

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Физический факультет

Кафедра физики колебаний

Курсовая работа

**Нетрадиционный подход к решению уравнения
Кристоффеля в задачах объёмной
кристаллоакустики**

Выполнила студент 422 группы Чекалина В.А.

Научный руководитель Трушин А.С.

Москва, 2012

Содержание

1	Введение	1
2	Традиционный способ расчета	2
3	Новый способ расчета	5
4	Расчет поля в кристалле, генерируемого преобразователем	9
5	Выводы	14

1 Введение

Акустооптика - наука, изучающая взаимодействие звука и света. В его основе лежит эффект фотоупругости - изменение диэлектрической проницаемости среды под действием механической деформации. В случае акустооптического эффекта деформация создается акустической волной. Области "сжатия" и "растяжения" материала воспринимаются световым лучом как фазовая дифракционная решетка. Это явление так же можно рассматривать как рассеяние фотонов на фононах [1] .

На акустооптическом (АО) эффекте основана работа приборов, выполняющих различные функции: выделение сигнала с определенной длиной волны (АО - фильтр), отклонение светового пучка, применяемое для формирования изображения в лазерном телевидении (АО - дефлекторы), временные и пространственные модуляторы. Приборы такого типа обладают неоспоримыми преимуществами: малые размеры, отсутствие движущихся механических частей, возможность электронной перестройки параметров, относительно небольшие управляющие напряжения и мощности [2].

Чтобы разрабатывать акустооптические приборы и улучшать их характеристики, необходимо хорошее понимание физических принципов возбуждения акустического пучка, законов его распространения и отражения от границы кристалла. Следует отметить, что наряду с классическими объёмными акустическими волнами всё больший интерес вызывают волны Релея - поверхностные акустические волны [3],[4]. Это волны, распространяющиеся на большие расстояния вдоль границы раздела и экспоненциально убывающие при удалении от неё. Поэтому при решении актуальных задач акустооптики возникает как проблема нахождения плоских волн по заданной проекции волнового вектора, так

и необходимость учета неоднородных волн. Методы решения этих задач разработаны в рамках теории поверхностных волн [4]. Данная работа посвящена использованию этих методов для решения задач объёмной кристаллоакустики.

2 Традиционный способ расчета

Параметры акустической волны, возбуждаемой в анизотропном кристалле пьезопреобразователем, зависят от упругих свойств твёрдого тела. Теория волн в анизотропных средах строится следующим образом. Определим тензор напряжения как

$$T_{ij} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A_j}, \quad (1)$$

где A_j - элемент поверхности, F_i - i -тая компоненте силы, действующая на данный элемент, и тензор деформации

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2)$$

где функцией $\vec{u}(x, y, z, t)$ задаётся малое смещение элемента объёма тела. Полагается, что сила, действующая на элементарный объем тела со стороны соседних частей, действует только через поверхность выделенного объема. Это утверждение справедливо, когда деформирование тела не приводит к появлению макроскопических электромагнитных полей [5], что верно для рассматриваемых сред. По закону Гука при малых деформациях напряжение пропорционально деформации.

$$T_{ij} = c_{ijkl} \cdot S_{kl} \quad (3)$$

Закон Ньютона для малого объема тела, подвергнутого деформации, может быть записан как:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{i,j}}{\partial x_j}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (4)$$

где ρ - плотность среды. Подстановка выражений (2) и (3) в (4) даёт:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (5)$$

где c_{ijkl} - коэффициенты тензора упругости, который определяет упругие свойства анизотропного тела. Это тензор четвертого ранга, который

в общем случае должен иметь 81 независимую компоненту. Из свойств термодинамических потенциалов деформированного твёрдого тела следует симметрия тензора по индексам:

$$c_{ijkl} = c_{jikl}, c_{ijkl} = c_{ijlk} \quad (6)$$

а также эквивалентность компонент:

$$c_{ijkl} = c_{klij} \quad (7)$$

что сокращает число независимых компонент до 21. Если учесть возможную внутреннюю симметрию кристалла, независимых компонент станет еще меньше [6][7]. В исследуемом кристалле парателлурита, обладающем тетрагональной симметрией, оно равно 6. Возьмём пробное решение уравнения (3) в виде:

$$\vec{u} = u_0 \vec{q} \exp [iK(\vec{n}\vec{x} - vt)] \quad (8)$$

Здесь U_0 - амплитуда волны, \vec{q} - вектор поляризации, K - волновое число, \vec{n} - вектор волновой нормали, v - фазовая скорость. При подстановке решения (6) в уравнение (3) получим систему линейных однородных уравнений:

$$(\Gamma_{il} - \delta_{il}\gamma)q_l = 0, \quad l = 1, 2, 3 \quad (9)$$

где δ_{il} - символ Кронекера, $\gamma = \rho v^2$, Γ - тензор Кристоффеля, компоненты которого определяются выражением

$$\Gamma_{il} = c_{ijkl}n_j n_k. \quad (10)$$

Для того, чтобы существовали нетривиальные решения системы (7) необходимо, чтобы определитель матрицы системы был равен 0. Таким образом получаем кубическое относительно γ уравнение. Разрешая его как кубическое относительно v^2 , получим скорости 3-х мод, распространяющихся в анизотропной среде; поляризации q_l будут являться собственными векторами системы (7).

Расчёт традиционным методом проводился для кристалла парателлурита с плотностью $\rho = 5,96 \cdot 10^3 / \text{м}^3$ и упругими постоянными $c_{11} = 5.6$; $c_{12} = 5.145$; $c_{13} = 2.2$; $c_{33} = 10.6$; $c_{66} = 6.6$ и $c_{44} = 2.65$. Были получены три поляризации, соответствующие продольной и двум поперечным волнам, и для каждой из волн вычислена скорость распространения в зависимости от ориентации вектора волновой нормали \vec{n} . Эти данные

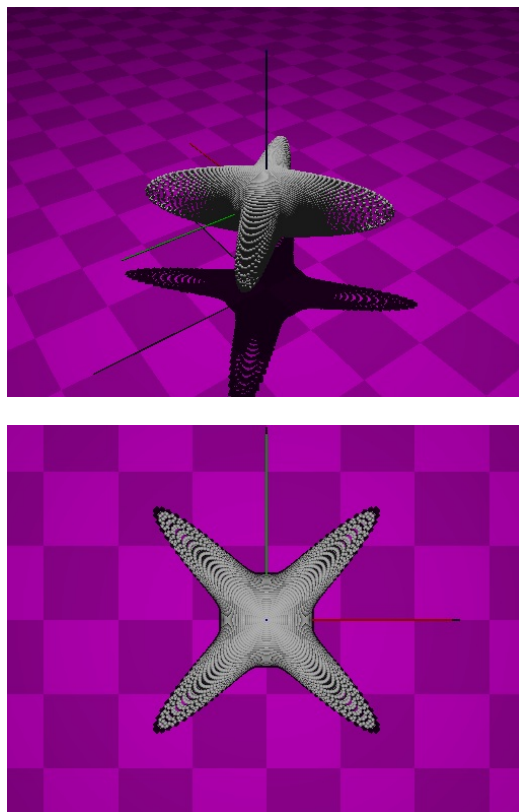


Рис. 1. Поверхность медленности

позволили построить в пространстве поверхность медленности. Для этого вдоль каждого направления волновой нормали откладывалась величина, обратной скорости. Результаты расчётов приведены на рис.1. Сечение поверхности медленности плоскостью XY совпало с аналитически рассчитанным ранее [10] и наблюдаемым в эксперименте рис.2

Традиционный подход имеет ряд неоспоримых преимуществ. Этот метод используется в кристаллоакустике довольно давно [8], за это время зарекомендовал себя как проверенный и надёжный; с его помощью были получены важные для акустооптики результаты. Нельзя не упомянуть относительную простоту подхода: численное решение можно реализовать встроенными функциями компьютерной алгебры (в пакете Matlab команда `eigenvalues` рассчитывает собственные значения заданной матрицы). В ряде случаев (например, когда волна распространяется вдоль оси Z) возможно аналитическое решение. 4

Недостатки традиционного способа следуют из ограниченности круга разрешаемых задач. Его использование для решения задач с заданными граничными условиями приводит к громоздким и неэффективным чис-

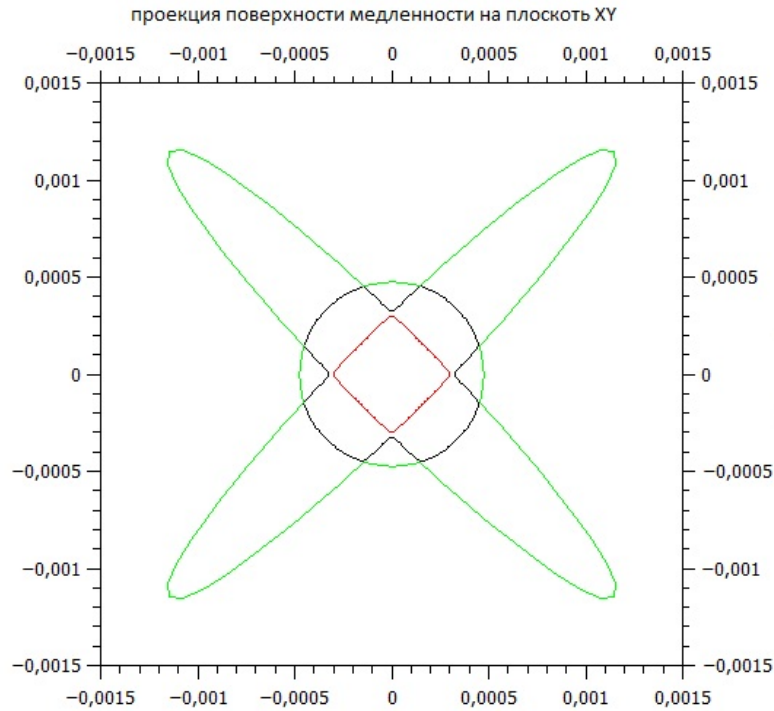


Рис. 2. Сечение поверхности медленности плоскостью XY .

ленным схемам. Колебания с затухающей в одном из направлений амплитудой подразумевают существование мнимой части решения, а собственные значения матрицы Кристоффеля всегда действительны и положительны. Поэтому, эффективно рассчитывая параметры однородных объемных волн, метод не дает возможности описывать неоднородные волны, учёт которых необходим при решении таких задач, как задача отражения от границы раздела или генерация пучка пьезопреобразователем.

3 Новый способ расчета

Новый способ расчета основан на статье Фарнелла 1970 г.[4] В этой работе рассматривалось распространение поверхностных волн на границе кристалла, занимающего полупространство. Поверхность тела полагалась свободной. Заданными считались фазовая скорость v и компоненты вектора волновой нормали n_1 , n_2 , необходимо было найти n_3 . В том, что для расчёта объёмных волн мы будем применять метод, описанный в статье о поверхностных волнах, нет никакого противоречия. Данный подход позволяет найти все возможные волны, имеющие заданную $K_{||}$. Среди

множества решений можно отобрать либо комплексные, как это сделал Фарнелл, соответствующие волнам, затухающим вглубь кристалла, либо чисто действительные, соответствующие обыкновенным объёмным. **здесь ыко говорит само с собой, а не с читателем. Может быть, об этом стоит сказать чуть позже, когда уже больше рассказали про Фарнела?**

В работе Фарнелла предполагалось, что решение является линейной комбинацией членов следующего вида:

$$\vec{U}_i = \vec{A}_i \vec{q}_i \exp[ikn_3x_3] \cdot \exp[ik(n_1x_1 + n_2x_2 - vt)], \quad (11)$$

где kn_1 и kn_2 - проекции волнового вектора на плоскость XY, A_i - амплитуда рассматриваемой волны. Из (11) следует, что при движении в отрицательном направлении оси Z амплитуда волны экспоненциально убывает. Полагая n_3 комплексным, выражение (11) можно записать в виде :

$$\vec{u} = u_0 \vec{q} \exp[-ik(vt - \vec{n}\vec{x})] \quad (12)$$

Учитывая известные соотношения

$$\frac{k}{\omega} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{T}{2\pi} = \frac{1}{v} = s \quad (13)$$

(12) можно представить как:

$$\vec{u} = u_0 \vec{q} \exp[-iK(vt - \vec{n}\vec{x})] = u_0 \vec{q} \exp[-i(\omega t - \vec{k}\vec{x})] = u_0 \vec{q} \exp[-i\omega(t - \vec{s}\vec{x})] \quad (14)$$

При подстановке (11) в (3) получаем характеристическое уравнение:

$$\det(\Gamma' - \rho\delta_{ik}) = 0 \quad (15)$$

где $\Gamma' = c_{ijkl}s_js_l$

Это выражение является уравнением 6-ой степени относительно S_3 . Решение даст 3 пары корней, одинаковых с точностью до знака для действительных корней и комплексно-сопряжённых для комплексных. Чтобы понять, почему так происходит, нужно качественно представить способ решения 1-го и 2-го метода. **Ну... В принципе, ты права. Но читать очень тяжело. Нужно подумать, как уберечь мозг читателя от выкипания. Ландавщиц в юбке ;)**

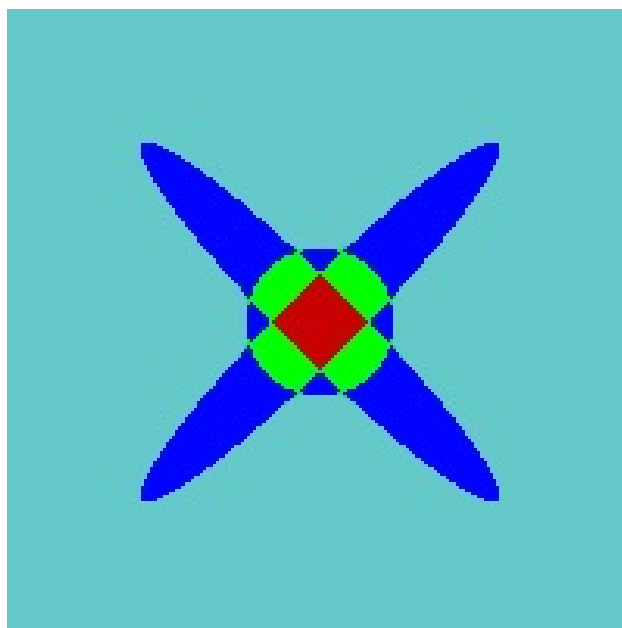
В традиционном случае мы находили медленность, считая известным направление распространения волны. Из начала координат проводился вектор, пересечение которого с поверхностью медленности давало искомый корень.

Во втором методе мы искали медленность в зависимости от проекции волнового вектора. В трёхмерном представлении это выглядит следующим образом: в плоскости XY дан вектор определённого направления и длины, из его конца восстанавливается перпендикуляр. Место, где перпендикуляр пересечёт поверхность медленности, является корнем. Так как перпендикуляр можно провести в обе стороны от плоскости, метод даёт 2 решения - положительное и отрицательное.

Данная задача была решена численно. Задавалась область изменения S_x, S_y и шаг, с которым S пробегает возможные значения. Для каждой точки (S_x, S_y) находилось 6 корней характеристического уравнения. Выбирая из них только положительные (или только отрицательные) из соображений физического смысла **лучше раскрыть, что за соображения использовались**, получаем характеристики 3-х волн, соответствующие заданной проекции вектора медленности.

Описанным способом была рассчитана поверхность медленности для кристалла TeO_2 ; полученные результаты совпали с результатами, достигнутыми традиционным методом, что даёт возможность говорить о безошибочности метода.

Стоит заметить, что не для каждого S_x, S_y все решения действительны. **Этот кусок логически сильно связан с тем, где ты Ландавшиц. Нужно подумать, как эту связь отразить в структуре текста.** На рис 4 приведена карта количества действительных корней уравнения в зависимости от S_x, S_y .



Дооформить рисунок. Подрисовать оси с обозначением величин по осям и шкалами значений величин. Подпись к рисунку, номер... На рисунке красным отмечена область, где все три пары решений - действительные, зелёным - зона с 2-мя парами действительных решений, синим - с одним; серым цветом обозначены такие S_x, S_y , для которых уравнение не имеет действительных корней. Легко заметить, что карта схожа с сечением поверхности медленности плоскостью XY. Там, где плоскость пересекает поверхность медленности одной из мод объемных волн, появляется действительная пара корней. **Появляется пара действительных корней - когда идём в какую сторону? Вместо чего появляется?** В центре, где существуют все три моды, мнимых корней не будет совсем. На рис. 5, 6 представлены графики величин действительных и мнимых частей комплексных решений характеристического уравнения в зависимости от S_x, S_y (розовым отмечена действительная часть, желтым - мнимая).

График для одной из мод:

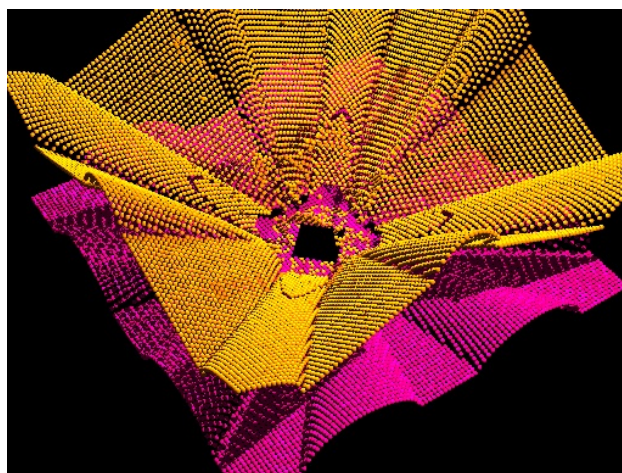
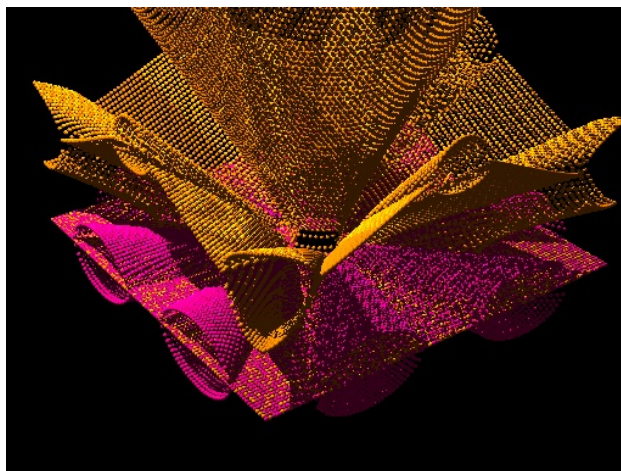


График для 3-х мод:



Дооформить графики. Какие величины по осям, шкалы значений. Подписи к рисункам, автоматические номера, ссылки на рисунки без хардкода

Видно, что в области пространства, где существуют все 3 моды объёмной волны, то есть все корни характеристического уравнения чисто действительные, комплексные решения отсутствуют.

Учитывая направление развития кристаллоакустики, описанный метод довольно продуктивен. Он позволяет шире взглянуть на проблему расчёта параметров волн в акустооптических кристаллах, не ограничиваясь их определённым типом. В частности, новый подход даёт возможность описывать неоднородные волны и более полно решать задачу об отражении от границы кристалла. Помимо этого, рассмотренный метод позволяет построить эффективный алгоритм нахождения волн по заданной проекции волнового вектора или вектора медленности.

К недостаткам метода можно отнести существенную относительно традиционного способа сложность реализации, а также невозможность аналитического решения векового уравнения. **слово “вековое” - в первый раз. Лучше не прыгать по терминологии, писать как писали раньше.**

4 Расчет поля в кристалле, генерируемого преобразователем

Рассмотрим кристалл, на границу которого прикреплен пьезопреобразователь произвольной формы и конечных размеров. **Неплохо было бы более развёрнуто поставить задачу. Нарисовать картинку - кристалл, система координат, преобразователь. Рассказать о том,**

какие величины мы полагаем заданными - профиль силы и т.д. Для вычисления поля, возбуждаемого в кристалле, в силу принципа обратимости **Не, у нас не термодинамика и стрела времени нам не нужна. Надо поговорить и подумать, как тут писать.** рассмотрим волновой пучок, падающий на границу. Если поверхность полагается свободной, то для отраженной волны вектор \vec{n} удовлетворяет соотношению **А-а-а-а-а!** **Ваше ни разу не правда. Вспомни определение тензора напряжений. Что такое \vec{n} здесь? Может, лучше использовать другую букву, чтобы не путаться.:**

$$\hat{T} \cdot \vec{n} = 0. \quad (16)$$

Если к поверхности приложена сила, волна должна удовлетворять условию

$$\hat{T} \cdot \vec{n} = \vec{F}, \quad (17)$$

где $\vec{F}(x, y)$ - заданный профиль распределения силы по поверхности кристалла.

Для решения задачи представим пучок в виде бесконечного набора волн с различными k_{\parallel} **аккуратней. Каких волн? Гауссовых? Или Бесселевых?.** Учтем, что в собственной системе координат кристалла ось Z должна быть перпендикулярна грани. **“В силу особых симметричных свойств пространства ось Z всегда направлена вдоль магнитного поля”** Да нет же-ж. Это нам так удобно выбирать систему координат, чтобы формулы проще были. А так ось нам ничего не задолжала. Для перехода из лабораторной в кристаллографическую систему тензор необходимо домножить на матрицы перехода: **Какой из трёх тензоров, которые были раньше? $\hat{T}, \hat{S}, \vec{u}$? “Вектор - это тоже тензор, только маленький ещё ;)”** На самом деле, домножить нужно только на одну матрицу. А вот её можно представить в виде произведения этих вот трёх. И это только один из способов конструировать эту матрицу. Вообще говоря, рассуждения о повороте тензора достойны отдельного пункта. Там нужна картинка со старой и новой системой координат. Нужно рассказать про три возможности ошибиться - старая в новой, новая в старой, формула поворота тензора, хотим сидеть в старой системе и поворачивать картинку, или хотим заморозить картинку в системе координат и повернуть вместе с ней. Какие выборы мы сделали? Как убедились что всё работает нормально?

$$m_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$m_y = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$m_z = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

где m_x, m_y, m_z описывают повороты вокруг осей X, Y, Z соответственно.

Введем понятие композитной волны - волны, составленной из 3-х плоских волн с равными проекциями на плоскость XY волнового вектора \vec{k} . Если из группы волн ни одна не удовлетворяют граничному условию, любая их линейная комбинация также не удовлетворяет граничному условию. **Нет, нет, нет. Одна плоская волна почти никогда не удовлетворяет граничному условию. Кстати, какому из двух, которые были раньше? Учитывая это, будем рассматривать только композитные волны с определённым $k_{||}$, согласующиеся с силой на границе. Что значит “согласующимися”? Для приближения заданной силы “согласование” будет одним, для приближения заданного смещения - другим.**

Веса-коэффициенты B_p в сумме плоских волн “**в композитной волне**”? определяются из граничных условий. В собственной системе координат кристалла тензор напряжения композитной волны, полученный сложением тензоров 3-х составляющих плоских волн с учетом их веса, должен быть равен

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & f_x \\ \dots & \dots & f_y \\ \dots & \dots & f_z \end{pmatrix} \quad (21)$$

где f_x, f_y, f_z - компоненты вектора силы в обычном пространстве. **Опять ландавизмом-лифшинизмом увлекалась. В принципе да, если пять раз прочитать, да ещё и знать, что в виду имеется, можно понять, о чём ты. Сторонний человек вообще ни разу не поймёт. Представь что тебе нужно написать программу заново по твоему курсовику, а ты всё забыла. По такому описанию сможешь?**

Каждой из 3-х плоских волн соответствуют вектора смещения \vec{U} , поляризации \vec{q} , а что у тебя с пробелами и запятыми творится? ;) также тензора напряжения T_{ij} и деформации S_{ij} . Их компоненты меняются по гармоническому закону $\exp[-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})]$. **может, минус под скобку внести? Альтернативщица ;)** Чтобы получить изменения искомых величин для композитной волны, нужно сложить величины плоских волн

с найденными ранее весами B_p . Тогда распределение интересующего параметра в фурье-пространстве есть **Если про Фурье-пространство говорим, то там без экспоненты. Зато у всех величин есть зависимость от k_x, k_y :**

$$Q_r(k_x, k_y) = \sum_{k=1}^3 B_p Q_p^r \exp \left[-i(\omega t - \vec{k}_p \vec{r}) \right] \quad (22)$$

Что у тебя за индекс, по которому суммируешь? Распределение в обычном пространстве можно найти, суммируя по всем k_{\parallel} :

$$Q_r(x, y) = \int \int A(k_x, k_y) \sum_{k=1}^3 B_p Q_p^r \exp \left[-i(\omega t - \vec{k}_p \vec{r}) \right] dk_x dk_y \quad (23)$$

где $A(k_x, k_y) = \int \int f(x, y) \exp \left[i(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \right] dx dy$ - амплитуда композитной волны с заданным k_{\parallel} . Учтем, что $A(k_x, k_y) = f(k_x, k_y)$ Тогда распределение в обычном пространстве

$$Q(x, y, t) = \int \int f(k_x, k_y) \sum_{k=1}^3 B_p Q_p^r \exp \left[-i(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \right] dk_x dk_y \quad (24)$$

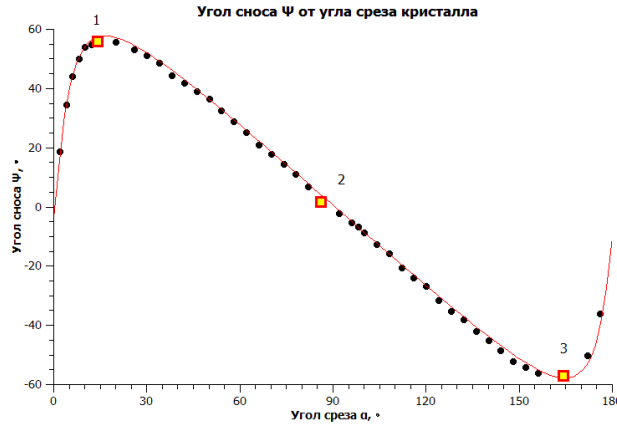


Рис. 3. Зависимость угла сноса от угла среза в случае когда кристалл находится под углом α к оси $[110]$

Ну чего, с почином. Нужно ещё описание программы. Какие величины на входе программы, какие на выходе. Картинка - блок-схема программы, которую ты на кураторском семинаре

показывала. Пафосу ещё нагнать - что же собственно, позволяет делать всё эта машинерия. Любой срез анизотропного кристалла, любой пьезопреобразователь - как форма, так и срез. Ну а дальше - результаты расчётов. То, что ты сейчас сделала - сравнила углы сноса с теорией и т.д.

Точками 1, 2 и 3 на графике отмечены углы максимального и минимального сноса. Расположение пучка в пространстве для этих точек будет выглядеть следующим образом:

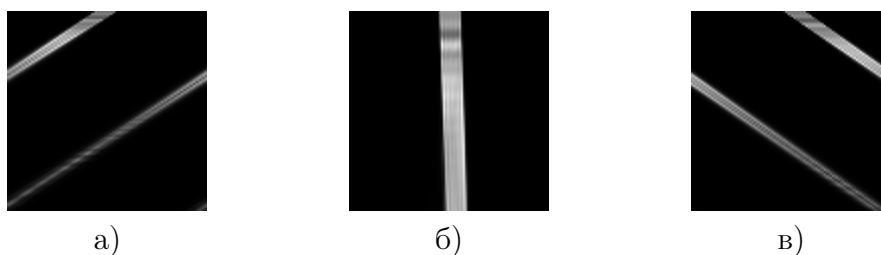


Рис. 4. Пространственное распределение интенсивности пучка

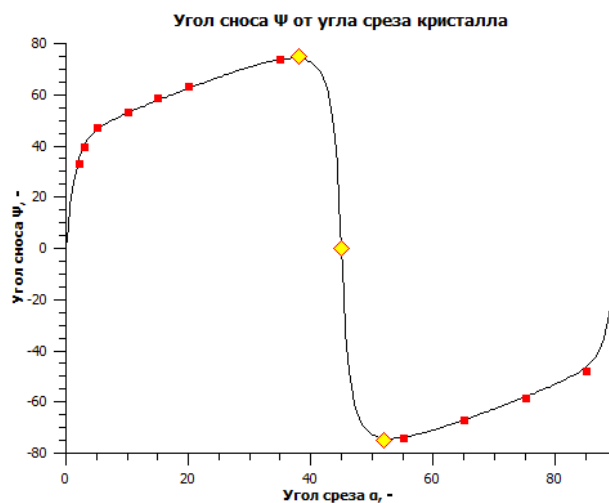


Рис. 5. Зависимость угла сноса от угла среза в случае поворота кристалла в плоскости XY

5 Выводы

В данной работе было сделано описание нового, более широкого подхода к решению актуальных задач кристаллоакустики, основанного на теории поверхностных волн.

Были проведены расчеты акустооптических величин как традиционным, так и новым способом и сравнение результатов. Для кристалла TeO_2 тем и другим методом были рассчитаны поверхности медленности для 3-х мод объёмных волн. Результаты расчётов совпали, что свидетельствует о правильности нового подхода и возможности применять теорию поверхностных волн для описания объёмных.

Для заданной плоскости новым методом была получена карта количества действительных корней и параметры мнимых решений, тогда как старый метод давал возможность получать только действительные решения. Это показывает, что нетрадиционный способ применим для решения более широких спектров задач.

Список литературы

- [1] В.И. Балакший, В.Н. Парыгин, Л.Е. Чирков "Физические основы акустооптики" М., Радио и связь, 1985
- [2] J.Xu and R.Stroud "Acousto-Optic Devices: Principles, Design, and Applications". Wiley, 1992.
- [3] K. Jeong "Interaction of Rayleigh Waves Induced by Interdigital Transducer with Fatigue Crack". 17th World Conference on Nondestructive Testing, 2008, Shanghai, China
- [4] Дж. Фарнелл "Свойства упругих поверхностных волн". Физическая акустика, 1973, под ред. У. Мэзона и Р. Терстона, пер. с англ., т. 6, М.
- [5] Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц "Теоретическая физика. В 10-ти т.". Москва, Наука, 1987
- [6] Г.В. Белокопытов "Волны в направляющих структурах". Москва, 2010
- [7] Г. Хантингтон "Упругие постоянные кристаллов". УФН 1961, Т.74, вып.2.
- [8] Jun-ichi Kushibiki "Accurate Measurement of the Acoustical Physical Constants of $LiNbO_3$ and $LiTaO_3$ Single Crystals". IEEE TRANSACTION, 1999 vol.46, n.5
- [9] H. Jeong "Interaction of Rayleigh Waves Induced by Interdigital Transducer with Fatigue Crack". 17th World Conference on Nondestructive Testing, 2008, Shanghai, China
- [10] B. A. Auld "Acoustic Fields and Waves in Solids". Malabar, FL, 1990, Vol. 1, 2nd ed.