习题 7.4

1.

(1)线性无关：$\because \dfrac{x^{-2}}{x^3}=x^{-5}$ $\quad$ (不是常数)

(2)线性无关：$\because \dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x$ $\quad$ (不是常数)

(3)线性无关：$\because \dfrac{e^x}{xe^x}=\dfrac{1}{x}$ $\quad$ (不是常数)

(4)线性相关：$\because \dfrac{0}{e^x}=0$ $\quad$ (为常数)

2.

解：证明$y_1=e^{-x}$和$y_2=e^{3x}$都是$y''-2y'-3y=0$（原题式子有误）的解，并求出该方程的通解。

$(y_1)'=-e^{-x}$ $\qquad$ $(y_2)'=3e^{3x}$

$(y_1)''=e^{-x}$ $\qquad$ $(y_2)''=9e^{3x}$

$y_1''-2y_1'-3y_1'=e^{-x}+2e^{-x}-3e^{-x}=0$(成立)

$y_2''-2y_2'-3y_2=9e^{3x}-6e^{3x}-3e^{3x}=0$(成立)

$\because$ 原式的特征方程为：$\lambda^2-2\lambda-3=0$

$\Rightarrow \lambda_1=3,\lambda_2=-1$

$\therefore$ 该方程的通解为$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$

3.

解：由题意知齐次方程通解为$Y=C_1x^2+C_2$

对于特征方程：$\lambda^2-\dfrac{1}{x}\lambda=0,\ \Delta=\dfrac{1}{x^2}>0$

令$f(x)=x$，由P_{229}页下面公式得：

$y = C_1 x^2 + C_2 + \frac{x^3}{3}$

$\therefore$ 方程的通解为$C_1 x^2 + C_2 + \frac{x^3}{3}$

4.

解：$y'' - y = 0$ 的特征方程为$\lambda^2 - 1 = 0$

解得：$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

$\therefore$ 齐次方程通解为$C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

设特解$y^* = a\sin x + b\cos x$

$(y^*)' = a\cos x - b\sin x$

$(y^*)'' = -a\sin x - b\cos x$

代入非齐次方程得：$-a\sin x - b\cos x - a\sin x - b\cos x$

$= -2a\sin x - 2b\cos x = \cos x$

$\therefore \begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\therefore y^* = -\frac{1}{2}\cos x$

$\therefore$ 方程通解为$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x$