习题 3.4

1. 求下列函数的二阶导数

（1）$y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

解：$y^{'} = 3x^2 + 4x + 3$

$y^{''} = 6x + 4$

（2）$y = x^4 \ln x$

解：$y^{'} = 4x^3 \ln x + x^3$

$$\begin{aligned} y^{''} &= 12x^2 \ln x + 4x^2 + 3x^2 \\ &= 12x^2 \ln x + 7x^2 \end{aligned}$$

（3）$y = \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}$

解：$y = x^2(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$$\therefore y^{'} = 2x(1+x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^2(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} y^{''} &= 2(1+x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot 2x(1+x)^{-\frac{3}{2}} - x(1+x)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^2(1+x)^{-\frac{5}{2}} \\ &= (1+x)^{-\frac{5}{2}}\left[2(1+x)^2 - x(1+x) - x(1+x) + \frac{3}{4}x^2\right] \\ &= (1+x)^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{4}x^2 + 2x + 2\right) \end{aligned}$$

（4）$y = \frac{\ln x}{x^2}$

解：$y = x^{-2} \ln x$

$$\begin{aligned} \therefore y^{'} &= -2x^{-3} \ln x + x^{-3} \\ y^{''} &= 6x^{-4} \ln x + (-2)x^{-4} - 3x^{-4} \\ &= (6 \ln x - 5)x^{-4} \end{aligned}$$

（5）$y = \sin x^2$

解：$y^{'} = \cos x^2 \cdot 2x$

$$\begin{aligned} y^{''} &= 2\cos x^2 + 2x(-\sin x^2 \cdot 2x) \\ &= -4x^2 \sin x^2 + 2\cos x^2 \end{aligned}$$

（6）$y = x^3 \cos \sqrt{x}$

解：$y^{'}=3x^2\cos\sqrt{x}+x^3\left(-\sin\sqrt{x}\right)\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}$

$$=3x^2\cos\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}\sin\sqrt{x}$$

$$y^{''}=6x\cos\sqrt{x}+3x^2\left(-\sin\sqrt{x}\right)\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}-\left(\frac{5}{4}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}\cos\sqrt{x}\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=6x\cos\sqrt{x}-\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x}-\frac{5}{4}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x}-\frac{1}{4}x^2\cos\sqrt{x}$$

$$=\left(6x-\frac{1}{4}x^2\right)\cos\sqrt{x}-\frac{11}{4}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x}$$

（7）$y=x^2e^{3x}$

解：$y^{'}=2xe^{3x}+x^2\cdot 3e^{3x}$

$$y^{''}=2e^{3x}+2xe^{3x}\cdot 3+2x\cdot 3e^{3x}+3x^2\cdot 3e^{3x}$$
$$=e^{3x}(2+6x+6x+9x^2)$$
$$=(9x^2+12x+2)e^{3x}$$

（8）$y=e^{-x^2}\arcsin x$

解：$y^{'}=-2xe^{-x^2}\arcsin x+e^{-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y^{''}=-2xe^{-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-2xe^{-x^2}(-2x)\arcsin x-2e^{-x^2}\arcsin x+e^{-x^2}(-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)$$

$$\therefore y^{''}=-2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}\arcsin x-2e^{-x^2}\arcsin x-2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-x^2}$$

$$+xe^{-x^2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=(4x^2-2)e^{-x^2}\arcsin x-4xe^{-x^2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+xe^{-x^2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

（9）$y=x^2\cos 3x$

解：$y^{'}=2x\cos 3x+x^2(-\sin 3x)\cdot 3$

$$y^{''}=2\cos 3x+2x(-\sin 3x)\cdot 3+6x(-\sin 3x)-3x^2\cos 3x\cdot 3$$
$$=2\cos 3x-6x\sin 3x-6x\sin 3x-9x^2\cos 3x$$
$$=(2-9x^2)\cos 3x-12x\sin 3x$$

（10）$y=x^2\ln x$

解：$y^{'}=2x\ln x+x$

$$y^{''}=2\ln x+2+1$$

$=2\ln x+3$

2. 求下列函数的 n 阶导数

（1）$y=\ln(x+1)$

解：$y^{'}=\frac{1}{x+1}$　　$y^{''}=-\frac{1}{(x+1)^2}$　　$y^{'''}=\frac{2}{(1+x)^3}$　　$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$

（2）$y=\sin^2(\omega x)$

解：$y=\sin^2(\omega x)=\frac{1-\cos(2\omega x)}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\omega x)$

$y^{(n)}=-2^{n-1}w^n\cos\left(2wx+\frac{n}{2}\pi\right)$

（3）$y=\frac{1}{x^2-3x+2}$

解：$y=\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$

又由：$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$

$\therefore y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x-2)^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}.$

$=(-1)^n n!\left[(x-2)^{-(n+1)}-(x-1)^{-(n+1)}\right]$

（4）$y=\cos^2(\omega x)$

解：$y=\cos^2(\omega x)=\frac{1+\cos(2\omega x)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\omega x)$

$y^{(n)}=2^{n-1}\omega^n\cos\left(2\omega x+\frac{n}{2}\pi\right)$

3. 求下列函数的高阶导数

（1）$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, 求$y^{(n)},y^{(n+1)}$;

解：　$y^{(n)}=n!\,a_0$　$y^{(n+1)}=0$

（2）$y=x^2(1+x)^3(2+x)^4$, 求 $y^{(9)},y^{(10)}$;

解：　$y^{(9)}=9!$　$y^{(10)}=0$

（3）$y=x^2e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$;

解：　$\because (x^2)^{'}=2x$　$(x^2)^{''}=2$　$(x^3)^{'''}=0$

由莱布尼茨公式可知：$y^{(n)}=C_{20}^0x^2(e^{2x})^{(20)}+C_{20}^1 2x(e^{2x})^{(19)}+C_{20}^2 2(e^{2x})^{(18)}$

$$y^{(n)}=2^{20}x^2e^{2x}+20\cdot 2^{20}xe^{2x}+\frac{20\text{x}19}{2}2^{19}e^{2x}$$
$$=2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)$$

（4）$y=x\ln x$，求$y^{(5)}$;

解：$\because (x)^{'}=1\quad (x)^{''}=0\quad (\ln x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

$$y^{(5)}=C_5^0x(\ln x)^{(5)}+C_5^1(\ln x)^{(4)}$$
$$=x\frac{4!}{x^5}+5\left(-\frac{3!}{x^4}\right)$$
$$=24x^{-4}-30x^{-4}=-6x^{-4}$$

（5）$y=e^x\sin x$，求$y^{(n)}$;

$$y^{'}=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y^{''}=e^x\sin x+e^x\cos x+e^x\cos x-e^x\sin x=2e^x\cos x=2e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{'''}=2e^x\cos x-2e^x\sin x=2\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$\therefore y^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\sin\left(x+\frac{n}{4}\pi\right)$$

4. 求下列函数的二阶微分

（1）$y=\sin x$

解：$y^{''}=-\sin x$

$$\therefore d^2y=-\sin x\,dx^2$$

（2）$y=xe^x$

解：$y^{'}=e^x+xe^x$

$$y^{''}=e^x+e^x+xe^x=2e^x+xe^x$$
$$\therefore d^2y=(2e^x+xe^x)dx^2$$

（3）$y=x\ln x$

解：$y^{'}=\ln x+1\quad y^{''}=\dfrac{1}{x}$

$$\therefore dy^2=\frac{1}{x}dx^2$$

（4）$y=x\sin x$

解：$y^{'}=\sin x+x\cos x$

$$y^{''}=\cos x+\cos x-x\sin x$$
$$\therefore d^2y=(2\cos x-x\sin x)dx^2$$

5. 设 x 为中间变量，求下列函数的二阶微分

（1）$y = \sin x\,, x = at + b$， 其中 a，b 为常数

解：$y = \sin(at + b)$ $y^{'} = \cos(at + b) \cdot a$

$y^{''} = -a^2 \sin(at + b)$
$\therefore d^2 y = -a^2 \sin(at + b)\, dt^2$

（2）$y = e^x, x = at^2 + bt + c$，其中 a、b、c 为常数

解：$y = e^{at^2+bt+c}$

$y^{'} = (2at + b)e^{at^2+bt+c}$
$y^{''} = (2a)e^{at^2+bt+c} + (2at + b)^2 e^{at^2+bt+c} = (4a^2t^2 + 4abt + b^2 + 2a)e^{at^2+bt+c}$
$\therefore d^2 y = (4a^2t^2 + 4abt + b^2 + 2a)e^{at^2+bt+c} dx^2$