Régulateur PID numérique : Principe

PID continu

$$H_{PID}(s)=K\left(1+\frac{1}{T_i\,s}+\frac{T_d s}{1+\frac{T_d}{N}s}\right)$$

- K – gain proportionnel
- T_i – action intégrale
- T_d – action dérivée
- T_d/N – filtrage de l'action dérivée

PID numérique

→ Discrétisation → dérivation

→ Discrétisation → intégration

Régulateur PID numérique : Principe

- Dérivation

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y(t) - y(t-T)}{T}$$

$y_n z^{-1} = y_{n-1}$

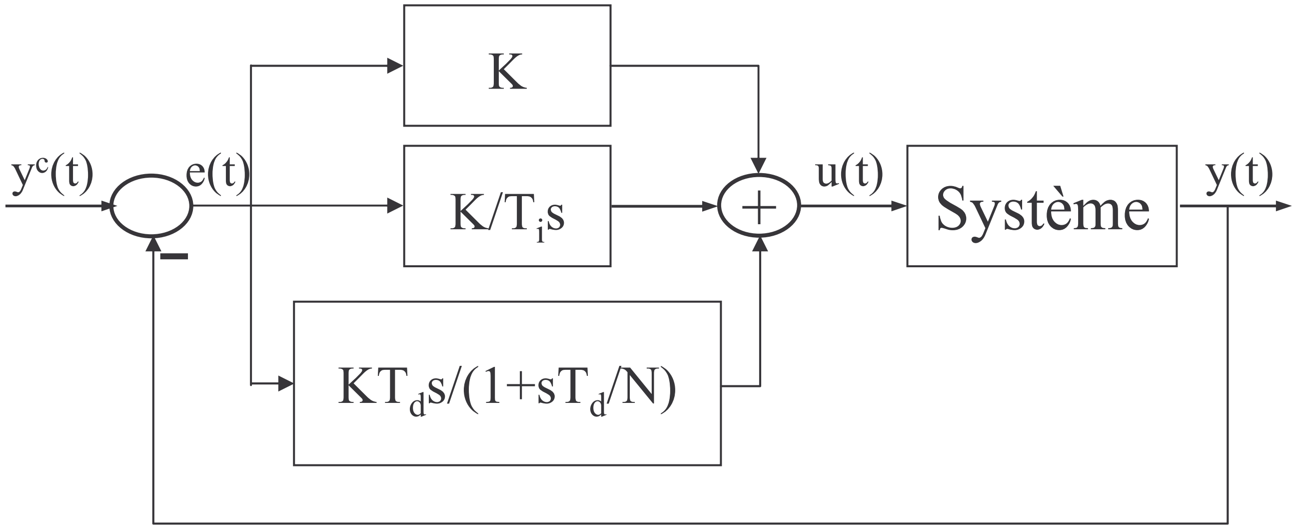
$$\frac{d}{dt} y(t) = s y(t) = \frac{y(t) - y(t-T)}{T} = \frac{1 - z^{-1}}{T} y(z)$$

$$\boxed{s \cong \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

- Intégration

$$\int y(t)dt = \frac{1}{s} y(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s} \cong \frac{T}{1 - z^{-1}}}$$

Régulateur PID numérique : Principe



$$u(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i\, s} + \frac{T_d\, s}{1 + \frac{T_d}{N} s}\right) e(s)$$

$$\longrightarrow \quad u(z) = K\left(1 + \frac{T}{T_i} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{T_d \cdot \frac{1 - z^{-1}}{T}}{1 + \frac{T_d}{N} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{T}}\right) e(z)$$

Régulateur PID numérique : Principe

$$u(z)=\left(K+\frac{KT}{T_i}\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{KT_d}{T}\left(1-z^{-1}\right)\frac{\dfrac{NT}{NT+T_d}}{1-\dfrac{T_d}{NT+T_d}z^{-1}}\right)e(z)$$

$$\downarrow$$

$$S\left(z^{-1}\right)u(z)=R\left(z^{-1}\right)\left[y^c(z)-y(z)\right]$$

$$\mathbf{R(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + r_2\, z^{-2}}$$

$$\mathbf{S(z^{-1}) = (1- z^{-1})\,(1- s_1 z^{-1})}$$

$$s_1=\frac{T_d}{T_d+NT}$$

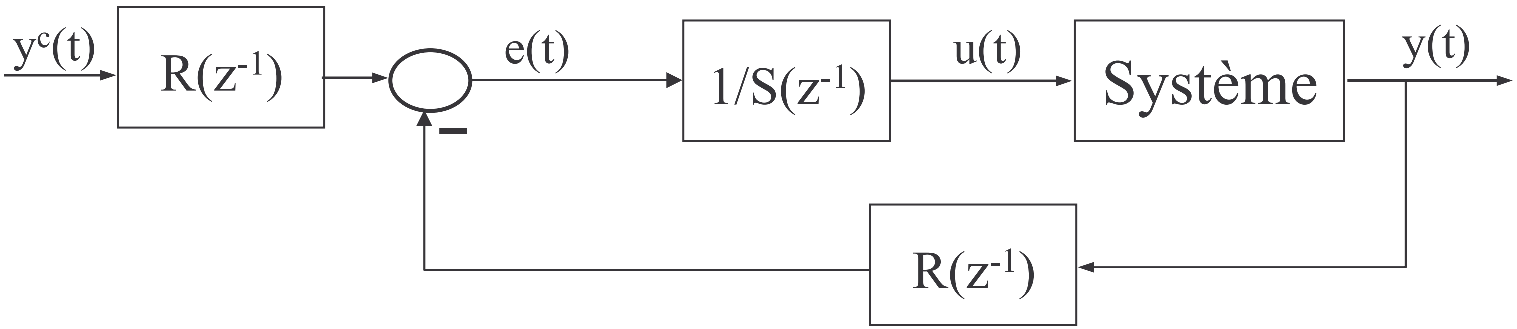
$$r_0=K\left(1+\frac{T}{T_i}+Ns_1\right)$$

$$r_1=-K\left[s_1\left(1+\frac{T}{T_i}+2N\right)+1\right]$$

$$r_2=Ks_1(1+N)$$

Régulateur PID numérique : Principe

$$u(z) = \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})} y^c(z) - \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})} y(z)$$



Régulateur PID numérique : Principe

Système : $H(z^{-1}) = N(z^{-1})/D(z^{-1})$

$$H_{BF}(z^{-1}) = \frac{N(z^{-1})R(z^{-1})}{D(z^{-1})S(z^{-1}) + N(z^{-1})R(z^{-1})} = \frac{Y(z^{-1})}{Y^{c}(z^{-1})}$$

Inconvénient

$R(z^{-1})$ – dépend du système et du système en BF

$R(z^{-1})$ – introduit des zéros

Calcul des paramètres du PID numérique

1. Détermination du modèle échantillonné du système à commander H(s)

$$H(z) = (1 - z^{-1}) Z\left[\frac{H(s)}{s}\right] \longrightarrow H(z^{-1}) = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})}$$

2. Spécification des performances du système en BF

$$H_{BF}(z^{-1}) = \frac{N(z^{-1})R(z^{-1})}{D(z^{-1})S(z^{-1}) + N(z^{-1})R(z^{-1})} = \frac{N_{BF}(z^{-1})}{D_{BF}(z^{-1})}$$

- $N_{BF}(z^{-1})$ – ne peut pas être spécifié a priori $\rightarrow N(z^{-1})$, $R(z^{-1})$
- $D_{BF}(z^{-1})$ – doit être spécifié $\quad D_{BF}(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}$

Calcul des paramètres du PID numérique

3. Calcul des paramètres du régulateur numérique

- Résoudre l'équation en $S(z^{-1})$ et $R(z^{-1})$

$$D_{BF}(z^{-1}) = D(z^{-1})\,S(z^{-1}) + N(z^{-1})\,R(z^{-1})$$

où

$$R(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + r_2\, z^{-2}$$

$$S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})\,(1 - s_1 z^{-1})$$

Supposons

$$H\left(z^{-1}\right) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})}$$

$$D_{BF}(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + p_2\, z^{-2}$$

$$D_{BF}(z^{-1}) = D(z^{-1})\,S(z^{-1}) + N(z^{-1})\,R(z^{-1})$$

Remarque Régulateurs PID numériques

- Systèmes d'ordre 1 ou 2 avec ou sans retard
- Retard pur inférieur à une période d'échantillonnage

Calcul des paramètres du PID numérique

$$D_{BF}(z^{-1}) = (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})(1 - z^{-1})(1 - s_1 z^{-1}) + (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})(r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2})$$

$$D_{BF}(z^{-1}) = 1 + (a_1 - s_1 - 1 + b_1 r_0) z^{-1} + (s_1 - a_1 s_1 - a_1 + a_2 + b_1 r_1 + b_2 r_0) z^{-2} + (a_1 s_1 - a_2 s_1 - a_2 + b_1 r_2 + b_2 r_1) z^{-3} + (a_2 s_1 + b_2 r_2) z^{-4} = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = a_1 - s_1 - 1 + b_1 r_0 \\ p_2 = s_1(1 - a_1) - a_1 + a_2 + b_1 r_1 + b_2 r_0 \\ 0 = s_1(a_1 - a_2) - a_2 + b_1 r_2 + b_2 r_1 \\ 0 = a_2 s_1 + b_2 r_2 \end{array} \right. \Rightarrow r_0, r_1, r_2, s_1$$

Calcul des paramètres du PID numérique

Paramètres du PID continu

$$K=\frac{-r_0 s_1-r_1-(2-s_1)r_2}{(1-s_1)^2}$$

$$T_i=T_e\cdot\frac{K(1-s_1)}{r_0+r_1+r_2}$$

$$T_d=T_e\cdot\frac{s_1^2 r_0+s_1 r_1+r_2}{K(1-s_1)^3}$$

$$\frac{T_d}{N}=\frac{s_1 T_e}{1-s_1}$$

Remarque

$$U(z^{-1})=\left(K+\frac{KT_e}{T_i}\frac{1}{1-z^{-1}}+K\frac{Ns_1\left(1-z^{-1}\right)}{1-s_1 z^{-1}}\right)E\left(z^{-1}\right)$$

PID continu équivalent existe si $0 \le \mathbf{s_1} < 1$

Régulateur PID numérique : Exemple

Exemple : Problème

Système

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$T = 1s$

Cahier des charges de la régulation

- → Amortissement $\zeta' = 0.5$
- → Pulsation naturelle $\omega_n' = 2*\pi*0.1$

Régulateur PID numérique : Exemple

Exemple : Solution

1. Système échantillonné

$$F(z) = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368z + 0.368} = \frac{0.368z^{-1} + 0.264z^{-2}}{1 - 1.368z^{-1} + 0.368z^{-2}}$$

$\longrightarrow$ **$b_1 = 0.368$, $b_2 = 0.264$**

$\longrightarrow$ **$a_1 = -1.368$, $a_2 = 0.368$**

2. Spécification des performances du système en BF

$\zeta' = 0.5$, $\omega_n' = 0.628 \rightarrow s_{1,2} = -\ 0.314 \pm 0.544j$

$z = e^{sT}$, $T = 1 \rightarrow z_{1,2} = 0.626 \pm 0.379j$

$D_{BF}(z^{-1}) = (1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1}) = 1 - 1.256\ z^{-1} + 0.536\ z^{-2}$ $\longrightarrow$ **$p_1 = -1.256$, $p_2 = 0.536$**

3. Calcul des paramètres du PID numérique

$$D_{BF}(z^{-1}) = D(z^{-1})\ S(z^{-1}) + N(z^{-1})\ R(z^{-1})$$

Régulateur PID numérique : Exemple

Exemple : Solution (suite)

3. **Calcul des paramètres du PID numérique**

$$\begin{cases} p_1 = a_1 - s_1 - 1 + b_1 r_0 \\ p_2 = s_1(1 - a_1) - a_1 + a_2 + b_1 r_1 + b_2 r_0 \\ 0 = s_1(a_1 - a_2) - a_2 + b_1 r_2 + b_2 r_1 \\ 0 = a_2 s_1 + b_2 r_2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} -1.256 = -1.368 - s_1 - 1 + 0.368\, r_0 \\ 0.536 = s_1(1 + 1.368) + 1.368 + 0.368 + 0.368 r_1 + 0.264 r_0 \\ 0 = s_1(-1.368 - 0.368) - 0.368 + 0.368 r_2 + 0.264 r_1 \\ 0 = 0.368 s_1 + 0.264 r_2 \end{cases}$$

Régulateur PID numérique : Exemple

Exemple : Solution (suite)

$$\begin{cases} 1.112 = -s_1 + 0.368\, r_0 \\ -1.2 = 2.368 s_1 + 0.264 r_0 + 0.368 r_1 \\ 0.368 = -1.736\, s_1 + 0.264 r_1 + 0.368 r_2 \\ 0 = 0.368 s_1 + 0.264 r_2 \end{cases}$$

$s_1=-0.408$, $r_0=1.914$, $r_1=-2.011$, $r_2=0.568$

Régulateur PID numérique : Résumé

- ***On connaît***

→ Le système à commander et sa fonction de transfert en continu : F(s)

→ Le cahier des charges de l'asservissement

→ Transitoire : Fixées par les pôles de la fdt en BF : $H_{BF}(s)$

→ Permanent : l'erreur en position nulle et + si le système possède des intégrateurs

- ***On cherche***

→**Les coefficients du régulateur PID numérique : s_1, r_0, r_1, r_2**

$$U(z^{-1})=\frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})}Y^{c}(z^{-1})-\frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})}Y(z^{-1})$$

Régulateur PID numérique : Résumé

Limitations

→ Les systèmes à commander sont uniquement d'ordre 1 ou 2 avec ou sans retard
→ Le retard est inférieur à une période d'échantillonnage

Inconvénients

→ Performances en régime stationnaire limitées

→ Apparition des zéros indésirables

$$H_{BF}(z^{-1})=\frac{N(z^{-1})R(z^{-1})}{D(z^{-1})S(z^{-1})+N(z^{-1})R(z^{-1})}=\frac{N_{BF}(z^{-1})}{D_{BF}(z^{-1})}$$