习题 2.5

$f(x_0) = f(x_0^-) = f(x_0^+) \Rightarrow f(x)$在 x_0 处连续

1.(1) 证明： $f(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \cos x_0$

$f(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \cos x_0$

$f(x_0) = \cos x_0 = f(x_0^-) = f(x_0^+)$

∴f (x)在 x_0 处连续.

(2) 证明： $f(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a^{x_0}$

$f(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a^{x_0}$

$f(x_0) = a^{x_0} = f(x_0^-) = f(x_0^+)$

∴f (x)在 x_0 处连续.

2.(1) $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$

分段点：x=0　　f (0) =1

$f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$　　$f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0$

∴f (x)在分段点处不连续.

(2)

$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ 2+x, & x < 0 \end{cases}$

分段点：x=0　　f (0) =1

$f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$　　$f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 2$

∴f (x)在分段点处不连续.

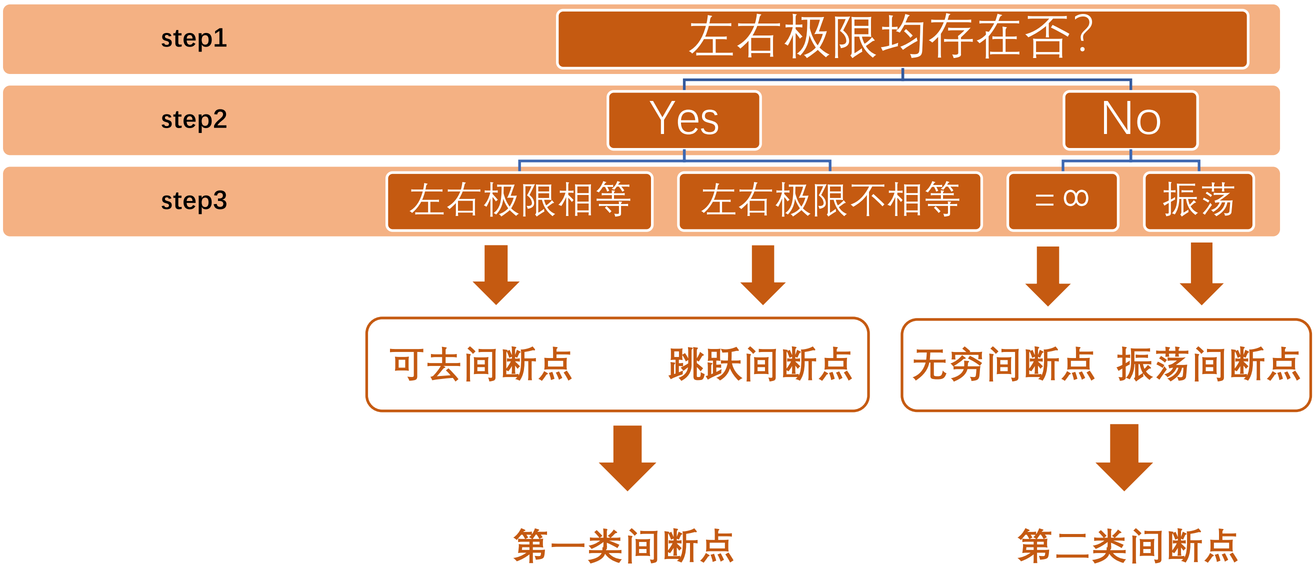
3.[补充 1] x_0 为 f (x)的间断点的三种情况：

①f (x)在 x_0 处无定义

② $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在

③ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ≠ f (x_0)

[补充 2]判断间断点类型



(1) f (x) = $\frac{x}{\sin x}$

f (0^+) = $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x}$ = 1 f (0^-) = $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{\sin x}$ = 1

∴x=0 为 f (x)的可去间断点.

(2) f (x) = [x]

f (0^+) = $\lim\limits_{x \to 0^+} [x]$ = 0 f (0^-) = $\lim\limits_{x \to 0^-} [x]$ = -1

∴x=0 为 f (x)的跳跃间断点.

(3) f (x) = $\frac{1}{\sin x}$

f (0^+) = $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin x}$ = ∞ f (0^-) = $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{\sin x}$ = ∞

∴x=0 为 f (x)的无穷间断点.

(4) f (x) = $sin\frac{1}{x}$

f (0) = $\lim\limits_{x\to 0} sin\frac{1}{x}$,不存在

∴x=0 为 f (x)的振荡间断点.

(5) f (x) = $\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$

f (0) = $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 不存在

∴x=0 为 f (x)的振荡间断点.

(6) f (x) = $\frac{\tan x}{x}$

f (0^+) = $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{tanx}{x}$ = 1　　f (0^-) = $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{tanx}{x}$ = 1

∴x=0 为 f (x)的可去间断点.

4.(1) f (x) = x-[x]

对 ∀ x_0∈Z : f (x_0^+) = $\lim\limits_{x\to x_0^+}(x-[x])$ = 0

f (x_0^-) = $\lim\limits_{x\to x_0^-}(x-[x])$ = 1

∴f (x)在所有整数点处不连续，而在其他点处是连续的.

(2) f (x) = $\frac{x}{\sin x}$

间断点：x=nπ, n ∈ Z (无定义)

∴f (x)在 x=nπ（n ∈ Z）处不连续，而在其他点是连续的.

(3) f (x) = $\cot x$ = $\frac{\cos x}{\sin x}$

x=nπ, n ∈ Z 时无定义，同上

∴f (x)在 x=nπ（n ∈ Z）处不连续，而在其他点是连续的.

(4) f (x) = $\sqrt{\frac{(x-1)(x-3)}{x+1}}$

$\frac{(x-1)(x-3)}{x+1}\geqslant 0$ ⇒ 定义域：[-1,1]∪[3,+∞)

∴f (x)在其定义域上连续.

5.

（1） $\lim\limits_{x\to 0^+} arcsin\frac{1-x}{1-x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+} arcsin\frac{1-x}{(1-x)(1+x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+} arcsin\frac{1}{1+x}$

$=\frac{\pi}{2}$

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+e^x)$

$=ln\lim\limits_{x\to 0}(1+e^x)$

$=\ln 2$

(3)令 F（x） $=\frac{\sqrt[3]{x+1}\ln(2+x^2)}{(1-x^3)+\cos x}$

由于初等函数在其定义域内连续

故$\lim\limits_{x\to 0}F(x)$=F(0)=$\frac{\ln 2}{2}$

(4)令 F（x） $=\frac{x^2+e^{1-x}}{\ln(2+x)}$

同（3）$\lim\limits_{x\to 1}F(x)$=F(1)=$\frac{2}{\ln 3}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\frac{2}{1-x}-1}$

=1

(6)$\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{\sin(\pi x+\frac{\pi}{2})}$

$=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}=1$

6.证明:（1） ∵f(x)在x_0处连续 ∴ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$\therefore \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$

当$0<|x-x_0|<\delta,有|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$

$\because |f(x)-f(x_0)|\geq \big||f(x)|-|f(x_0)|\big|$

$\therefore \big||f(x)|-|f(x_0)|\big|<\varepsilon,即|f(x)|在x_0处连续$

故$|f(x)^2-f(x_0)^2|$=$[f(x)+f(x_0)][f(x)-f(x_0)]<\varepsilon$

$\therefore f(x)^2在x_0处连续$

（2）反之不成立

例如 $f(x)=\begin{cases}1,x\geq 0\\-1,x<0\end{cases}$在 x=0 处不连续

7.$|x|>1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+(a-1)x^n-1}{x^{2n}-ax^n-1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{a-1}{x^n}-\frac{1}{x^{2n}}}{1-\frac{a}{x^n}-\frac{1}{x^{2n}}}=x$$

$|x|<1$ 时，原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{0+0-1}{0-0-1}=1(|x|<1,n\to\infty$时$,x^n\to 0)$

$x=-1$ 时，$f(-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1+(-1)^n(a-1)-1}{1-(-1)^n a-1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+(-1)^n(a-1)}{(-1)^{n+1}a}$$

$$=\begin{cases}-\frac{a+1}{a}, & n为奇\\ \frac{3-a}{a}, & n为偶\end{cases}$$故 f（-1）不存在

$x=1$ 时，$f(-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a-1-1}{1-a-1}=\frac{1-a}{a}$

$$\therefore f(x)\begin{cases}1,|x|<1\\ \dfrac{1-a}{a},x=1\\ x,|x|>1\end{cases}\quad 在x=-1 无定义$$

要使 f(x)在$[0$，$+\infty)$上连续，$\frac{1-a}{a}=1$，$\therefore a=\frac{1}{2}$