7.3

1.解：(1) $y''=e^{2x}-\cos x$

对所给方程积分3次,得:

$y''=\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C_1$

$y'=\frac{1}{4}e^{2x}+\cos x+C_1x+C_2$

$y=\frac{1}{8}e^{2x}+\sin x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$

(2). $y''=x+\sin x$

同理,得: $y'=\frac{1}{2}x^2-\cos x+C_1$

$y=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2$

(3). $xy''+y'=0$

令 $y'=p(x)$, 则 $y''=p'(x)$.

$\therefore$ 原方程可化为 $xp'+p=0$

$\Rightarrow -\frac{1}{p}dp=\frac{dx}{x}$

$\Rightarrow -\ln p=\ln x\boxed{-\ln C_1}$

$\Rightarrow y'=p=\frac{C_1}{x}$ 方便之后的对数运算.

$\therefore y=C_1\ln|x|+C_2$

(4). $y''-4y=x+1$

齐次方程为: $y''-4y=0$, $\therefore$ 特征方程为: $r^2-4r=0$

解得 $r_1=2, r_2=-2$ $\therefore$ 齐次方程通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$

设特解 $y^*=Ax+B$ $\therefore (y^*)''=0$

$\therefore 0-4(Ax+B)=x+1$

$\Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \end{cases}$ $\therefore$ 微分方程通解为:

$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$.

(5). $y^3y''-1=0$

令 $y'=p(x)$, $\therefore y''=p\frac{dp}{dy}$

代入原式得: $y^3p\frac{dp}{dy}=1$

$\Rightarrow pdp=\frac{dy}{y^3}$

$\Rightarrow p^2=-\frac{1}{y^2}+C_1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sqrt{C_1-\frac{1}{y^2}}$

$\Rightarrow \frac{ydy}{\sqrt{C_1y^2-1}}=dx$

$\therefore \sqrt{C_1y^2-1}=C_1x+C_2$

$\therefore$ 原式通解为:

$C_1y^2-1=(C_1x+C_2)^2$.

$\int\cot x dx=\ln|\sin x|+C$.

(6). 解 $y''=(y')^3+y'$

令 $y'=p(x)$, $\therefore y''=p\frac{dp}{dy}$

$\therefore$ 原式可化为: $p\frac{dp}{dy}=p^3+p$

$\Rightarrow \frac{dp}{p^2+1}=dy$

$\Rightarrow p=\tan(y+C_1)$

$\Rightarrow \frac{dy}{\tan(y+C_1)}=dx$

$\Rightarrow \ln|\sin(y+C_1)|=x+\ln C_2$

$\therefore$ 原式通解为 $y=\arcsin(C_2e^x)-C_1$

2.解:(1). 令$y'=p(x)$, ∴$y''=p'(x)$.

∴原式可化为$(1+x^2)p'=2xp$

$\Rightarrow \frac{dp}{p}=\frac{2x\,dx}{x^2+1}$

$\Rightarrow \frac{dp}{p}=\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$

$\Rightarrow \ln p=\ln(x^2+1)+\ln C_1$

$\Rightarrow p=C_1(x^2+1)$

∴$y'=C_1(x^2+1)$

∵$y'(0)=3$ ∴$C_1=3$

∴$y'=3(x^2+1)$

∴$y=x^3+3x+C_2$

∵$y(0)=1$

∴微分方程特解为$y=x^3+3x+1$.

(2). ~~令$y'=p(x)$, $y''=p$~~

令$y'=p(y)$, $y''=p\frac{dp}{dy}$

∴原式可化为$p\frac{dp}{dy}=\frac{3}{2}y^2$

$\Rightarrow p\,dp=\frac{3}{2}y^2dy$

$\Rightarrow p^2=y^3+C_1$

∵$y(0)=y'(0)=1$ ∴$C_1=0$

∴$\frac{dy}{dx}=y^{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow y^{-\frac{3}{2}}dy=dx$

$\Rightarrow -2y^{-\frac{1}{2}}=x+C_2$

∵$y(0)=1$ ∴$C_2=-2$

∴$y^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}x+1$

∴微分方程特解为$y=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}x)^2}$

3解: ∵$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{dy}{dx}=\tan\alpha$.

∴$\begin{cases}\alpha=y+C_1 & ① \\ \frac{d\alpha}{\tan\alpha}=dx\Rightarrow \ln|\sin\alpha|=x+\ln C_2\end{cases}$

$\Rightarrow \sin\alpha=C_2e^x$

$\Rightarrow \alpha=\arcsin(C_2e^x)$ ②

联立①②式: $y+C_1=\arcsin(C_2e^x)$.

∵$y(0)=0$, $\alpha(0)=\frac{\pi}{4}$, 代入①式得$C_1=\frac{\pi}{4}$

联立上式可得$C_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　∴$y(x)=\arcsin\frac{e^x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}$.