2.4.

1. 证明：

(1) $\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-4x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(3x-4)$

$=-4\neq 0$

$\therefore 3x^2-4x=O(x)$

(2) $\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$

$=0$

$\therefore x^2\sin\frac{1}{x}=o(x)$

注：$\because$ x为无穷小量，$\sin\frac{1}{x}$为有界变量

$\therefore$ $x\sin\frac{1}{x}$还是无穷小量

(3) $\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x^2}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}$

(重要极限) $=\lim\limits_{x^2\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}$

$=1$

$\therefore x\sin x^2\sim x^3$

(4) $\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1-2x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}$

$=1$

$\therefore (1+x)^2-1-2x\sim x^2$

证明：

2. (1) $\because \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+1}\times x$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2+1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-1}{x^2+1}\right)$

$=1$

$\therefore \frac{x+1}{x^2+1}\sim\frac{1}{x}$

(2) 令$t=\frac{1}{x}$

则$x\to\infty$时 $t\to 0$

又$\because \lim\limits_{t\to 0}\frac{t^2\sin\frac{1}{t}}{t}=0$

(同1.(2))

$\therefore t^2\sin\frac{1}{t}=o(t)$

$\therefore \frac{1}{x^2}\sin x=o\left(\frac{1}{x}\right)$

(3) 令$t=\frac{1}{x}$

则$x\to\infty$时，$t\to 0$

又$\because \lim\limits_{t\to 0}\frac{2t\sin t}{t^2}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\sin t}{t}$

$=2\neq 0$

$\therefore 2t\sin t=O(t^2)$

即 $\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x}=O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(4) 令$t=\frac{1}{x}$

则$x\to\infty$时，$t\to 0$

$\because \lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^2-1-2t}{t^2}=1$

(同1.(4))

$\therefore (1+t)^2-1-2t\sim t^2$

$\therefore \left(1+\frac{1}{x}\right)^2-1-\frac{2}{x}\sim\frac{1}{x^2}$

3. (1) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha x}{\beta x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}$

$=\frac{\alpha}{\beta}$

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^m}{x^m}$

$=1$

(3) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{x}$

$=\frac{1}{2}$

(4) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}$

$=1$

(5) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$

$=\frac{1}{2}$

(6) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n}\sin x}{\tan x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n}x}{x}$

$=\frac{1}{n}$

(7) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}$

$=2$

(8) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin\beta x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\beta x}$

$=\frac{1}{\beta}$

(9) 原式 $= \lim_{x\to0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x\sin^2 x}$

$= \lim_{x\to0} \frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x^2}$

$= \frac{1}{2}$

附额外三角等价无穷小替换：

$\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$

$x-\sin x \sim \frac{1}{6}x^3$

$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$

前两个可利用作极限用洛毕达证明.

(10) 原式 $= \lim_{x\to0} \frac{x^2}{x^2}$

$=1$

4. 均设为关于x的k阶无穷小量

(1) $\lim_{x\to0} \frac{x^3+100x^2}{x^k}$

$= \lim_{x\to0}(x^{3-k}+100x^{2-k})$

则当 $k=2$ 时

原式 $=100\neq0$

∴是x的二阶无穷小量

(2) $\lim_{x\to0} \frac{x^2+\sin x^2}{x^k}$

$= \lim_{x\to0}\left(x^{2-k}+\frac{\sin x^2}{x^k}\right)$

当 $k=2$ 时

原式 $=2\neq0$

∴是x的二阶……

(3) $\lim_{x\to0} \frac{x^2(1+x)}{x^k(1+\sqrt[3]{x})}$

$= \lim_{x\to0} \frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}} = 1$

故当 $k=2$ 时

原式 $=1\neq0$

∴是x的二阶……

(4) $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x^3)}{x^k}$

$= \lim_{x\to0} x^{3-k}$

∴当 $k=3$ 时

原式 $=1\neq0$

∴是x的三阶……