复习题 2（题 9 - 14）.

9. $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}[3x^2+2x\lim\limits_{x\to1}f(x)]$.

$= 3+2\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

显然可以解得：$\lim\limits_{x\to1}f(x)=-3$.

代回原式即得：$f(x)=3x^2-6x$.

10. (1) 显然，$3x$ 和 $\sqrt{ax^2+bx+1}$ 是同阶无穷大量

$\Rightarrow a=9$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-b-\frac{1}{x}}{3+\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}} = 2$.

$\Rightarrow b=-12$.

(2) x^2+ax+b 和 $x-1$ 是同阶无穷小.

$\begin{cases} \text{当 } x\to1,\ x^2+ax+b\to 1+a+b\to0. \\ \text{再洛必达：} 2x+a\big|_{x=1}=5. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$.

11. (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$.

$\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x^2}}$.

$= \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{f(x)}{x^2}}$.

$= e^2$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x^2}-1}{1-\cos x}$.

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}}{\sqrt{1+f(x)\sin x^2}+1} = 3$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}f(x)=3$.

12. (1) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\dfrac{1}{x+1}=1$.

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\dfrac{1}{x+1}=-1$.

$x=0$ 为第Ⅰ类间断点，中的跳跃间断点，

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

而 $f(1)=0$，$x=1$ 为第Ⅰ类间断点，
同理，$x=-1$ 为第Ⅰ类间断点，
} 可去间断点.

(2). 当 $x=k\pi$ 时, $\sin x=0$.

$\lim\limits_{x\to 2k\pi^+} f(x)=1$,

$\lim\limits_{x\to 2k\pi^-} f(x)=-1$.

$x=2k\pi$ 为第一类间断点.
同理 $x=(2k+1)\pi$ 为第一类间断点 } 跳跃间断点.

(13) 反证法: 假设 $f(x)$ 在R上无界.

① $f(x)$ 在 $x=x_0$ 时, 有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.
则 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点,
不满足连续条件.

② $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时, 有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.
则 $f(x)$ 不满足周期条件.

故 $f(x)$ 有界.

(14) 把分段点找到 令其左右相等即可.

① 当 $|x|<1$ 时, $\lim\limits_{x\to\infty}|x^n|=0$.

$f(x)=ax^2+bx$.

② 当 $|x|=1$ 时, ~~lim~~ $f(x)=a+b|x|$.

③ 当 $|x|>1$ 时, $f(x)=\frac{1}{x}$.

即 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x<-1.\\ a-b, & x=-1.\\ ax^2+bx, & -1<x<1\\ a+b., & x=1.\\ \frac{1}{x}, & x>1.\end{cases}$

随便取分段点,左右极限相等联立方程

这里取 -1 和 1.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=f(-1).\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1).\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a-b=-1\\ a+b=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=1.\end{cases}$