(x+b)\cdot\ln(x+a)-\int \frac{\ln(x+a)}{x+b}dx$

$=\ln(x+a)\cdot\ln(x+b)+C$

3.(1)由题得：$f(x)=(\frac{\cos x}{x})'=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$

$\int xf'(x)dx=\int x df(x)$

$=xf(x)-\int f(x)dx$

$=\frac{-x\sin x-\cos x}{x}-\frac{\cos x}{x}+C$

$=-\frac{-x\sin x+2\cos x}{x}+C$

(2)因$\int xf'(x)dx=\arcsin x+C$,

则 $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

则$\int \frac{1}{f(x)}dx=\int x\sqrt{1-x^2}dx$

$=-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}d(1-x^2)$

$=-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}$

(3)设$f^{-1}(x)=x$，则 $x=f(y)$

$\int xf^{-1}(x)dx=\int y df(y)$

$=yf(y)-F(y)+C$

$=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C$

4.令 $u=\sin^2 x,|u|\le 1$

所以原式即为 $f'(u)=1-u$

两边取积分得 $f(u)=u-\frac{1}{2}u^2+C$

所以 $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+C$

5.令 $t=x^2-1$,则原式即为 $f(t)=\ln\frac{t+1}{t-1}$

所以 f[φ（x）]=ln$\frac{φ(x)+1}{φ(x)-1}$=lnx

φ（x）=$\frac{x+1}{x-1}$

∫φ（x）dx=∫$\frac{x+1}{x-1}$dx=∫1+$\frac{2}{x-1}$dx=x+ln(x-1)²+C

6. （1）∫min{|x|,x²}dx=$\begin{cases}\int -x\,dx\\ \int x^2\,dx\\ \int x\,dx\end{cases}=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+C_1, x<-1\\ \frac{1}{3}x^3+C_2, |x|\le 1\\ \frac{1}{2}x^2+C_3, x>1\end{cases}$

∵min{|x|,x²}在定义域上连续，∴∫min{|x|,x²}dx 在定义域上也连续

∴ $\lim_{x\to -1^-}(-\frac{1}{2}x^2+C_1)=\lim_{x\to -1^+}(\frac{1}{3}x^3+C_2)$得$C_1=C_2+\frac{1}{6}$

同理$C_3=C_2+\frac{1}{6}$，令C_2=C

∴∫min{|x|,x²}dx=≤

(2). ∫max{1,x²,x³}dx=$\begin{cases}\int x^2\,dx\\ \int 1\,dx\\ \int x^3\,dx\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C_1, x<-1\\ x+C_2, |x|\le 1\\ \frac{1}{4}x^4+C_3, x>1\end{cases}$

同（1）$C_1=C_2-\frac{2}{3}$，$C_3=C_2+\frac{3}{4}$，令C_2=C

∴∫max{1,x²,x³}dx=$\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}+C, x<-1\\ x+C\ , |x|<1\\ \frac{1}{4}x^4+\frac{3}{4}+C\ , x>1\end{cases}$

7.（1）由题 y＇=2x-1

两边取积分得 y=x²-x+C

又 x=1 时，y=0

∴带入得 C=0

∴y= x^2-x

（2）由题 y＇=$\frac{1}{x}$

两边取积分得 y=ln|x|+C;

又 x=e^2 时，y=4

∴带入得 C=2

∴y=ln|x|+2

8.由题取 x=0, ξ=1;

则有 f(0+1)=f(1)=f(0)f(1)

∵f(1) ≠0, ∴f(0)=1;

f＇(x)= $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

又∵$f(x+\Delta x)$=f(x)f(Δx)

∴f＇(x)= $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)[f(\Delta x)-1]}{\Delta x}$

$$=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$= f(x)\ f'(0)$$

综上 f＇(x)= $f(x)$ f＇(0)

令 y=f(x),则有$\frac{dy}{dx}=y$f＇(0)

当 y=0 时显然成立;

当 y≠0 时有$\frac{dy}{y}=\mathrm{f}'(0)\mathrm{dx}$

两边取积分得 ln|y|=f(0)

$\therefore f(x)=y=Ce^{f'(0)x}$