**第2章复习题**

1. 证明：反证法：

假设收敛

因为：****** 又{}收敛

则收敛，与发散矛盾

则假设不成立 ，即发散

不一定发散，如：=0， =n ，

1. 不能，如：=n，=-n，+=0，收敛

=（-1），=（-1），=1，收敛

1. 不能，如：，=n，=0

但不收敛

所以不存在

1. 不能，如：=2（n为奇），0（n为偶）

=0（n为奇），2（n为偶）

=0，但和都不存在

**5.**

（1）



则由夹逼定理知：=1

1. 令max{A,B,C,D}=a 则：





又（）=a，所以=max{A,B,C,D}

**6**

(1)证明：单调性：∵0<a1<1

由数学归纳法知an>0

则an+1-an=-a n2<0

∴0<an+1<an

则｛an｝单调递减

有界性：∵an>0

∴｛an｝收敛

令=a,则==

∴ a=a(1-a)

∴a=0

则=0

(2)证明：单调性：a1=,a2=,则a2>a1

设ak+1>,则ak+2=>=ak+1

由数学归纳法知，｛an｝单调递增

有界性：n=1, a1=<3

假设n=k,<3

则n=k+1时，ak+1=<3成立

∴an<3

∴｛an｝收敛

令=a，则=

a=

有极限的保号性知a=3

则=3

**7**、求下列数列极限

解：原式==

解：原式==

解：原式==1

解：原式=

=

=

=0

解：原式==

=

==

= =

(6)

解：令= 由于有

则

即

因为

**8、**求下列函数极限

（1）解：原式==

（2）解：原式====

(3)解：当m=n时，原式=1

当m>n时，原式===0

当m<n时，原式=+∞

(4)解：原式==+=+=4

(5)解：令t=1-x,则当x→1时，t→0

原式===

(6)解：原式=-=-1=1

**9**

解：=+2x]=3+2

可以解得=-3

代入原式得=3-6x

**10**

1. 解：显然3x和是同阶无穷大量

∴a=9

=2

∴b=-12

1. 解：+ax+b和x-1是同阶无穷小

当

再洛必达

**11**.⑴解：因为=

则=2

所以===

⑵解：因为1（x）

所以===3

即=3

**12**.⑴解：

X=0为第一类间断点中的跳跃间断点

而，x=1为第一类间断点中的可去间断点

同理，x= -1为第一类间断点中的可去间断点

⑵解：当x=

X=2k为第一类间断点中的跳跃间断点

同理，X=（2k+1）为第一类间断点中的跳跃间断点

**13**.证：反证法：假设f（x）在R上无界

①f（x）在x=时，有

则x=是f（x）的无穷间断点

不满足连续条件

②f（x）在时，有

则f（x）不满足周期条件

故f（x）有界

**14**.把分段点找到，令其左右相等即可

①当|x|<1时，

f（x）=

②当|x|=1时，f（x）=a+b|x|

③当|x|>1时，f（x）=

a-b ,x= -1

即f（x）=

a+b，x=1

任意取分段点左右极限相等，联立方程

这里取-1和1

则解得：

**15.**

证：因为，令y=

原式=

两边同时取极限：

又因为，

所以

则f（x）连续

***16.***

*设在上连续，且满足,.证明上为常值函数.*

*证明： ∵*

*∴= =……=*

*∵ →时，=1*

*∴当= =……= ==*

*∴为常值函数*

***17.***

*设在[a,b]上有定义，满足a≤≤b，∈[a,b]，假设存在常数L∈[0.1),使得任意, ∈[a,b],≤L.*

*试证明：（1在[a,b]上连续。*

*（2）存在唯一∈[a,b]，使得=*

*（3）对于任意的[a,b]，定义迭代序列=,n=1,2,3……=*

*证明：*

*（1）∵≤L，不妨令∈[a,b]*

*∴L→0*

*又∵≥0，≤=0*

*∴，∴*

*故连续.*

*(2) 根据题意设*

*∵a≤≤b，所以*

*并且F（a）F(b)≤0，由零点存在定理：必存在唯一∈[a,b]，使得F（）=0，*

*∴= （*

*（3）由题意：≤L*

*由（2）：= ，∴≤L*

*∴≤L，设数列存在且为A，则有=A*

*∴当n→∞时，≤L，又因为L≠1，则A=*

*故假设成立，=A=*

*证毕.*

***18****.*

*函数在[0,1]上连续，，证明：对于任意的自然数n≥2，存在，使得= .*

*证：令∵在∈[0,1]上连续，∴∈[0,1]*

*∴上连续，即在上连续*

*∵函数连续，∴由连续函数性质：存在满足*

*令1，2，3……n-1（注意自变量范围），*

*∴*

将个式子相加，得≤≤

*…….*

*…….*

*…….*

*∴m≤≤M，由介值定理，存在∈[0,1]，使得=*

*展开：*

*=++*……+

*=++*……+

∴，=0，即=0，

∴*= .*

*证毕.*

**19**.

对于任意的,函数满足,且在处连续，证明为常值函数

证明: ∵

∴= *=……=*

*当n→∞时 ，=0*

∴= *=……= ==*

*∵*在处连续，∴*存在*

*故= 恒为常数.*

**20**.

对于任意的，总有,且=0. 问：极限是否存在，给出理由.

解：，理由如下

∵=0不等价于极限存在，

∴不满足夹逼准则，

反例如：，