ANNEXE B: ALGEBRE DES QUATERNIONS ET APPLICATION A LA ROBOTIQUE

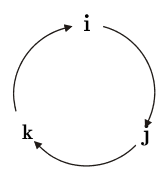
B.1 DEFINITION

- Un ***quaternion*** est nombre complexe quadri-dimensionnel (ou nombre hyper-complexe):

$$\hat{q} \;=\; q_0 \;+\; iq_1 \;+\; jq_2 \;+\; kq_3$$

- Les nombres *i*, *j*, *k* sont des nombres complexes unitaires tels que:

$$\begin{aligned} i^2 \;&=\; j^2 \;=\; k^2 \;=\; -1 \\ jk \;&=\; -kj \;=i \\ ki \;&=\; -ik \;=j \\ ij \;&=\; -ij \;=k \end{aligned}$$



- Sous forme vecteur, on écrit:

$$\hat{q} \;=\; q_0 \;+\; \vec{q} \;=\; q_0 \;+\; \boldsymbol{q}$$

où on distingue respectivement la partie scalaire q_0 et la partie vecteur **q**

B.1 DEFINITION

- La ***multiplication de deux quaternions*** est définie comme suit:

$$\begin{aligned}\hat{p}\,\hat{q} &= (p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3)\;(q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3)\\ &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3)\\ &\quad + i\;(p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\\ &\quad + j\;(p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)\\ &\quad + k\;(p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)\end{aligned}$$

- Sous forme vectorielle, le produit de quaternions s'écrit encore:

$$\begin{aligned}\hat{p}\;\hat{q} &= (p_0 + \vec{p})\;(q_0 + \vec{q})\\ &= p_0\;q_0 - \vec{p}\cdot\vec{q} \;+\; p_0\;\vec{q} \;+\; q_0\;\vec{p} \;+\; \vec{p}\times\vec{q}\\ &= p_0\;q_0 - \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{q} \;+\; p_0\;\boldsymbol{q} \;+\; q_0\;\boldsymbol{p} \;+\; \tilde{\boldsymbol{p}}\;\boldsymbol{q}\end{aligned}$$

B.1 DEFINITION

- Le ***quaternion conjugué*** est défini par:

$$\begin{aligned}\hat{q}^* &= q_0 \;-\; iq_1 \;-\; jq_2 \;-\; kq_3\\ & q_0 \;-\; \vec{q}\end{aligned}$$

  Il est facile de vérifier que:

$$(\hat{p}\;\hat{q})^* \;=\; \hat{q}^*\;\hat{p}^*$$

- La ***norme d'un quaternion***:

$$||\hat{q}||^2 \;=\; (\hat{q}\;\hat{q})^* \;=\; q_0^2 \;+\; \vec{q}\cdot\vec{q}$$

- Le ***quaternion unitaire*** est par définition tel que:

$$||\hat{q}|| \;=\; 1$$

B.1 DEFINITION

- Le ***vecteur quaternion*** est défini comme:

$$\hat{q}^{*} \; = 0 \; + \; \vec{q}$$

Il est facile de montrer que pour un vecteur quaternion on a:

$$\hat{q} \; + \; \hat{q}^{*} \; = \; 0$$

Les vecteurs quaternions décrivent les vecteurs positions, les vecteurs vitesses linéaires et angulaires, etc.

B.2 REPRESENTATION DES ROTATIONS FINIES A L'AIDE DE QUATERNIONS

- Soit un quaternion unitaire et un vecteur position (vecteur quaternion):

$$\hat{e} = e_0 + \vec{e} \qquad\qquad \hat{x} = 0 + \vec{x},$$

La ***rotation finie qui amène x à une nouvelle position y*** est représentée par triple produit de quaternion:

$$\hat{y} \; = \; \hat{e} \; \hat{x} \; \hat{e}^{*}$$

- Preuve:
  - y est aussi un vecteur quaternion

$$\hat{y} \; + \; \hat{y}^{*} \; = \; 0$$

  - la longueur de x est préservée durant l'opération

$$||\hat{y}||^{2} \; = \; \hat{y} \; \hat{y}^{*} \; = \; ||\hat{x}||^{2}$$

B.2 REPRESENTATION DES ROTATIONS FINIES A L'AIDE DE QUATERNIONS

- ***La rotation inverse*** est obtenue en prenant le conjugué du quaternion de rotation

$$\hat{x} \;=\; \hat{e}^* \; \hat{y} \; \hat{e}$$

- ***Composition de deux rotations***:

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \hat{e}_1 \; \hat{x} \; \hat{e}_1^* \\ \hat{z} &= \hat{e}_2 \; \hat{y} \; \hat{e}_2^* \;=\; (\hat{e}_2 \hat{e}_1) \; \hat{x} \; (\hat{e}_2 \hat{e}_1)^* \end{aligned}$$

La rotation résultante est définie par le quaternion

$$\hat{z} \;=\; \hat{e} \; \hat{x} \; \hat{e}^* \quad \text{with} \quad \hat{e} \;=\; \hat{e}_2 \; \hat{e}_1$$

B.2 REPRESENTATION DES ROTATIONS FINIES A L'AIDE DE QUATERNIONS

- ***Identification des paramètres vecteur de rotation et angle de rotation (théorème d'Euler) et l'expression du quaternion de rotation***

  On peut écrire le quaternion unitaire décrivant la rotation de la manière suivante:

$$\hat{e} \;=\; \cos\alpha \;+\; \boldsymbol{n} \; \sin\alpha$$

où ***n*** est un vecteur unitaire (de norme 1)

Effectuons les produits:

$$\hat{e} \, \hat{x} \;=\; -\sin\alpha \; \boldsymbol{n}^T \boldsymbol{x} \;+\; \cos\alpha \; \boldsymbol{x} \;+\; \sin\alpha \; \tilde{\boldsymbol{n}} \; \boldsymbol{x}$$

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \; \hat{e} \; \hat{x} \; \hat{e}^* \\ &= \; \sin^2\alpha \; (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}) \;+\; \cos^2\alpha \boldsymbol{x} \;+\; 2 \; \sin\alpha \; \cos\alpha \; \tilde{\boldsymbol{n}} \; \boldsymbol{x} \;-\; \sin^2\alpha \; (\widetilde{\tilde{\boldsymbol{n}} \; \boldsymbol{x}}) \; \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

$$\hat{y} \;=\; 0 \;+\; (\cos 2\alpha \, \boldsymbol{I} \;+\; (1 - \cos 2\alpha) \, \boldsymbol{n} \, \boldsymbol{n}^T \;+\; \sin 2\alpha \, \tilde{\boldsymbol{n}}) \; \boldsymbol{x}$$

- Une comparaison avec la description de la rotation à l'aide des paramètres du théorème d'Euler fait appaître *qu'il s'agit d'une rotation d'angle 2α autour d'un axe de rotation de vecteur unitaire **n**.*

B.3 REPRESENTATION MATRICIELLE DES QUATERNIONS

- Un quaternion peut être représenté par une matrice colonne à 4 dimensions:

$$\begin{aligned} \hat{q} &= [\, q_0 \; q_1 \; q_2 \; q_3 \,]^T \\ &= [\, q_0 \; \boldsymbol{q} \,]^T \end{aligned}$$

- Le *produit de deux quaternions*

$$\hat{a} = \hat{p}\,\hat{q}$$

peut être écrit sous les formes suivantes

$$\hat{a} = \boldsymbol{A}_p\,\hat{q} = \boldsymbol{B}_q\hat{p}$$

dans lesquelles on a utilisé les matrices 4 x 4 suivantes

$$\boldsymbol{A}_p = \begin{matrix} p_0 & -\boldsymbol{p}^T \\ \boldsymbol{p} & p_0\,\boldsymbol{I} + \tilde{p} \end{matrix} \qquad \boldsymbol{B}_q = \begin{matrix} q_0 & -\boldsymbol{q}^T \\ \boldsymbol{q} & q_0\,\boldsymbol{I} - \tilde{q} \end{matrix}$$

où ***I*** est la matrice unité
et où on a la matrice antisymétrique
construite sur la partie vecteur **q** du quaternion

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}$$

B.4 FORME MATRICIELLE DES ROTATIONS FINIES DECRITES A l'AIDE DE QUATERNIONS

- En utilisant la forme matricielle des multiplications de quaternions, le triple produit de quaternions

$$\hat{y} = \hat{e}\,\hat{x}\,\hat{e}^*$$

peut s'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$\hat{y} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}^T\,\hat{x}$$

- Tous calculs faits on a:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}^T = \begin{matrix} 1 & \mathbf{o}^T \\ \mathbf{o} & \boldsymbol{R} \end{matrix}$$

où **R** est la matrice 3x3 l'opérateur de rotation standard.
En effet en développant le produit on trouve le résultat classique de la matrice **R** en termes de composantes du quaternion e:

$$\boldsymbol{R} = (2e_0^2 - 1)\boldsymbol{I} + 2\,(\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T + e_0\hat{\boldsymbol{e}})$$

B.4 FORME MATRICIELLE DES ROTATIONS FINIES DECRITES A l'AIDE DE QUATERNIONS

- Une forme simplifiée de **R**:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{G}^T$$

avec

$$\boldsymbol{E} = \quad -\boldsymbol{e} \quad e_0\,\boldsymbol{I} + \tilde{\boldsymbol{e}} \qquad\qquad \boldsymbol{G} = \quad -\boldsymbol{e} \quad e_0\,\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{e}}$$

où **E** et **G** vérifient les relations:

$$\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{E}^T = \boldsymbol{G}\,\boldsymbol{G}^T = \boldsymbol{I}$$
$$\boldsymbol{E}^T\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{G}^T\,\boldsymbol{G} = \boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{e}}\,\hat{\boldsymbol{e}}^T$$
$$\boldsymbol{E}\,\hat{e} = \boldsymbol{G}\,\hat{e} = \mathbf{o}$$

B.5 VITESSES ANGULAIRES EN TERMES DES QUATERNIONS

- On part de l'expression de la rotation en termes des quaternions

$$\hat{y} = \hat{e}\;\hat{x}\;\hat{e}^*$$

- Si on suppose que le vecteur quaternion x est constant et que seul le quaternion décrivant la rotation e(t) dépend du temps, c'est-à-dire que l'on décrit un *mouvement sphérique*:

$$\hat{y}(t) = \hat{e}(t)\;\hat{x}\;\hat{e}^*(t)$$

- Le champ de vitesse est donné par:

$$\dot{\hat{y}} = \dot{\hat{e}}\;\hat{x}\;\hat{e}^* + \hat{e}\;\hat{x}\;\dot{\hat{e}}^*$$

- En termes de y, on a

$$\dot{\hat{y}} = \dot{\hat{e}}\;\hat{e}^*\;\hat{y} + \hat{y}\;\hat{e}\;\dot{\hat{e}}^*$$

B.5 VITESSES ANGULAIRES EN TERMES DES QUATERNIONS

- On note que: $$\hat{e}\,\hat{e}^* \;=\; 1$$
  entraîne $$\hat{e}\,\dot{\hat{e}}^* \;+\; \dot{\hat{e}}\,\hat{e}^* \;=\; 0$$
- On déduit que le quaternion
  $$\hat{\omega} \;=\; 2\,\dot{\hat{e}}\,\hat{e}^*$$
  est aussi un vecteur quaternion
- ***La vitesse du point dans le repère attaché à y*** est donnée par:
  $$\dot{\hat{y}} \;=\; \frac{1}{2}\,(\hat{\omega}\,\hat{y} \;-\; \hat{y}\,\hat{\omega})$$
- ***Interprétation:*** l'expression précédente représente la vitesse d'un point P en termes des quantités dans le repère attaché à y.

B.5 VITESSES ANGULAIRES EN TERMES DES QUATERNIONS

- ***Analogie avec les expressions matricielles:***
  Si on se rappelle les expressions matricielles de la position et de la vitesse
  $$\boldsymbol{y} \;=\; \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x}$$
  $$\dot{\boldsymbol{y}} \;=\; \dot{\boldsymbol{R}}\,\boldsymbol{R}^T\;\boldsymbol{y}$$
  Ceci signifie que le vecteur quaternion ω est l'équivalent de la matrice
  $$\tilde{\omega} \;=\; \dot{\boldsymbol{R}}\,\boldsymbol{R}^T$$

B.5 VITESSES ANGULAIRES EN TERMES DES QUATERNIONS

- ***Vitesse de rotation dans le repère attaché à x:***

$$\hat{v} \;=\; \hat{e}^* \; \dot{\hat{y}} \; \hat{e}$$

En développant on obtient successivement:

$$\boldsymbol{v} \;=\; \hat{e}^* \; \dot{\hat{e}} \; \hat{x} \;+\; \hat{x} \; \dot{\hat{e}}^* \, \hat{e}$$

- Soit la *vecteur quaternion, vitesse de rotation dans le repère de x*:

$$\hat{\omega}' \;=\; 2 \, \hat{e}^* \; \dot{\hat{e}}$$

- *La vitesse de rotation dans le repère x*

$$\hat{v} \;=\; \frac{1}{2} \, (\hat{\omega}' \, \hat{x} \;-\; \hat{x}\hat{\omega}')$$

- Le vecteur quaternion vitesse de rotation est l'analogue de la matrice

$$\tilde{\omega}' \;=\; \boldsymbol{R}^T \; \dot{\boldsymbol{R}}$$

B.6 FORME MATRICIELLE DE VITESSES ANGULAIRES

- Utilisation de la notation matricelle pour écrire les expressions des quaternions vitesse de rotation

$$\hat{\omega} \;=\; 2 \, \boldsymbol{B}(\hat{e}^*) \, \dot{\hat{e}} \qquad\qquad \hat{\omega}' \;=\; 2 \, \boldsymbol{A}(\hat{e}^*) \, \dot{\hat{e}}$$

- En se limitant aux parties vectorielles

$$\omega \;=\; 2 \, \boldsymbol{E} \, \dot{\boldsymbol{e}} \qquad\qquad \omega' \;=\; 2 \, \boldsymbol{G} \, \dot{\boldsymbol{e}}$$

où **E** et **G** sont des matrices 3x4 extraites de **A** et **B**

$$\boldsymbol{E} \;=\; [\, -\boldsymbol{e} \quad e_0 \, \boldsymbol{I} \,+\, \tilde{\boldsymbol{e}} \,] \qquad\qquad \boldsymbol{G} \;=\; [\, -\boldsymbol{e} \quad e_0 \, \boldsymbol{I} \,-\, \tilde{\boldsymbol{e}} \,]$$

- ***Expression explicite des vitesses en termes des paramètres d'Euler***

$$\omega \;=\; 2 \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_0 & \dot{e}_1 & \dot{e}_2 & \dot{e}_3 \end{bmatrix}$$