# 复习题 4

**1** 证明：$\because f(x)$在$[a,b]$上不恒为常数

则存在$c\in(a,b)$使$f(c)\ \neq f(a)$

$\because f(a)=f(b)则f(c)\ \neq f(b)$

设$f(c)>f(a)$

由拉格朗日中值定理得

∃ξ∈(a,c),η∈(c,b)

f'(ξ)=$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$>0,f'(η)=$\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$<0 证毕

**2** 证明：设$y$、$x$,将区间[x,y]n 等分，有

|f(y)-f(x)|=|$\sum_{k=1}^{n}[f(x+\frac{k}{n}(y-x))-f(x+\frac{k-1}{n}(y-x))$|

≤$\sum_{k=1}^{n}|f(x+\frac{k}{n}(y-x))-f(x+\frac{k-1}{n}(y-x))|$

≤$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}(y-x)^2$=$\frac{(y-x)^2}{n}$

当 n→∞时，右边会无限趋向于 0

∴f(x)-f(y)=0.f(x)在(-∞,+ ∞)内为常数

**3** 证明：设 F(x)=$\frac{f(x)}{x}$

∴F'(x)=$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

由拉格朗日中值定理得

∃ξ∈（0，$x$）$\frac{f(x)-f(0)}{x}$=f'(ξ)

∴f(x)=xf'(ξ)

∴F'(x)=$\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x}$

$\because f'(x)严格单调增加$

$\therefore f'(x)>f'(\xi)$

$\therefore F'(x)>0$

∴$\frac{f(x)}{x}$严格单调增加

**4** 证明：$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}$=$\lim\limits_{x\to0}\frac{2f(x)}{x^2}$=$\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x^2}(f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f'(0)+o(x^2))$=A

∵A 是常数

$\therefore f(x)=0,f'(x)=0,f''(x)=A$

**5**

(1) 证明：设 f(x)=$\frac{\tan x}{x}$,0<x<$\frac{\pi}{2}$

∴f'(x)=$\frac{x-\sin x\cos x}{x^2(\cos x)^2}$

设 g(x)=x-$\sin x\cos x$  g'(x)=1-$\cos 2x$>0

∴g(x)>g(0)=0  ∴f'(x)>0  ∴$\frac{\tan x}{x}$<$\frac{\tan y}{y}$

(2) 证明：设 f(x)=$e^x$-x-1(x ≠0)

∴f'(x)=$e^x$-1

∴$在x\in(-\infty,0)时,\ \ f'(x)=\ e^x$-1<0

$在x\in(0,+\infty)时,\ \ f'(x)=\ e^x$-1>0

∴$f(x)>f(0)=0$

∴$e^x$>1+x

(3) 证明：设 f(x)=x-$\sin x$  g(x)=$\sin x$-x+$\frac{x^3}{6}$

∴f'(x)=1-$\cos x$得 f(x)在[0, + ∞]上单增

∴f(x)>f(0)=0  ∴x>$\sin x$

g'(x)=$\cos x$-1+$\frac{x^2}{2}$=2[$(\frac{x}{2})^2$-$(\sin\frac{x}{2})^2$]

当$\frac{x}{2}$∈[0, π]时，$(\frac{x}{2})^2$>$\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$

当$\frac{x}{2}$⩾π 时，$(\frac{x}{2})^2$⩾$\pi^2$>1⩾$\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$

∴g'(x)>0  g(x)在[0, + ∞]上单增

g(x)>g(0)=0  ∴$\sin x$>x-$\frac{x^3}{6}$

∴x-$\frac{x^3}{6}$<$\sin x$<x,x>0

(4) 证明：对不等式取对数得

x$\ln(1+\frac{1}{x})$<1<(x+1)$\ln(1+\frac{1}{x})$

设 1+$\frac{1}{x}$=y  (y>1)

∴1-$\frac{1}{y}$<$\ln y$<y-1

设 f(y)=$\ln y$+$\frac{1}{y}$-1

∴f'(y)=$\frac{1}{y}$-$\frac{1}{y^2}$=$\frac{y-1}{y^2}$>0

∴f(y)>f(1)=0  ∴$\ln y$>1-$\frac{1}{y}$

设 g(y)=$\ln y$-y+1

$g'(y)$=$\frac{1}{y}$-1<0

$\therefore g(y) < g(1) = 0$ $\therefore \ln y$<$y - 1$

$\therefore$1-$\frac{1}{y}$<$\ln y$<y-1

$\therefore (1+\frac{1}{x})^x$<e<$(1+\frac{1}{x})^{x+1}$

(5) 证明：设 f(x)=$\frac{\tan x}{x}$  0<x<$\frac{\pi}{2}$

$\therefore$f'(x)=$\frac{x-\sin x\cos x}{x^2-(\cos x)^2}$

设 g(x)=x-$\sin x\cos x$  g'(x)=1-$\cos 2x$>0

$\therefore g(x) > g(0) = 0$ $\therefore f'(x) > 0$ $\therefore \frac{\tan x}{x}$<$\frac{\tan y}{y}$

$\frac{y}{x}$<$\frac{\tan y}{\tan x}$

(6) 证明：设$f(x) =$ （$1+x$）$(\ln(1+x))^2$  $\therefore$f(0)=0

f'(x)=$(\ln(x+1))^2$+2$\ln(1+x)$-2x  f'(0)=0

f''(x)=$\frac{2}{1+x}$[$\ln(1+x)$-x]  f''(0)=0

f'''(x)=-$\frac{2\ln(1+x)}{(1+x)^2}$<0

$\therefore f''(x)$*在*（$0, +\infty$）*单调递减* $\therefore f''(x) < 0$

$f'(x)$*在*（$0, +\infty$）*单调递减* $\therefore f'(x) < 0$

$f(x)$*在*（$0, +\infty$）*单调递减* $\therefore f(x) < 0$

$(1+x)(\ln(1+x))^2$<$x^2$

**6.** 由题意可知 $u = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

由泰勒展开得 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2$

因为 $f(0) = f'(0) = 0$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(\mu)}{\mu f(x)} = \dfrac{x\dfrac{f^n(\eta)u^2}{2}}{\mu\dfrac{f^n(\xi)x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{u}{x}=\lim_{x\to 0}(1-\frac{f(x)}{xf'(x)})=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{xf'(x)}$$

由洛必达法则得 $\lim_{x\to 0}\frac{u}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{xf''(x)}{xf''(x)+f'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{f''(x)+\frac{f'(x)}{x}}=\frac{1}{2}$

# 7. 证:

因为 $s+t=1$

所以下证: $f[(1-t)x_1+tx_2]<(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$ ①

不妨设 $x_1<x_2$

将①转化为

$t(f(x_2)-f[(1-t)x_1+tx_2])>(1-t)(f[(1-t)x_1+tx_2]-f(x_1))$

因为 $f(x)$在$[x_1,x_2]$连续且可导

故由拉格朗日中值定理可得

$$\frac{f(x_2)-f[(1-t)x_1+tx_2]}{(x_2-x_1)(1-t)}=f'(n_1),n_1\in((1-t)x_1+tx_2,x_2)$$

$$\frac{f[(1-t)x_1+tx_2]-f(x_1)}{t(x_2-x_1)}=f'(n_2),n_2\in(x_1,(1-t)x_1+tx_2)$$

因为 $f''(x)>0$

故 $f'(n_1)>f'(n_2)$

所以 $t(1-t)f'(n_1)(x_2-x_1)>t(1-t)f'(n_2)(x_2-x_1)$

$\Leftrightarrow t(f(x_2)-f[(1-t)x_1+tx_2])>(1-t)(f[(1-t)x_1+tx_2]-f(x_1))$

即原证明式成立

# 8. 证:

因为 $f(0)=-1<0, f(-1)>0, f(1)>0$

所以 $\begin{matrix} f(0)f(-1)<0 \\ f(0)f(1)<0 \end{matrix}$

由零点存在性定理可得, $f(x)$在（$-1,0$）和（$0,1$）有两个零点

$f'(x)=(2x+1)e^{2x}+\sin x-2$

$f''(x)=4(x+1)e^{2x}+\cos x$

当$x<-1$时，$f'(x)<0, f(x)\downarrow$

$f(x)>f(-1)>0,$故$f(x)$在（$-\infty,-1]$无实零点

当$x>-1$时，$f''(x)>0, f'(x)$在（$-1,+\infty$）$\uparrow$

$f'(-1)<0, f(e)>0$

故$f(x)$在（$-1,+\infty$）先$\uparrow$后$\downarrow$

即$f(x)$在（$-1,+\infty$）至多存在2个零点

**9.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$

$$\begin{cases}\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)\\ \sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)\end{cases}$$

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\dfrac{2}{3}x^3+o(x^3)}{x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\dfrac{2}{3}x^3+o(x^3)-x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)}{1-(x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3))}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\dfrac{1}{6}x^3}=6$

**10.** 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^5}=A$

$$\begin{cases}\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^6)\\ \sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+o(x^6)\end{cases}$$

故原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(a+b(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^6))(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+o(x^6))}{x^5}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a-b)x+\dfrac{(a+4b)x^3}{3!}-(\dfrac{a}{5!}+\dfrac{b}{12}+\dfrac{b}{4!}+\dfrac{b}{5!})x^5+o(x^5)}{x^5}$$

因为 $\begin{cases}1-a-b=0\\ a+4b=0\end{cases}$

故$\begin{cases}a=\dfrac{4}{3}\\ b=-\dfrac{1}{3}\\ A=\dfrac{1}{30}\end{cases}$

**11**.由泰勒展开式可知:

$0=\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(x)+sinx}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)+x(f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2))\right]$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\big(1+f(0)\big)x+f'(0)x^2+\left(\frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)\right]$

则$f(0)=-1,f'(0)=0,f''(0)=\frac{1}{3}$

**12.**$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(x-a)^3$

结合已知:$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2$

则有$f''(a)-f''(\xi)=\frac{1}{3}f'''(\xi_1)(x-a)$即$x-a=3\frac{f''(a)-f''(\xi)}{f'''(\xi_1)}$

代入所求极限,$\lim\limits_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to a}\frac{(\xi-a)f'''(\xi_1)}{f''(a)-f''(\xi)}$

因为$x\to a$,$\xi\to a$,$\xi_1\to a$

所以$\lim\limits_{x\to a}\frac{\xi-a}{f''(a)-f''(\xi)}=\frac{1}{f'''(a)}$, $\lim\limits_{x\to a}f'''(\xi_1)=f'''(a)$

故$\lim\limits_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{3}$

**13.**⑴任取一个$x_0$,若$f(x_0)=f(0)+x_0f'(x_0\theta_1)$中$\theta$ 不是唯一的话,则另有一$\theta_2$使其成立

即 $f(x_0)=f(0)+x_0f'(x_0\theta_2)$,由于 $f(x_0)$,$f(0)$,$x_0$均为固定值

所以$f'(x_0\theta_1)=f'(x_0\theta_2)$即 f'(x)单调
所以$\theta_1=\theta_2$,唯一成立

⑵$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+o(x^2)$

又因为$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+o(x^2)$

两边同除以$x^2$，再令 $x \to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(\theta(x))-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}f''(0)+\frac{o(x^2)}{x}\right]$

故$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$

**14.** 设$x=m$时$f(m)$为最大值,$x=n$时$f(n)$为最小值

当 m<n 时，因为$|f'(x)|\le 1$

所以 $f(m)-f(0)<m$ ①

$f(m)-f(n)<n-m$ ②

$f(1)-f(n)<1-n$ ③

令①+②+③，$2f(m)-2f(n)+f(1)-f(0)<1$

因为$f(0)=f(1)$

所以$|f(m)-f(n)|<\frac{1}{2}$

当 n<m 时，同理可得$|f(m)-f(n)|<\frac{1}{2}$

故 f(x)极值差小于$\frac{1}{2}$

所以$|f(x_1)-f(x_2)|\le\frac{1}{2}$

**15.** 由中值定理得：$\exists\xi_1\in(0,x)$使$f(x)=f(0)+f'(\xi_1)(x_1-1)\ge f(0)+kx$

则$\exists x_0$使$f(x_0)>0$，又因为$f(0)<0$

此时由介值定理得：$\exists\,\xi\in(0,x_0)\subset(0,+\infty)$使$f(\xi)=0$

又因为$f'(x)>0$

所以 f(x)为单增函数

即在(0，+∞)上存在唯一ξ使得 f(ξ)=0

**16** .设$f(x)$在（$-\infty$, $+\infty$）内可导, 并且$f(x)+f'(x)\ne 0$, 证明$f(x)$在（$-\infty$, $+\infty$）内最多存在一个零点.（此题原为证明$f(x)$有且仅有一个零点，但无法证明，故进行改动）

证明: $\because f(x)+f'(x)\ne 0$

$\because$可分为两种情况:（1）$f(x)+f'(x)<0$；（2）$f(x)+f'(x)>0$

不妨取（1）进行证明.

根据$f(x)+f'(x)$可构造$F(x)=e^x f(x)$

$\therefore F'(x)=e^x\big(f(x)+f'(x)\big)<0$

$\therefore F(x)$在（$-\infty$, $+\infty$）单调递减

进行分类讨论

（1） $\lim_{x \to -\infty} F(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} F(x) < 0$

由单调函数零点存在定理，存在一个点 $c \in (-\infty, +\infty)$ 使得 $F(c)=0$,即 $f(c) = 0$

(2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} F(x) > 0$

并且 $F(x)$ 单调递减，∴不存在点 $c$ 使得 $F(c) = 0$，即不存在点 $c$ 使得 $f(c) = 0$，

(3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$

∴存在一点 $c$ 使得 $F(c)=0$，即 $f(c) = 0$

综上：最多存在一个点 $c$ 使得 $f(x) = 0$

同理证得（2）情况

∴证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内最多存在一个零点.

**17**.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，且 $f(0) = f(1) = 0, f(\frac{1}{2})=1$,

证明：（1）存在 $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$,使得 $f(\eta)=\eta$;

（2）对于任意实数 $\lambda$，必存在 $\xi \in (0, \eta)$ 使得 $f'(\xi) - \lambda(f(\xi) - \xi)=1$;

证明:

（1） 构造函数 $F(x) = f(x) - x$,

易知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导

又∵ $F(\frac{1}{2}) \cdot F(0) < 0$，∴由零点存在定理必存在一点 $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$,使得 $F(\eta) = 0$

即 $f(\eta) - \eta = 0$，也就是 $f(\eta) = \eta$

（2） 构造函数 $H(x) = e^{-\lambda x}[f(x) - x]$,易知 $H(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导

∴ $H'(x) = -\lambda e^{-\lambda x}[f(x) - x] + e^{-\lambda x}[f'(x) - 1] = e^{-\lambda x}(f'(x) - 1 - \lambda[f(x) - x])$,

又∵ $H(0) = 0 = H(\eta)$

由罗尔定理得：必存在一点 $\xi \in (0, \eta)$ 使得 $H'(\xi)=0$

∴ $e^{-\lambda\xi}(f'(\xi) - 1 - \lambda[f(\xi) - \xi])=0$

∴ $f'(\xi) - 1 - \lambda[f(\xi) - \xi]=0$

即 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi]=1$

证毕

**18.** 设函数$f(x)$在[0,1]上连续，（0，1）内可导，且$f(0)=0,f(1)=1$.证明：对任意的正数$a,b$,在区间(0，1)内存在不同的$\xi$，$\eta$，使得$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$.

证：取一点 $c\in(0，1)$，$\because f(x)$在[0,1]上连续，（0，1）内可导

$\therefore$由拉格朗日中值定理可得：必存在一点$\xi\in$（0，c），使得$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}$

同理：必存在一点$\eta\in$（c，1），使得$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}$

由于$\xi$，$\eta$分别处于不同区间，$\therefore$在区间(0，1)内存在不同的$\xi$，$\eta$

将$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}$，$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}$带入待证等式$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$

化简整理：$\frac{ac}{f(c)}+\frac{b(1-c)}{1-f(c)}=a+b$

$\therefore\frac{a}{(a+b)f(c)}c+\frac{b}{(a+b)(1-f(c))}(1-c)=1$

解得：$\mathbf{f(c)=c}$ **（1）**

猜得：$\frac{a}{(a+b)f(c)}$=1，解得$f(c)=\frac{a}{a+b}$ **（2）**，

再验证 **（1）（2）** 舍取

选用介值定理进行判断 **（2）** 的舍取

$\because f(c)=\frac{a}{a+b}$ 易得$0<f(c)=\frac{a}{a+b}<1$

$\therefore 0<f(c)=\frac{a}{a+b}<1 \ \leftrightarrow \ f(0)<f(c)=\frac{a}{a+b}<f(1)$

由介值定理可得存在 $c\in(0，1)$使得$f(c)=c$

$\therefore$(2)取

$f(c)=c$ $(\mathbf{1})$舍去，此处不证明啦（使用介值定理或零点定理证明不存 c 即可）

$\therefore f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{a}{c(a+b)}$

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{1-\frac{a}{a+b}}{1-c}=\frac{b}{(1-c)(a+b)}$$

$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a\cdot\frac{c(a+b)}{a}+b\frac{(1-c)(a+b)}{b}=ac+bc+a+b-ac-bc=a+b$

证毕.

**19**.(达布定理)设函数$f(x)$在[a,b]上可导，证明

（1）若$f'(a)f'(b)<0$,则必存在$\xi\in$（$a,b$）,使得$f'(\xi)=0$

（2）若常数 c 介于任意$f'(a),f'(b)$之间，则必存在$\eta\in$ （$a,b$）,使得$f'(\eta)=c$

证明: （1）不妨设$f'(a)>0,f'(b)<0$

由导数定义:$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$

由极限局部保号性：$f(x)-f(a)>0$

同理：$f(x)-f(b)>0$

即$f(x)>f(a)$，$f(x)>f(b)$

$\therefore f(a)$，$f(b)$均不是$f(x)$最大值

又$\because$ $f(x)$在[a,b]可导，$\therefore f(x)$在[a,b]上连续

$\therefore$由闭区间连续函数的性质可知：$f(x)$必在（$a$，$b$）内取到最大值

故存在一点$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)$为最大值，即$f'(\xi)=0$

（2）不妨令$F(x)=f(x)-cx$，$f'(a)<c<f'(b)$

则$F'(a)=f'(a)-c<0$. $F'(b)=f'(b)-c>0$.

由导数定义：$F'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}<0$,局部保号性得$F(x)>F(a)$，同理$F(x)>F(b)$

$\because F(x)=f(x)-cx$，$\therefore F(x)$在$[a,b]$连续

又$\because F(a)$，$F(b)$均不是最大值

$\therefore F(x)$必在$(a,b)$内取得最大值

故存在一点$\eta\in(a,b)$,使得$F(\eta)$为最大值，即$F'(\eta)=0$

$\therefore f'(\eta)=c$

证毕

达布定理也叫导数的介值定理，不可用零点定理证明，因为其导函数连续性未知，使用零点定理就默认其导函数连续，这就错了.

**20.** （广义罗尔中值定理）设(a,b)为有限或无穷区间，f(x)在(a,b)内可导，且满足

$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$,证明：存在$\xi\in(a,b)$,使得$f'(\xi)=0$

证明：（1）当$(a,b)$为有限区间时， (后续证明需要使用闭区间连续函数性质)

补充定义：

$$\begin{cases} \boxed{f(x) \quad x\in(a,b)} \\ \\ \end{cases}$$

$F(x)=$

$\boxed{A \quad x=a,b}$

$\because$ $F(a)=F(b)=A$，且$F(x)$在$[a,b]$上连续

由罗尔定理可知：存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$F'(x)$=0

即$f'(\xi)=0$

(2)当$(a,b)$为无穷区间时，即（-∞，+∞）

不妨设$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

在开区间内不适用罗尔定理，故通过一系列方法转化为有限区间，必要时可仿照(1)进行补充定义。

令$x=\varphi(t)=\log\frac{1+t}{1-t}\quad t\in(-1,+1)$　(构造一个无底数对数)

则$\lim\limits_{t\to-1^+}\varphi(t)=-\infty$，$\lim\limits_{t\to1^-}\varphi(t)=+\infty$

再令$g(t)=f(\varphi(t))\ \ t\in(-1,+1)$

则$\lim\limits_{t\to-1^+} g(t)=\lim\limits_{t\to+1^-} g(t)=A$

补充定义：$g(-1)=g(1)=A$

$\therefore g(t)$在[-1,+1]上为连续函数

又$\because g(-1)=g(1)=A$

$\therefore$由罗尔定理可知：存在一点$\xi\in(-1,+1)$，使得$g'(\xi)$=0

$\because g'(t)=f'\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$，　又$\because x=\varphi(t)$

$\therefore g'(t)=f'(x)\frac{dx}{dt}=f'(x)\frac{1}{1-t^2}$

即$g'(\xi)=f'(\xi)\ \frac{1}{1-\xi^2}$=0

故$f'(\xi)=0$

证毕

补充:

$a$为有限实数,$b$为无穷;$a$为无穷，$b$为有限实数这两种情况就请同学们查阅资料进行证明