DYNAMIQUE

Principe fondamental de la dynamique du solide.

Définition :
Dans un repère Galiléen, le torseur des actions mécaniques appliquées à un solide est égale au torseur dynamique de ce solide dans son mouvement par rapport à R0.

$$\left[F_{ext/S}\right]_A = \left[A_{(S/R0)}\right]_A$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{R}_{fext/S} \\ \overrightarrow{m_A(F_{ext/S})} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{Rd}(S/R0) \\ \vec{d}_A(S/R0) \end{Bmatrix}_A$$

Repères Galiléen approchés :
-Repère de Copernic: Origine au centre d'inertie du système solaire + trois directions stellaire "fixes".
Tout repère en translation par rapport au repère de Copernic peut être considéré comme Galiléen.
-Repère lié au centre d'inertie de la terre : Origine au centre d'inertie de la terre + les directions stellaires précédentes (repère en translation non rectiligne et non uniforme par rapport au précédent)
-Le repère terrestre : Origine locale du repère de travail. utilisation: convient en général au phénomènes mécaniques classiques. Il peut être considéré comme galiléen sur une période d'observation relativement courte.

Théorèmes Généraux.

Théorème de la résultante dynamique :

$$\vec{R}_{fext/S} = m.\vec{\Gamma}(G;S/R0)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{Fi_{ext/S}} = m.\vec{\Gamma}(G;S/R0)$$

Un solide de masse m soumis à une somme de forces de résultante $\vec{R}_{ext/S}$ subit une accélération égale au quotient de $\vec{R}_{ext/S}$ par la masse du solide.
Un solide de masse m en accélération $\vec{\Gamma}(G;S/R0)$ induit des forces égales au produit de la masse par l'accélération.

Théorème du Moment dynamique.

$$\overrightarrow{m_A(F_{ext/S})} = \vec{d}_A(S/R0)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{Fi}_{ext/S}) = \vec{d}_A(S/R0)$$

La somme des moments au point A des forces extérieures appliqués au solide S est égale au moment dynamique en A du solide dans son mouvement par rapport à R0

Théorème de la résultante cinétique :

$$\vec{R}_{fext/S} = \frac{d}{dt}\left[m\vec{V}(G;S/R0)\right]$$

Remarque : si $\vec{R}_{ext/S} = \vec{0}$ alors $\frac{d}{dt}\left[m.\vec{V}(G;S/R0)\right] = \vec{0}$ et donc $m.\vec{V}(G;S/R0)$ = constante. Il y a conservation de la quantité de mouvement.

Théorème du moment cinétique :

$$\vec{d}_A(S/R0) = \left[\frac{d}{dt}\vec{s}_A(S/R0)\right]_{R0} + \vec{V}(A/R0)\wedge m\vec{V}(G;S/R0)$$

Cas particuliers

Si A = G

$$\overrightarrow{m_G(F_{ext/S})} = \vec{d}_G(E/R0) = \left[\frac{d}{dt}\vec{s}_G(E/R0)\right]_{R0}$$

Si A fixe dans R0

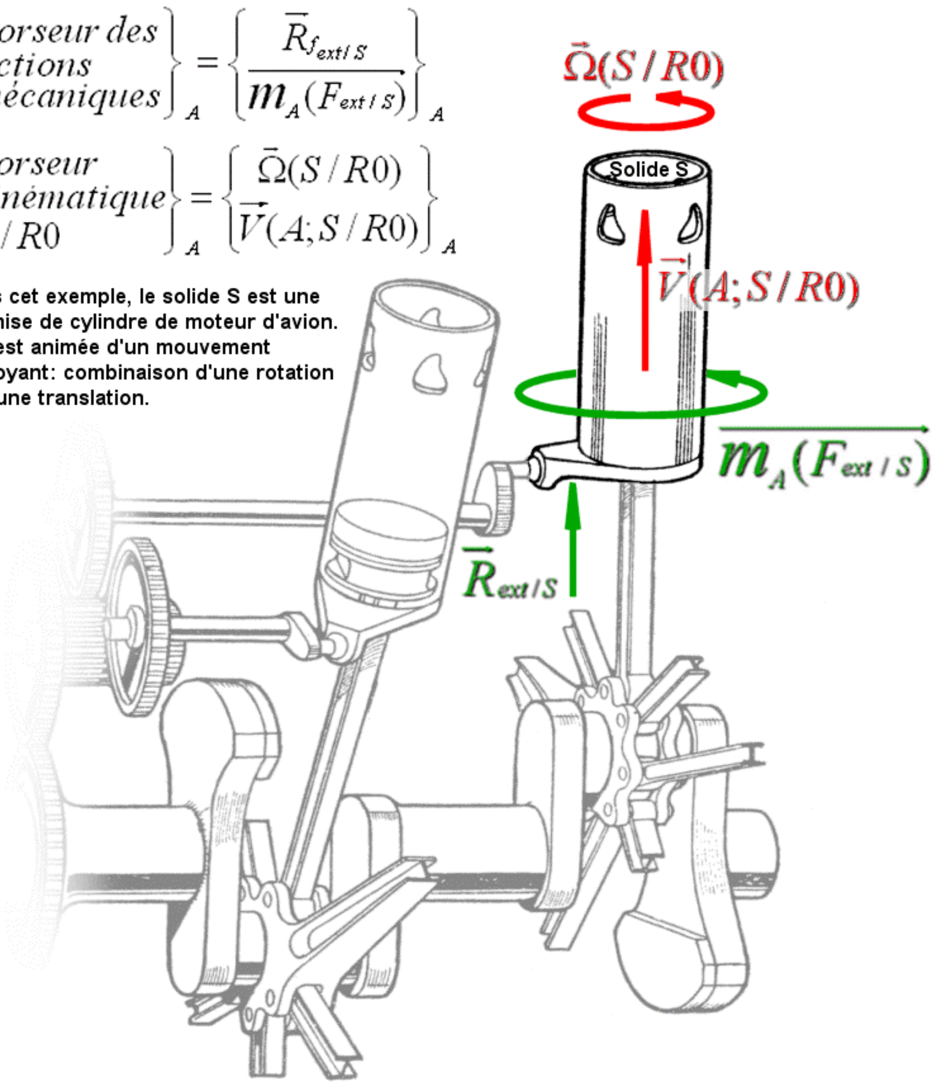
$$\overrightarrow{m_A(F_{ext/S})} = \vec{d}_A(E/R0) = \left[\frac{d}{dt}\vec{s}_A(E/R0)\right]_{R0}$$

Théorème de l'Energie-Puissance:

Puissance développée par les actions mécaniques agissant sur un solide S dans son mouvement par rapport à R0.
Soit un solide S en mouvement par rapport à R0 soumis à un ensemble d'actions mécaniques.

$$\begin{Bmatrix} Torseur\ des \\ actions \\ mécaniques \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{fext/S} \\ \overrightarrow{m_A(F_{ext/S})} \end{Bmatrix}_A$$

$$\begin{Bmatrix} Torseur \\ cinématique \\ S/R0 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R0) \\ \vec{V}(A;S/R0) \end{Bmatrix}_A$$



Dans cet exemple, le solide S est une chemise de cylindre de moteur d'avion. Elle est animée d'un mouvement louvoyant: combinaison d'une rotation et d'une translation.

Définition de la Puissance développée par les actions mécaniques :

$$P(fext \rightarrow S/R0) = \begin{Bmatrix} Torseur \\ cinématique \\ S/R0 \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} Torseur \\ des\ actions \\ mécaniques\ /S \end{Bmatrix}_A$$

$$P(fext \rightarrow S/R0) = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R0) \\ \vec{V}(A;S/R0) \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} \vec{R}_{fext/S} \\ \overrightarrow{m_A(F_{ext/S})} \end{Bmatrix}_A$$

$$P(fext \rightarrow S/R0) = \vec{R}_{fext/S}.\vec{V}(A;S/R0) + \vec{\Omega}(S/R0).\overrightarrow{m_A(F_{ext/S})}$$

Théorème de l'énergie-puissance :

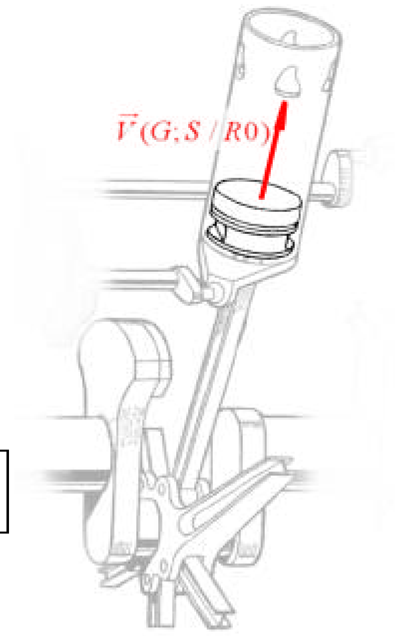
$$P(fext \rightarrow S/R0) = \frac{d}{dt}\left[T(E/R0)\right]$$

La puissance galiléenne développée par les actions mécaniques agissant sur S est égale à la variation de l'énergie cinétique entre deux instants t (dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique).

Mouvements Particuliers.

***Solide S en Translation par rapport à R0 :**

$$\left\{\begin{matrix} Torseur \\ cinématiqu\ e \\ S/R0 \end{matrix}\right\}_G = \left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{V}(G;S/R0) \end{matrix}\right\}_G$$



***Théorème de la résultante dynamique :**

$$\boxed{\vec{R}_{fext/S} = m.\vec{\Gamma}(G;S/R0)}$$

***Théorème du Moment dynamique.**

$$\boxed{\overline{m_G(F_{ext/S})} = \overline{d_G}(S/R0) = \vec{0}}$$

***Théorème de l'énergie - puissance**

La puissance des actions mécaniques qui s'appliquent au solide S :

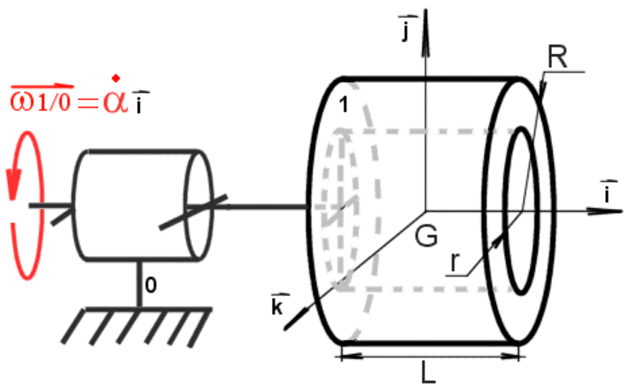
$$P(fext \to S/R0) = \vec{R}_{fext/S}.\vec{V}(G;S/R0)$$

L'énergie cinétique :

$$T(S/R0) = \frac{1}{2}m.\vec{V}^2(G;S/R0)$$

$$\boxed{\vec{R}_{fext/S}.\vec{V}(G;S/R0) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m.\vec{V}^2(G;S/R0)\right]}$$

***Solide S en Rotation autour d'un axe central d'inertie fixe par rapport à R0 :**



$$\left\{\begin{matrix} Torseur \\ cinématiqu\ e \\ S/R0 \end{matrix}\right\}_G = \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(S/R0) = \dot{\alpha}.\vec{i} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G$$

***Théorème de la résultante dynamique :**

$$\boxed{\vec{R}_{fext/S} = m.\vec{\Gamma}(G;S/R0) = \vec{0}}$$

***Théorème du Moment dynamique.**

$$\boxed{\overline{m_G(F_{ext/S})} = \overline{d_G}(S/R0) = A.\ddot{\alpha}.\vec{i}}$$

$$\overline{m_G(F_{ext/S})} = \overline{d_G}(S/R0) = \left[\frac{d}{dt}\vec{s}_G(S/R0)\right]_{R0}$$

$$\vec{s}_G(S/R0) = \overline{\overline{I(G;S)}} \times \vec{\Omega}(S/R0)$$

$$= \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = A.\dot{\alpha}.\vec{i}$$

***Théorème de l'énergie - puissance**

La puissance des actions mécaniques qui s'appliquent au solide S :

$$P(fext \to S/R0) = \vec{\Omega}(S/R0)\overline{m_G}(F_{ext/S}) = \dot{\alpha}.\vec{i}.\overline{m_G}(F_{ext/S})$$

L'énergie cinétique :

$$T(S/R0) = \frac{1}{2}.A.\dot{\alpha}^2$$

$$\boxed{\dot{\alpha}.\vec{i} \bullet \overline{m_G}(F_{ext/S}) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}.A\dot{\alpha}^2\right]}$$

Méthode de résolution d'un problème de dynamique :

La dynamique permet d'étudier les mouvements des solides en relation avec les causes de ces mouvements.
Un problème de dynamique consiste, quand on connaît les actions mécaniques, à déterminer les équations de mouvement et inversement quand on connaît les équations de mouvement à déterminer les actions mécaniques induites.

-Hypothèses de modélisation.

-Référentiel. Galiléen.

-Paramétrage / Choix des paramètres de position.

-Choix des équations à écrire et du solide à isoler.

Pour le choix des équations (procéder comme suit) :

l : paramètre de **translation** qui positionne S3 le long de z_{23} :
→Th. De la **résultante dynamique** appliquée à **S3** en proj. Sur z_{23}.

q : Paramètre de **rotation** qui positionne **S2 + S3** autour de x_{12} :
→Th. Du **moment dynamique** appliqué à **S2 + S3** en P, en proj. Sur x_{12}.

f : Paramètre de **rotation** qui positionne **S1 + S2 + S3** autour de Z_0 :
→Th. Du **moment dynamique** appliqué à **S1 + S2 + S3** en O, en proj. Sur Z_0.

Attention, les accélérations sont calculées par rapport à R0.

-Bilan des actions mécaniques : $\left\{\begin{matrix} \vec{R}_{fext/S} \\ \overline{m_A(F_{ext/S})} \end{matrix}\right\}_A$

--Principe Fondamental de la dynamique

-Résolution.