第 7 章复习题

1. 求下列微分方程的通解或在给定条件下的特解

$$(1)\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{y^4+1}$$

$$(y^4+1)dy=(x+1)dx$$

$$\int(y^4+1)dy=\int(x+1)dx$$

$$\frac{1}{2}x^2+x=\frac{1}{5}y^5+y+C$$

$$(2)\frac{1}{(y-1)^2+1}dy=dx$$

$$\int\frac{1}{(y-1)^2+1}dy=\int 1\,dx$$

$$arctan(y-1)=x+C$$

$$y-1=tan(x+C)$$

$$(3)\ \frac{1}{1+y}dy=\frac{1}{\tan x}dx$$

$$\int\frac{1}{1+y}dy=\int\frac{1}{\tan x}dx$$

$$ln|1+y|=ln|\sin x|+C$$

$$1+y=\pm e^C\cdot\sin x\quad(C\in R)$$

$$y=C_0\cdot\sin x-1\quad(\pm C_0=e^C)$$

$$(4)x^2ydx-(1+x^2)(1-y^2)dy=0$$

$$\int\left(\frac{1}{y}-y\right)dy=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx\,(y\neq 0)$$

$$2\ln|y|-y^2=2x-2\,arctan\,x+C$$

当$y=0$时$x^2ydx-(1+x^2)(1-y^2)dy=0$成立。

$y=0$也是方程的解

(5) $\frac{dy}{dx}=sin\frac{x-y}{2}-sin\frac{x+y}{2}$

$=sin\frac{x}{2}cos\,x\frac{y}{2}-sin\frac{y}{2}cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}cos\frac{y}{2}-cos\frac{x}{2}sin\frac{y}{2}$

$=-2\,sin\frac{y}{2}cos\frac{x}{2}$

$\frac{1}{sin\frac{y}{2}}dy=(-2)\times cos\frac{x}{2}dx\left(sin\frac{y}{2}\neq 0\right)$

$2\,ln\left|tan\frac{y}{4}\right|=-4\,sin\frac{x}{2}+C$(通解)

当$sin\frac{y}{2}=0, y=2k\pi(k\in z)$时

$\frac{dy}{dx}=sin\frac{x-y}{2}-sin\frac{x+y}{2}$成立

$y=2k\pi(k\in z)$(通解)

(6)原方程可化为

$tan\,y\,dy=-tan\,x\,dx$

$-ln|cos\,y|=ln|cos\,x|+C$

$ln|cos\,y\cdot cos\,x|=-C(C\in R)$

$cos\,x\,cos\,y=C'(C'\in R)$

(7) $(1+e^x)y\cdot\frac{dy}{dx}=e^x$

$\int y\cdot dy=\int\frac{e^x}{1+e^x}dx$

$\frac{1}{2}y^2=ln(1+e^x)+C$(通解)

代入$y(0)=1\Rightarrow C=-ln\,2+\frac{1}{2}$

特解：$\frac{1}{2}y^2 = ln(1+e^x) - ln\,2 + \frac{1}{2}$

(8) $cot\,x\,dy = -\,cot\,y\,dx$

$-\int tan\,y\,d\,y = \int tan\,x\,dx$

$-\,ln|cos\,y| = ln|cos\,x| + C$

$cos\,x\,cos\,y = C'$(通解)

代入$y(0) = 0 \Rightarrow C = 1$

$cos\,y = \frac{1}{cos\,x} = sec\,x$ (特解)

(9) $\frac{1}{2}e^{x^2}dx^2 = (1-y^5)dy$

$\int \frac{1}{2}e^{x^2}dx^2 = \int (1-y^5)d\,y$

$y - \frac{1}{6}y^6 = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$(通解)

代入$y(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{6}y^6 - y = \frac{1}{2}$(特解)

(10) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y - y}{y+1}$

$\frac{y(x^2-1)}{y+1} = \frac{dy}{dx}$

$\int (x^2-1)dx = \int \left(1+\frac{1}{y}\right)dy$

$y + ln|y| = \frac{1}{3}x^3 - x + C$(通解)

代入$y(3)=-1 \Rightarrow C=-7$

$$\frac{1}{3}x^3-x-y-ln|y|=7\left(\text{特解}\right)$$

2.求下列微分方程的通解或在给定初值条件下的特解。

(1)设x是关于y的函数

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2},\frac{dx}{dy}=\frac{x}{2y}-\frac{y}{-x}$$

设$\frac{x}{y}=u$

则：$u+y\frac{du}{dy}=\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)$

$$\frac{1}{y}dy=\frac{2}{-u-\frac{1}{u}}du$$

$$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{2u}{-u^2-1}du$$

$$ln|y|+C=-ln(1+u^2)$$

$$\frac{1}{1+u^2}=Cy$$

代入$u=\frac{x}{y} \Rightarrow x^2+y^2=Cy$

(2)令$u=\frac{y}{x},\frac{dy}{dx}=u+\frac{du}{dx}\cdot x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^4+1}{\left(\frac{y}{3}\right)^3}$$

$$u+x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{2u^4+1}{u^3}$$

$$\frac{4}{x}dx=\frac{1}{u+u^3}du$$

对式子两边积分

$$4\,ln|x| + C = ln|u^4 + 1|$$

代入$u = \dfrac{y}{x}$

得：$y^4 = Cx^8 - x^4$

(3)令$u = \dfrac{y}{x}$

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1 + \sqrt{u}}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \left(-\frac{1}{u\sqrt{u}} - \frac{1}{u}\right)du$$

$$ln|x| + C = \frac{2}{\sqrt{u}} - ln\,u$$

代入$u = \dfrac{y}{x}$得：

$$ln|y| + C = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

(4)令$u = \dfrac{y}{x}$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1 + u^4 + 3u^2}{u}$$

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(u^2 + 1)^2}d(u^2 + 1)$$

对两边积分

$$ln|x| + C = -\frac{1}{1 + u^2} \times \frac{1}{2}$$

$$ln|x| + C = -\frac{x^2}{2(x^2 + y^2)}$$

(5)令$u=\frac{y}{x}$

$(1+u\cos u)dx=\cos u\,dy$

$$\frac{1}{\cos u}+u=u+x\frac{du}{dx}$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\int\cos u\,du$$

$ln|x|+C=sin\frac{y}{x}$

(6)原方程可化为：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-1)-2(y+2)}{(y+2)-2(x-1)}$$

令$m=y+2,n=x-1,u=\frac{m}{n}$

$$\frac{dm}{dn}=\frac{dy}{dx}=\frac{n-2m}{m-2n}$$

$$\frac{dy}{dx}=u+(x-1)\frac{du}{dx}=\frac{n-2m}{m-2n}=\frac{1-2u}{u-2}$$

整理得$\left(\frac{1}{x-1}\right)dx=\left[\frac{u-1}{1-u^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u+1}\right)\right]du$

对两边积分：

$$ln|1-x|+C=\frac{1}{2}ln|u-1|-\frac{3}{2}ln|u+1|$$

代入$u=\frac{m}{n}$得：

$(y-x+3)=C(y+x+1)^3$

(7)令$u=\frac{y}{x}$，原方程可化为：

$$\frac{x^2+2xy-y^2}{x^2-2xy-y^2}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1+2u-u^2}{1-2u-u^2}=u+x\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{1+u^2+u(u^2+1)}{1-2u-u^2}=x\frac{du}{dx}$$

$$\frac{1-2u-u^2}{1+u^2+u(u^2+1)}du=\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{(1-u)-u(1+u)}{(1+u^2)(1+u)}du=\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1+u^2-u-u^2}{(1+u^2)(1+u)}du-\frac{u}{1+u^2}du=\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{1+u}du-\frac{2u}{1+u^2}du=\frac{1}{x}dx$$

对等式两边积分：

$$ln|1+u|-ln|1+u^2|=ln|x|+C$$

代入$u=\frac{y}{x}$得：

$$\frac{y+x}{y^2+x^2}=C(\text{通解})$$

代入$y(1)=1\Rightarrow C=1$

$$\frac{y+x}{y^2+x^2}=1(\text{特解})$$

(8)令$u=\frac{y}{x}$

$$y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

$$y'=\frac{1}{u}+u$$

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}+u$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\int u\,du$$

$$ln|x| + C = \frac{1}{2}u^2$$

代入$y(1) = 1 \Rightarrow C = 2$

代入$u = \frac{y}{x}$：

特解：$x^2 \ln x^2 + 4x^2 = y^2$

3.求一条曲线的方程，该曲线通过点（0,1）且曲线上任一点处的切线垂直于此点与原点的连线

设所求曲线为$y = y(t)$

由题：$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{y}{x} = -1$

$y(0) = +1$

$y\,dy\ = -x\,dx$

积分得：$x^2 + y^2 = C$

代入$y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$

$\therefore y^2 + x^2 = 1$

4.在某池塘内养鱼，该池塘最多能养鱼 1000 尾。在第 t 个月，鱼数$\boldsymbol{y = y(t)}$是 t 的函数，其变化率与鱼数 y 及 1000-y 成正比。已知在池塘内放养鱼 100 尾，3 个月后池塘内有鱼 250 尾，求放养 t 月后池塘内鱼数$\boldsymbol{y(t)}$

由题意：$\frac{dy}{dt} = ky(1000 - y)$

$y^{-1}(1000 - y)^{-1}dy = kdt$

$$\frac{1}{1000}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y - 1000}\right)dy = kdt$$

积分得：$ln|y| - ln|1000 - y| = 1000kt + C$

$$\frac{y}{1000 - y} = Ce^{1000kt}$$

$y(0) = 100, y(3) = 250$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = \dfrac{1}{9} \\ 1000k = \dfrac{ln\,3}{3} \end{cases}$$

$$\therefore y = \frac{1000 \cdot 3^{\frac{t}{3}}}{9 + 3^{\frac{t}{3}}}$$

5. 求下列微分方程的通解或给定初始条件下的特解

$(1)\dfrac{dy}{dx} = x(1 + 2y)$

$$\int \frac{1}{x^2 y} dy = \int x\,dx$$

$$\frac{1}{2} ln(1 + 2y) = \frac{1}{2} x^2 + C(C \in R)$$

$$1 + 2y = \pm e^{2c} \cdot e^{x^2} (\pm e^{2c} \in R)$$

$$y = \pm \frac{1}{2} e^{2c} \cdot e^{x^2} - \frac{1}{2}\left(\pm \frac{1}{2} e^{2c} \in R\right)$$

$$y = C_0\,e^{x^2} - \frac{1}{2}(C_0 \in R)$$

(2)当$y' + y = 0$ 解得：$y = Ce^{-x}$

由常数变易法：

$$y = C(x)e^{-x}$$

$$y' = C'(x)e^{-x} - e^{-x}C(x)$$

$$y' + y = sin\,x \Rightarrow C'(x) = e^x\,sin\,x$$

$$C(x) = \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} \cdot e^x(\sin x - \cos x) + C$$

两次分部积分，再解方程得方程通解为：

$$y = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + Ce^{-x}$$

(3)当$y^2 - \frac{2}{x}y = 0$ 解得：$y = Cx^2$

由常数变易法：$y' = C'(x)x^2 + 2x \cdot C(x)$

代入$y' - \frac{2}{x}y = \frac{2}{3}x^4$

$$C'(x) = \frac{2}{3}x^2$$

$$C(x) = \frac{2}{9}x^3 + C$$

$$y = \frac{2}{9}x^5 + Cx^2(\text{通解})$$

(4)当$y' - \frac{3}{x^2}, y = 0$ 时

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x^2}y$$

$$y = Ce^{-\frac{3}{x}}$$

$$y = C(x)e^{-\frac{3}{x}}$$

由常数变易法：

$$y = C(x)e^{-\frac{3}{x}}$$

$$y' = C'(x)e^{-\frac{3}{x}} + C(x)e^{-\frac{3}{x}}$$

代入$y' - \frac{3}{x^2}, y = \frac{1}{3}x^2$

$\Rightarrow C'(x)=\frac{1}{x^2}\times e^{\frac{3}{x}}$

$\int C'(x)=\int e^{\frac{3}{x}}d\frac{1}{x}\cdot(-1)$

$=-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{x}}+C$

$\therefore y=Ce^{-\frac{3}{x}}-\frac{1}{3}$(通解)

(5)当$y'+\frac{1}{x}\cdot y=0$ 时,解得：$y=\frac{c}{x}$

由常数变易法：$y=\frac{C(x)}{x}$

$y'=\frac{C(x)\cdot x-C(x)}{x^2}$

代入$y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$

$C'(x)=\sin x$

$\therefore y=(-\cos x+C)\cdot\frac{1}{x}$(通解)

(6)将x看成关于y的函数

则：$y^3dx=(1-2xy^2)dy$

$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y^3}-\frac{2}{y}x$

$\frac{dx}{dy}+\frac{2}{y}\cdot x=\frac{1}{y^3}$

当$x'+\frac{2}{y}x=0$ 时，解得$x=\frac{C}{y^2}$

令$x=\frac{C(y)}{y^2}$

$x' = \frac{C'(y)}{y^2} - \frac{2C(y)}{y^3}$

代入$x' + \frac{2}{y} \cdot x = \frac{1}{y^3}$

得$C'(y) = \frac{1}{y}$

$\therefore C(y) = ln|y| + C$

$\therefore x = (ln|y| + C) \cdot \frac{1}{y^2}$(通解)

(7)将方程改写为$\frac{dx}{dy} = x\cos y + \sin 2y$　即$\frac{dx}{dy} - \cos y \cdot x = \sin 2y$

故原方程的通解为：$x = e^{\int \cos y dy}\left[\int \sin 2y \cdot e^{-\int \cos y dy} dy + C\right]$

$$= e^{\sin y}\left[\int \sin 2y \cdot e^{-\sin y} dy + C\right]$$

$\because \int \sin 2y \cdot e^{-\sin y} dy = 2\int \sin y\, e^{-\sin y} d\sin y = -2\int \sin y\, de^{-\sin y}$

$= -2\sin y\, e^{-\sin y} + 2\int e^{-\sin y} d\sin y$

$= -2\sin y\, e^{-\sin y} - 2e^{-\sin y} + C$

$\therefore x = Ce^{\sin y} - 2(\sin y + 1)$.(其中$C$为任意常数)

(8)将原方程变形可得$\frac{dx}{dy} + \frac{1+y}{y}x = \frac{e^y}{y}$

所求通解为$x = e^{-\int \frac{xy}{y} dy}\left(C + \int \frac{e^y}{y} e^{\int \frac{1+y}{y} dy} dy\right)$

$= e^{-(\ln y + y)}\left(C + \int \frac{e^y}{y} e^{\ln y + y} dy\right)$

$= \frac{e^{-y}}{y}\left(C + \int e^{2y} dy\right) = \frac{e^{-y}}{y}\left(C + \frac{1}{2}e^{2y}\right)$

$=\dfrac{Ce^{-y}}{y}+\dfrac{e^{y}}{2y}$(其中$C$为任意常数)

(9)原式可写成$\dfrac{dy}{dx}-2yx=e^{x^2}\cos x$

其对应的齐次方程为$\dfrac{dy}{dx}-2xy=0$

变形为$\dfrac{dy}{y}=2xdx$

求得通解为$y=Ce^{x^2}$

令$y=C(x)e^{x^2}$，代入原式得

$2xe^{x^2}C(x)+e^{x^2}C'(x)-2xe^{x^2}C(x)=e^{x^2}\cos x$($C$为常数)

化简得$y=(\sin x+C)e^{x^2}$

即原式通解为$y=(\sin x+C)e^{x^2}$(其中C为任意常数)

(10)原式可写成$y^{-4}y'+\dfrac{1}{3}y^{-3}=\dfrac{1}{3}(1-2x)$

令$z=y^{-3}$，则$z'=-3y^{-4}y'$

原方程可化为$z'-z=1-2x$

$$z=e\int dx\left[\int(1-2x)e^{-\int dx}dx+C\right]$$

$$=e^{x}\left[\int(1-2x)e^{-x}dx+C\right]$$

$$=e^{x}[(-2x-1)e^{-x}+C]$$

$=-2x-1+Ce^{x}$(其中C为任意常数)

即$y^{-3}=-2x-1+Ce^{x}$为原方程通解

(11)$P(x)=-\tan x,Q(x)=\sec x$

于是所求通解为

$$y = e^{\int \tan x dx}\left(\int \sec x \cdot e^{-\int \tan x dx} dx + C\right)$$

$$= e^{-\ln \cos x}\left(\int \sec x \cdot e^{\ln \cos x} dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{\cos x}\left(\int \sec x \cdot \cos x \, dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{\cos x}(x + C)\text{(其中}C\text{为任意常数)}$$

将$y(0) = 0$ 代入，得$C = 0$

故原方程的特解为$y = \dfrac{x}{\cos x}$

(12)原方程对应的齐次方程为$y' + 2xy = 0$.

得其通解为$y = Ce^{-x^2}$(其中C为任意常数)

令$y = C(x)e^{-x^2}$,则$y' = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2}$

代入原方程得$C'(x) = 2e^{x^2}x^3$

两边同时积分得

$$C(x) = \int 2\, e^{x^2} x^3 dx = \int x^2 de^{x^2} = x^2 e^{x^2} - \int e^{x^2} dx^2$$

$= x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + C_0$(其中$C_0$为任意常数)

则原方程通解$y = x^2 - 1 + C_0 e^{-x^2}$

将$y_{(0)} = 1$ 代入得$C_0 = 2$.

故原方程对应的特解为$y = 2e^{-x^2} + x^2 - 1$

(13)$y' - \dfrac{y}{x} = 0$

将其化为$\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$,得到的通解$y = Cx$(其中$C$为任意常数)

设$y = C(x)x$.则$y' = C'(x)x + C(x)$

代入原方程得$C'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$

通过分部积分得$C(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}-C_0$

$y=C(x)x=\ln x+1-C_0x$(其中C_0为任意常数)

代入$y(1)=1$，得$C_0=0$

故原方程的特解为$y=\ln x+1$

(14)原方程可变形为$y'-\frac{1}{2x}y=\frac{-x^2}{2}$

$P(x)=-\frac{1}{2x},Q(x)=\frac{-x^2}{2}$,于是所求通解为

$$y=e^{\int\frac{1}{2x}dx}\left[\int\left(-\frac{x^2}{2}\right)\cdot e^{-\int\frac{1}{2x}dx}dx+C\right]$$

$$=e^{\frac{1}{2}\ln x}\left[\int\left(-\frac{x^2}{2}\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\ln x}dx+C\right]$$

$$=\sqrt{x}\left[\int\left(-\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{x}}dx+C\right]$$

$$=\sqrt{x}\left(-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5}+C\right)$$(其中C为任意常数)

代入$y(1)=0$，得$C=\frac{1}{5}$

故原方程对应的特解为$y=\sqrt{x}\left(\frac{1-x^{\frac{5}{2}}}{5}\right)=\frac{\sqrt{x}-x^3}{5}$

6.解：由$\frac{dx}{dt}-2te^{-x}=0$得 $e^x dx=2tdt$

两边同时积分：$e^x=t^2+c$

将$x|_{t=0}$=0 待入：$c=1,\therefore e^x=t^2+1$

即：$x=\ln(1+t^2)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\ln(1+t^2)\cdot 2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)\ln(1+t^2)$$

7.解：(1)设细菌数量为y_t,时间为t，增长速度为$y|_{t-1}\cdot k$

则$y_1=y_0(k+1)$, $y_4=y_0(k+1)^4$

$$\frac{y_4}{y_1}=(1+k)^3=\frac{3000}{1000}=3$$

$(1+k)^3=3$

∴ $y_t=y_0(k+1)^t=y_1(k+1)^{t-1}=1000(k+1)^{t-1}=1000\cdot 3^{\frac{t-1}{3}}$

(2)当 t=0 时，$y_0=1000\cdot 3^{-\frac{1}{3}}\approx 693$

∴最初有 693 个细菌

8.解：由题设，飞机质量$m=9000kg$,着陆时的水平速度为$v_0=700km/h$,从飞机着陆开始计时，设t时刻飞机的滑行距离为$x(t)$，速度$v(t)$

由牛顿第二定律：$m\frac{dv}{dt}=-kv$

又∵$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$

联立上述等式可得：$dx=-\frac{m}{k}dv$

对$dx=-\frac{m}{k}dv$积分可得：$x(t)=-\frac{m}{k}v+c$，由于$v(0)=v_0$，$x_0=0$

∴$c=\frac{m}{k}v$

∴$x(t)=\frac{m}{k}((v_0-v(t))$

当$v(t) \to 0$，$x(t) = 1.05km$

$\therefore$飞机滑行最长距离为$1.05km$

9.（1）$y' = \frac{1}{3}e^{3x} - \cos x + c$

$y = \frac{1}{9}e^{3x} - \sin x + c_1 x + c_2$

（2）令$y' = p$, $y'' = p'$

$p' - p - x = 0 \Rightarrow p' - p = x$

则$p = (\int x e^{\int -1dx} d x + c)e^{\int 1dx}$

$= [-(x+1)e^{-x} + c]e^{x}$

$= -(x+1) + ce^{x} = y'$

$\Rightarrow y = -\frac{x^2}{2} - x + c_1 e^{x} + c_2$

(3)令$y' = p, y'' = p'$

$(1+x^2)p' = 2xp = (1+x^2)\frac{dp}{dx}$

$\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2}dx$

$\ln p = \ln(1+x^2) + c$

$y' = p = c(1+x^2)$

$y = c_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + c_2$

（4）令$y' = p(y) \Rightarrow y'' = p', \frac{dy'}{dx} = p\frac{dp}{dy}$

原式$= yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0$

当$p = 0$时，$y = c$显然为方程解

$p \neq 0$时，$y\frac{dp}{dy} - p = 0 \Rightarrow p = c_1 y = \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{y} = c_1 dx \Rightarrow y = c_2 e^{c_1 x}$

（5）令$y' = p$ $y'' = \frac{dp}{dx}$

$\frac{dp}{dx} = p^2 + 1 \Rightarrow \frac{dp}{p^2+1} = dx$

$\Rightarrow p = \tan(x + c_1) = y'$

$\Rightarrow y = -\ln|\cos(x + c_1)| + c_2$

（6）令$p = y'$， $y'' = p\frac{dp}{dy}$

原式$= p\frac{dp}{dy} + \frac{p^2}{1-y} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dy} = -\frac{p}{1-y}$

$\Rightarrow y' = p = c_1(y-1), y \neq 1$

$\Rightarrow \quad y = 1 + c_2 e^{c_1 x}(c_2 \neq 0)$

10.（1）

$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2$，$\lambda_2 = -3$

∴通解：$y = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2 \mathrm{e}^{-3x}$

（2）

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$

∴通解：$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{2x}$

（3）

$$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{36}}{2} = -4 \pm 3\mathrm{i}$$

$\alpha = -4, \beta = 3$

∴通解：$y = \mathrm{e}^{-4x}(c_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

（4）

$$\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{7}\mathrm{i}}{2}$$

$$\alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$\therefore$通解：$y = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}\left(c_1 \, cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + c_2 \, sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$

（5）

$\lambda^2 + 4\lambda + 29 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm 5i$

$\alpha = -2, \beta = 5$

$\therefore y = \mathrm{e}^{-2x}(c_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$

x=0，y=0$\Rightarrow C_1 = 0$

$y' = C_2\left(-2e^{-2x} \, sin \, 5x + 5 \, \mathrm{e}^{-2x} \, cos \, 5x\right)$

x=0 , y'=15$\Rightarrow C_2 = 3$

$\therefore y = 3\mathrm{e}^{-2x} \, sin \, 5x$

（6）

$4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$

$y = (c_1x + c_2x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

$y' = -\frac{1}{2}C_1\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}C_2x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

$\therefore y(0) = 2, y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 2, -\frac{1}{2}C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 2, C_2 = 1$

$\therefore y = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

11.(1)$\lambda^2 - \lambda$ -2=0

$\lambda_{1,\ 2} = 2, -1$

通解：$\mathrm{y=C_1e^{2x} + C_2e^{-x}}$　λ_0不是$\lambda^2 - \lambda$ -2=0 的根

$\therefore$ 特解$\mathrm{y^* = ax^2 + bx + c}$

2a-2ax-b-2ax^2-2bx-2c=4x^2

a=-2　b=2　c=-3

$\therefore y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+2x-2x^2-3$

(2) $\lambda^2-\lambda-2=0$

$\lambda_{1,2}=2,-1$

通解：$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$

设特解：特解$y^*=axe^{2x}$

$4ae^{2x}+4axe^{2x}$-（$Ae^{2x}+2Axe^{2x}$）$-2axe^{2x}=e^{2x}$

$a=\frac{1}{3}$

解：$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+\frac{x}{3}e^{2x}$

(3) $\lambda^2-\lambda-2=0$

$\lambda_{1,2}=2,-1$

通解：$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$

$f(x)=\sin 2x=e^{ax}(A1\cos Bx+A2\sin bx)$

$a=0$ $B=2$

$\pm 2i$ 不为特征方程根

$k=0$

$y^*=Q1\cos 2x+Q2\sin 2x$ 将y^*带入原式

$2Q1-6Q2=1$

$6Q1+2Q2=0$

$Q1=\frac{1}{20}$ $Q2=-\frac{3}{20}$

解：$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{20}\cos 2x-\frac{3}{20}\sin 2x$

(4)$\lambda^2-6\lambda+9=0$

$\lambda_{1,2}=3，3$

通解：$y=(C_1+C_2x)e^x$

∵ $\lambda_0=0$ 不为特征方程根

∴ $y^*=ax^2+bx+c$

将y^*带入原式 $a=1\ \ b=2\ \ c=5$

解：$y=(C_1+C_2x)e^x+x^2+4x+5$

（5）解：特征方程为：λ2-6λ+9=0 ，解得λ1=λ2=3

则齐次方程通解为：y=(C1+C2x)e^{3x} ，本题α=1， β=1，1+i 不为特征方程的根，则设方程的一个特解为：y*=e^x(Acosx+Bsinx),

将 y*代入原式可得：$\begin{cases} A=\frac{3}{25} \\ B=-\frac{4}{25} \end{cases}$

解得：y=(C1+C2x)e^{3x}+（$\frac{3}{25}cosx-\frac{4}{25}sinx$）$e^x$

(6)解：另 x=e^2，则 t=lnx

D(D-1)y-2Dy+2y=t2-2t

(D2-3-+2)y=t2-2t

$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}$+2y= t2-2t

特征方程为：λ2-3λ+2=0，解得λ1=1， λ2=2

则齐次方程通解为：y=C1et+C2 e2t

设 y*=at^2 +bt+C，将 y*代入原式可得$\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{4}, \\ c=\frac{1}{4} \end{cases}$

解得：y= C1x+C2 x2+$\frac{1}{2}ln^2x\frac{1}{4}lnx+\frac{1}{4}$

(7)解：方程的特征方程为：λ2-4=0，解得λ1=2，λ2=-2

则齐次方程的通解为：y=C1e2x+C2 e-2x

λ0=0 不为特征方程的根，则设 y*=a,

代入原式可得-4a=4，a=-1.

y'(0)=0，可得 C1=C2=1

y(0)=0，可得 2C1-1=1，则 C1=C2=1

则原微分方程的特解为：y=e2x+C2 e-2x-1

(8)解：λ2-1=0，λ1=1，λ2=-1

齐次方程通解为：y= C1ex+C2 e-x，因λ0=0 为特征方程的单根，则

设 y*=（a x2+bx）ex,

代入原式得 4ax+2(a+b)=4x,解得$\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=\frac{1}{4},\end{cases}$

则方程的通解为：y=C1e^x+C2xe^{-x}+（x^2-x）e^x

将 y(0)=0，y'(0)=1 代入可得 C1=1，C2=-1

则原微分方程的特解为：y=(x2-2+1) e^x+e^{-x}

12.

$f(x)=c-\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$

$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\,dt$

$f''(x)=-\sin x-f(x)$

$f''(x)+f(x)=-\sin x$ ①

$f(0)=0$，$f'(0)=1$　　　②

①的特征方程：$\lambda^2+1=0$ 解得$\lambda=\pm i$

∴对应的齐次方程通解：

$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$

∵特征方程有一对共轭复根

∴设方程特解 $y^*=x(a\cos x+b\sin x)$

将其带入②， 得：

$2b\cos x-(2a-1)\sin x=0$

带入 $x=0$，$x=\frac{\pi}{2}$ 解得：$a=\frac{1}{2}$， $b=0$

∴$f(x)=y^*+Y=\frac{x}{2}\cos x+C_1\cos x+C_2\sin x$

带入②解得： $f(x)=\frac{x}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$

13.

①$x\in(-\pi,0)$:

由题：$y=\frac{-x}{y}$

∴$ydy=-xdx\Rightarrow y^2=-x^2+c$

∵曲线过点（$\frac{-\pi}{\sqrt{2}}$，$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$），带入得：

$y=\sqrt{\pi^2-x^2}$

②$x\in[0,\pi)$:

该方程的特征方程解为$\lambda=\pm i$

∴通解 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$

∵$f(x)=-x=-xe^{\lambda_0 x}$，其中$\lambda_0 x=0$

∴$\lambda_0=0$

因为λ_0不是该特征方程的根（λ=±i），故可设

该方程特解 $y^*=ax+b$

带入原方程，得：a=－1，　b=0

∴该方程通解 $y=Y+y^*=C_1\cos x + C_2\sin x - x$

又∵当 x=0 时，$y=\sqrt{\pi^2-0}=\pi$

∴$C_1\cos 0 + C_2\sin 0 - 0=\pi \quad \Rightarrow \; C_1=\pi$

∵y（x）在（$-\pi$，π）上为光滑曲线

则$y'_-(0)=y'_+(0) \Rightarrow \; C_2=1$

∴ $y(x)=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, -\pi<x<0\\ \pi\cos x+\sin x-x, 0\le x<\pi\end{cases}$