第 2 章复习题

1. 证明: 反证法:

假设$\{a_n+b_n\}$收敛

因为： $b_n=a_n+b_n-a_n$　又$\{a_n\}$收敛

则$\{b_n\}$收敛，与$\{b_n\}$发散矛盾

则假设不成立 ，即$\{a_n+b_n\}$发散

$\{a_nb_n\}$不一定发散，如：a_n=0，　b_n=n ，$a_nb_n=0, \lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=0$

2. 不能，如：a_n=n，b_n=−n，a_n+b_n=0，$\{a_n+b_n\}$收敛

a_n=（−1）^{n}，b_n=（−1）^{n}，$a_n b_n$=1，$\{a_nb_n\}$收敛

3. 不能，如：$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，b_n=n，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$=0

但$a_nb_n=\sqrt{n}$不收敛

所以$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$不存在

4. 不能，如：a_n=2（n 为奇），0（n 为偶）

b_n=0（n 为奇），2（n 为偶）

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$=0，但$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$和$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$都不存在

5.

（1）

$$a_n \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}}=1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}}=1$$

则由夹逼定理知：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$=1

（2）令 max{A,B,C,D}=a 则：

$$\sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{A^n+B^n+C^n+D^n} \leq \sqrt[n]{4a^n}$$

$$a \leq \sqrt[n]{A^n+B^n+C^n+D^n} \leq a\sqrt[n]{4}$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}$（$a\sqrt[n]{4}$）=a，所以$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$=max{A,B,C,D}

6

(1)证明：单调性：∵0<a_1<1

由数学归纳法知 an>0

则 a_{n+1}-a_n=-a_n^2<0

∴0<a_{n+1}<a_n

则{a_n}单调递减

有界性：∵a_n>0

∴{a_n}收敛

令$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$=a,则=$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$=$\lim\limits_{n\to\infty} a_n(1-a_n)$

∴ a=a(1-a)

∴a=0

则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$=0

(2)证明：单调性：a_1=$\sqrt{2}$,a_2=$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$,则 a_2>a_1

设 a_{k+1}>a_k,则 ak+2=$\sqrt{3+2a_{k+1}}$>$\sqrt{3+2a_k}$=a_k+1

由数学归纳法知，{a_n}单调递增

有界性：n=1, $a_1=\sqrt{2}<3$

假设 n=k，$a_k<3$

则 n=k+1 时，$a_{k+1}=\sqrt{3+2a_k}<3$ 成立

∴$a_n<3$

∴｛a_n｝收敛

令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$=a，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3+2a_n}$

$a=\sqrt{3+2a}$

有极限的保号性知 a=3

则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=3$

7、求下列数列极限

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^{n+1}$

解：原式=$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^{-(n-2)*\frac{n+1}{-(n-2)}}=e^{-1}$ 1^{∞}

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{n}$

解：原式=$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{-(n+2)*\frac{n}{-(n+2)}}=e^{-1}$ 1^{∞}

（3） $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{nsin}\frac{1}{n}$

解：原式=$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$

（4） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)*\sqrt{n}$

解：原式=$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]*\sqrt{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}})$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$

=0

（5） $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^{n}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)$

解：原式=$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-\tan\frac{2}{n}+2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}*\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n*\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}}$$

$$=e^{\frac{4}{1-0}}\quad=e^4$$

(6)$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$

解：令$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$ 由于$\forall 1\le k\le n$有$\frac{n+k}{n^2+n}\le\frac{n+k}{n^2+k}\le\frac{n+k}{n^2+1}$

则$\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+n}\le a_n\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+1}$

即$\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}\le a_n\le\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}$

由夹逼定理知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}$ *即*$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}=\frac{3}{2}$

8、求下列函数极限

（1）解：原式=$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{x+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$

（2）解：原式=$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(2x+3)^{20}*(3x+2)^{30}}{(3x)^{20}*(3x)^{30}}}{\frac{(2x+1)^{50}}{(3x)^{50}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{x}\right)^{20}*\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{30}}{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3x}\right)^{50}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{20}*1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{50}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$

(3)解：当 m=n 时，原式=1

当 m>n 时，原式=$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt[n]{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt[n]{x}}}=\frac{0-0}{1-0}=0$

当 m<n 时，原式=+∞

(4)解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1+1\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\lim\limits_{x\to}\frac{\frac{9}{2}x^2}{x^2}=4$

(5)解：令 t=1-x,则当 x⟶1 时，t⟶0

原式=$\lim\limits_{t\to 0}t\tan\frac{\pi}{2}(1-t)=\lim\limits_{t\to 0}t\cos\frac{t}{2}t=\mathit{lim}_{t\to 0}\,t\frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}=\lim\limits_{t\to 0}t\frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}=\frac{2}{\pi}$

(6)解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{2+0}{1+0}-1=1$

9

解：$\lim\limits_{x\to1}f(x)$=$\lim\limits_{x\to1}[3x^2$+2x$\lim\limits_{x\to1}f(x)]$=3+2$\lim\limits_{x\to1}f(x)$

可以解得$\lim\limits_{x\to1}f(x)$=-3

代入原式得$f(x)$=3x^2-6x

10

(1) 解：显然 3x 和$\sqrt{ax^2+bx+1}$是同阶无穷大量

∴a=9

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-b-\frac{1}{x}}{3+\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}}$=2

∴b=-12

(2) 解：x^2+ax+b 和 x-1 是同阶无穷小

当$x\to1, x^2+ax+b\to1+a+b\to0$

再洛必达$2x+a=5$，$\therefore a=3, b=-4$

11.(1)解：因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-cosx}$=$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}$

则$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$=2

所以$\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}$=$\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{x}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x^2}}$=$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{f(x)}{x^2}}$=$e^2$

(2)解：因为$\sqrt{1+f(x)sinx^2}$ −1→ 0 (x→ 0)

$f(x)sinx^2\to0$ (x → 0)

所以$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)sinx^2}-1}{1-cosx}$=$\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x)sinx^2}{\frac{1}{2}x^2}$=$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)x^2}{x^2}$=3

即$\lim\limits_{x\to0}f(x)$=3

12.(1)解：$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\frac{1}{x+1}=1$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\frac{1}{x+1}=-1$

X=0 为第一类间断点中的跳跃间断点

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

而$f(1) = 0$，x=1 为第一类间断点中的可去间断点

同理，x= -1 为第一类间断点中的可去间断点

⑵解：当 x=kπ 时，$\sin x = 0$

$$\lim_{x \to 2k\pi^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 2k\pi^-} f(x) = -1$$

X=2kπ为第一类间断点中的跳跃间断点

同理，X=（2k+1）π为第一类间断点中的跳跃间断点

13.证：反证法：假设 f（x）在 R 上无界

①f（x）在 x=x_0时，有$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

则 x=x_0是 f（x）的无穷间断点

不满足连续条件

②f（x）在$x \to \infty$时，有$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

则 f（x）不满足周期条件

故 f（x）有界

14.把分段点找到，令其左右相等即可

①当|x|<1 时，$\lim_{x \to \infty} |x^n| = 0$

f（x）=$ax^2 + bx$

②当|x|=1 时，f（x）=a+b|x|

③当|x|>1 时，f（x）=$\frac{1}{x}$

$$\text{即 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < -1 \\ a-b, & x = -1 \\ ax^2 + bx, & -1 < x < 1 < 1 \\ a+b, & x=1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

任意取分段点左右极限相等，联立方程

这里取-1 和 1

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = f(-1) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \end{cases}$$

则$\begin{cases} a-b=-1 \\ a+b=1 \end{cases}$解得：$\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$

15.

证：因为$\mathrm{f(x+y)=f(x)+f(y)}$，令 y=Δx 且$\Delta\mathrm{x} \to 0$

原式=$\mathrm{f(x+\Delta x)=f(x)+f(\Delta x)}$

两边同时取极限：$\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) + \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\Delta x)$

又因为$\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\Delta x) = 0$，$\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$

所以$\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$

则 f（x）连续

16.

设$f(x)$在$(0,\ +\infty)$上连续，且满足$f(x^2)=f(x), x \in (0,+\infty)$.证明$f(x)(0,\ +\infty)$上为常值函数.

证明： $\because f(x^2)=f(x)$

$\therefore f(x) = f(x^{\frac{1}{2}}) = f(x^{\frac{1}{4}}) = f(x^{\frac{1}{4}}) = \cdots\cdots = f(x^{\frac{1}{2^n}})$

$\because$ *n→∞时，* $\lim\limits_{n \to \infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1$

$\therefore$ *当* $n \to \infty$ *时,* $f(x) = f(x^{\frac{1}{2}}) = f(x^{\frac{1}{4}}) = f(x^{\frac{1}{4}}) = \cdots\cdots = f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(\lim\limits_{n \to \infty} x^{\frac{1}{2^n}}) = f(1)$

$\therefore f(x)=f(1)$*为常值函数*

17.

设$f(x)$在[a,b]上有定义，满足 a≤$f(x)$≤b，x∈[a,b]，假设存在常数 L∈[0.1),使得任意x'，x''∈[a,b], $|f(x')-f(x'')| \leq L|x'-x''|$.

试证明：（1）$f(x)$在[a,b]上连续。

（2）存在唯一ξ∈[a,b]，使得$f(\xi)=\xi$

（3）对于任意的x_1∈[a,b]，定义迭代序列x_{n+1}=$f(x_n)$,n=1,2,3......$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi$

证明:

(1) $\because |f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|$，不妨令$x''=x_0$，$x'\to x_0\in[a,b]$

$\therefore L|x'-x_0|\to 0$

又$\because |f(x')-f(x_0)|\geqslant 0$，$\lim\limits_{x'\to x_0}|f(x')-f(x_0)|\leqslant \lim\limits_{x'\to x_0} L|x'-x_0|=0$

$\therefore \lim\limits_{x'\to x_0}|f(x')-f(x_0)|=0$，$\therefore \lim\limits_{x'\to x_0} f(x')=f(x_0)$

故连续.

(2) 根据题意设F（x）$=f(x)-x$,

$\because a\leqslant f(x)\leqslant b$，所以$F(a)\geq 0$，$F(b)\leq 0$

并且 F（a）·F(b)≤0，由零点存在定理：必存在唯一$\xi\in[a,b]$，使得 F（ξ）=0，
$\therefore f(\xi)=\xi$（

(3) 由题意：$|f(x_n)-f(\xi)|\leqslant L|x_n-\xi|$
由（2）：$f(\xi)=\xi$，$\therefore |f(x_n)-\xi|\leqslant L|x_n-\xi|$

$\therefore |x_{n+1}-\xi|\leqslant L|x_n-\xi|$，设数列$x_n$存在且为 A，则有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$

$\therefore$当 $n\to\infty$时，$|A-\xi|\leqslant L|A-\xi|$，又因为 $L\neq 1$，则 $A=\xi$

故假设成立，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A=\xi$

证毕.

18.

函数$f(x)$在[0,1]上连续，$f(0)=f(1)$，证明：对于任意的自然数 $n\geqslant 2$，存在ξ_n，使得$f(\xi_n)=f(\frac{1}{n}+\xi_n)$.

证：令$F(x)=f(x)-f\left(\frac{1}{n}+x\right)$ $\because f(x)$在$x\in[0,1]$上连续，$\therefore \frac{1}{n}+x\in[0,1]$

$\therefore F(x)=f(x)-f\left(\frac{1}{n}+x\right)$在$[0,1-\frac{1}{n}]$上连续，即$F(x)$在$[0,\frac{n-1}{n}]$上连续

$\because$函数$F(x)$连续，$\therefore$由连续函数性质：存在m, M满足$m\leq F(x)\leq M$,

令$x=\frac{k}{n}$，$k=0$，1，2，3......n-1（注意自变量范围），

$\therefore m \le F(\frac{0}{n}) \le M$

$m \le F(\frac{1}{n}) \le M$

....

....

....

$m \le F(\frac{n-1}{n}) \le M$

将n个式子相加，得$nm \leqslant F\left(\frac{0}{n}\right)+F\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+F(\frac{n-1}{n}) \leqslant nM$

$\therefore m \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n-1} F(x)}{n} \leqslant M$，*由介值定理，存在*$\xi_n \in [0,1]$，*使得*$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} F(x)}{n} = F(\xi_n)$

展开:

$$nF(\xi_n) = F\left(\frac{0}{n}\right)+F\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+F(\frac{n-1}{n})$$

$$=f(0)-f\left(\frac{1}{n}+0\right)+f(\frac{1}{n})-f\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots+f(\frac{n-1}{n})-f\left(\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=f(0)-f\left(\frac{1}{n}\right)+f(\frac{1}{n})-f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{3}{n}\right)\cdots\cdots+f(\frac{n-1}{n})-f\left(\frac{n}{n}\right)$$

$$=f(0)-f(1)=0$$

$\therefore nF(\xi_n)=0$，$F(\xi_n)=0$，即$F(\xi_n)=f(\xi_n)-f\left(\frac{1}{n}+\xi_n\right)=0$，

$\therefore f(\xi_n)= f(\frac{1}{n}+\xi_n)$.

证毕.

19.

对于任意的x,函数满足$f(x)=f(2x)$,且$f(x)$在$x=0$处连续，证明：$f(x)$为常值函数

证明: $\because f(x)=f(2x)$

$\therefore f(x)=f(\frac{x}{2})= f(\frac{x}{4})=f(\frac{x}{8})=\cdots\cdots= f(\frac{x}{2^n})$

当 $n\to\infty$*时*，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{2^n}=0$

$\therefore$ *当*$n\to\infty$*时*$,f(x)=f(\frac{x}{2})= f(\frac{x}{4})=f(\frac{x}{8})=\cdots\cdots= f(\frac{x}{2^n})=f(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{2^n})=f(0)$

$\because f(x)$在$x=0$处连续，$\therefore f(0)$*存在*

故$f(x)= f(0)$ *恒为常数.*

20.

对于任意的x，总有$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$,且$\lim\limits_{x\to\infty}(\varphi(x)-\psi(x))=0$. 问：极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$是否存在，给出理由.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$*不一定存在*，理由如下

$\because \lim\limits_{x\to\infty}(\varphi(x)-\psi(x))=0$ 不等价于$\varphi(x)$，$\psi(x)$极限存在，

$\therefore$不满足夹逼准则，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$*不一定存在*

反例如：$\varphi(x)=sinx-\frac{1}{x}$，$f(x)=sinx$，$\psi(x)=sinx+\frac{1}{x}$