**复习题4**

**1**证明：∵在上不恒为常数

则存在使

设

由拉格朗日中值定理得

 ∃ξ∈(a,c),η∈(c,b)

f’(ξ)=>0,f’(η)=<0证毕

**2**证明：设将区间[x,y]n等分，有

|f(y)-f(x)|=|

≤

≤=

当n→∞时，右边会无限趋向于0

∴f(x)-f(y)=0.f(x)在(-∞,+ ∞)内为常数

**3**证明：设F(x)=

∴F’(x)=

由拉格朗日中值定理得

 ∃ξ∈=f’(ξ)

∴f(x)=xf’(ξ)

∴F’(x)=

∴严格单调增加

**4**证明：===A

∵A是常数

**5**

1. 证明：设f(x)=,0<x<

∴f’(x)=

设g(x)=x- g’(x)=1->0

∴g(x)>g(0)=0 ∴f’(x)>0 ∴<

1. 证明：设f(x)=-x-1(x ≠0)

∴f’(x)=-1

∴-1<0

在-1>0

∴>1+x

1. 证明：设f(x)=x- g(x)=-x+

∴f’(x)=1-得f(x)在[0, + ∞]上单增

∴f(x)>f(0)=0 ∴x>

g’(x)=-1+=2[()2-]

当∈[0, π]时，()2>

当≥π时，()2≥>1≥

∴g’(x)>0 g(x)在[0, + ∞]上单增

g(x)>g(0)=0 ∴>x-

∴x-<<x,x>0

1. 证明：对不等式取对数得

x<1<(x+1)

设1+=y (y>1)

∴1-<<y-1

设f(y)=+-1

∴f’(y)=-=>0

∴f(y)>f(1)=0 ∴>1-

设g(y)=-y+1

=-1<0

∴ ∴<

∴1-<<y-1

∴<e<

1. 证明：设f(x)= 0<x<

∴f’(x)=

设g(x)=x- g’(x)=1->0

∴ ∴ ∴<

<

1. 证明：设 ∴f(0)=0

f’(x)=+2-2x f’(0)=0

f’’(x)=[-x] f’’(0)=0

f’’’(x)=-<0

∴

<

1. 由题意可知 

由泰勒展开得 

因为

所以



由洛必达法则得

1. 证：

因为 

所以下证：①

不妨设

将①转化为



因为

故由拉格朗日中值定理可得





因为

故

所以



即原证明式成立

1. 证：

因为

所以

由零点存在性定理可得，

















1. 





原式===

1. 已知



故原式=

=

因为 

故 

**11**.由泰勒展开式可知：

0=

=

=

则

**12.**f(x)=f(a)+f’(a)(x-a)+

结合已知：+

则有即=3

代入所求极限，

因为

所以

故

**13.**⑴任取一个，若中使其成立

即f(，由于f(均为固定值

所以即f’(x)单调

所以，唯一成立

⑵

又因为

两边同除以

故

**14.**设时

当m<n时，因为

所以

令①+②+③，

因为

所以||<

当n<m时，同理可得||<

故f(x)极值差小于

所以|f（

**15**.由中值定理得：

则

此时由介值定理得：

又因为

所以f(x)为单增函数

即在(0，+上存在唯一ξ使得f(ξ)=0

**16**．设在内可导，并且，证明在内最多存在一个零点.（此题原为证明有且仅有一个零点，但无法证明，故进行改动）

证明： ∵

∵可分为两种情况：（1）＜0 ；（2）

不妨取（1）进行证明.

根据

∴

∴在单调递减

进行分类讨论

1. *＜0*

*由单调函数零点存在定理，存在一个点c∈使得F(c)=0,即*

*(2) ＞0*

*并且F(x)单调递减，∴不存在点c使得，即不存在点c使得*

*(3) =0*

*∴存在一点c使得F(c)=0，即*

*综上：最多存在一个点c使得*

*同理证得（2）情况*

*∴*证明在内最多存在一个零点.

***17****.设函数在[0,1]上连续，在(0,1)可导，且=1，*

*证明：（1）存在,使得=η；*

*（2）对于任意实数λ，必存在使得=1；*

*证明：*

1. *构造函数，*

*易知F（x）在[0,1]上连续，在(0,1)可导*

*＜0，∴由零点存在定理必存在一点η,使得*

*即=0，也就是=*

1. *构造函数,易知H(x) 在[0,1]上连续，在(0,1)可导*

*∴= ,*

*又∵*

*由罗尔定理得：必存在一点ξ∈(0, 使得=0*

*∴=0*

*∴=0*

*即=1*

*证毕*

***18.****设函数在[0,1]上连续，（0，1）内可导，且.证明：对任意的正数在区间内存在不同的ξ，η，使得+.*

*证：取一点c∈，∵在[0,1]上连续，（0，1）内可导*

*∴由拉格朗日中值定理可得：必存在一点ξ∈（0，c），使得*

*同理：必存在一点η∈（c，1），使得*

*由于ξ ，η分别处于不同区间，∴在区间内存在不同的ξ，η*

*将，带入待证等式+*

*化简整理：*

*∴*

*解得：****（1）***

*猜得： =1, 解得* ***（2）****，*

*再验证****（1）（2）****舍取*

*选用介值定理进行判断****（2）****的舍取*

*∵ 易得*

*∴*

*由介值定理可得存在c∈使得*

***∴(2)****取*

*舍去，此处不证明啦（使用介值定理或零点定理证明不存c即可)*

*∴*

*+*

*证毕.*

***19****.(达布定理)设函数在[a,b]上可导，证明*

*（1）若,则必存在ξ∈,使得*

*（2）若常数c介于任意之间，则必存在,使得*

*证明: （1）不妨设*

*由导数定义*

*由极限局部保号性：*

*同理：*

*即，*

*∴*

*又∵ 在[a,b]可导，∴在[a,b]上连续*

*∴由闭区间连续函数的性质可知：必在内取到最大值*

*故存在一点使得为最大值，即*

*（2）不妨令，*

*则. .*

*由导数定义：,局部保号性得，同理*

*∵，∴在连续*

*又∵均不是最大值*

*∴必在内取得最大值*

*故存在一点使得为最大值，即*

*∴*

*证毕*

*达布定理也叫导数的介值定理，不可用零点定理证明，因为其导函数连续性未知，使用零点定理就默认其导函数连续，这就错了.*

***20.****（广义罗尔中值定理）设(a,b)为有限或无穷区间，f(x)在(a,b)内可导，且满足,证明：存在使得*

*证明：（1）当为有限区间时， (后续证明需要使用闭区间连续函数性质)*

*补充定义:*

*=*

*∵ = ，且连续*

*由罗尔定理可知：存在一点ξ∈，使得=0*

*即*

*(2)当为无穷区间时，即（-∞，+∞）*

*不妨设*

*在开区间内不适用罗尔定理，故通过一系列方法转化为有限区间，必要时可仿照(1)进行补充定义。*

*令(构造一个无底数对数)*

*则= ，=*

*再令*

*则*

*补充定义：= =A*

*∴在[-1,+1]上为连续函数*

*又∵= =A*

*∴由罗尔定理可知：存在一点ξ∈，使得=0*

*∵= 又∵*

*∴=*

*即=0*

*故*

*证毕*

*补充:*