习题3.4

1. 求下列函数的二阶导数

〈1〉 $y=x^3+2x+3x+4$

$y'=3x^2+4x+3$

$y''=6x+4$

〈2〉 $y=x^4\ln x$

$y'=4x^3\ln x+x^3$

$y''=12x^2\ln x+4x^2+3x^2$

$=12x^2\ln x+7x^2$

〈3〉 $y=\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}$

$y=x^2(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore y'=2x(1+x)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^2(1+x)^{-\frac{3}{2}}$

$y''=2(1+x)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot 2x(1+x)^{-\frac{3}{2}}-x(1+x)^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}x^2(1+x)^{-\frac{5}{2}}$

$=(1+x)^{-\frac{5}{2}}[2(1+x)^2-x(1+x)-x(1+x)+\frac{3}{4}x^2]$

$=(1+x)^{-\frac{5}{2}}(\frac{3}{4}x^2+2x+2)$

〈4〉 $y=\frac{\ln x}{x^2}$ $\quad y=x^{-2}\ln x$

$y'=-2x^{-3}\ln x+x^{-3}$ $\quad y''=6x^{-4}\ln x+(-2)x^{-4}-3x^{-4}$

$=(6\ln x-5)x^{-4}$

〈5〉 $y=\sin x^2$

$y'=\cos x^2\cdot 2x$

$y''=2\cos x^2+2x(-\sin x^2\cdot 2x)$

$=-4x^2\sin x^2+2\cos x^2$

〈6〉 $y=x^3\cos\sqrt{x}$

$y'=3x^2\cos\sqrt{x}+x^3(-\sin\sqrt{x})\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}$

$=3x^2\cos\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}\sin\sqrt{x}$

$y''=6x\cos\sqrt{x}+3x^2(-\sin\sqrt{x})\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}$

$-(\frac{5}{4}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}\cos\sqrt{x}\,\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}})$

$=6x\cos\sqrt{x}-\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x}-\frac{5}{4}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x}$

$-\frac{1}{4}x^2\cos\sqrt{x}$

$=(6x-\frac{1}{4}x^2)\cos\sqrt{x}-\frac{11}{4}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x}$

〈7〉 $y=x^2e^{3x}$

$y'=2xe^{3x}+x^2\cdot 3e^{3x}$

$y''=2e^{3x}+2xe^{3x}\cdot 3+2x\cdot 3e^{3x}+3x^2\cdot 3e^{3x}$

$=e^{3x}(2+6x+6x+9x^2)$

$=(9x^2+12x+2)e^{3x}$

〈8〉 $y=e^{-x^2}\arcsin x$

$y'=-2xe^{-x^2}\arcsin x+e^{-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y''=-2xe^{-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-2xe^{-x^2}(-2x)\arcsin x$

$-2e^{-x^2}\arcsin x+e^{-x^2}(-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+$

$(-\frac{1}{2})e^{-x^2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)$

扫描全能王 创建

$\therefore y'' = -2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}\arcsin x - 2e^{-x^2}\arcsin x - 2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2} + xe^{-x^2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$= (4x^2-2)e^{-x^2}\arcsin x - 4xe^{-x^2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + xe^{-x^2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

⟨9⟩ $y = x^2\cos 3x$

$y' = 2x\cos 3x + x^2(-\sin 3x)\cdot 3$

$y'' = 2\cos 3x + 2x(-\sin 3x)\cdot 3 + 6x(-\sin 3x) - 3x^2\cos 3x \cdot 3$

$= 2\cos 3x - 6x\sin 3x - 6x\sin 3x - 9x^2\cos 3x$

$= (2-9x^2)\cos 3x - 12x\sin 3x$

⟨10⟩ $y = x^2\ln x$

$y' = 2x\ln x + x$

$y'' = 2\ln x + 2 + 1 = 2\ln x + 3$

2. 求下列函数的n阶导数

⟨1⟩ $y = \ln(x+1)$

$y' = \frac{1}{x+1} \quad y'' = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad y''' = \frac{2}{(1+x)^3} \quad y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$

⟨2⟩ $y = \sin^2(wx)$

$y = \sin^2(wx) = \frac{1-\cos(2wx)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2wx)$

$y^{(n)} = -2^{n-1}w^n\cos(2wx + \frac{n}{2}\pi)$

⟨3⟩ $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$

$y = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$

又由 $\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$

$\therefore y^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(x-2)^{n+1}} - (-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$

$= (-1)^n n!\left[(x-2)^{-(n+1)} - (x-1)^{-(n+1)}\right]$

⟨4⟩ $y = \cos^2(wx)$

$y = \cos^2(wx) = \frac{1+\cos(2wx)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2wx)$

$y^{(n)} = 2^{n-1}w^n\cos(2wx + \frac{n}{2}\pi)$

扫描全能王 创建

3. 求下列函数的高阶导数

<1> $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，求 $y^{(n)}, y^{(n+1)}$；

解：$y^{(n)}=n!a_0 \quad y^{(n+1)}=0$

<2> $y=x^2(1+x)^3(2+x)^4$，求 $y^{(9)}, y^{(10)}$；

解：$y^{(9)}=9! \quad y^{(10)}=0$

<3> $y=x^2e^{2x}$，求 $y^{(20)}$；

解：$\because (x^2)'=2x \quad (x^2)''=2 \quad (x^3)'''=0$

$\therefore$ 由莱布尼茨公式可知 $y^{(n)}=C_{20}^0x^2(e^{2x})^{(20)}+C_{20}^1 2x(e^{2x})^{(19)}+C_{20}^2 2(e^{2x})^{(18)}$

$\therefore y^{(n)}=2^{20}x^2e^{2x}+20\cdot2^{20}xe^{2x}+\frac{20\times19}{2}2^{19}e^{2x}$

$=2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)$

<4> $y=x\ln x$，求 $y^{(5)}$；

解：$\because (x)'=1 \quad (x)''=0 \quad (\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

$y^{(5)}=C_5^0x(\ln x)^{(5)}+C_5^1(\ln x)^{(4)}$

$=x\frac{4!}{x^5}+5(-\frac{3!}{x^4})$

$=24x^{-4}-30x^{-4}=-6x^{-4}$

<5> $y=e^x\sin x$，求 $y^{(n)}$；

解：$y'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$y''=e^x\sin x+e^x\cos x+e^x\cos x-e^x\sin x=2e^x\cos x=2e^x\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$y'''=2e^x\cos x-2e^x\sin x=2\sqrt{2}e^x\sin(x+\frac{3}{4}\pi)$

$\therefore y^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\sin(x+\frac{n}{4}\pi)$

扫描全能王 创建

4、求下列函数的二阶微分

<1> $y=\sin x \quad y''=-\sin x$

$d^2y=-\sin x\,dx^2$

<2> $y=xe^x$

$y'=e^x+xe^x$

$y''=e^x+e^x+xe^x=2e^x+xe^x$

$d^2y=(2e^x+xe^x)dx^2$

<3> $y=x\ln x$

$y'=\ln x+1 \quad y''=\frac{1}{x}$

$\therefore d^2y=\frac{1}{x}dx^2$

<4> $y=x\sin x$

$y'=\sin x+x\cos x$

$y''=\cos x+\cos x-x\sin x$

$d^2y=(2\cos x-x\sin x)dx^2$

5、设x为中间变量，求下列函数的二阶微分.

<1> $y=\sin x$，$x=at+b$. 其中a、b为常数.

解：$y=\sin(at+b) \quad y'=\cos(at+b)\cdot a$

$y''=-a^2\sin(at+b)$

$\therefore d^2y=-a^2\sin(at+b)\,dt^2$

<2> $y=e^x$，$x=at^2+bt+c$，其中a、b、c为常数.

解：$y=e^{at^2+bt+c}$

$y'=(2at+b)e^{at^2+bt+c}$

$y''=(2a)e^{at^2+bt+c}+(2at+b)^2e^{at^2+bt+c}$

$=(4a^2t^2+4abt+b^2+2a)e^{at^2+bt+c}$

$\therefore d^2y=(4a^2t^2+4abt+b^2+2a)e^{at^2+bt+c}dx^2$

扫描全能王 创建