习题 6.1

1.（1）✕（$f(x)$在$[a,b]$上可积一定有界，但$f(x)$有界为$f(x)$在$[a,b]$上可积最基本条件）

（2）✕（$\lambda \to 0 \neq n \to \infty$）

（3）√

（4）√

2.（1）C

（2）D（由施瓦茨不等式得$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx$

其中令$f(x)=x,g(x)=1$ 则$\left(\int_a^b x\,dx\right)^2 \leq \int_a^b x^2\,dx\,(b-a)$

即$\left(\int_0^1 x\,dx\right)^2 \leq \int_0^1 x^2\,dx$）

（3）D

3. $S=\int_0^{10}(10t+1)dt=510m$

4. （1）解：令$f(x)=x, x\in[0,1]$

将$x\in[0,1]$,n等分，$\Delta x_i=\frac{1}{n}$

取$\xi_i=\frac{i}{n}(i=1,2,\dots,n)$

则$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i=\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n}$$

当 $\lambda\to 0$ 时，$\pi\to\infty$

故$\int_0^1 x\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i=\frac{1}{2}$

（2）解：令$g(x)=e^x, x\in[0,1]$

将$x\in[0,1]$ n等分，$\Delta x_i=\frac{1}{n}$

取$\xi_i=\frac{2}{n}(i=1,2,\dots,n)$

则$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}e^{\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{n}e^{\frac{n}{n}}$

$=\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{3}{n}}+\cdots+e^1\right)$

$=\frac{1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}}$（等比数列）

由 $\lambda\to 0$时，$n\to\infty$时

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\bullet\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{-\frac{1}{n}}$（等价无穷小）

$=\lim\limits_{n\to\infty}(e-1)e^{\frac{1}{n}}=e-1$

5. 由定积分几何意义得 $\frac{1}{2}\cdot 2(k+8+k)=10$

$\Rightarrow 2k=2\Rightarrow k=1$

6. （1）解：令$f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$,$x\in[0,1]$

对$x\in[0,1]n$等分,$\Delta x_i=\frac{1}{n}$,取$\xi_i=\frac{2}{n}(i=1,2,\dots,n)$

则$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$

$=\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{(n+i)^2}$

当$n\to\infty$，$\lambda\to 0$

则原式$=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx$

（2）解：令$f(x)=\sin x$

在$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$分成$n$等份，则$\Delta x_i=\frac{\pi}{2n}$

取$\xi_i=\frac{i\pi}{2n}(i=0,1,2,\dots,n-1)$

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i=\frac{\pi}{2n}\left[\sin 0+\sin\frac{\pi}{2n}+\cdots+\frac{\sin(n-1)\pi}{2n}\right]$

当$n\to\infty$，$\lambda\to 0$

则原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

7. （1）解：原式$=\int_c^b f(x)\,dx+\int_b^a f(x)\,dx=\int_c^a f(x)\,dx$

（2）由积分中值定理得

平均值为$f(\xi)=\frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 e^x\,dx$

8. （1）由$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x}$在区间$[0,1]$可积，且在$[0,1]$上 $x\le\sqrt{x}$

由保序性$\int_0^1 x\,dx\le\int_0^1\sqrt{x}\,dx$

（2）同理 $x\ge\sin x$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx\ge\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

（3）因为在$[-1,0]$上 $e^{2x}\le e^x$ 所以$\int_{-1}^0 e^{2x}\,dx\le\int_{-1}^0 e^x\,dx$

两边加负号即$\int_0^{-1} e^{2x}\,dx \ge \int_0^{-1} e^{x}\,dx$

（4）由$lnx \ge (lnx)^2$在$[1,2]$上

同理$\int_1^2 lnx\,dx \ge \int_1^2 (lnx)^2\,dx$

（5）由在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上$x \le \tan x$

同理$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx$

9. （1）由在$x \in [0,1]$内$\frac{1}{1+x^2} \in \left[\frac{1}{2},1\right]$

则$\frac{1}{2}\cdot 1 \le \int \frac{dx}{1+x^2} \le 1\cdot 1$（推论 6.1.1）

即$\frac{1}{2} \le \int \frac{dx}{1+x^2} \le 1$

（2）由于在$x \in [0,2]$，$x^2-2x \in [-1,0]$

则$e^{x^2-2x} \in \left[\frac{1}{e},1\right]$

$\frac{2}{e} \le \int_0^2 e^{x^2-2x}\,dx \le 2$

（3）在$x \in [0,2\pi]$内 $\frac{1}{1+0.5\cos x} \in \left[\frac{2}{3},2\right]$

则$\frac{4\pi}{3} \le \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0.5\cos x} \le 4\pi$

（4）在$x \in [0,100]$内 则$\frac{e^{-x}}{x+100} \in \left[\frac{\frac{1}{e^{100}}}{200},\frac{1}{100}\right]$

$\frac{1}{2e^{100}} \le \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\,dx \le 1$

10. 证明：（1）$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

由积分中值定理得

原式$= f(\xi_1)(1-0)+f(\xi_2)(2-1)$（其中$\xi_1 \in [0,1]$，$\xi_2 \in [1,2]$）

$= \frac{1}{\sqrt{1+{\xi_1}^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+{\xi_2}^3}}$

则$\frac{1}{\sqrt{1+0}} + \frac{1}{\sqrt{1+1}} \le \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx \le \frac{1}{\sqrt{1+1}} + \frac{1}{\sqrt{1+2^3}}$

即$\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \le \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx \le 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

积分中值定理

$= \sin^2\xi_1\left(\frac{\pi}{6}-0\right) + \sin^2\xi_2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\xi_3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$（$\xi_1 \in \left[0,\frac{\pi}{6}\right]$，$\xi_2 \in \left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，$\xi_3 \in \left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$）

则$\frac{\pi}{6}\sin^2 0+\frac{\pi}{6}\sin^2\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\sin^2\frac{\pi}{3}\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx\le\frac{\pi}{6}\left(\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{3}+\sin^2\frac{\pi}{2}\right)$

即$\frac{\pi}{6}\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx\le\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+1\right)=\frac{\pi}{3}$ 得证

11. 解：由题意得 $\int_0^1 f(x)\,dx$为具体值

设$f(x)=x+t$

则$2\int_0^1 f(x)\,dx=2\int_0^1(x+t)\,dx=t$

则$2\int_0^1 x\,dx+2\int_0^1 t\,dx=t$

则$2\int_0^1 x\,dx=-t$

$t=-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=-1$

故$f(x)=x-1$