

Préparation aux agrégations de
Mécanique et de Génie Mécanique

Dynamique des systèmes de Solides

Sylvie Pommier

2005-2006

1	INTRODUCTION.....	4
2	RAPPELS DE MATHEMATIQUES	7
2.1	CALCUL VECTORIEL	7
2.1.1	Opérations sur les vecteurs	7
2.1.2	Champs de vecteurs.....	9
2.1.3	Champ equiprojectif de vecteurs.....	11
2.2	TORSEURS.....	12
2.2.1	Définitions.....	12
2.2.2	Opérations sur les torseurs	14
2.3	DERIVATION VECTORIELLE	16
2.3.1	Dérivée d'un vecteur	16
2.3.2	Changement de base de dérivation.....	16
2.4	A RETENIR	19
3	CINEMATIQUE	20
3.1	RAPPELS	20
3.1.1	Cinématique du point	20
3.2	LE SOLIDE INDEFORMABLE	20
3.2.1	Définition.....	20
3.2.2	Equivalence Repère-Solide.....	21
3.3	PARAMETRAGE DE LA POSITION RELATIVE DE DEUX SOLIDES	21
3.3.1	Définition des coordonnées de l'origine d'un repère.....	21
3.3.2	Définition de l'orientation relative de deux bases.....	23
3.4	CINEMATIQUE DU SOLIDE.....	26
3.4.1	Introduction, notations	26
3.4.2	Champ des vecteurs vitesse des points d'un solide : torseur cinématique	27
3.4.3	Champ des vecteurs accélération des points d'un solide.	29
3.4.4	Composition des mouvements	29
3.4.5	Composition des vecteurs accélération	32
3.4.6	A retenir	33
3.5	CINEMATIQUE DES SYSTEMES DE SOLIDES	35
3.5.1	Définitions	35
3.5.2	Tableau des liaisons normalisées.....	36
3.5.3	Cinématique du contact entre deux solides	38
3.5.4	Modélisation de la cinématique	39
3.5.5	Exemple : Presse de modélisme	40
3.5.6	A retenir	44
4	CONSERVATION DE LA MASSE	45
4.1	SYSTEME MATERIEL A MASSE CONSERVATIVE	45
4.2	TORSEUR CINETIQUE, TORSEUR DYNAMIQUE ET ENERGIE CINETIQUE.....	46
4.2.2	Centre d'inertie, opérateur d'inertie.....	47
4.2.3	Exemples	49
4.3	CONSEQUENCES DU PRINCIPE DE CONSERVATION DE LA MASSE.....	50
4.3.1	Torseur cinétique.....	50
4.3.2	Torseur dynamique.....	51
4.3.3	Énergie cinétique.....	52
4.3.4	Autres cas. Exemple : Action de la pesanteur	53
4.4	A RETENIR	54
5	CONSERVATION DE L'ENERGIE : PREMIER PRINCIPE	55
5.1	INTRODUCTION	55
5.2	ENERGETIQUE	55
5.2.1	Torseur des actions mécaniques extérieures à un solide.....	55
5.2.2	Puissance.....	55
5.2.3	Travail.....	57
5.2.4	Energie Potentielle.....	57
5.2.5	Energie cinétique.....	59

5.3	CONSERVATION DE L'ENERGIE : THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE.....	60
5.3.1	Théorème de l'énergie pour un solide S	60
5.3.2	Théorème de l'énergie cinétique pour deux solides S_1 et S_2	60
5.3.3	Théorème de l'énergie cinétique pour un système Σ de n solides	60
5.3.4	Intégrale première de l'énergie cinétique : Système conservatif	61
5.4	A RETENIR	62
6	CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT	63
6.1	INTRODUCTION	63
6.2	ACTIONS MECANQUES OU EFFORTS	63
6.2.1	Torseur des actions mécaniques extérieures à un système de solides Σ	63
6.2.2	Exemple d'action à distance : la pesanteur.....	64
6.2.3	Actions de contact : Loi de Coulomb	64
6.2.4	Graphe d'analyse	68
6.3	PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE.....	70
6.3.1	Introduction : un peu d'histoire	70
6.3.2	Enoncé du principe fondamental de la dynamique	71
6.3.3	Conséquences	71
6.3.4	Référentiels Galiléens/non Galiléens	72
6.4	PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES	75
6.4.1	Introduction : un peu d'histoire.	75
6.4.2	Enoncé du principe des puissances virtuelles ou PPV.	76
6.5	CHOIX DE TORSEURS VIRTUELS PARTICULIERS ET THEOREMES DE LA DYNAMIQUE.....	76
6.5.1	Torseur global quelconque : Equivalence du principe des puissances virtuelles et du principe fondamental de la dynamique	76
6.5.2	Torseur des vitesses galiléennes : Théorème de l'énergie cinétique.....	76
6.5.3	Torseurs de Lagrange : équations de Lagrange	77
6.5.4	Combinaison des torseurs de Lagrange : Equation de Painlevé.....	82
6.5.5	Application de la méthode de Lagrange et paramétrage du mouvement	83
7	METHODES DE RESOLUTION.....	94
7.1	INTRODUCTION	94
7.2	LINEARISATION	95
7.2.1	Linéarisation des équations de Lagrange	95
7.2.2	Exemple : L'étouffeur de vibrations	98
7.3	RAPPELS : RESOLUTION DE SYSTEMES LINEAIRES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES	100
7.3.1	Résolution numérique.....	101
7.3.2	Résolution analytique.....	102
7.4	EQUILIBRE ET STABILITE	108
7.4.1	Introduction.....	108
7.4.2	Systèmes conservatifs	108
7.4.3	Cas général, méthode directe ou méthode de Liapounov.....	112
7.5	VIBRATIONS.....	113
7.5.1	Introduction.....	113
7.5.2	Vibrations libres.....	114
7.5.3	Vibrations forcées	114
7.5.4	Vibrations amorties	114
7.6	CHOC ET PERCUSSIONS	114
7.6.1	Introduction.....	114
7.6.2	Cas d'un point matériel.....	115
7.6.3	Cas d'un solide ou d'un système de solides	115
7.6.4	Percussion de liaison	116
7.6.5	Choc sans frottement entre deux solides	116
8	RECUEIL D'EXERCICES	121
8.1	CINEMATIQUE	121
8.2	CINETIQUE	124
8.3	DYNAMIQUE DU SOLIDE OU DES SYSTEMES DE SOLIDES	126
8.3.1	Méthodologie pour la résolution des problèmes de mécanique avec le PFD	126
8.3.2	Exercices	127

1 INTRODUCTION

La mécanique des systèmes de solides, comme les autres branches de la mécanique, procède d'une schématisation des mouvements réels ou potentiels à l'intérieur du système étudié. Le choix d'un schéma cinématique plutôt qu'un autre dépend du niveau de simplification recherché, des matériaux et de l'échelle à laquelle le problème est traité (voir les deux exemples ci-dessous). Ainsi si le champ des vitesses eulériennes à l'intérieur du système étudié est :

Champ équiprojectif	Solide indéformable
Champ équiprojectif par morceaux tridimensionnels	Système de solides indéformables
Champ équiprojectif par morceaux bidimensionnels	Poutres de la mécanique des structures
Champ équiprojectif par morceaux unidimensionnels	Plaques et coques

Des objets mathématiques bien adaptés à chacun de ces schémas cinématiques (mécanique des milieux continus, coques, plaque, poutres, solides) ont été développés afin de pouvoir exprimer les principes fondamentaux de la mécanique sous forme d'équations. L'objet mathématique privilégié de la mécanique des solides indéformables est le torseur.

Les principes fondamentaux sont les suivants :

- Conservation de la masse.
- Conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique)
- Conservation de la quantité de mouvement (d'Alembert).
- Second principe de la thermodynamique.

L'écriture des trois premiers principes conduit systématiquement à un système d'équations pour lequel le nombre d'équations est inférieur au nombre d'inconnues.

Les équations complémentaires sont données par les lois de comportement, dont on s'assure qu'elles permettent de vérifier le second principe de la thermodynamique. Ces lois de comportement seront par exemple dans le cadre de la mécanique du solide indéformable :

- Comportement rigide indéformable pour les solides
- Lois de contact entre solides (lois de Coulomb)
- Comportement de liaisons entre solides (liaison parfaites ou liaisons élastiques).
- Lois d'action à distance (attraction gravitationnelle, par exemple)

L'objet de ce cours est d'apporter les outils et les méthodes de travail permettant la résolution de problèmes mécaniques dans le cadre de la mécanique du solide indéformable.

Pour cela, la première partie sera consacrée à la description de la cinématique dans le cadre de la mécanique des solides indéformables. Puis les principes fondamentaux seront exprimés en utilisant le formalisme associé à ce schéma cinématique. Il n'y aura pas de chapitre spécifique consacré aux lois de comportement, étant donné que les lois usuellement employées pour décrire les interactions entre solides sont peu nombreuses et bien connues. Une fois que les outils permettant de mettre les problèmes en équations auront été présentés, des méthodes de résolution des systèmes d'équations obtenus seront présentées, dans le cadre des petits mouvements autour d'une position connue.

◇ Plan du cours

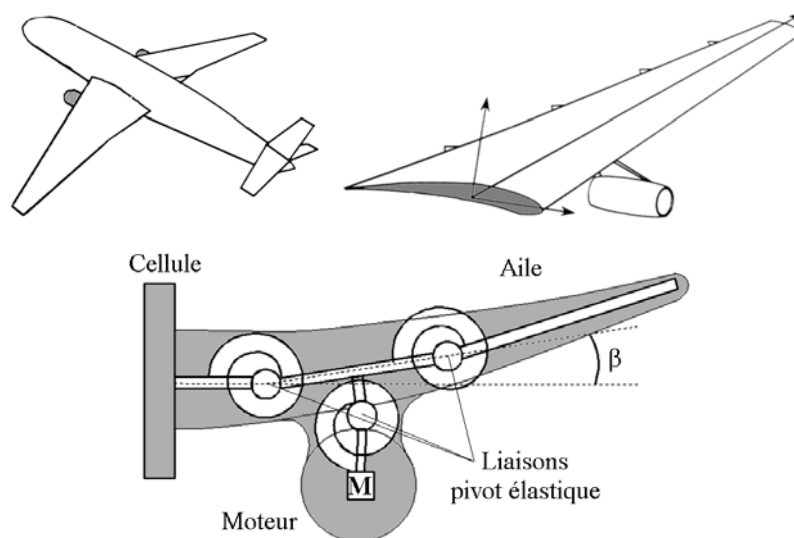
- Introduction.
- Rappels de mathématiques.
- Schématisation de la cinématique.

Cinématique du solide indéformable.

Cinématique des systèmes de solides indéformables.

- Expression des principes fondamentaux.
 - Conservation de la masse.
 - Conservation de l'énergie.
 - Conservation de la quantité de mouvement.
- Méthodes de résolution.
 - Equilibre et Stabilité
 - Vibrations libres ou forcées
 - Chocs

◇ Exemple 1 : Vibration d'une aile d'avion

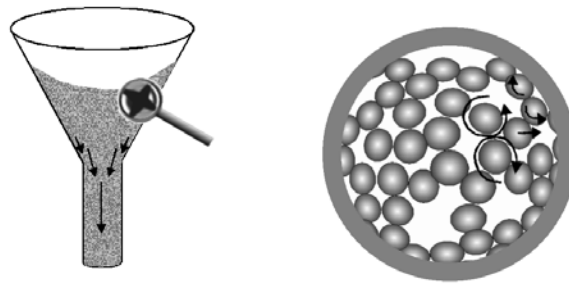


Le dimensionnement mécanique d'une aile d'avion se fait dans le cadre de la mécanique des structures. L'aile peut être schématisée comme une poutre à section complexe et variable, et la portance, proportionnelle au carré de la vitesse d'une section, peut être assimilée à une charge linéique. L'aile se fléchit significativement en vol, l'amplitude de battement en bout d'aile est d'environ un mètre en fonctionnement normal mais peut être bien plus élevée, après un trou d'air, par exemple. L'approche « poutre » permet de calculer le moment fléchissant à l'attache de l'aile sur la cellule en fonction de la déflexion β en bout d'aile, c'est-à-dire de calculer la raideur de la structure. Si l'on connaît la déflexion maximale β , on peut en déduire les contraintes au niveau de l'attache de l'aile sur la cellule et dimensionner cette attache.

Cependant, pour estimer cette déflexion maximale β , il est nécessaire de connaître le comportement dynamique de l'avion complet. En effet, les moteurs, par exemple, ont une masse très importante par rapport à celle de l'avion (masse d'un moteur CFM56-3 = 2 tonnes, masse d'un A320 hors moteur : 37 tonnes). Au cours de certaines manœuvres, des oscillations des moteurs, couplés au battement des ailes peuvent apparaître. Pour connaître, par exemple, la déflexion maximale β en bout d'aile et dimensionner l'attache de l'aile sur la cellule, il faut connaître l'amplitude de ces mouvements. Ceci nécessite une étude du comportement dynamique de l'avion complet, qui inclue la cellule, les ailes, l'empennage, les moteurs et même le chargement de l'avion (mobile ou non). Pour ce type d'étude, le détail des déformations internes à chacun des éléments de l'avion est négligé, pour se limiter à l'étude des mouvements relatifs entre ces éléments. L'aile par exemple pourra être assimilée à un ou plusieurs éléments rigides attachés à l'avion et liés entre eux par des liaisons pivot élastiques. Le moteur pourra être assimilé à une masse M , attachée à l'aile par une liaison pivot élastique.

Dans cet exemple particulier, les ailes sont déformables, mais sont assimilées à un système de solides rigides afin de pouvoir traiter le comportement dynamique de l'avion complet. Le choix des « solides » du système résulte donc d'une schématisation du champ de déplacement des points de l'aile.

◇ Exemple 2 : Ecoulement d'un milieu granulaire



L'écoulement d'un milieu granulaire (sable, poudres ...), est traité de manière différente selon le point de vue de l'observateur.

A l'échelle de l'écoulement complet, le milieu granulaire peut être traité en première approximation comme un matériau continu déformable. On utilisera donc soit la mécanique des milieux continus, soit la mécanique des fluides pour traiter le problème, en utilisant des lois de comportement appropriées.

A l'échelle des grains, le milieu granulaire est un empilement irrégulier de grains. Individuellement, les grains peuvent être considérés comme des solides indéformables. Ces solides sont en contact et glissent ou roulent les uns par rapport aux autres. Lors de l'écoulement et après l'écoulement, les grains s'arrangent en voûtes entre lesquelles il reste du vide. Cet édifice peut être déstabilisé. C'est ce qui se produit par exemple sur une pente enneigée lors d'une avalanche. L'étude des conditions de stabilité des édifices de grains se fait à l'aide de la mécanique des solides indéformables, avec des lois de contact entre solides appropriées.

Dans cet exemple particulier, le champ est « solidifiant » par morceaux, c'est-à-dire sur chacun des grains. Le choix de la mécanique des milieux continus ou de la mécanique des solides se fait en fonction de la « dimension des morceaux » vis-à-vis de l'échelle du problème à traiter.

◇ Sources bibliographiques

- Mécanique 1,2,3, Cours et exercices (1995), Yves Brémont, Paul Réocreux, collection Sciences Industrielles, Ed. Ellipses, Paris.
- Dynamique, Cours et exercices, (2002) Robert Lassia et Christophe Bard, Ed. Ellipses, Paris.
- Cours de Physique, tome I : Mécanique, (1965), C. Kittel, W. Knight, M. Ruderman, traduit par P. Lallemand, Ed Dunod, Paris.
- Mécanique Classique, (1971), J.J. Moreau, Ed. Masson et Cie, Paris.
- Mécanique générale, (2001), Jean Claude Bône, Michel Boucher, Polycopiés de tronc commun, ECP.
- Quelques Compléments de Mécanique générale, (1997), Jean Pierre Pelle, polycopié ENS pour la préparation à l'agrégation.
- Equations différentielles et systèmes dynamiques, (1999), J. Hubbard, B. West, traduit par V. Gautheron, Ed. Cassini, Paris.

2 RAPPELS DE MATHEMATIQUES

2.1 Calcul Vectoriel

2.1.1 Opérations sur les vecteurs

◇ *Produit scalaire*

○ Définition

Le produit scalaire des deux vecteurs U et V est le nombre réel suivant noté $U \cdot V$:

$$\bullet \quad U \cdot V = \|U\| \|V\| \cos(U, V)$$

○ Propriétés :

- Symétrie : $U \cdot V = V \cdot U$
- Distributivité : $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$
- Multiplication par un réel : $\lambda U \cdot \alpha V = \lambda \alpha U \cdot V$

○ Expression analytique

Dans une base orthonormée (x, y, z) le produit scalaire des deux vecteurs $V_1(x_1, y_1, z_1)$ et $V_2(x_2, y_2, z_2)$ s'écrit :

$$V_1 \cdot V_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

◇ *Produit vectoriel*

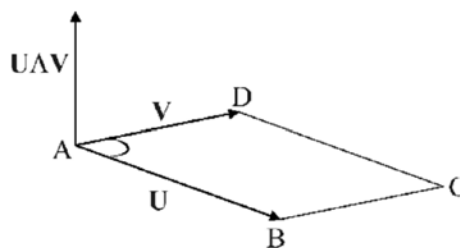
○ Définition

Le produit vectoriel des deux vecteurs U et V est le vecteur noté $U \wedge V$ tel que, $U \wedge V$ soit perpendiculaire au plan (U, V) , le trièdre $(U, V, U \wedge V)$ soit direct, et la norme de $U \wedge V$ soit égale à :

$$\bullet \quad \|U \wedge V\| = \|U\| \|V\| |\sin(U, V)|$$

○ Interprétation géométrique

La norme du produit vectoriel $U \wedge V$, représente la surface du parallélogramme défini par les deux vecteurs U et V :



○ Propriétés

- Antisymétrie : $U \wedge V = -V \wedge U$

- Distributivité par rapport à l'addition : $U \wedge (V + W) = U \wedge V + U \wedge W$
- Multiplication par un réel : $\lambda U \wedge \alpha V = \lambda \alpha (U \wedge V)$
- Application à une base orthonormée directe (x,y,z) :

$$\begin{aligned} x \wedge x &= 0 & y \wedge x &= -z & z \wedge x &= y \\ x \wedge y &= z & y \wedge y &= 0 & z \wedge y &= -x \\ x \wedge z &= -y & y \wedge z &= x & z \wedge z &= 0 \end{aligned}$$

- Double produit vectoriel (Formule de Gibbs) : $U \wedge (V \wedge W) = (U \cdot W)V - (U \cdot V)W$

○ Expression analytique

Dans une base orthonormée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le produit vectoriel des deux vecteurs $V_1(x_1, y_1, z_1)$ et $V_2(x_2, y_2, z_2)$ s'écrit :

$$V_1 \wedge V_2 = (y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2) \vec{x} + (z_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot z_2) \vec{y} + (x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2) \vec{z}$$

◇ *Produit mixte*

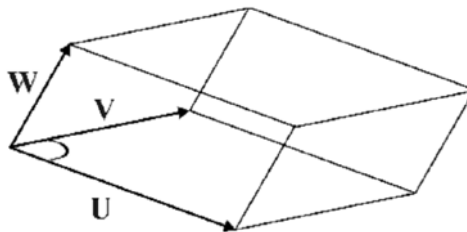
○ Définition

Le produit mixte des trois vecteurs U, V et W est le nombre réel suivant, et noté (U,V,W) :

$$\bullet \quad (U, V, W) = U \cdot (V \wedge W)$$

○ Interprétation géométrique

La valeur absolue du produit mixte (U,V,W) représente le volume du parallélépipède défini par les trois vecteurs, U, V, W.



○ Propriétés

- Permutation des opérateurs : $(U, V, W) = U \cdot (V \wedge W) = (U \wedge V) \cdot W$
- Distributivité par rapport à l'addition : $(U + X, V, W) = (U, V, W) + (X, V, W)$
- Multiplication par un réel : $(\lambda U, \alpha V, \gamma W) = \lambda \alpha \gamma (U, V, W)$
- Permutation des vecteurs : $(U, V, W) = -(V, U, W)$
- Permutation circulaire : $(U, V, W) = (V, W, U) = (W, U, V)$

○ Expression analytique.

Dans une base orthonormée (x,y,z) le produit mixte des trois vecteurs $V_1(x_1, y_1, z_1)$, $V_2(x_2, y_2, z_2)$ et $V_3(x_3, y_3, z_3)$ se calcule comme le déterminant suivant :

$$(V_1, V_2, V_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = -x_3 \cdot y_2 \cdot z_1 + x_2 \cdot y_3 \cdot z_1 + x_3 \cdot y_1 \cdot z_2 - x_1 \cdot y_3 \cdot z_2 - x_2 \cdot y_1 \cdot z_3 + x_1 \cdot y_2 \cdot z_3$$

◇ Division vectorielle

○ Définition

Soient deux vecteurs A et B non nuls et orthogonaux, le résultat de la division vectorielle est l'ensemble des vecteurs X tels que :

$$\bullet \quad A \wedge X = B$$

○ Solution générale

L'ensemble X est défini de la manière suivante, α étant un réel :

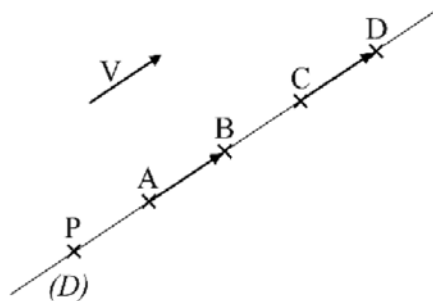
$$\bullet \quad X = \frac{B \wedge A}{A \cdot A} + \alpha \cdot A$$

2.1.2 Champs de vecteurs

◇ Glisseur

○ Définition

Un glisseur est défini par un vecteur V et un point P quelconque de son support et noté (P,V). Un représentant de ce glisseur est un bipoint, appartenant à la droite (D) définie par (P,V). Ici, par exemple, le bipoint AB ou le bipoint CD.

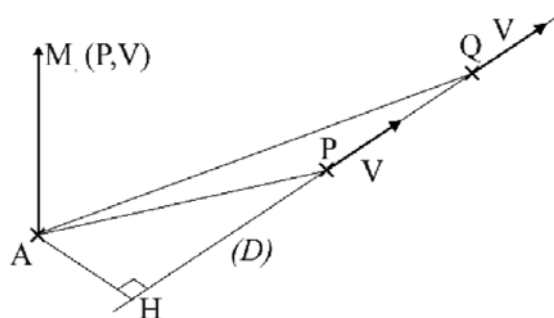


◇ Moment en un point d'un glisseur

○ Définition

On appelle moment au point A du glisseur (P,V), noté $M_A(P,V)$ ou $M_A(V)$ le vecteur suivant :

$$\bullet \quad M_A(V) = AP \wedge V = V \wedge PA$$



○ Interprétation géométrique

Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur la droite (D) définie par le glisseur. La norme du moment du glisseur (P,V) au point A, est égale à :

$$\bullet \quad \|M_A(P,V)\| = \|AH\| \|V\|$$

○ Propriétés

- Le moment au point A du glisseur (P,V) est indépendant du choix du point P sur le support (D) du glisseur.
- Champ des moments :

$$M_B(P,V) = BP \wedge V = (BA + AP) \wedge V = AP \wedge V + BA \wedge V = M_A(P,V) + BA \wedge V$$

$$\boxed{M_B(P,V) = M_A(P,V) + BA \wedge V}$$

◇ *Moment d'un glisseur par rapport à un axe*

○ Définition

On appelle moment par rapport à l'axe $\Delta(A,x)$ du glisseur (P,V) le nombre réel suivant :

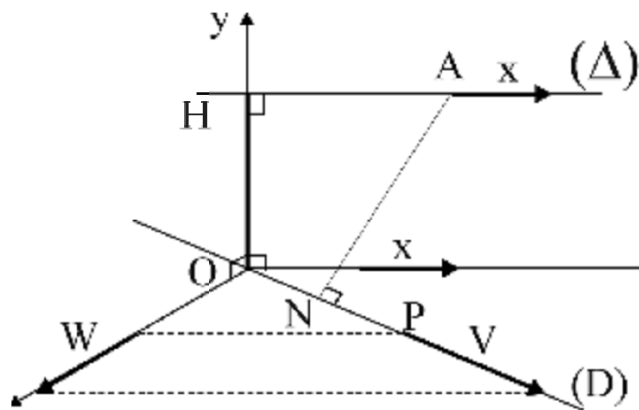
$$\bullet \quad M_{\Delta}(P,V) = x \cdot M_A(P,V) = (x, AP, V)$$

○ Interprétation géométrique

Le moment du glisseur (P,V) par rapport à l'axe $\Delta(A,x)$ est égal au produit du bras de levier OH, par la composante W du vecteur V, perpendiculaire à la fois au bras de levier et à l'axe.

Sur la figure ci-dessous :

$$M_{\Delta}(P,V) = \|HO\| \|W\| \quad \text{et} \quad \|M_A(P,V)\| = \|AN\| \|V\|$$



◇ *Ensembles de glisseurs*

○ Ensemble fini de glisseurs.

Si l'on considère un ensemble fini de n glisseurs (P_i, V_i) , deux grandeurs peuvent être définies, la résultante, R , et le moment au point A, M_A , de l'ensemble fini de glisseurs.

$$\bullet \quad R = \sum_{i=1}^n V_i$$

$$\bullet \quad M_A = \sum_{i=1}^n AP_i \wedge V_i$$

Alors le champ des moments de l'ensemble fini de glisseurs vérifie aussi :

$$\bullet \quad M_B = M_A + R \wedge AB$$

○ Ensemble infini de glisseurs.

Si l'on considère un ensemble infini de glisseurs $(P, F(P))$, où $F(P)$ est une densité de champ de vecteurs définie en tout point P d'un domaine E . Deux grandeurs peuvent être définies, la résultante, R , et le moment au point A , M_A , de l'ensemble infini de glisseurs.

$$\bullet \quad R = \int_{P \in E} F(P) dv$$

$$\bullet \quad M_A = \int_{P \in E} AP \wedge F(P) dv$$

Alors le champ des moments de l'ensemble fini de glisseurs vérifie encore :

$$\bullet \quad M_B = M_A + R \wedge AB$$

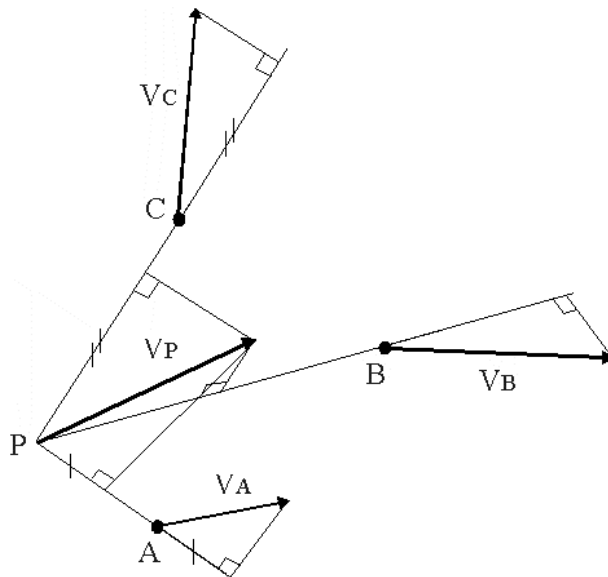
2.1.3 Champ equiprojectif de vecteurs

◇ Définition

Un champ de vecteur V est equiprojectif si : $\forall A, \forall B \quad AB \cdot V_A = AB \cdot V_B$

◇ Propriétés

- Si un champ de vecteur equiprojectif est connu en trois points non alignés de l'espace, alors il est connu en tout point P (voir figure ci-dessous)
- Par ailleurs si deux champs de vecteur V_1 et V_2 sont equiprojectif alors $aV_1 + bV_2$ est equiprojectif aussi quel que soient les deux réels a et b choisis.



2.2 Torseurs

Le torseur est l'outil privilégié de la mécanique du solide. Il est utilisé pour représenter le mouvement d'un solide, à caractériser une action mécanique, à formuler le principe fondamental de la dynamique de manière générale, etc...

2.2.1 Définitions

Un torseur est un ensemble défini par ses deux éléments dits « éléments de réduction » :

- Un vecteur noté R appelé la résultante du torseur
- Un champ de vecteur M vérifiant la relation : $\forall A, \forall B \quad M_B = M_A + R \wedge AB$
- M_A est appelé le moment au point A du torseur T
- Le torseur T se note de la façon suivante au point A :

$$\{T\}_A = \begin{Bmatrix} R \\ M_A \end{Bmatrix}$$

◇ Champ des moments d'un torseur.

Le champ des moments d'un torseur est equiprojectif et réciproquement, tout champ de vecteur equiprojectif est le champ des moments d'un torseur.

○ Démonstration :

$$\text{Si l'on prend le Torseur } T \text{ tel que : } \{T\}_A = \begin{Bmatrix} R \\ M_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \\ M_B \end{Bmatrix}$$

Le champ des moments de ce torseur vérifie par définition : $M_B = M_A + BA \wedge R$

En appliquant un produit scalaire par AB à cette relation, on retrouve bien que ce champ des moments est equiprojectif.

$$M_B \cdot AB = M_A \cdot AB + \underbrace{(BA \wedge R) \cdot AB}_{=0}$$

○ Remarque :

Si un solide est indéformable, le champ des vecteurs vitesse des points de ce solide est nécessairement equiprojectif. Par conséquent il est représentable par un torseur, dont le vecteur moment est le vecteur vitesse du point considéré. On verra plus loin que la résultante du torseur est aussi le vecteur rotation de ce solide.

◇ Torseur associé à un ensemble de glisseur

Un ensemble de glisseur fini ou infini répond à la définition du torseur, par conséquent :

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Ensemble fini de glisseurs : } \{T\}_A &= \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n V_i \\ \sum_{i=1}^n AP_i \wedge V_i \end{Bmatrix} \\ \bullet \text{ Ensemble infini de glisseurs : } \{T\}_A &= \begin{Bmatrix} \int_{P \in E} F(P) dv \\ \int_{P \in E} AP \wedge F(P) dv \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

◇ *Invariants du torseur.*

Entre deux points quelconques A et B de l'espace, deux composantes du torseur sont conservées, qui constitue les deux invariants du torseur :

- Premier invariant : La résultante R
- Second invariant : La projection du moment du torseur sur sa résultante :

$$\forall A, \forall B \quad M_B = M_A + R \wedge AB \Rightarrow R \cdot M_A = R \cdot M_B$$

◇ *Point central, axe central, moment central d'un torseur*

○ Point central :

Point où le moment du torseur à la même direction que la résultante.

○ Axe central :

Ensemble des points centraux

On se propose de montrer que les points centraux sont alignés sur un même axe, pour un torseur T, qui se note au point A :

$$\{T\}_A = \begin{Bmatrix} R \\ M_A \end{Bmatrix}$$

Le moment au point A du torseur peut se décomposer en deux termes, U et W, où U est la composante de M_A selon R et W est orthogonal à R alors :

$$M_A = U + W \text{ avec } U \wedge R = 0 \text{ et } W \cdot R = 0$$

Si B est un point central, du fait du second invariant, $\forall A, M_B = U$.

Comme $M_B = M_A + R \wedge AB \Rightarrow U = U + W + R \wedge AB \Rightarrow R \wedge AB = -W$. Par division vectorielle, on en déduit :

$$AB = \frac{R \wedge M_A}{R^2} + \alpha R \quad \text{ainsi si l'on pose : } AH = \frac{R \wedge M_A}{R^2} \text{ alors les points centraux s'alignent sur}$$

une droite de même direction que la résultante du torseur R et passant par le point H.

○ Moment central :

Le moment central est le moment du torseur en un point quelconque de son axe central. La norme du moment d'un torseur est minimale pour les points centraux. Par conséquent si le moment d'un torseur est nul en un point, ce point appartient à l'axe central. L'axe central se définit alors à l'aide de ce point et de la résultante.

◇ *Symétrie du champ des moments d'un torseur. Origine du mot « torseur ».*

Soit $R(B,x,y,z)$ un repère orthonormé direct, dont l'axe (B,z) est confondu avec l'axe central d'un torseur T. Posons alors :

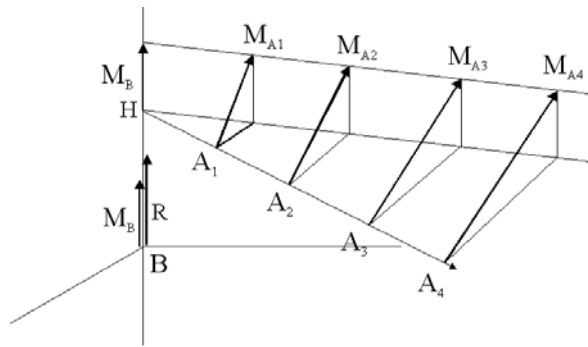
$$\{T\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{R} = R.z \\ \vec{M}_B = M_B.z \end{Bmatrix}$$

Si l'on choisit un axe (H,u) quelconque dans un plan orthogonal à z et qui rencontre l'axe (B,z) au point H, et un nouveau repère associé à cet axe $R'(H,u,v,z)$, alors pour un point A quelconque appartenant à cet axe :

$$BH = h.z \text{ et } HA = r.u \Rightarrow \vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \wedge \vec{R} = Mb.z + R.r.v$$

D'où l'expression du moment du torseur T au point A :

$$\vec{M}_A = Mb.z + R.r.v$$



- Lorsque la distance r de A à l'axe central (B,z) est nulle $M_A = M_B$.
- Lorsque la distance r augmente le moment du torseur au point A tourne progressivement dans le plan (v,z) jusqu'à s'aligner avec la direction v.
- Ainsi, observe t'on une « torsion » du moment du torseur au point A, lorsque le point A s'éloigne de l'axe central du torseur, d'où l'origine du mot torseur.

2.2.2 Opérations sur les torseurs

◇ Addition

La somme de deux torseurs $\{T\}$ et $\{T'\}$ est le torseur $\{T+T'\}$. Pour faire la somme de deux torseurs, il faut au préalable les écrire au même point :

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} R \\ M_A \end{Bmatrix} \text{ et } \{T'\} = \begin{Bmatrix} R' \\ M'_A \end{Bmatrix} \quad \{T\} + \{T'\} = \{T + T'\}$$

On vérifie ensuite que $\{T+T'\}$ est bien un torseur. C'est-à-dire que son champ des moments vérifie bien la relation suivante :

$$M_B \{T + T'\} = M_A \{T + T'\} + BA \wedge R \{T + T'\} \quad \forall A, \forall B$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} M_B \{T + T'\} &= M_B \{T\} + M_B \{T'\} = (M_A \{T\} + BA \wedge R \{T\}) + (M_A \{T'\} + BA \wedge R \{T'\}) \\ M_B \{T + T'\} &= M_A \{T\} + M_A \{T'\} + BA \wedge (R \{T\} + R \{T'\}) = M_A \{T + T'\} + BA \wedge R \{T + T'\} \end{aligned}$$

◇ Multiplication par un réel

Soit $\{T\}$ un torseur et λ un réel :

$$\lambda \cdot \{T\} = \begin{Bmatrix} \lambda \cdot R \\ \lambda M_A \end{Bmatrix} = \{\lambda T\}$$

◇ Décomposition

○ Torseur Couple

Un torseur couple est un torseur dont la résultante est nulle.

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_A \end{Bmatrix}$$

Le moment d'un torseur couple est le même en tout point de l'espace.

Un torseur couple peut être représenté par un ensemble de glisseur de direction parallèle, de même norme et de sens contraire. En effet, si l'on considère deux glisseurs (P,V) et (A,-V), alors le torseur associé à cet ensemble de glisseur vaut :

$$\{T\} = \left\{ \begin{matrix} -V \\ 0 \end{matrix} \right\}_A + \left\{ \begin{matrix} V \\ AP \wedge V \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ M_A = AP \wedge V \end{matrix} \right\}_A$$

○ Torseur à résultante

Un torseur à résultante est un torseur dont le moment central est nul.

$$\{T\} = \left\{ \begin{matrix} R \\ 0 \end{matrix} \right\}_B \quad \text{avec} \quad R \neq 0 \quad \text{et} \quad B \in \Delta, \text{ où } \Delta \text{ est l'axe central du torseur.}$$

○ Décomposition d'un torseur

Tout torseur est donc en général la somme d'un torseur couple et d'un torseur résultante. En effet, on peut écrire:

$$\{T\} = \left\{ \begin{matrix} R \\ M_A \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} R \\ 0 \end{matrix} \right\}_A + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ M_A \end{matrix} \right\}_A$$

◇ Produit ou co-moment de deux torseurs

Le produit de deux torseurs $\{T\}$ et $\{T'\}$ définis au même point A, est le nombre réel suivant :

$$\{T\} = \left\{ \begin{matrix} R \\ M_A \end{matrix} \right\}_A \quad \text{et} \quad \{T'\} = \left\{ \begin{matrix} R' \\ M'_A \end{matrix} \right\}_A \quad \{T\} \cdot \{T'\} = R \cdot M'_A + R' \cdot M_A$$

En outre, le produit de deux torseurs est commutatif : $\{T\} \cdot \{T'\} = \{T'\} \cdot \{T\}$

◇ Torseur à structure

Un torseur à structure est un torseur défini à partir d'une densité de champ infini de vecteurs $F(P)$, c'est-à-dire de la forme :

$$\{T[F(P)]\} = \left\{ \begin{matrix} \int_{P \in E} F(P) dv \\ \int_{P \in E} AP \wedge F(P) dv \end{matrix} \right\}_A$$

Le produit d'un torseur à structure par un torseur quelconque se met sous la forme :

$$\{T[F(P)]\} \cdot \{T\} = \left\{ \begin{matrix} \int_{P \in E} F(P) dv \\ \int_{P \in E} AP \wedge F(P) dv \end{matrix} \right\}_A \cdot \left\{ \begin{matrix} R \\ M_A \end{matrix} \right\}_A = R \cdot \int_{P \in E} AP \wedge F(P) dv + M_A \cdot \int_{P \in E} F(P) dv$$

$$\{T[F(P)]\} \cdot \{T\} = \int_{P \in E} (R, AP, F(P)) dv + \int_{P \in E} (M_P + R \wedge PA) \cdot F(P) dv$$

$$\{T[F(P)]\} \cdot \{T\} = \int_{P \in E} (R, AP, F(P)) dv + \int_{P \in E} M_P \cdot F(P) dv + \int_{P \in E} (R, PA, F(P)) dv$$

$$\text{Soit finalement : } \{T[F(P)]\} \cdot \{T\} = \int_{P \in E} M_P \cdot F(P) dv$$

2.3 Dérivation vectorielle

2.3.1 Dérivée d'un vecteur

◇ Définition

Par définition la dérivée d'un vecteur $V(t)$ par rapport à la variable t , dans l'espace vectoriel E est le vecteur suivant :

$$\left[\frac{d}{dt} V \right]_E = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(t+h) - V(t)}{h}$$

Par conséquent, la dérivée d'un vecteur V , dépend du choix de l'espace vectoriel de référence dans lequel est exprimé le vecteur. En pratique, il est donc nécessaire de toujours préciser par rapport à quel référentiel du mouvement est effectuée la dérivée.

◇ Propriétés

- Somme : $\left[\frac{d}{dt} (V_1 + V_2) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} V_1 \right]_R + \left[\frac{d}{dt} V_2 \right]_R$
- Produit par une fonction scalaire f : $\left[\frac{d}{dt} f(t)V \right]_R = f(t) \left[\frac{d}{dt} V \right]_R + \frac{df}{dt} V$
- Dérivée du produit scalaire : $\frac{d}{dt} (V_1 \cdot V_2) = \left[\frac{d}{dt} V_1 \right]_R \cdot V_2 + V_1 \cdot \left[\frac{d}{dt} V_2 \right]_R$
- Dérivée d'un produit vectoriel : $\left[\frac{d}{dt} (V_1 \wedge V_2) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} V_1 \right]_R \wedge V_2 + V_1 \wedge \left[\frac{d}{dt} V_2 \right]_R$
- Dérivée d'un produit mixte :

$$\frac{d}{dt} (V_1, V_2, V_3) = \left(\left[\frac{d}{dt} V_1 \right]_R, V_2, V_3 \right) + \left(V_1, \left[\frac{d}{dt} V_2 \right]_R, V_3 \right) + \left(V_1, V_2, \left[\frac{d}{dt} V_3 \right]_R \right)$$
- Dérivée d'une fonction de fonction : $\left[\frac{d}{dt} V[\theta(t)] \right]_R = \left[\frac{d}{d\theta} V \right]_R \frac{d\theta}{dt}$

2.3.2 Changement de base de dérivation

◇ Vocabulaire

La base dans laquelle on exprime les composantes des vecteurs sera indifféremment appelée, base de calcul ou base de projection.

La base dans laquelle est effectuée la dérivation, sera indifféremment appelée base de dérivation, ou référentiel du mouvement.

◇ Dérivée d'un vecteur exprimé dans la base de dérivation

Dans ce cas particulier, la base de projection est confondue avec le référentiel du mouvement choisi. Alors, si un vecteur V s'exprime dans cette base $R(0, x, y, z)$ à l'aide de trois composantes a, b, c , comme les trois vecteurs unitaires de cette base sont constants :

$$\left[\frac{d}{dt} V \right]_R = \frac{da}{dt} x + \frac{db}{dt} y + \frac{dc}{dt} z$$

◇ *Dérivée d'un vecteur exprimé dans une base distincte de la base de dérivation.*

Supposons une base de projection $R_1(x_1, x_2, x_3)$ dans laquelle le vecteur V est exprimé à l'aide de trois composantes (a_1, a_2, a_3) . Supposons aussi une base $R(e_1, e_2, e_3)$ attachée au référentiel du mouvement et distincte de la première.

Lors de la dérivation du vecteur V par rapport au référentiel du mouvement R , il faut tenir compte du fait que les vecteurs unitaires de la base R_1 dans laquelle est exprimé le vecteur V ne sont pas constants dans la base de dérivation R .

Ainsi :

$$\left[\frac{d}{dt} V \right]_R = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{da_i}{dt} x_i + a_i \left[\frac{dx_i}{dt} \right]_R \right)$$

Soit en rassemblant les termes :

$$\left[\frac{d}{dt} V \right]_R = \left[\frac{d}{dt} V \right]_{R1} + \sum_{i=1}^3 a_i \left[\frac{dx_i}{dt} \right]_R$$

A ce stade nous avons besoin de l'expression des dérivées des vecteurs unitaires de la base $R1$ par rapport au référentiel du mouvement R . L'orientation d'une base par rapport à une autre se définit à l'aide trois angles de rotation $(\alpha_k, k=1,3)$. Alors :

$$\left[dx_i \right]_R = \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} \right]_R d\alpha_k \quad \forall i \quad \text{et} \quad \left[\frac{dx_i}{dt} \right]_R = \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} \right]_R \frac{d\alpha_k}{dt} \quad \forall i$$

Par ailleurs, les paramètres α_k étant des angles de rotation, on a :

$$\left[\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} \right]_R = e_k \wedge x_i.$$

$$\text{Par suite : } \left[\frac{dx_i}{dt} \right]_R = \sum_{k=1}^3 \frac{d\alpha_k}{dt} e_k \wedge x_i \quad \forall i$$

Si l'on définit un vecteur Ω de la façon suivante :

$$\vec{\Omega}(R1/R) = \sum_{k=1}^3 \frac{d\alpha_k}{dt} e_k \quad \text{il vient} \quad \left[\frac{dx_i}{dt} \right]_R = \vec{\Omega}(R1/R) \wedge x_i$$

On en déduit alors la formule de changement de base de dérivation :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{V} \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \vec{V} \right]_{R1} + \vec{\Omega}(R1/R) \wedge \vec{V}$$

Où Ω est le vecteur vitesse de rotation de la base $R1$ par rapport à la base R .

◇ *Propriétés du vecteur vitesse de rotation.*

- Composition des rotations : $\vec{\Omega}(R3/R1) = \vec{\Omega}(R3/R2) + \vec{\Omega}(R2/R1)$

Etant donné un vecteur V , on peut écrire successivement :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{V} \right]_{R1} = \left[\frac{d}{dt} \vec{V} \right]_{R2} + \vec{\Omega}(R2/R1) \wedge \vec{V}$$

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{V} \right]_{R2} = \left[\frac{d}{dt} \vec{V} \right]_{R3} + \vec{\Omega}(R3/R2) \wedge \vec{V}$$

Alors :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{V} \right]_{R1} = \left[\frac{d}{dt} \vec{V} \right]_{R3} + \left(\vec{\Omega}(R3/R2) + \vec{\Omega}(R2/R1) \right) \wedge \vec{V}$$

Soit :

$$\vec{\Omega}(R3/R1) = \vec{\Omega}(R3/R2) + \vec{\Omega}(R2/R1)$$

- Inversion des bases de dérivations : $\vec{\Omega}(R1/R2) = -\vec{\Omega}(R2/R1)$

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{V} \right]_{R1} = \left[\frac{d}{dt} \vec{V} \right]_{R2} + \vec{\Omega}(R2/R1) \wedge \vec{V}$$

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{V} \right]_{R2} = \left[\frac{d}{dt} \vec{V} \right]_{R1} - \vec{\Omega}(R2/R1) \wedge \vec{V}$$

Soit :

$$\vec{\Omega}(R1/R2) = -\vec{\Omega}(R2/R1)$$

2.4 A retenir

◇ Champ équiprojectif :

- Un champ de vecteur V est équiprojectif si : $\forall A, \forall B \quad \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}_A = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}_B$

◇ Torseur : $\{T\} = \begin{Bmatrix} R \\ M_A \end{Bmatrix}$

- R (résultante), M (champ des moments) tel que : $\forall A, \forall B \quad M_B = M_A + R \wedge AB$
- Le champ des moments d'un torseur est équiprojectif

◇ Produit de deux torseurs définis au même point A :

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} R \\ M_A \end{Bmatrix} \text{ et } \{T'\} = \begin{Bmatrix} R' \\ M'_A \end{Bmatrix} \quad \{T\} \cdot \{T'\} = R \cdot M'_A + R' \cdot M_A$$

◇ Invariants du torseur

- Premier invariant : La résultante R
- Second invariant : La projection du moment du torseur sur sa résultante.

◇ Axe et point centraux

Un point est dit central pour le torseur T , si en ce point son moment et sa résultante ont même direction. Les points centraux s'alignent sur un axe, dit axe central. La norme du moment est minimale sur l'axe central. La direction de l'axe central est celle de la résultante, et l'axe passe par le point H , défini à partir d'un point A quelconque par :

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} R \\ M_A \end{Bmatrix} \quad AH = \frac{R \wedge M_A}{R^2}$$

◇ Changement de base de dérivation

Si le mouvement d'une base $R_1(x_1, x_2, x_3)$ par rapport à un référentiel $R(e_1, e_2, e_3)$ est défini par trois angles $(\alpha_k, k=1, 2, 3)$.

- Dérivée des vecteurs de la base R_1 par rapport au référentiel R : $\left[\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} \right]_R = e_k \wedge x_i$
- Vecteur vitesse de rotation de R_1/R : $\vec{\Omega}(R_1/R) = \sum_{k=1}^3 \frac{d\alpha_k}{dt} e_k$
- Composition des rotations : $\vec{\Omega}(R_3/R_1) = \vec{\Omega}(R_3/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_1)$
- Changement de base de dérivation : $\left[\frac{d}{dt} \vec{V} \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \vec{V} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}$

3 CINEMATIQUE

3.1 Rappels

3.1.1 Cinématique du point

On rappelle ici les définitions de la position, de la vitesse et de l'accélération d'un point P par rapport à un repère $R(O,x,y,z)$.

◇ Vecteur position d'un point

Le vecteur position du point P dans le repère $R(O,x,y,z)$, à l'instant t , est le vecteur $\overrightarrow{OP}(t)$. La trajectoire (T) du point P est l'ensemble des points $P(t)$ obtenu lorsque t varie.

◇ Vecteur vitesse d'un point

Le vecteur vitesse du point P par rapport au repère $R(O,x,y,z)$, à l'instant t , est la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OP}(t)$ par rapport à t , dans R .

$$\vec{V}(P/R) = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OP}(t) \right]_R$$

Le vecteur vitesse du point P à l'instant t est tangent à la trajectoire en $P(t)$

Si l'on considère un point A fixe dans R , et le point $M(t)$ tel que : $\overrightarrow{AM}(t) = \vec{V}(P/R)_t$, alors la trajectoire (H) du point M est appelée hodographe relatif au point A du vecteur vitesse de P par rapport au repère R .

◇ Vecteur accélération d'un point

Le vecteur accélération du point P par rapport au repère $R(O,x,y,z)$, à l'instant t , est la dérivée du vecteur vitesse $\vec{V}(P/R)$ par rapport à t , dans R .

$$\vec{\Gamma}(P/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(P/R) \right]_R$$

Le vecteur accélération du point P par rapport au repère R à l'instant t est tangent à l'hodographe (H) du vecteur vitesse du point P au point $M(t)$.

3.2 Le solide indéformable

3.2.1 Définition

Un solide est dit indéformable lorsque quels que soient les points A et B de ce solide, la distance AB reste constante au cours du mouvement. On se limitera par la suite à appeler « solide » un solide indéformable.



3.2.2 Equivalence Repère-Solide

Dans un repère, la position relative des axes est invariante au cours du temps. C'est pourquoi un repère est équivalent à un solide. L'étude du mouvement du solide S2 par rapport au solide S1 est identique à l'étude du mouvement du repère R2 attaché au solide S2 par rapport au repère R1 attaché au solide S1.

3.3 Paramétrage de la position relative de deux solides

Positionner le solide 2 par rapport au solide 1 revient donc à positionner le repère R2(O2,x2,y2,z2) attaché au solide 2, par rapport au repère R1(O1,x1,y1,z1) par rapport au solide 1.

La position du repère R2(O2,x2,y2,z2) par rapport à R1(O1,x1,y1,z1) est complètement déterminée si l'on se fixe :

- **les coordonnées de l'origine** O2 du repère R2(O2,x2,y2,z2) dans le repère R1(O1,x1,y1,z1). Il existe plusieurs façons de définir ces coordonnées (cartésienne, cylindrique et sphérique). Dans tous les cas 3 paramètres indépendants sont nécessaires pour positionner O2 dans R1(O1,x1,y1,z1).
- **l'orientation de la base** R2(O2,x2,y2,z2) par rapport à R1(O1,x1,y1,z1). La base R2(O2,x2,y2,z2) est définie par 2 vecteurs (6 paramètres) unitaires (2 équations) et orthogonaux (1 équation), le troisième vecteur se déduisant des deux autres par un produit vectoriel. Trois paramètres indépendants sont également nécessaires pour positionner l'orientation de la base (x2,y2,z2) par rapport à la base (x1,y1,z1).

3.3.1 Définition des coordonnées de l'origine d'un repère.

On cherche en premier lieu à positionner l'origine O2 du repère R2(O2,x2,y2,z2), dans un repère R1(O1,x,y,z). Il existe trois systèmes de coordonnées classiques, les coordonnées, cartésiennes, cylindriques et sphériques.

n.b. L'origine O2 du repère R2, est choisie de façon arbitraire.

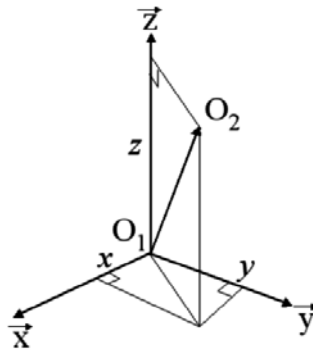
◇ Coordonnées cartésiennes

Les coordonnées cartésiennes, notées (x,y,z) du point O2 dans le repère R1(O1,x,y,z) sont les projections du vecteur $\vec{O_1O_2}$ sur chacun des axes (x,y,z).

$$\vec{O_1O_2} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z} \quad x = \left(\vec{O_1O_2} \cdot \vec{x} \right) \quad y = \left(\vec{O_1O_2} \cdot \vec{y} \right) \quad z = \left(\vec{O_1O_2} \cdot \vec{z} \right)$$

En coordonnées cartésiennes, la vitesse du point O2, par rapport au repère R1(O1,x,y,z) s'écrit:

$$\frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{x} + \frac{dy}{dt}\vec{y} + \frac{dz}{dt}\vec{z}$$



◇ Coordonnées cylindriques

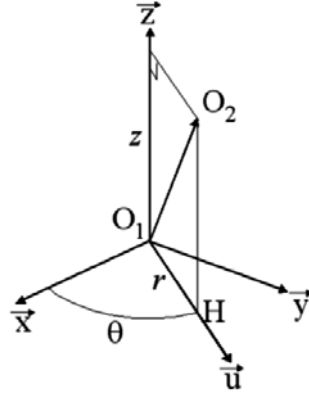
Pour définir les coordonnées cylindriques, il faut d'abord définir la projection H du point O_2 dans le plan (O_1, x, y) , puis un vecteur unitaire \vec{u} de direction O_1H .

Les coordonnées cylindriques du point O_2 sont alors

$r = \overline{O_1H}$, la mesure algébrique de la distance de O_1 à H

$\theta = (\vec{x}, \vec{u})$, angle orienté dans le plan de normale z

z , projection de O_1O_2 sur l'axe z .



Relation entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques : $x = r \cdot \cos \theta$ et $y = r \cdot \sin \theta$

En coordonnées cylindriques, la vitesse du point O_2 , par rapport au repère $R_1(O_1, x, y, z)$ s'écrit:

$$\frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u} + r \cdot \frac{d\theta}{dt} \vec{v} + \frac{dz}{dt} \vec{z}, \text{ où } \vec{v} = \vec{z} \wedge \vec{u}$$

En effet, en appliquant la formule de changement de base de dérivation :

$$\left[\frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} \right]_{B_o=(x,y,z)} = \left[\frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} \right]_{B_1=(u,v,z)} + \vec{\Omega}(B_1/B_o) \wedge \vec{O_1O_2}$$

Soit

$$\left[\frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} \right]_{B_o=(x,y,z)} = \left(\frac{dr}{dt} \vec{u} + \frac{dz}{dt} \vec{z} \right) + \left(\frac{d\theta}{dt} \vec{z} \right) \wedge (r \vec{u} + z \vec{z}) = \frac{dr}{dt} \vec{u} + \frac{dz}{dt} \vec{z} + r \frac{d\theta}{dt} \vec{v}$$

◇ Coordonnées sphériques

Pour définir les coordonnées sphériques, il faut d'abord définir la projection H du point O_2 dans le plan (O_1, x, y) , puis un vecteur unitaire \vec{u} de direction O_1H , et enfin un vecteur unitaire \vec{w} de direction O_1O_2 .

Les coordonnées sphériques du point O_2 sont alors

$\rho = \overline{O_1O_2}$, la mesure algébrique de la distance de O_1 à O_2

$\theta = (\vec{x}, \vec{u})$, angle orienté dans le plan de normale z

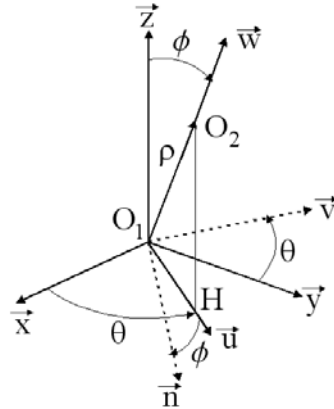
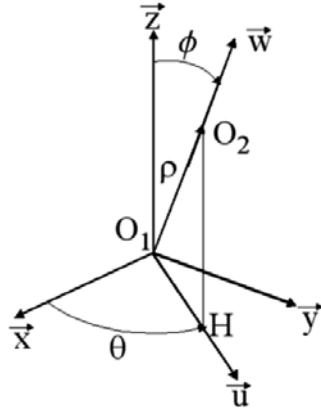
$\phi = (\vec{z}, \vec{w})$, angle orienté dans le plan de normale \vec{v} , où $\vec{v} = \vec{z} \wedge \vec{u}$

Relation entre les coordonnées cartésiennes et sphériques :

$$x = \rho \cdot \sin \phi \cdot \cos \theta, \quad y = \rho \cdot \sin \phi \cdot \sin \theta \quad \text{et} \quad z = \rho \cdot \cos \phi$$

En coordonnées sphériques, la vitesse du point O2, par rapport au repère R1(O1,x,y,z) s'écrit :

$$\frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \vec{w} + \rho \cdot \sin \phi \cdot \frac{d\theta}{dt} \vec{v} - \rho \cdot \sin \phi \cdot \frac{d\phi}{dt} \vec{z}$$



En effet, en appliquant la formule de changement de base de dérivation :

$$\left[\frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} \right]_{B_o=(x,y,z)} = \left[\frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} \right]_{B_1=(n,v,w)} + \vec{\Omega}(B_1/B_o) \wedge \vec{O_1O_2}$$

Soit :

$$\left[\frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} \right]_{B_o=(x,y,z)} = \frac{d\rho}{dt} \vec{w} + \left(\frac{d\theta}{dt} \vec{z} + \frac{d\phi}{dt} \vec{v} \right) \wedge (\rho \vec{w})$$

$$\left[\frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} \right]_{B_o=(x,y,z)} = \frac{d\rho}{dt} \vec{w} + \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \vec{z} + \frac{d\phi}{dt} \vec{v} \right) \wedge (\cos \phi \vec{z} + \sin \phi \vec{u})$$

D'où le résultat.

3.3.2 Définition de l'orientation relative de deux bases

Dans un deuxième temps on cherche à définir l'orientation de la base (X,Y,Z) du repère R2(O2,X,Y,Y) par rapport à la base (x1,y1,z1) du repère R1(O1,x1,y1,z1). Cette orientation est toujours définie par trois paramètres. La méthode la plus générale consiste à représenter cette orientation par une rotation autour d'un vecteur axial unitaire. C'est ce que l'on appelle la paramétrisation axio-angulaire. D'autres méthodes de paramétrage existent également, qui permettent de décomposer la rotation de la base 1 par rapport à celle de la base 2 en rotations élémentaires autour d'axes connus. La plus communément utilisée est le paramétrage par les angles d'Euler. Mais on trouvera aussi les angles de Cardan dit aussi de « roulis, tangage, lacet ».

◇ Paramétrisation axio-angulaire des rotations

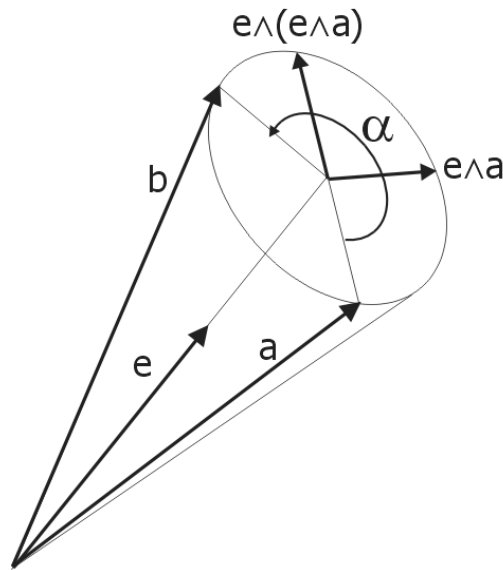
Notons \underline{Q} l'opérateur rotation d'angle α autour d'un axe défini par le vecteur unitaire \vec{e} , qui transforme un vecteur \vec{a} en un vecteur \vec{b} . On peut montrer que :

$$\vec{b} = \underline{Q}(\vec{a}) = (\cos \alpha) \vec{a} + (1 - \cos \alpha) (\vec{e} \cdot \vec{a}) \vec{e} + \sin(\alpha) (\vec{e} \wedge \vec{a})$$

L'opérateur \underline{Q} peut alors s'écrire :

$$\underline{Q} = (\cos \alpha) \underline{I} + (1 - \cos \alpha) \vec{e} \otimes \vec{e} + \sin(\alpha) \vec{e}^{\wedge}$$

Où l'opérateur \vec{e}^{\wedge} est tel que $\vec{e}^{\wedge}(\vec{v}) = \vec{e} \wedge \vec{v} \quad \forall \vec{v}$



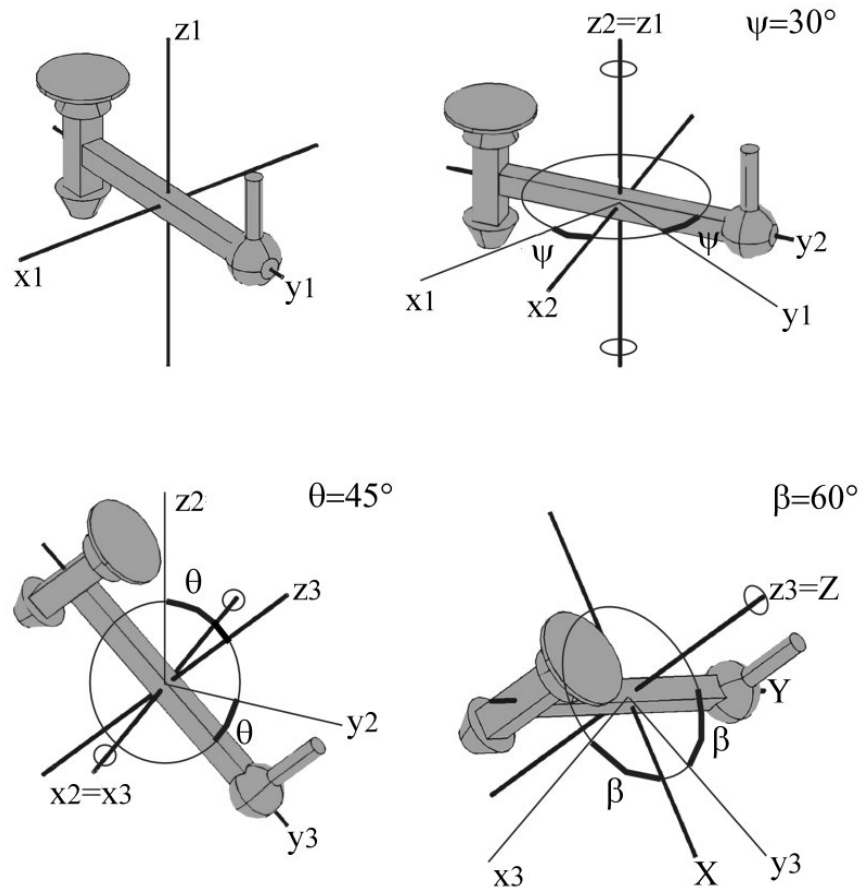
◇ Angles d'Euler

Les trois angles d'Euler correspondent à la composition de trois rotations planes successives qui permettent de faire coïncider la base (x_1, y_1, z_1) avec la base (X, Y, Z) .

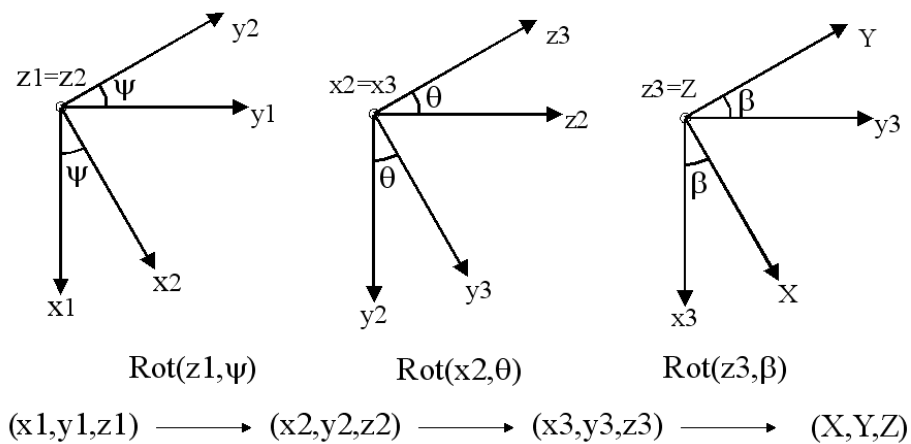
La première rotation d'angle ψ , autour de l'axe z_1 permet de passer à une première base intermédiaire $(x_2, y_2, z_2=z_1)$. L'angle ψ est appelé « angle de précession ».

Une seconde rotation d'angle θ , est alors appliquée autour de l'axe x_2 , de la première base intermédiaire, ce qui permet de définir une seconde base intermédiaire $(x_3=x_2, y_3, z_3)$. L'angle θ est appelé « angle de nutation ».

Une dernière rotation d'angle β est appliquée autour de l'axe z_3 de la seconde base intermédiaire, ce qui permet de positionner la base $(X, Y, Z=z_3)$. L'angle β est appelé « angle de rotation propre ».



La composition de rotations planes successives permet de dessiner des figures de projection qui sont souvent très utiles pour la résolution des problèmes.



Figures de projection correspondant aux trois angles d'Euler

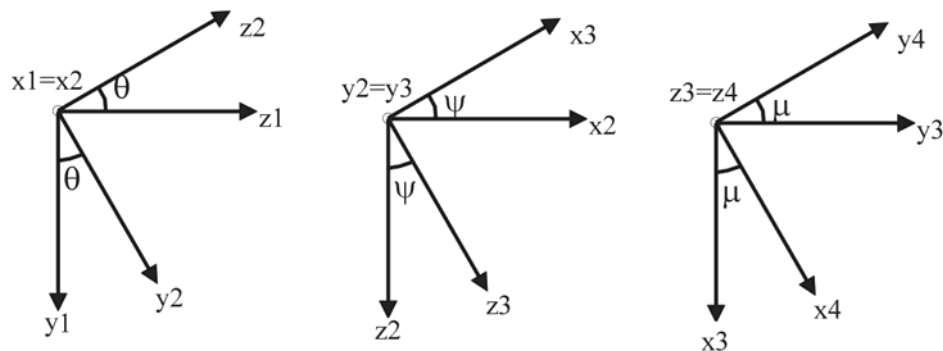
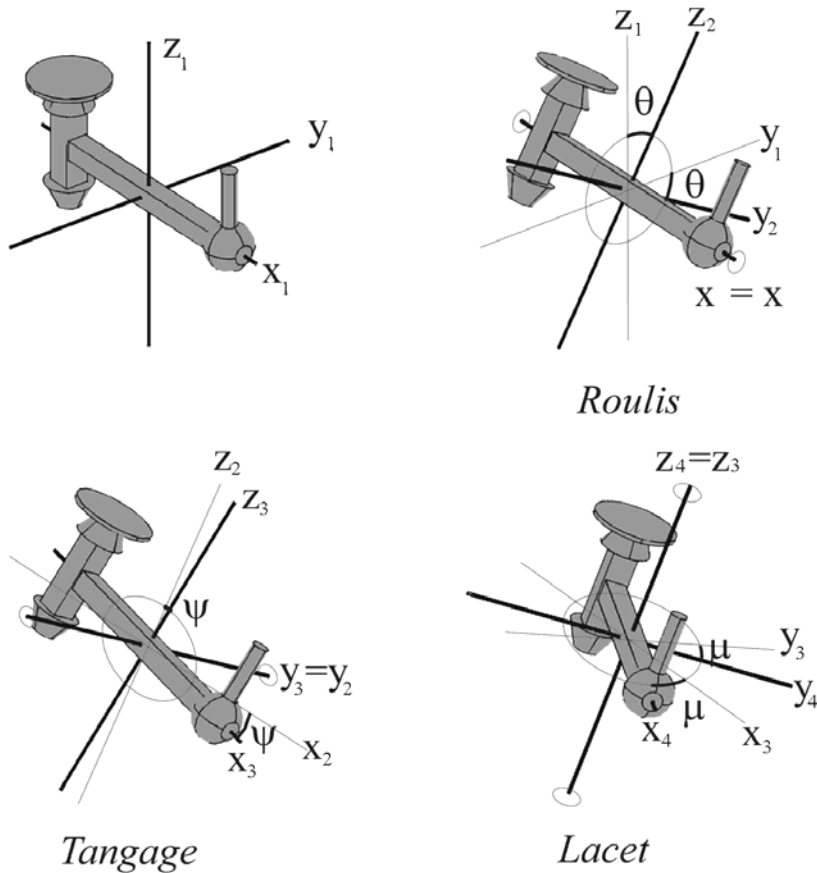
◇ Angles de Cardan

Les trois angles de cardan, ou « roulis, tangage, lacet » correspondent à la composition de trois rotations planes successives qui permettent de faire coïncider la base $(x1, y1, z1)$ avec la base $(x4, y4, z4)$.

La première rotation d'angle θ , autour de l'axe $x1$ permet de passer à une première base intermédiaire $(x2=x1, y2, z2=z1)$. L'angle θ est appelé « angle de roulis ».

Une seconde rotation d'angle ψ , est alors appliquée autour de l'axe $y2$, de la première base intermédiaire, ce qui permet de définir une seconde base intermédiaire $(x3, y3=y2, z3)$. L'angle ψ est appelé « angle de tangage ».

Une dernière rotation d'angle μ est appliquée autour de l'axe z_3 de la seconde base intermédiaire, ce qui permet de positionner la base $(x_4, y_4, z_4=z_3)$. L'angle μ est appelé « angle de lacet ».



Figures de projection correspondant aux trois angles de Cardan

Ce paramétrage est habituellement employé pour paramétrer de petits mouvements du solide autour d'une base (x_1, y_1, z_1) définie à l'aide de la trajectoire du centre de gravité du solide dans le référentiel du mouvement R. La direction x_1 , axe de roulis, est confondue avec la direction du vecteur vitesse du point O1 par rapport au référentiel R. La direction y_1 , axe de tangage, est orthogonale à x_1 , dans le plan local défini par la trajectoire du point O1. La direction z_1 , axe de lacet, est orthogonale au plan local défini par la trajectoire du point O1.

3.4 Cinématique du solide

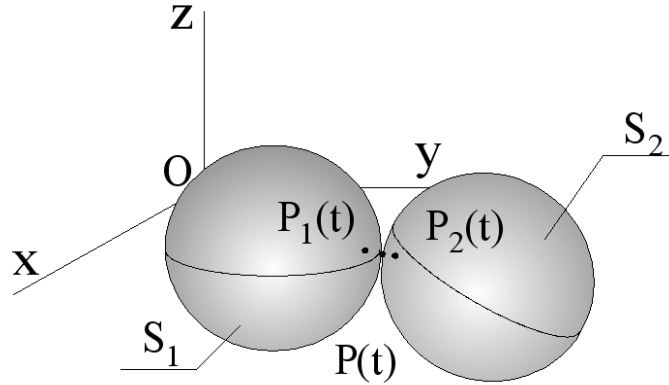
3.4.1 Introduction, notations

Soit un point P1 d'un solide S1 en mouvement par rapport au repère R(O,x,y,z). Les vecteurs vitesse et accélération du point P1 par rapport au repère R sont alors notés :

$$\vec{V}(P \in S1 / R) \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}(P \in S1 / R)$$

Cette notation permet de distinguer la vitesse d'un point appartenant à un solide de la vitesse d'un point de l'espace n'appartenant à aucun solide, comme par exemple le point de contact P entre les solides S1 et S2. La vitesse du point P sera alors notée :

$$\vec{V}(P / R)$$



3.4.2 Champ des vecteurs vitesse des points d'un solide : torseur cinématique

La formule de changement de base de dérivation, permet de définir la vitesse d'un point d'un solide, par rapport au référentiel du mouvement.

Supposons un référentiel du mouvement $R1(O1, x1, y1, z1)$ et un solide $S2$ en mouvement par rapport à ce référentiel, auquel est attaché un repère $R2(O2, x2, y2, z2)$. La base attachée à $R2$ a une vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ par rapport à la base attachée à $R1$. Supposons deux points quelconques A et B du solide $S2$, alors :

$$\left(\frac{d \vec{O_1 A}}{dt} \right)_{R1} = \left(\frac{d \vec{O_1 O_2}}{dt} \right)_{R1} + \left(\frac{d \vec{O_2 A}}{dt} \right)_{R1} = \left(\frac{d \vec{O_1 O_2}}{dt} \right)_{R1} + \left(\frac{d \vec{O_2 A}}{dt} \right)_{R2} + \vec{\Omega}(R2 / R1) \wedge \vec{O_2 A}$$

De même :

$$\left(\frac{d \vec{O_1 B}}{dt} \right)_{R1} = \left(\frac{d \vec{O_1 O_2}}{dt} \right)_{R1} + \left(\frac{d \vec{O_2 B}}{dt} \right)_{R1} = \left(\frac{d \vec{O_1 O_2}}{dt} \right)_{R1} + \left(\frac{d \vec{O_2 B}}{dt} \right)_{R2} + \vec{\Omega}(R2 / R1) \wedge \vec{O_2 B}$$

Comme le solide $S2$ est indéformable :

$$\left(\frac{d \vec{O_2 B}}{dt} \right)_{R2} = \left(\frac{d \vec{O_2 A}}{dt} \right)_{R2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{d \vec{O_1 B}}{dt} \right)_{R1} = \left(\frac{d \vec{O_1 A}}{dt} \right)_{R1} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(S2 / R1) \quad \forall A, \forall B$$

Soit :

$$\forall A, \forall B \in S2 \quad \vec{V}(B \in S2 / R1) = \vec{V}(A \in S2 / R1) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(S2 / R1)$$

Le champ des vecteurs vitesses des points du solide $S2$ par rapport à $R1(O1, x1, y1, z1)$, peut donc être représenté par un torseur, dit torseur cinématique, dont la résultante est la vitesse de rotation de la base $(x2, y2, z2)$ par rapport à la base $(x1, y1, z1)$, et le moment en un point A, la vitesse du point A appartenant au solide 2, par rapport au repère $R1$:

$${}_A \{V(S2/R1)\} = \begin{cases} \vec{\Omega}(S2 / R1) \\ \vec{V}(A \in S2 / R1) \end{cases}$$

◇ *Propriété : Equiprojectivité.*

Comme les champs des vecteurs vitesses d'un solide se représente par un torseur, c'est également un champ équiprojectif. Ceci signifie que quels que soient deux points A et B d'un solide S2 :

$$\forall A, \forall B \in S_2 \quad \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}(A \in S_2 / R_1) = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}(B \in S_2 / R_1)$$

On peut aussi le montrer directement, à partir de la propriété d'indéformabilité du solide :

Si S2 est un solide indéformable, quels que soient A et B deux points appartenant à S2 alors la distance AB reste constante au cours du temps. Ceci s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}) = 0 = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right]_{R_1} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Ceci s'écrit aussi :

$$\left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{O_1 B} - \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_1 A} \right]_{R_1} \cdot \overrightarrow{AB} = [\vec{V}(B \in S_2 / R_1) - \vec{V}(A \in S_2 / R_1)] \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Dont on déduit :

$$\forall A, \forall B \in S_2 \quad \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}(A \in S_2 / R_1) = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}(B \in S_2 / R_1)$$

Le champ des vitesses des points d'un solide indéformable est donc bien équiprojectif.

◇ *Calcul du vecteur rotation instantanée.*

D'après ce qui a été dit plus haut, la dérivée des vecteurs unitaires (x2, y2, z2) de la base du repère R2(O2, x2, y2, z2) par rapport au référentiel R1, se calcule comme suit :

$$\left(\frac{d \vec{x}_2}{dt} \right)_{R_1} = \vec{\Omega}(S_2 / R_1) \wedge \vec{x}_2$$

On en déduit alors, si l'on connaît les dérivées des vecteurs unitaires :

$$2\vec{\Omega}(S_2 / R_1) = \vec{x}_2 \wedge \left(\frac{d \vec{x}_2}{dt} \right)_{R_1} + \vec{y}_2 \wedge \left(\frac{d \vec{y}_2}{dt} \right)_{R_1} + \vec{z}_2 \wedge \left(\frac{d \vec{z}_2}{dt} \right)_{R_1}$$

◇ *Exemple : Mouvement de translation*

Si le mouvement du solide S2 par rapport à R1 se représente par un torseur couple :

$$_A \{V(S_2/R_1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(A \in S_2 / R_1) \end{Bmatrix}$$

$$\text{Alors : } \forall B \in S_2 \quad \vec{V}(B \in S_2 / R_1) = \vec{V}(A \in S_2 / R_1)$$

Le solide S2 est donc en translation par rapport à R1.

◇ *Exemple : Mouvement de rotation instantanée*

Si le mouvement du solide S2 par rapport à R1 se représente au point A, par un torseur résultante :

$$_A \{V(S_2/R_1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2 / R_1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Alors : } \forall B \in S_2 \quad \vec{V}(B \in S_2 / R_1) = \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(S_2 / R_1)$$

Le solide S_2 est donc en rotation par rapport à R_1 autour de l'axe central, (Δ) du torseur cinématique. Cet axe central passe par le point A et sa direction est alignée avec Ω .

3.4.3 Champ des vecteurs accélération des points d'un solide.

La formule de changement de base de dérivation, permet également de définir le champ des vecteurs accélération des points d'un solide, par rapport au référentiel du mouvement.

Supposons un référentiel du mouvement $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ et un solide S_2 en mouvement par rapport à ce référentiel, auquel est attaché un repère $R_2(O_2, x_2, y_2, z_2)$. La base attachée à R_2 a une vitesse de rotation Ω par rapport à la base attachée à R_1 . Supposons deux points quelconques A et B du solide S_2 , alors :

$$\forall A, \forall B \in S_2 \quad \vec{V}(B \in S_2 / R_1) = \vec{V}(A \in S_2 / R_1) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(S_2 / R_1)$$

La relation entre les vecteurs accélération des points A et B du solide S_2 dans son mouvement par rapport au repère R_1 , s'obtient en dérivant les deux membres de cette égalité par rapport à t dans le repère R_1 .

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{V}(B \in S_2 / R_1) \right]_{R_1} = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(A \in S_2 / R_1) \right]_{R_1} + \left[\frac{d}{dt} \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(S_2 / R_1) \right]_{R_1}$$

Soit :

$$\vec{\Gamma}(B \in S_2 / R_1) = \vec{\Gamma}(A \in S_2 / R_1) + \left[\frac{d}{dt} \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(S_2 / R_1) \right]_{R_1}$$

En développant :

$$\vec{\Gamma}(B \in S_2 / R_1) = \vec{\Gamma}(A \in S_2 / R_1) + \left[\frac{d}{dt} \vec{BA} \right]_{R_1} \wedge \vec{\Omega}(S_2 / R_1) + \vec{BA} \wedge \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(S_2 / R_1) \right]_{R_1}$$

Pour calculer la dérivée de BA par rapport à t, on utilise la formule de changement de base de dérivation, soit :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{BA} \right]_{R_1} = \left[\frac{d}{dt} \vec{BA} \right]_{S_2} + \vec{\Omega}(S_2 / R_1) \wedge \vec{BA} = \vec{0} + \vec{\Omega}(S_2 / R_1) \wedge \vec{BA}$$

D'où la relation cherchée :

$$\vec{\Gamma}(B \in S_2 / R_1) = \vec{\Gamma}(A \in S_2 / R_1) + \left[\vec{\Omega}(S_2 / R_1) \wedge \vec{BA} \right]_{R_1} \wedge \vec{\Omega}(S_2 / R_1) + \vec{BA} \wedge \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(S_2 / R_1) \right]_{R_1}$$

Où encore :

$$\vec{\Gamma}(B \in S_2 / R_1) = \vec{\Gamma}(A \in S_2 / R_1) + \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(S_2 / R_1) \right]_{R_1} \wedge \vec{AB} + \vec{\Omega}(S_2 / R_1) \wedge \left[\vec{\Omega}(S_2 / R_1) \wedge \vec{AB} \right]$$

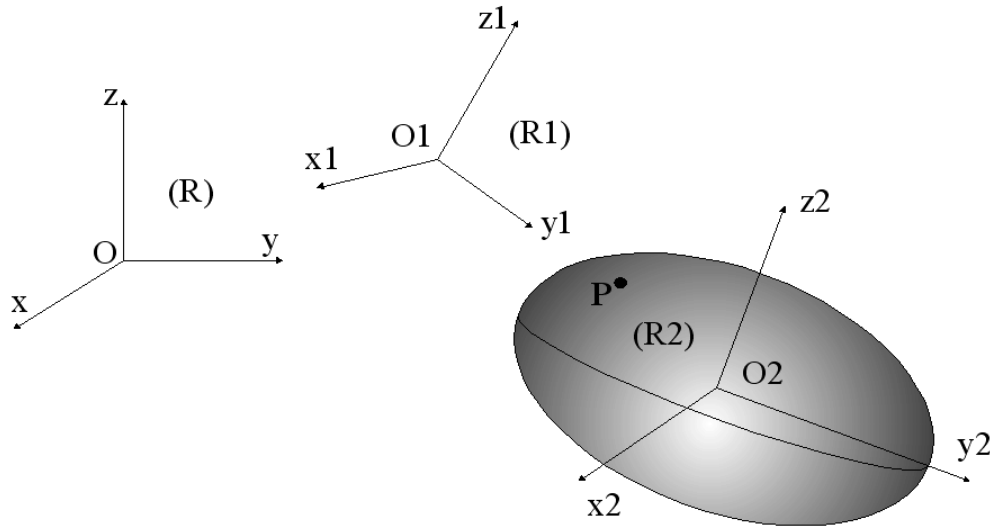
Ainsi, le champ des vecteurs accélérations des points d'un solide ne peut pas être représenté par un torseur, du fait de l'existence du dernier terme.

3.4.4 Composition des mouvements

◇ Introduction

Soit un point P, appartenant à un solide S_2 , en mouvement à la fois par rapport à un repère $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ et par rapport à un repère $R(O, x, y, z)$. On va chercher la relation entre les vecteurs vitesses $V(P/R_1)$ et $V(P/R)$,

ainsi que la relation entre les vecteurs accélération $\Gamma(P/R1)$ et $\Gamma(P/R)$. Ces relations, dites « de composition du mouvement », sont particulièrement utiles lorsqu'on étudie des mécanismes dans lesquels les mouvements relatifs mutuels des pièces sont connus, mais pas la cinématique d'ensemble du mécanisme.



◇ Composition des vecteurs vitesse

On cherche à définir en premier lieu la relation entre $V(P/R)$ et $V(P/R1)$

$$\vec{V}(P/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{OP} \right]_R \quad \text{et} \quad \vec{V}(P/R1) = \left[\frac{d}{dt} \vec{O1P} \right]_{R1}$$

- Relation de composition des vecteurs vitesses

Donc :

$$\vec{V}(P/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{OP} \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \vec{OO1} \right]_R + \left[\frac{d}{dt} \vec{O1P} \right]_R$$

$$\text{or :} \quad \left[\frac{d}{dt} \vec{OO1} \right]_R = V(O1 \in R1/R)$$

$$\text{Par ailleurs :} \quad \left[\frac{d}{dt} \vec{O1P} \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \vec{O1P} \right]_{R1} + \Omega(R1/R) \wedge \vec{O1P} = \vec{V}(P/R1) + \Omega(R1/R) \wedge \vec{O1P}$$

$$\text{Par suite :} \quad \vec{V}(P/R) = \vec{V}(P/R1) + V(O1 \in R1/R) + \Omega(R1/R) \wedge \vec{O1P}$$

Si maintenant on considère le point de $R1$ qui coïncide avec P à l'instant t :

$$\vec{V}(P \in R1/R) = \vec{V}(O1 \in R1/R) + \Omega(R1/R) \wedge \vec{O1P}$$

Et donc :

$$\vec{V}(P/R) = \vec{V}(P/R1) + \vec{V}(P \in R1/R)$$

- Définitions

Dans le mouvement du point P par rapport aux deux repères R et $R1$, on appelle :

- Vecteur vitesse absolue : $\vec{V}(P/R)$
- Vecteur vitesse relative : $\vec{V}(P/R1)$

- Vecteur vitesse d'entraînement : $\vec{V}(P \in R1 / R)$

○ Généralisation

Soit un point P mobile par rapport à n repères $R_i (i=1, n)$. On peut écrire successivement :

$$\vec{V}(P / R_{n-1}) = \vec{V}(P / R_n) + \vec{V}(P \in R_n / R_{n-1})$$

Ainsi :

$$\vec{V}(P / R_1) = \vec{V}(P / R_n) + \sum_{i=2}^n \vec{V}(P \in R_i / R_{i-1})$$

○ Composition des torseurs cinématiques

Il a déjà été montré en utilisant la formule de changement de base de dérivation que lors de la composition des mouvements par rapport à n repères,

$$\vec{\Omega}(R_n / R_1) = \sum_{i=2}^n \vec{\Omega}(R_i / R_{i-1})$$

Comme par ailleurs :

$$\vec{V}(P / R_1) = \vec{V}(P / R_n) + \sum_{i=2}^n \vec{V}(P \in R_i / R_{i-1})$$

On peut donc écrire la relation de composition des torseurs cinématiques :

$$\text{Avec, } \{\mathcal{C}(R_i / R_{i-1})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(R_i / R_{i-1}) \\ \vec{V}(P \in R_i / R_{i-1}) \end{array} \right\}$$

La relation de composition des torseurs cinématiques s'écrit :

$$\{\mathcal{C}(R_n / R_1)\} = \sum_{i=2}^n \{\mathcal{C}(R_i / R_{i-1})\}$$

○ Exemple

L'objectif de cet exemple est d'illustrer la distinction entre le vecteur vitesse absolue d'un point I, $\vec{V}(I / R)$ et son vecteur vitesse d'entraînement $\vec{V}(I \in S1 / R)$ par un solide S1.

Supposons deux roues de friction S1 et S2. S1 est en rotation autour de l'axe (O,z) et S2 autour de l'axe (A,z).

$$\text{On pose : } \Omega(S1 / R) = \omega_1 \vec{z} \quad \text{et} \quad \Omega(S2 / R) = \omega_2 \vec{z}$$

$$\text{Les deux roues de friction sont en contact au point I : } \vec{OI} = r_1 \vec{y} \quad \text{et} \quad \vec{AI} = -r_2 \vec{y}$$

Le vecteur vitesse absolue du point de contact I par rapport au repère R s'obtient en dérivant le vecteur position du point I :

$$\vec{V}(I / R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{OI} \right]_R = \left[\frac{d}{dt} r_1 \vec{y} \right]_R \quad \text{Soit : } \vec{V}(I / R) = \vec{0}$$

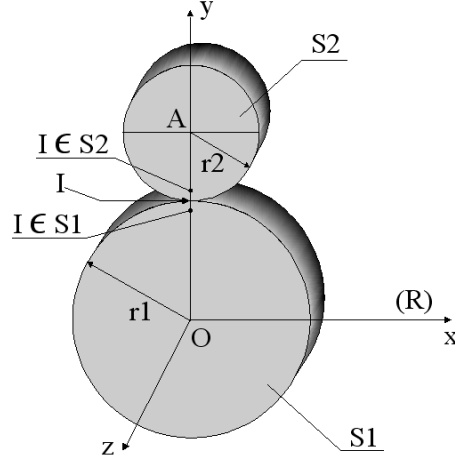
Le vecteur vitesse du point du solide S1 qui à l'instant t coïncide avec I, noté $I \in S1$, est le vecteur vitesse d'un point du solide S1 qui décrit un cercle de centre O et de rayon r_1 à la vitesse ω_1 . C'est-à-dire qu'on calcule la vitesse au point noté $I \in S1$, comme si ce point appartenait physiquement à S1.

$$\text{Soit : } \vec{V}(I \in S1 / R) = \vec{V}(O \in S1 / R) + \vec{IO} \wedge \vec{\Omega}(S1 / R) = \vec{0} - r_1 \vec{y} \wedge \omega_1 \vec{z}$$

Soit encore : $\vec{V}(I \in S1/R) = -r_1 \omega_1 \vec{x}$

Le vecteur vitesse du point du solide S2 qui à l'instant t coïncide avec I, noté $I \in S2$, est le vecteur vitesse d'un point qui décrit un cercle de centre A et de rayon r_2 à la vitesse ω_2 .

Soit : $\vec{V}(I \in S2/R) = \omega_2 r_2 \vec{x}$



3.4.5 Composition des vecteurs accélération

Soit un point P, appartenant à un solide S2, en mouvement à la fois par rapport à un repère $R1(O1, x1, y1, z1)$ et par rapport à un repère $R(O, x, y, z)$. On va chercher maintenant la relation entre les vecteurs accélération $\Gamma(P/R1)$ et $\Gamma(P/R)$.

◇ Relation de composition des vecteurs accélération

Il a été montré aux paragraphes précédents que :

$$\vec{V}(P/R) = \vec{V}(P/R1) + \vec{V}(P \in R1/R)$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\vec{V}(P/R) = \vec{V}(P/R1) + V(O1 \in R1/R) + \Omega(R1/R) \wedge \vec{O1P}$$

Dérivons chaque terme par rapport au temps dans le repère R :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{V}(P/R) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(P/R1) \right]_R + \left[\frac{d}{dt} V(O1 \in R1/R) \right]_R + \left[\frac{d}{dt} \left(\Omega(R1/R) \wedge \vec{O1P} \right) \right]_R$$

Soit, en appliquant la formule de changement de base de dérivation au premier terme :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{V}(P/R1) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(P/R1) \right]_{R1} + \Omega(R1/R) \wedge \vec{V}(P/R1) = \vec{\Gamma}(P/R1) + \Omega(R1/R) \wedge \vec{V}(P/R1)$$

Comme $O1$ est l'origine du repère $R1$:

$$\left[\frac{d}{dt} V(O1 \in R1/R) \right]_R = \Gamma(O1 \in R1/R)$$

Enfin, en appliquant la formule de changement de base de dérivation au dernier terme :

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\Omega(R1/R) \wedge \vec{O1P} \right) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \Omega(R1/R) \right]_R \wedge \vec{O1P} + \Omega(R1/R) \wedge \left[\frac{d}{dt} \vec{O1P} \right]_R$$

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\Omega(R1/R) \wedge \vec{O_1P} \right) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \Omega(R1/R) \right]_R \wedge \vec{O_1P} + \Omega(R1/R) \wedge \left[V(P/R1) + \Omega(R1/R) \wedge \vec{O_1P} \right]$$

Comme, par ailleurs, d'après la formule de changement de point du champ de vecteurs accélérations:

$$\vec{\Gamma}(P \in R1/R) = \vec{\Gamma}(O1 \in R1/R) + \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(R1/R) \right]_R \wedge \vec{O_1P} + \vec{\Omega}(R1/R) \wedge \left[\vec{\Omega}(R1/R) \wedge \vec{O_1P} \right]$$

On en déduit en regroupant tous les termes :

$$\vec{\Gamma}(P/R) = \vec{\Gamma}(P/R1) + \vec{\Gamma}(P \in R1/R) + 2.\vec{\Omega}(R1/R) \wedge V(P/R1)$$

◇ Définitions

Dans le mouvement du point P par rapport aux repères R et R1, on appelle :

- Vecteur accélération absolue : $\vec{\Gamma}(P/R)$
- Vecteur accélération relative : $\vec{\Gamma}(P/R1)$
- Vecteur accélération d'entraînement : $\vec{\Gamma}(P \in R1/R)$
- Vecteur accélération de Coriolis : $2.\vec{\Omega}(R1/R) \wedge V(P/R1)$

3.4.6 A retenir

- Indéformabilité \rightarrow équivalence repère/solide
- Paramétrage complet de la position d'un solide par rapport à un référentiel
 - Coordonnées de l'origine (3 paramètres)
 - Orientation de la base (3 paramètres)

◇ Cinématique du point :

- Vecteur vitesse du point P, par rapport à R, à l'instant t : $\vec{V}(P/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{OP}(t) \right]_R$
- Vecteur accélération du point P, par rapport à R, à l'instant t : $\vec{\Gamma}(P/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(P/R) \right]_R$

◇ Cinématique du solide :

- Vecteur vitesse du point P, appartenant au solide S1 par rapport à R, à l'instant t : $\vec{V}(P \in S1/R)$
- Vecteur accélération du point P, appartenant au solide S1, par rapport à R, à l'instant t : $\vec{\Gamma}(P \in S1/R)$

◇ Formules de changement de point

- Formules de changement de point du champ des vecteurs vitesse d'un solide

$$\forall A, \forall B \in S1 \quad \vec{V}(B \in S1/R) = \vec{V}(A \in S1/R) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(S1/R)$$

Le champ des vecteurs vitesses des points du solide S1 en mouvement par rapport à R, se représente par un torseur, dit **torseur cinématique** :

$${}_A \{V(S1/R)\} = \begin{cases} \vec{\Omega}(S1/R) \\ \vec{V}(A \in S1/R) \end{cases}$$

- Formules de changement de point du champ des vecteurs accélération d'un solide

$$\vec{\Gamma}(B \in S1/R) = \vec{\Gamma}(A \in S1/R) + \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(S1/R) \right]_R \wedge \vec{AB} + \vec{\Omega}(S1/R) \wedge \left[\vec{\Omega}(S1/R) \wedge \vec{AB} \right]$$

Le champ des vecteurs accélération des points du solide S1 en mouvement par rapport à R, ne se représente pas par un torseur.

◇ *Formules de composition des mouvements.*

On suppose un point P en mouvement par rapport à un solide S1 auquel est attaché un repère R1, lui-même en mouvement par rapport au référentiel du mouvement R. On note (P ∈ R1) le point du solide S1 qui à l'instant t, coïncide avec P alors :

$$\underbrace{\vec{V}(P/R)}_{\text{absolue}} = \underbrace{\vec{V}(P/R1)}_{\text{relative}} + \underbrace{\vec{V}(P \in R1/R)}_{\text{entraînement}}$$

$$\underbrace{\vec{\Gamma}(P/R)}_{\text{absolue}} = \underbrace{\vec{\Gamma}(P/R1)}_{\text{relative}} + \underbrace{\vec{\Gamma}(P \in R1/R)}_{\text{entraînement}} + \underbrace{2 \cdot \vec{\Omega}(R1/R) \wedge \vec{V}(P/R1)}_{\text{Coriolis}}$$

3.5 Cinématique des systèmes de solides

3.5.1 Définitions

Lorsque la mécanique du solide est appliquée à des mécanismes, les mouvements relatifs entre solides sont limités par l'existence de liaisons entre les différentes pièces du mécanisme.

Ainsi, un système de solide est constitué de deux sous-ensembles, l'ensemble des solides indéformables et l'ensemble des liaisons entre solides. Par la suite, le système de solides sera enrichi d'un troisième sous-ensemble, l'ensemble des actions mécaniques. Le système de solides pourra donc être représenté par des graphes, dont l'analyse permet de définir le nombre d'inconnues cinématiques du système. Par ailleurs, cette représentation permet d'aider au choix des sous-systèmes à isoler, des théorèmes généraux à appliquer et des projections pertinentes à effectuer.

Graphe cinématique : les liaisons constituent les sommets, les solides constituent les arcs.

Graphe de structure : les solides constituent les sommets, les liaisons constituent les arcs.

◇ Types de liaisons

○ Liaison unilatérale/bilatérale

Lorsqu'une liaison du fait même de sa réalisation technologique ne peut pas être rompue (sauf par destruction du système), elle est dite bilatérale. Dans le cas contraire, la liaison est dite unilatérale.

○ Liaison holonome/non holonome

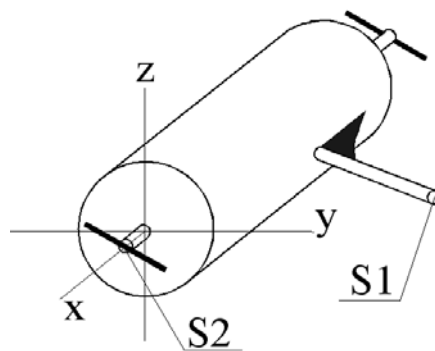
Les liaisons pour lesquelles l'équation de liaison est uniquement fonction des paramètres de position (équation holonome), est dite liaison cinématique. Sinon, la l'équation de liaison est dite non-holonome.

Par exemple, une liaison pivot, autorise la rotation autour de l'axe du pivot, mais interdit les autres mouvements, translations, ou rotations autour des deux autres axes. Si les mouvements relatifs entre les deux solides S1 et S2 sont paramétrés par trois paramètres de translation et trois paramètres de rotation :

$$\text{Translations : } X.\vec{x} + Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \quad \text{Rotations : } \alpha.\vec{x} + \beta.\vec{y} + \gamma.\vec{z}$$

Alors l'existence d'une liaison pivot impose les cinq équations holonomes suivantes :

$$X=X_0, Y=Y_0, Z=Z_0, \beta=\beta_0, \gamma=\gamma_0$$



Si cette liaison est motorisée et que le moteur impose une vitesse de rotation $w(t)$, cette motorisation impose une dernière équation de liaison qui, cette fois, est non-holonome: $\frac{d\alpha}{dt} = \omega(t)$.

En règle générale, un actionneur impose l'évolution temporelle d'un paramètre de position et conduit donc, quelles que soient les conditions de fonctionnement à des équations non-holonomes..

◇ *Représentation d'une liaison.*

Par rapport au repère local attaché à une liaison entre deux pièces, le champ des vitesses relatives entre les deux pièces (S_1 et S_2) reliées par la liaison en question peut être représenté par un torseur. Le repère de la liaison est en général choisi de telle sorte que l'axe x , soit un axe central pour la liaison, aligné avec Ω . Alors en tout point A de cet axe :

$${}_A \{V(S_2/S_1)\} = \begin{cases} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V} \end{cases} \quad \forall A \in (O, \vec{x})$$

◇ *Degrés de liberté d'une liaison.*

Dans le repère local associé à la liaison entre deux solides, les mouvements relatifs des deux solides sont limités à trois translations et trois rotations au maximum. Parmi ces 6 mouvements élémentaires, le nombre de mouvements élémentaires indépendants autorisés par la liaison définit le degré de liberté de cette liaison.

La liaison pivot ci-dessus est à un seul degré de liberté. Une liaison hélicoïdale (vis-écrou) permet deux mouvements, rotation autour de l'axe de la liaison et translation le long de ce même axe. Mais dans ce cas, rotation et translation sont proportionnelles. Par conséquent la liaison hélicoïdale est également à un seul degré de liberté.

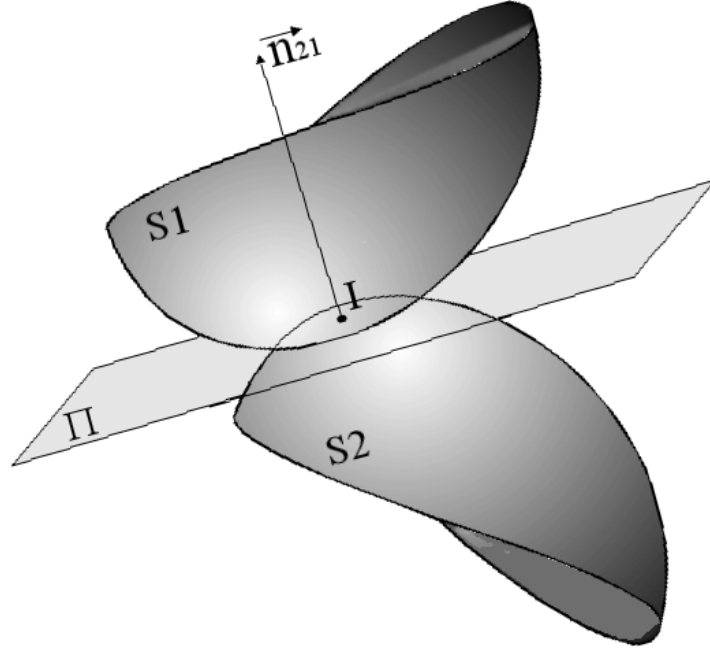
3.5.2 Tableau des liaisons normalisées

Les liaisons normalisées présentées dans le tableau qui suit sont classées par degré de liberté croissant. La représentation graphique de la liaison ne présume pas de la réalisation technologique de ces liaisons, mais est une représentation schématique normalisée des mouvements autorisés par cette liaison entre les deux solides S_k et S_i .

degré de liberté	désignation AFNOR	schématisation		exemples de couples de surfaces (bords) et caractéristiques géométriques	torseur cinématique	particularités
		projection orthogonale	perspective			
0	liaison encastrement				torseur nul	le système formé des 2 solides indéformables est un solide indéformable
1	liaison pivot			deux surfaces de révolution non cylindriques ----- (O, \vec{x}) axe de révolution	$\forall A \in (O, \vec{x})$ $\mathcal{V}(S_k / S_i) : \begin{cases} \omega \vec{x} \\ \vec{0} \end{cases}_A$	(O, \vec{x}) est fixe dans S_k et dans S_i
1	liaison glissière			deux cylindres non de révolution ----- une direction \vec{x}	$\mathcal{V}(S_k / S_i) : \begin{cases} \vec{0} \\ \omega \vec{x} \end{cases}_A$	\vec{x} est fixe dans S_k et dans S_i
1	liaison hélicoïdale			deux surfaces hélicoïdales ----- un axe (O, \vec{x}) un scalaire p (pas réduit)	$\forall A \in (O, \vec{x})$ $\mathcal{V}(S_k / S_i) : \begin{cases} \omega \vec{x} \\ v \vec{x} \end{cases}_A$ $v = p\omega$	\vec{x} est fixe dans S_k et dans S_i
2	liaison pivot glissant			deux cylindres de révolution ----- un axe (O, \vec{x})	$\forall A \in (O, \vec{x})$ $\mathcal{V}(S_k / S_i) : \begin{cases} \omega \vec{x} \\ v \vec{x} \end{cases}_A$	\vec{x} est fixe dans S_k et dans S_i
2	liaison rotule à doigt			deux sphères, un cylindre de révolution et un plan O centre de la sphère \vec{x}_i direction du cylindre $\vec{x}_i \perp \vec{y}_k$ normal au plan	$\mathcal{V}(S_k / S_i) : \begin{cases} \omega \vec{x}_i + \omega_k \vec{y}_k \\ \vec{0} \end{cases}_O$	(O, \vec{y}_k) est fixe dans S_k , (O, \vec{x}_i) est fixe dans S_i , \vec{x}_i et \vec{y}_k sont orthogonaux
3	liaison rotule			deux sphères ----- O centre des deux sphères	$\mathcal{V}(S_k / S_i) : \begin{cases} \vec{\omega} \\ \vec{0} \end{cases}_O$ $\vec{\omega}$ vecteur quelconque	O est fixe dans S_k et dans S_i
3	liaison appui plan			deux plans parallèles ----- \vec{z} normal aux plans	$\forall A$, le torseur cinématique est de la forme : $\mathcal{V}(S_k / S_i) : \begin{cases} \omega \vec{z} \\ \vec{v} \end{cases}_A$ avec $\vec{v} \cdot \vec{z} = 0$	\vec{z} est fixe dans S_k et dans S_i
4	liaison linéique rectiligne			plan et cylindre ----- \vec{z} normal au plan de contact, (O, \vec{x}) droite de contact dans le plan	$\forall A \in (O, \vec{x}, \vec{z})$, le torseur cinématique est de la forme : $\mathcal{V}(S_k / S_i) : \begin{cases} \omega \vec{z} + \omega_x \vec{x} \\ \vec{v} \end{cases}_A$ avec $\vec{v} \cdot \vec{z} = 0$	\vec{z} et \vec{x} sont toujours orthogonaux

3.5.3 Cinématique du contact entre deux solides

Dans le cas du contact ponctuel, une terminologie particulière est employée, qui est décrite ci-dessous. Pour un contact surfacique ou linéique, tout ce qui est écrit pour le contact ponctuel reste valable en chaque point de la surface ou de la ligne de contact.



Supposons deux solides S1 et S2 en contact en un point I. Il existe un unique plan tangent Π entre les deux solides, défini par la normale n_{21} , à S2 ou à S1, au point de contact I, dirigée de S2 vers S1.

Alors les éléments de réduction du torseur cinématique en I du mouvement de S1 par rapport à S2 sont :

$${}_I \{V(S1/S2)\} = \begin{cases} \vec{\Omega}(S1/S2) \\ \vec{V}(I \in S1/S2) \end{cases}$$

On note alors :

$$\vec{\Omega}(S1/S2) = \underbrace{(\vec{\Omega}(S1/S2) \cdot \vec{n}_{21}) \vec{n}_{21}}_{\text{Pivotement}} + \underbrace{\vec{n}_{21} \wedge (\vec{\Omega}(S1/S2) \wedge \vec{n}_{21})}_{\text{Roulement}}$$

La projection du vecteur rotation sur la normale au plan de contact, est le terme de **pivotement**.

La composante du vecteur rotation appartenant au plan tangent est le terme de **roulement**.

Enfin, le moment en I du torseur $\vec{V}(I \in S1/S2)$ est le **glissement** en I de S1 par rapport à S2. On le note souvent aussi : $\vec{G}(I \in S1/S2)$. D'après la formule de composition des vitesses :

$$\underbrace{\vec{V}(I/S2)}_{\text{absolue}} = \underbrace{\vec{V}(I/S1)}_{\text{relative}} + \underbrace{\vec{V}(I \in S1/S2)}_{\text{entraînement}}$$

Ce qui donne donc ici :

$$\vec{G}(I \in S1/S2) = \vec{V}(I/S2) - \vec{V}(I/S1)$$

Ainsi le glissement en I de S1 par rapport à S2 est un vecteur parallèle au plan de contact.

3.5.4 Modélisation de la cinématique

◇ Introduction

Un système de solides indéformables est composé de deux sous-ensembles : les solides et les liaisons entre les solides. Une représentation peut donc en être faite au moyen d'un graphe. Un graphe est aussi composé de deux sous-ensembles : des points appelés sommets du graphe et des lignes appelés arcs qui relient certains sommets entre eux. Il y a donc deux bijections possibles entre un système de solides indéformables et un graphe.

◇ Graphe cinématique

Lorsqu'on représente un système de solides par un graphe cinématique, les sommets du graphe représentent les liaisons et les arcs, les solides. Les sommets représentatifs des liaisons sont dessinés en respectant la normalisation et les positions spatiales relatives des entités géométriques caractéristiques. Un graphe cinématique est donc en général (le cas particulier est relatif à un problème plan) un graphe tridimensionnel et se dessine en perspective.

La fonction principale du graphe cinématique est d'aider à la compréhension du fonctionnement du système, à la visualisation du paramétrage et au calcul.

◇ Graphe de structure ou graphe des liaisons

A l'inverse, lorsqu'on représente un système de solides par un graphe de structure, les sommets du graphe représentent les solides et les arcs, les liaisons. Ce graphe pourra être complété par la suite par des arcs parallèles figurant les actions mécaniques.

Sur chaque arc, il y a le nom de la liaison qu'il représente ainsi que les caractéristiques géométriques. Aux sommets sont placés les symboles alphanumériques désignant les solides.

Le graphe de structure a deux fonctions principales :

- aider à la détermination de la mobilité du système c'est à dire du nombre minimal de paramètres permettant de décrire complètement la cinématique du système,
- aider au choix des sous-systèmes à isoler, des théorèmes généraux de la dynamique à utiliser, des projections à effectuer pour répondre à un problème posé.

◇ Mobilité d'un système

La mobilité d'un système correspond au nombre minimal de paramètres indépendants nécessaires pour décrire totalement la cinématique du système. Dans un mécanisme, chaque liaison présente un certain nombre de degrés de liberté. Mais la mobilité du système complet n'est pas égale à la somme des degrés de liberté de chacune des liaisons. Le graphe de structure sera généralement employé pour déterminer la mobilité du système et choisir les paramètres indépendants du problème. En effet, lorsque le graphe présente des fermetures, des équations supplémentaires entre les paramètres apparaissent, ce qui diminue d'autant la mobilité du système.

○ Fermeture géométrique

Lorsque dans le graphe de structure apparaît un chemin fermé, $(S_1, S_2, \dots ; S_{n-1}, S_n, S_1)$ alors, la fermeture géométrique de ce chemin s'écrit :

$$\overrightarrow{O_1 O_2} + \dots + \overrightarrow{O_{n-1} O_n} + \overrightarrow{O_n O_1} = \vec{0} \quad \text{et} \quad P(b_1 / b_n) \cdot P(b_n / b_{n-1}) \cdot \dots \cdot P(b_2 / b_1) = \text{Identité}$$

où (O_i, b_i) est le repère, d'origine O_i et de base b_i , attaché à chaque solide S_i , et où $P(b_{i+1}, b_i)$ est une matrice de changement de base

Les équations scalaires obtenues sont des équations holonomes.

○ Fermeture cinématique

Si le chemin fermé possède des liaisons cinématiques, il faut alors écrire une équation de fermeture cinématique portant sur le torseur cinématique du chemin fermé :

$$\{\mathcal{V}(S_n/S_1)\} + \{\mathcal{V}(S_1/S_2)\} + \dots + \{\mathcal{V}(S_{n-1}/S_n)\} = 0$$

Les équations scalaires obtenues sont des équations non-holonomes.

Il est toujours possible d'écrire une fermeture cinématique à la place d'une fermeture géométrique. Les équations non holonomes de la fermeture cinématique forment un système équivalent à celui obtenu par dérivation temporelle des équations holonomes de la fermeture géométrique.

Le choix d'utiliser une fermeture géométrique ou une fermeture cinématique sera guidé par des conditions de simplicité de mise en œuvre et conduira souvent à une procédure mixte.

◇ *Calcul de la mobilité*

C'est le nombre minimal de paramètres indépendants nécessaires pour décrire totalement la cinématique du système. Pour l'obtenir, il faut suivre la procédure suivante :

En premier lieu, déterminer le nombre maximal de chemins fermés indépendants. Ce nombre s'appelle le nombre cyclomatique et vaut : $\mu = n_l - n_s + 1$, avec n_l =nombre de liaisons et n_s =nombre de sommets du graphe.

En second lieu, pour chacun de ces μ chemins fermés, il faut écrire les équations de fermeture et déterminer le rang r du système d'équations obtenu.

Si on note n_p , nombre total de paramètres de position, qui est égal à la somme des degrés de liberté de toutes les liaisons du système, la mobilité m du système est alors par définition : $m = n_p - r$

Cette procédure est systématique, mais généralement fastidieuse. Dans la pratique, il n'est pas nécessaire de paramétrer explicitement tous les degrés de liberté de toutes les liaisons et d'expliciter ensuite toutes les équations de fermeture. On peut souvent remplacer les chemins fermés du graphe de structure par une liaison équivalente (voir l'exemple ci-dessous). Ceci permet de réduire le graphe de structure et d'en déduire un graphe de structure minimal et un paramétrage minimal.

On peut alors calculer la mobilité en appliquant la procédure décrite ici au graphe de structure minimal ou bien la déterminer en imaginant le blocage d'un degré de liberté d'une liaison. On regarde si le système reste mobile ou non. S'il reste mobile, on ajoute un deuxième blocage d'un nouveau degré de liberté et ainsi de suite jusqu'à immobilité complète du système. La mobilité est alors le nombre de blocages effectués.

○ Mobilité utile et mobilité interne

On peut classer les n_p paramètres de position en deux catégories suivant qu'ils sont associés à des liaisons avec l'extérieur du système ou à des liaisons internes au système. Par commodité, on parlera de paramètres utiles et de paramètres internes.

La mobilité utile peut être trouvée en utilisant la « procédure » du blocage. On observe le système sous la forme d'une boîte noire dont les seuls degrés de liberté observables et accessibles (donc blocables) sont ceux des liaisons externes.

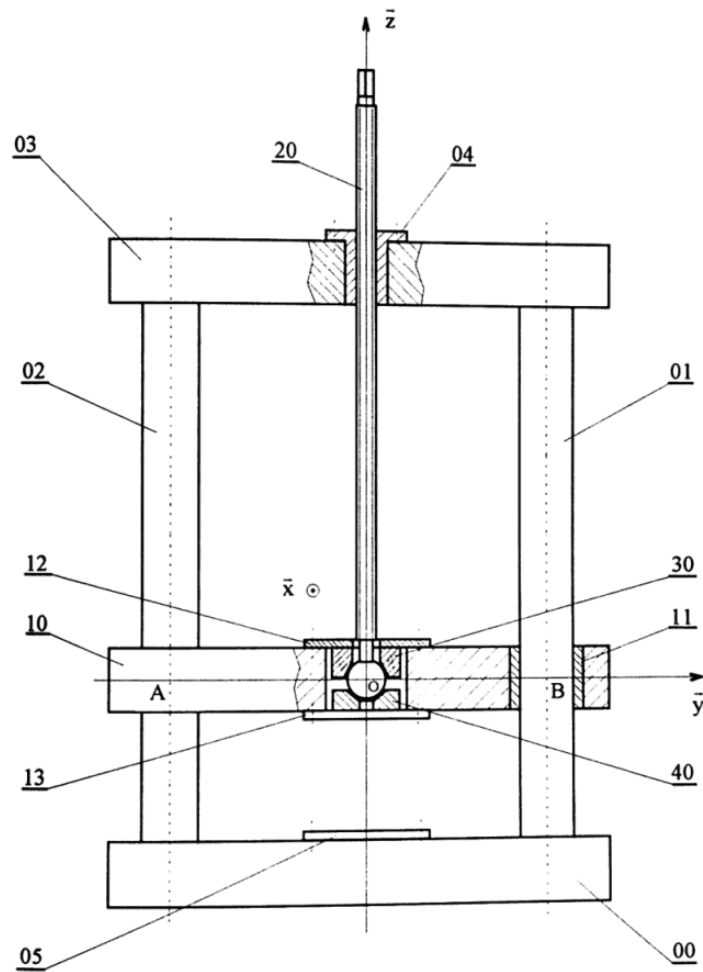
○ Bilan : Choix d'un paramétrage

- Identifier les solides, identifier les liaisons.
- Tracer le graphe de structure complet.
- Calculer le nombre maximal de chemins fermés indépendants.
- Réduire le graphe de structure en remplaçant autant de chemins fermés indépendants que possible par une liaison équivalente.
- Tracer le graphe de structure minimal.
- Choisir un paramétrage minimal associé au graphe de structure minimal.
- Tracer les figures de projection associées au paramétrage choisi.
- Expliciter les équations de fermeture restantes.

3.5.5 Exemple : Presse de modélisme

Le cas d'une presse de modélisme est présenté ici pour illustrer les principes de la modélisation cinématique qui ont été évoqués plus haut. Le plan du mécanisme est présenté ci-dessous. Cet exemple est issu de Mécanique 1, Yves Brémont/Paul Réocreux.

◇ *Plan du mécanisme*

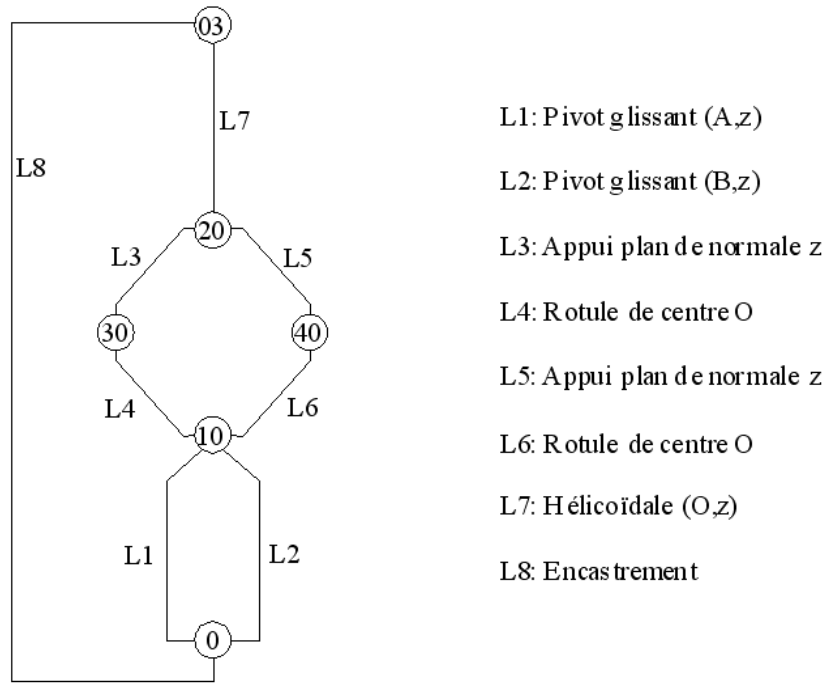


La presse est constituée d'un bâti, constitué d'une embase 00, d'un plan d'appui 05, de deux colonnes 01 et 02 et d'une bague supérieure 04. Ces pièces n'ont aucun mouvement relatif. L'ensemble de ces pièces sera donc noté par (0).

Par ailleurs, la traverse 10, les deux bagues 11, et les deux rondelles 12 et 13 n'ont également aucun mouvement relatif. L'ensemble de ces pièces sera noté (1).

◇ Construction du graphe de structure

Nous avons donc 6 solides principaux et 8 liaisons. Ce qui permet de dessiner le graphe de structure et de choisir les paramètres du mouvement pour chacune des liaisons. On tient compte du fait que le problème est plan.



Dans ce graphe apparaissent des chemins fermés. On peut calculer le nombre maximal de chemins fermés indépendants comme suit :

Nombre de liaisons $n_l=8$

Nombre de sommets $n_s=6$

Nombre de chemins fermés indépendants ou nombre cyclomatique $\mu = n_l - n_s + 1 = 3$.

Ces chemins fermés permettent d'écrire des équations de fermeture et donc de réduire le nombre de paramètres nécessaire à la modélisation complète de la cinématique du système. On peut paramétrer chacune des liaisons puis poser les équations et réduire le nombre de paramètres, ou analyser le problème et remplacer les chemins fermés par des liaisons équivalentes

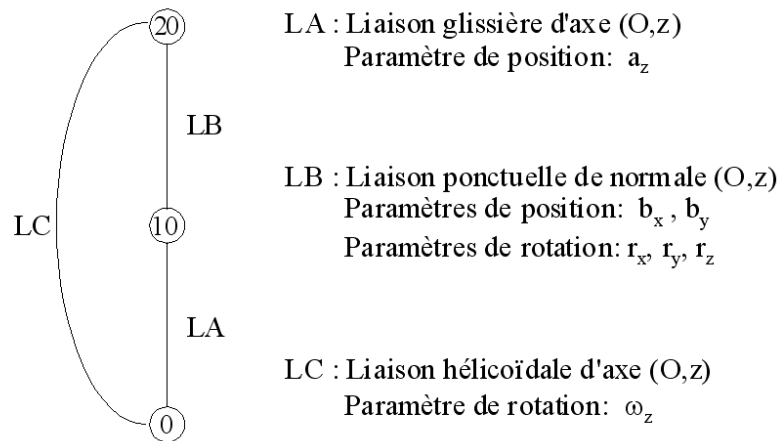
◇ Réduction du graphe de structure

L'existence de deux liaisons pivots parallèles entre le bâti (0) et la traverse (10) interdit la rotation autour de ces axes. Ainsi ces deux liaisons parallèles peuvent être remplacées par une liaison glissière. On élimine ainsi un premier chemin fermé.

Ensuite, la tige 20 est liée à la traverse 10 par deux branches parallèles. Dans chaque branche on trouve une liaison rotule de centre O (40/10) ou (30/10) puis une liaison appui plan (20/30) ou (20/40). La mise en série d'une rotule et d'un appui plan est équivalente à une liaison ponctuelle. Deux liaisons ponctuelles au même point, équivalent à une seule. Ainsi le second chemin fermé est-il ramené à une unique liaison ponctuelle.

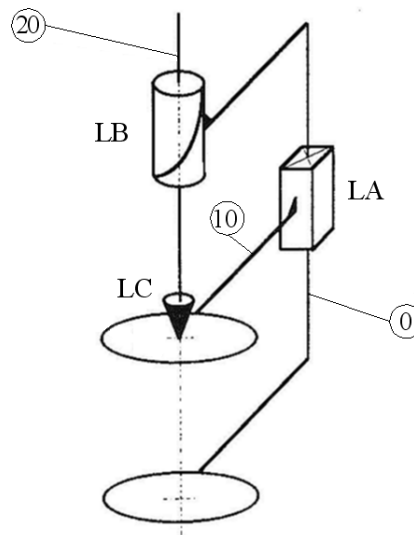
Enfin, le dernier chemin fermé est naturellement réduit en considérant que la traverse sommet (03), encastree au bâti, fait partie du bâti.

On peut alors dessiner un graphe de structure simplifié, pour lequel est aussi choisi un paramétrage. Il reste encore un chemin fermé donc des équations de fermeture à poser.



◇ Construction du graphe cinématique

La modélisation cinématique retenue peut être également représentée à l'aide du schéma cinématique, pour lequel on place les liaisons aux sommets et les solides sur les arcs du graphe. Ce graphe permet une meilleure compréhension du fonctionnement du système.



◇ Mobilité du système

- Nombre total de paramètres $n_p=7$
- Nombre de liaisons $n_l=3$
- Nombre de sommets $n_s=3$
- Nombre de chemins fermés indépendants ou nombre cyclomatique $\mu = n_l - n_s + 1 = 1$
- Nombre d'équations scalaires de fermeture à écrire $n=6$: vecteur translation et vecteur rotation projetés sur les axes x,y,z.
- Mobilité $m=n_p-n=1$
- Mobilité utile : Le paramètre d'entrée est ω_z , paramètre de sortie a_z . Les deux paramètres sont liés, la mobilité utile est égale à un.
- Mobilité interne : La mobilité interne est alors égale à zéro. Les deux déplacements b_x et b_y et les trois rotations r_x, r_y et r_z sont bloquées.

3.5.6 A retenir

- Système de solides \rightarrow ensemble $\{\{\text{solides}\}, \{\text{liaisons}\}\}$.

Se modélise à l'aide d'un graphe.

Graphe de structure : Sommets=solides, arcs=liaisons.

Graphe cinématique : Sommets=liaisons, arcs=solides.

La modélisation permet le calcul de la mobilité et le choix d'un paramétrage.

Le choix d'un paramétrage permet la mise en place des figures de projections.

- Liaison

Se représente par un torseur cinématique

Bilatérale/Unilatérale

Holonyme/Non Holonyme

- Notations spécifiques au contact

Torseur cinématique au point de contact I entre les solides S1 et S2, où S1 est en mouvement par rapport à S2 et où \vec{n}_{21} est la normale au plan de contact au point I entre S1 et S2 dirigée de 2 vers 1:

- $${}_I\{\mathcal{V}(S1/S2)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S1/S2) \\ \vec{V}(I \in S1/S2) \end{Bmatrix}$$
- Pivotement : $\vec{\Omega}(S1/S2) \cdot \vec{n}_{21}$
- Roulement : $\vec{n}_{21} \wedge (\vec{\Omega}(S1/S2) \wedge \vec{n}_{21})$
- Glissement : $\vec{G}(I \in S1/S2) = \vec{V}(I \in S1/S2) = \vec{V}(I/S2) - \vec{V}(I/S1)$

- Bilan : Choix d'un paramétrage

- Identifier les solides, identifier les liaisons.
- Tracer le graphe de structure complet.
- Calculer le nombre maximal de chemins fermés indépendants.
- Réduire le graphe de structure en remplaçant autant de chemins fermés indépendants que possible par une liaison équivalente.
- Tracer le graphe de structure minimal.
- Choisir un paramétrage minimal associé au graphe de structure minimal.
- Tracer les figures de projection associées au paramétrage choisi.
- Expliciter les équations de fermeture restantes.

4 CONSERVATION DE LA MASSE

4.1 Système matériel à masse conservative

◇ Définitions

- **Système matériel** : Un système matériel est un système sur lequel est définie une mesure de la masse. La masse est habituellement définie à l'aide d'une densité volumique, surfacique ou linéique.
- **Système matériel à masse conservative** : Un système matériel D est dit à masse conservative si toute partie d de D , qu'on suit au cours du temps, a une masse constante :

$$\forall d \in D \quad \forall t \quad m(d, t) = \text{constante} = m(d)$$

◇ Conséquences

Si l'on exprime la masse à l'aide d'une densité volumique :

$$\forall d \in D \quad m(d, t) = \int_{d(t)} \rho(P) dv(P) = \text{constante}$$

Alors :

$$\forall d \in D \quad \frac{d}{dt} m(d, t) = \int_{d(t)} \left[\frac{d}{dt} \rho(P) + \rho(P) \operatorname{div} \vec{V}_t(P) \right] dv(P) = 0$$

Ceci implique que :

$$\frac{d}{dt} \rho(P) + \rho(P) \operatorname{div} \vec{V}_t(P) = 0$$

Ce qui est l'équation de continuité de la mécanique des milieux continus tridimensionnels.

Plus généralement, si l'on intègre des fonctions régulières relativement à la densité volumique :

$$H(t) = \int_{D_t} h(P) \rho(P) dv(P)$$

Alors :

$$\frac{d}{dt} H(t) = \int_{D_t} \left[\frac{d}{dt} [h(P) \rho(P)] + h(P) \rho(P) \operatorname{div} \vec{V}_t(P) \right] dv(P)$$

Si l'on développe :

$$\frac{d}{dt} H(t) = \int_{D_t} \left[\rho(P) \frac{d}{dt} h(P) + h(P) \underbrace{\left[\frac{d}{dt} \rho(P) + \rho(P) \operatorname{div} \vec{V}_t(P) \right]}_{=0} \right] dv(P) = \int_{D_t} \left[\rho(P) \frac{d}{dt} h(P) \right] dv(P)$$

Ainsi, pour un système matériel à masse conservative et pour toute fonction h régulière :

$$H(t) = \int_{D_t} h(P) \cdot \rho(P) dv(P) \Rightarrow \frac{d}{dt} H(t) = \int_{D_t} \frac{dh(P)}{dt} \cdot \rho(P) dv(P)$$

4.2 Torseur cinétique, torseur dynamique et énergie cinétique

Soit un système matériel Σ en mouvement par rapport à un repère R , différentes intégrales faisant intervenir la mesure de la masse peuvent être définies sur ce système matériel. On définira en particulier, les quantités de mouvements, les quantités d'accélération et l'énergie cinétique. Le principe de conservation de la masse permettra ensuite de simplifier ces expressions et d'écrire des relations entre elles.

◇ Torseur cinétique

Le torseur cinétique, ou torseur des quantités de mouvement, du système matériel Σ dans son mouvement par rapport au repère R est, en un point A quelconque, le torseur à structure suivant :

$$\{\mathcal{C}(\Sigma/R)\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \int_{P \in \Sigma} \vec{V}(P/R) \cdot dm(P) \\ \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R) \cdot dm(P) \end{array} \right\}$$

- La résultante du torseur cinétique est appelée résultante cinétique ou encore quantité de mouvement de Σ dans son mouvement par rapport à R .
- Le moment du torseur cinétique est appelé moment cinétique, au point A de Σ dans son mouvement par rapport à R . On le note habituellement : $\vec{\sigma}_A(\Sigma/R)$
- La formule de changement de point du moment cinétique est, par construction :

$$\vec{\sigma}_A(\Sigma/R) = \vec{\sigma}_B(\Sigma/R) + \vec{AB} \wedge \int_{P \in \Sigma} \vec{V}(P/R) \cdot dm(P) \quad \forall A, B$$

◇ Torseur dynamique

Le torseur dynamique, ou torseur des quantités d'accélération, du système matériel Σ dans son mouvement par rapport au repère R est, en un point A quelconque, le torseur à structure suivant :

$$\{\mathcal{D}(\Sigma/R)\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \int_{P \in \Sigma} \vec{\Gamma}(P/R) \cdot dm(P) \\ \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R) \cdot dm(P) \end{array} \right\}$$

- La résultante du torseur dynamique est appelée résultante dynamique ou encore quantité d'accélération de Σ dans son mouvement par rapport à R .
- Le moment du torseur dynamique est appelé moment dynamique, au point A de Σ dans son mouvement par rapport à R . On le note habituellement : $\vec{\delta}_A(\Sigma/R)$
- La formule de changement de point du moment dynamique est, par construction :

$$\vec{\delta}_A(\Sigma/R) = \vec{\delta}_B(\Sigma/R) + \vec{AB} \wedge \int_{P \in \Sigma} \vec{\Gamma}(P/R) \cdot dm(P) \quad \forall A, B$$

◇ *Energie cinétique*

L'énergie cinétique du système matériel Σ dans son mouvement par rapport à un repère R est le scalaire suivant :

$$T(\Sigma/R) = \frac{1}{2} \int_{P \in \Sigma} [\vec{V}(P/R)]^2 dm(P)$$

◇ *Autres cas. Exemple : Action de la pesanteur*

Il existe d'autres cas où une quantité faisant intervenir la mesure de la masse est intégrée sur un solide. L'action de la pesanteur sur un solide S , par exemple, est le torseur à structure suivant :

$$\{\mathcal{T}(pes \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{P \in \Sigma} \vec{g}.dm(P) \\ \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{g}.dm(P) \end{array} \right\}_A$$

4.2.2 Centre d'inertie, opérateur d'inertie

Avant de pouvoir employer le principe de conservation de la masse pour simplifier les expressions du torseur cinétique, du torseur dynamique et de l'énergie cinétique, les notions de centre d'inertie et d'opérateur d'inertie vont être rappelées.

◇ *Centre d'inertie G*

Pour un système matériel Σ de masse $m(\Sigma)$, en mouvement par rapport à un repère $R(O, x, y, z)$, la position du centre d'inertie G est définie de la façon suivante :

$$m(\Sigma). \vec{OG} = \int_{P \in \Sigma} \vec{OP}.dm(P)$$

◇ *Opérateur d'inertie $J_A(\Sigma)$*

○ Définition

Pour un système matériel Σ de masse $m(\Sigma)$, en mouvement par rapport à un repère $R(O, x, y, z)$, l'opérateur d'inertie du système Σ au point A est l'opérateur linéaire $J_A(\Sigma)$ qui à tout vecteur u fait correspondre le vecteur suivant :

$$\forall \vec{u} \rightarrow J_A(\Sigma).\vec{u} = \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{AP} \right).dm(P)$$

On peut également le noter de la façon suivante :

$$\forall \vec{u} \rightarrow J_A(\Sigma).\vec{u} = - \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \left(\vec{AP} \wedge \vec{u} \right).dm(P) = \left(- \int_{P \in \Sigma} \left(\vec{AP} \wedge \right)^2 .dm(P) \right) \vec{u}$$

○ Relation entre $J_A(\Sigma)$ et $J_G(\Sigma)$ ou théorème de Huyghens généralisé .

L'opérateur d'inertie du système Σ en un point A quelconque, $J_A(\Sigma)$ est tel que :

$$\forall \vec{u} \rightarrow J_A(\Sigma).\vec{u} = \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{AP} \right).dm(P) = \int_{P \in \Sigma} \left(\vec{AG} + \vec{GP} \right) \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{AP} \right).dm(P)$$

Soit :

$$J_A(\Sigma)\vec{u} = \int_{P \in \Sigma} \vec{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{AP} \right) dm(P) + \int_{P \in \Sigma} \vec{GP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{AP} \right) dm(P)$$

$$J_A(\Sigma)\vec{u} = \vec{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \int_{P \in \Sigma} \left(\vec{AO} + \vec{OP} \right) dm(P) \right) + \int_{P \in \Sigma} \vec{GP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \left(\vec{AG} + \vec{GP} \right) \right) dm(P)$$

Alors, G étant le centre d'inertie de Σ :

$$J_A(\Sigma)\vec{u} = m(\Sigma) \vec{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{AG} \right) + \left(\int_{P \in \Sigma} \vec{GP} dm(P) \right) \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{AG} \right) + \int_{P \in \Sigma} \vec{GP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{GP} \right) dm(P)$$

Dont on déduit le théorème de Huyghens généralisé :

$$J_A(\Sigma)\vec{u} = J_G(\Sigma)\vec{u} + m(\Sigma) \vec{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{AG} \right)$$

- Expression dans la base (O,x,y,z)

Si l'on note : $\vec{EP} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$

Alors l'expression de l'opérateur linéaire d'inertie $J_E(\Sigma)$ au point E du système matériel Σ , dans la base (O,x,y,z) est la suivante :

$$J_E(\Sigma) = \begin{pmatrix} \int_{\Sigma} (y^2 + z^2) dm & -\int_{\Sigma} (xy) dm & -\int_{\Sigma} (zx) dm \\ -\int_{\Sigma} (xy) dm & \int_{\Sigma} (z^2 + x^2) dm & -\int_{\Sigma} (yz) dm \\ -\int_{\Sigma} (zx) dm & -\int_{\Sigma} (yz) dm & \int_{\Sigma} (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

On note alors :

$$J_E(\Sigma) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Où A,B et C sont les moments d'inertie respectivement par rapport aux axes (E,x), (E,y), (E,z) et où D, E et F sont appelées les produits d'inertie.

- Base principale d'inertie :

Il existe toujours une base orthonormée dans laquelle l'opérateur d'inertie $J_E(\Sigma)$ est diagonal.

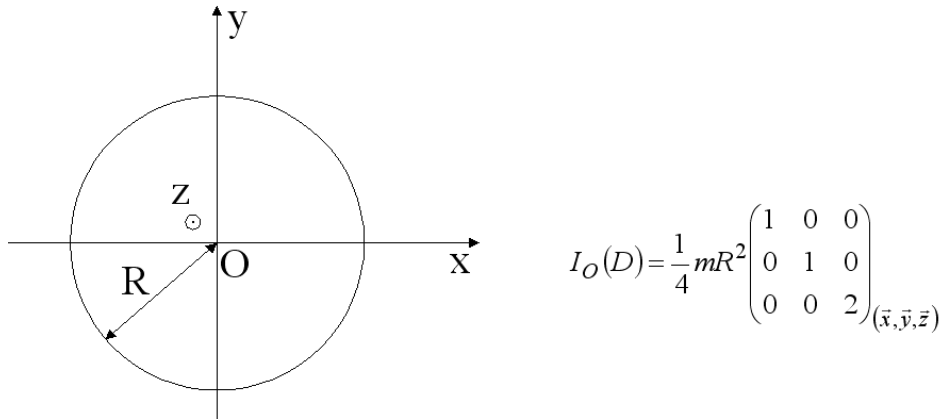
- Influence des symétries :

- Symétrie par rapport au plan z : $P(x,y,z) = P^*(x,y,-z)$: $J_E(\Sigma) = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

- Symétrie de révolution autour de l'axe (E,z) : $J_E(\Sigma) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(-, -, \vec{z})}$

4.2.3 Exemples

◇ Opérateur d'inertie en O d'un disque D de rayon R , de centre O et de masse m .



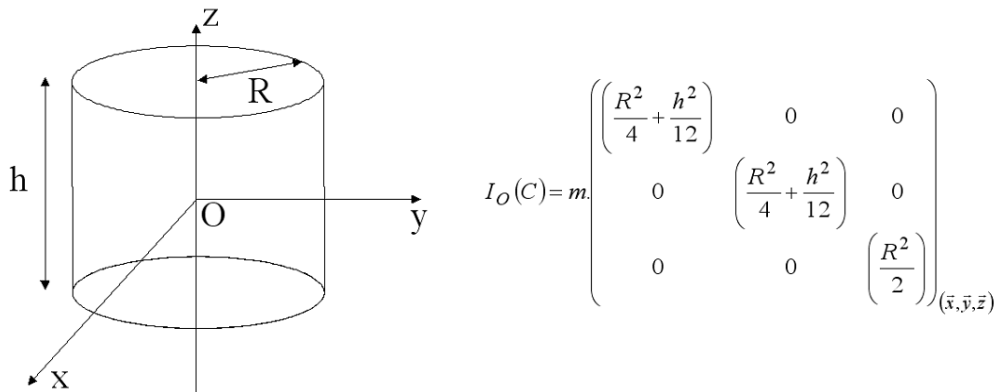
Démonstration :

Supposons le disque d'épaisseur e , négligeable devant son rayon R , et de masse volumique ρ . Par symétrie, les produits d'inertie sont nuls. Il reste alors :

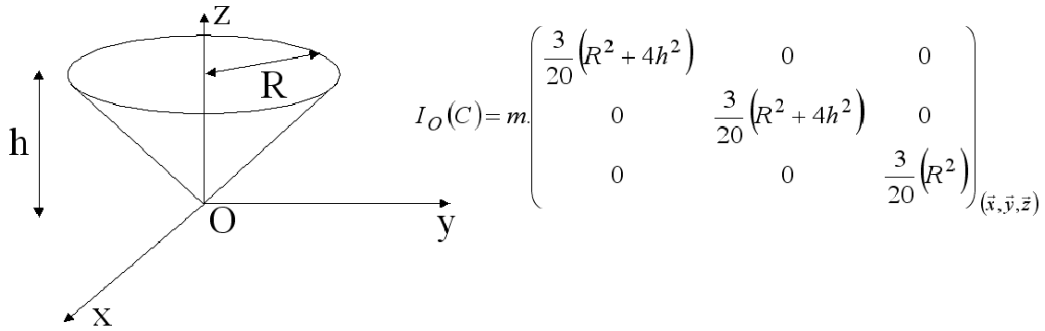
$$J_O(D) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(e\mathbf{r}, e\boldsymbol{\theta}, e\mathbf{z})} \quad \text{avec } C = \rho.e. \int_D r^2 (rd\theta) dr = \rho.2\pi.e. \frac{R^4}{4} = m \frac{R^2}{2}$$

$$\text{et } C = B = \rho.e. \int_D r^2 \cos^2 \theta (rd\theta) dr = \rho.e. \underbrace{\left(\int_D \cos^2 \theta d\theta \right)}_{\pi} \underbrace{\left(\int_D r^3 dr \right)}_{R^4/4} = m \frac{R^2}{4}$$

◇ Opérateur d'inertie en O d'un cylindre C de rayon R , de hauteur h et de centre O .



◇ Opérateur d'inertie en O d'un cône de révolution C de rayon R et de hauteur h .



◇ Opérateur d'inertie en O d'une sphère creuse S de centre O , de rayon R et de masse m .

$$I_O(S) = \frac{2}{3} m R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

◇ Opérateur d'inertie en O d'une sphère pleine S de centre O , de rayon R et de masse m .

$$I_O(S) = \frac{2}{5} m R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

4.3 Conséquences du principe de conservation de la masse

4.3.1 Torseur cinétique

Le torseur cinétique, du système matériel Σ dans son mouvement par rapport au repère R est, en un point A quelconque, le torseur à structure suivant :

$$\{\mathcal{C}(\Sigma/R)\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in \Sigma} \vec{V}(P/R) dm(P) \\ \vec{\sigma}_A = \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm(P) \end{array} \right\}$$

◇ Expression de la résultante cinétique.

O étant l'origine du repère $R(O, x, y, z)$, le centre d'inertie du système S est défini de la façon suivante :

$$m(\Sigma) \vec{OG} = \int_{P \in \Sigma} \vec{OP} dm(P) \quad \text{alors} \quad \frac{d}{dt} m(\Sigma) \vec{OG} = \frac{d}{dt} \int_{P \in \Sigma} \vec{OP} dm(P)$$

D'après le principe de conservation de la masse :

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{P \in \Sigma} \vec{OP} dm(P) \right]_R = \int_{P \in \Sigma} \frac{d}{dt} \left[\vec{OP} \right]_R dm(P)$$

Donc la résultante cinétique s'exprime de la façon suivante :

$$\boxed{\int_{P \in \Sigma} \vec{V}(P/R) dm(P) = m \vec{V}(G/R)}$$

◇ *Expression du moment cinétique.*

De même, on cherche l'expression du moment cinétique en A attaché à S :

$$\vec{\sigma}_A(\Sigma / R) = \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P \in \Sigma / R) dm(P)$$

$$\text{Or : } \vec{V}(P \in \Sigma / R) = \vec{V}(A \in \Sigma / R) + \vec{\Omega}(\Sigma / R) \wedge \vec{AP}$$

$$\text{Donc : } \vec{\sigma}_A(\Sigma / R) = \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{V}(A \in \Sigma / R) dm(P) + \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \left(\vec{\Omega}(\Sigma / R) \wedge \vec{AP} \right) dm(P)$$

$$\text{Donc : } \boxed{\vec{\sigma}_A(\Sigma / R) = m(\Sigma) \cdot \vec{AG} \wedge \vec{V}(A \in \Sigma / R) + J_A(\Sigma) \vec{\Omega}(\Sigma / R)}$$

○ Remarque 1 : si A est fixe dans R alors $\vec{\sigma}_A(\Sigma / R) = J_A(\Sigma) \vec{\Omega}(\Sigma / R)$

○ Remarque 2 : si A est le centre d'inertie G alors $\vec{\sigma}_G(\Sigma / R) = J_G(\Sigma) \vec{\Omega}(\Sigma / R)$

4.3.2 Torseur dynamique

Le torseur dynamique système matériel Σ dans son mouvement par rapport au repère R s'écrit en un point A quelconque :

$$\{\mathcal{D}(\Sigma / R)\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in \Sigma} \vec{\Gamma}(P / R) dm(P) \\ \vec{\sigma}_A = \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P / R) dm(P) \end{array} \right\}$$

◇ *Expression de la résultante dynamique.*

La résultante cinétique est donnée par la relation suivante : $\int_{P \in \Sigma} \vec{V}(P / R) dm(P) = m(\Sigma) \vec{V}(G / R)$

Si l'on dérive de part et d'autre par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{P \in \Sigma} \vec{V}(P / R) dm(P) \right]_R = m(\Sigma) \frac{d}{dt} [\vec{V}(G / R)]_R$$

En appliquant maintenant le principe de conservation de la masse :

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{P \in \Sigma} \vec{V}(P / R) dm(P) \right]_R = \int_{P \in \Sigma} \frac{d}{dt} [\vec{V}(P / R)]_R dm(P) = \int_{P \in \Sigma} \vec{\Gamma}(P / R) dm(P)$$

On en déduit alors l'expression de la résultante dynamique : $\boxed{\int_{P \in \Sigma} \vec{\Gamma}(P / R) dm(P) = m(\Sigma) \vec{\Gamma}(G / R)}$

◇ *Relation entre les moments cinétique et dynamique.*

Le moment cinétique en A s'écrit de la façon suivante :

$$\vec{\sigma}_A(\Sigma / R) = \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P / R) dm(P)$$

Si l'on dérive de part et d'autre par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_A(\Sigma / R)]_R = \frac{d}{dt} \left[\int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm(P) \right]_R$$

En appliquant maintenant le principe de conservation de la masse :

$$\frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_A(\Sigma / R)]_R = \int_{P \in \Sigma} \frac{d}{dt} \left[\vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R) \right]_R dm(P)$$

Et en développant :

$$\frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_A(\Sigma / R)]_R = \int_{P \in \Sigma} \frac{d}{dt} \left[\vec{AP} \right]_R \wedge \vec{V}(P/R) dm(P) + \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \frac{d}{dt} [\vec{V}(P/R)]_R dm(P)$$

Soit :

$$\frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_A(\Sigma / R)]_R = \int_{P \in \Sigma} (\vec{V}(P/R) - \vec{V}(A/R)) \wedge \vec{V}(P/R) dm(P) + \vec{\delta}_A(\Sigma / R)$$

On en déduit la relation entre le moment cinétique et le moment dynamique :

$$\boxed{\vec{\delta}_A(\Sigma / R) = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_A(\Sigma / R)]_R + m(\Sigma) \vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(G/R)}$$

- Remarque : si A est le centre d'inertie G alors $\vec{\sigma}_G(\Sigma / R) = J_G(\Sigma) \vec{\Omega}(\Sigma / R)$

$$\text{Donc } \boxed{\vec{\delta}_G(\Sigma / R) = \frac{d}{dt} [J_G(\Sigma) \vec{\Omega}(\Sigma / R)]_R}$$

4.3.3 Énergie cinétique

L'énergie cinétique du système matériel Σ en mouvement par rapport à un repère R s'écrit :

$$T(\Sigma / R) = \frac{1}{2} \int_{P \in \Sigma} [\vec{V}(P/R)]^2 dm(P)$$

Si l'on connaît les éléments de réduction du torseur cinématique en un point Q de Σ , on peut écrire :

$$2T(\Sigma / R) = \int_{P \in \Sigma} \left[\vec{V}(Q/R) + \vec{\Omega}(\Sigma / R) \wedge \vec{QP} \right]^2 dm(P)$$

Soit, en faisant une permutation sur le produit mixte :

$$\begin{aligned} 2T(\Sigma / R) &= m(\Sigma) [\vec{V}(Q/R)]^2 + \vec{\Omega}(\Sigma / R) \cdot \int_{P \in \Sigma} \vec{QP} \wedge \left(\vec{\Omega}(\Sigma / R) \wedge \vec{QP} \right) dm(P) \\ &+ 2\vec{V}(Q/R) \cdot \vec{\Omega}(\Sigma / R) \wedge \left(\int_{P \in \Sigma} \vec{QP} dm(P) \right) \end{aligned}$$

On obtient alors l'expression de l'énergie cinétique en un point Q de Σ :

$$\boxed{2T(\Sigma / R) = m(\Sigma) [\vec{V}(Q/R)]^2 + \vec{\Omega}(\Sigma / R) \cdot J_Q(\Sigma) \vec{\Omega}(\Sigma / R) + 2m(\Sigma) \vec{V}(Q/R) \cdot \left[\vec{\Omega}(\Sigma / R) \wedge \vec{QG} \right]}$$

Si maintenant le point Q choisi est le centre d'inertie G :

$$2T(\Sigma/R) = m(\Sigma) \left[\vec{V}(G/R) \right]^2 + \Omega(\Sigma/R) \cdot J_G(\Sigma) \Omega(\Sigma/R)$$

4.3.4 Autres cas. Exemple : Action de la pesanteur

Les simplifications appliquées ci-dessus aux quantités de mouvements, d'accélération ou à l'énergie cinétique s'appliquent également dans les autres cas, comme par exemple dans le cas du torseur de l'action de la pesanteur :

$${}_A \{ \mathcal{T}(pes \rightarrow S) \} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{P \in \Sigma} \vec{g} \cdot dm(P) \\ \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{g} \cdot dm(P) \end{array} \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} m \cdot \vec{g} \\ \vec{AG} \wedge m \cdot \vec{g} \end{array} \right\}$$

4.4 A retenir

◇ Conséquence du principe de conservation de la masse

Pour un système matériel à masse conservative, définie à l'aide d'une densité volumique ρ , et pour toute fonction régulière h :

$$H(t) = \int_{D_t} h(P) \cdot \rho(P) \cdot dv(P) \Rightarrow \frac{d}{dt} H(t) = \int_{D_t} \frac{dh(P)}{dt} \cdot \rho(P) \cdot dv(P)$$

◇ Torseur cinétique

$$\{\mathcal{C}(\Sigma/R)\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in \Sigma} \vec{V}(P/R) \cdot dm(P) \\ \vec{\sigma}_A(\Sigma/R) = \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R) \cdot dm(P) \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \boxed{\int_{P \in \Sigma} \vec{V}(P/R) \cdot dm(P) = m \cdot \vec{V}(G/R)}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{\sigma}_A(\Sigma/R) = m(\Sigma) \cdot \vec{AG} \wedge \vec{V}(A \in \Sigma/R) + J_A(\Sigma) \cdot \vec{\Omega}(\Sigma/R)}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{\sigma}_G(\Sigma/R) = J_G(\Sigma) \cdot \vec{\Omega}(\Sigma/R)}$$

◇ Torseur dynamique

$$\{\mathcal{D}(\Sigma/R)\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in \Sigma} \vec{\Gamma}(P/R) \cdot dm(P) \\ \vec{\delta}_A(\Sigma/R) = \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R) \cdot dm(P) \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \boxed{\int_{P \in \Sigma} \vec{\Gamma}(P/R) \cdot dm(P) = m(\Sigma) \cdot \vec{\Gamma}(G/R)}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{\delta}_A(\Sigma/R) = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_A(\Sigma/R)]_R + m(\Sigma) \vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(G/R)}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{\delta}_G(\Sigma/R) = \frac{d}{dt} [J_G(\Sigma) \vec{\Omega}(\Sigma/R)]_R}$$

◇ Energie cinétique

$$T(\Sigma/R) = \frac{1}{2} \int_{P \in \Sigma} [\vec{V}(P/R)]^2 \cdot dm(P)$$

$$\boxed{Q \in \Sigma \rightarrow 2T(\Sigma/R) = m(\Sigma) [\vec{V}(Q/R)]^2 + \Omega(\Sigma/R) \cdot J_G(\Sigma) \Omega(\Sigma/R) + 2m(\Sigma) \vec{V}(Q/R) \cdot \left[\Omega(\Sigma/R) \wedge \vec{QG} \right]}$$

$$\boxed{2T(\Sigma/R) = m(\Sigma) [\vec{V}(G/R)]^2 + \Omega(\Sigma/R) \cdot J_G(\Sigma) \Omega(\Sigma/R)}$$

5 CONSERVATION DE L'ENERGIE : PREMIER PRINCIPE

5.1 Introduction

Dans cette partie nous allons rappeler rapidement les principales grandeurs employées en énergétique (puissance, travail, énergie potentielle et énergie cinétique) et les exprimer en employant le formalisme défini pour la mécanique des milieux indéformables.

Dans un second temps nous écrirons le principe de conservation de l'énergie, en employant le formalisme associé à la cinématique des systèmes de solides indéformables.

5.2 Energétique

5.2.1 Torseur des actions mécaniques extérieures à un solide

Les efforts extérieurs à un solide, sont représentés par des champs vectoriels définis par rapport à une mesure, volumique, surfacique ou linéique. On peut donc leur associer des torseurs.

Supposons un solide S . Les actions mécaniques extérieures à S sur S sont représentées par un champ vectoriel $\Psi.dP$. Où dP est une mesure volumique, surfacique ou linéique. S'il s'agit d'actions à distance (attraction gravitationnelle, par exemple), l'intégrale est une intégrale volumique. S'il s'agit d'actions de contact, l'intégrale est alors une intégrale de surface.

Alors le torseur des actions de \bar{S} sur S s'écrit au point A :

$$\mathcal{T}\{\bar{S} \rightarrow S\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_S \Psi_{\bar{S} \rightarrow S} . dP \\ \int_A \frac{\vec{S}}{AP} \wedge \Psi_{\bar{S} \rightarrow S} . dP \end{array} \right\}$$

5.2.2 Puissance

◇ *Puissance associée à des actions extérieures.*

Se étant un système matériel appartenant à \bar{S}_i . Les actions mécaniques de S_e sur S_i sont représentées par un champ vectoriel $\Psi.dP$. Où dP est une mesure volumique, surfacique ou linéique.

La puissance développée par les actions mécaniques de S_e sur S_i , pour la loi k (contact, attraction gravitationnelle ...), dans le mouvement de S_i par rapport au repère R , à la date t , est par définition :

$$P\left(\overset{k}{S_e \rightarrow S_i} / R\right) = \int_{S_i} \Psi_{S_e \rightarrow S_i} \cdot \vec{V}(P_i / R) dP$$

Ceci s'écrit aussi :

$$P\left(\overset{k}{S_e \rightarrow S_i} / R\right) = \mathcal{T}\left(\overset{k}{S_e \rightarrow S_i}\right) \times \mathcal{C}(R_i / R)$$

Alors :

$$P\left(\overset{k}{S_e \rightarrow S_i} / R\right) = \int_{S_i} \Psi_{S_e \rightarrow S_i} \cdot \vec{V}(P_i / R) dP$$

$$P\left(\overset{k}{Se \rightarrow Si / R2}\right) = \int_{Si} \Psi_{Se \rightarrow Si} \cdot \vec{V}(P_i / R2) dP$$

Par conséquent :

$$P\left(\overset{k}{Se \rightarrow Si / R1}\right) - P\left(\overset{k}{Se \rightarrow Si / R2}\right) = \int_{Si} \Psi_{Se \rightarrow Si} \cdot [\vec{V}(P_i / R1) - \vec{V}(P_i / R2)] dP$$

Or :

$$\vec{V}(P_i / R1) = \vec{V}(P_i / R2) + \vec{V}(P_i \in R2 / R1)$$

Soit :

$$P\left(\overset{k}{Se \rightarrow Si / R1}\right) - P\left(\overset{k}{Se \rightarrow Si / R2}\right) = \int_{Si} \Psi_{Se \rightarrow Si} \cdot [\vec{V}(P_i \in R2 / R1)] dP$$

Soit encore :

$$P\left(\overset{k}{Se \rightarrow Si / R1}\right) - P\left(\overset{k}{Se \rightarrow Si / R2}\right) = \mathcal{F}\left(\overset{k}{Se \rightarrow Si}\right) \times \mathcal{V}(R2 / R1)$$

Σ est un système de solides Si , et Se étant un système matériel appartenant à $\bar{\Sigma}$. La puissance développée par les actions mécaniques de Se sur Σ , pour la loi k (contact, attraction gravitationnelle ...), dans le mouvement de Σ par rapport au repère Galiléen R , à la date t , est par définition :

$$P\left(\overset{k}{Se \rightarrow \Sigma / R}\right) = \sum_{j=1}^n \int_{Si} \Psi_{Se \rightarrow Sj} \cdot \vec{V}(P_j / Rg) dP$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$P\left(\overset{k}{Se \rightarrow \Sigma / R}\right) = \sum_{j=1}^n \mathcal{F}\left(\overset{k}{Se \rightarrow Sj}\right) \times \mathcal{V}(Rj / R)$$

◇ Puissance associée à des actions réciproques.

Soit deux systèmes disjoints $S1$ et $S2$ en mouvement par rapport à R . La puissance des actions réciproques entre $S1$ et $S2$, pour la loi d'interaction k , s'écrit :

$$P\left(\overset{k}{S1 \leftrightarrow S2 / R}\right) = P\left(\overset{k}{S1 \rightarrow S2 / R}\right) + P\left(\overset{k}{S2 \rightarrow S1 / R}\right)$$

Par conséquent :

$$P\left(\overset{k}{S1 \leftrightarrow S2 / R1}\right) = P\left(\overset{k}{S1 \rightarrow S2 / R1}\right) + P\left(\overset{k}{S2 \rightarrow S1 / R1}\right)$$

De même :

$$P\left(\overset{k}{S1 \leftrightarrow S2 / R2}\right) = P\left(\overset{k}{S1 \rightarrow S2 / R2}\right) + P\left(\overset{k}{S2 \rightarrow S1 / R2}\right)$$

Donc :

$$P\left(\overset{k}{S1 \leftrightarrow S2 / R1}\right) - P\left(\overset{k}{S1 \leftrightarrow S2 / R2}\right) = \mathcal{F}\left(\overset{k}{S1 \rightarrow S2}\right) \times \mathcal{V}(R2 / R1) + \mathcal{F}\left(\overset{k}{S2 \rightarrow S1}\right) \times \mathcal{V}(R2 / R1)$$

$$\text{Or : } \mathcal{F}\left(S1 \rightarrow S2\right)^k = -\mathcal{F}\left(S2 \rightarrow S1\right)^k$$

$$\text{Donc } P\left(S1 \leftrightarrow S2 / R1\right)^k - P\left(S1 \leftrightarrow S2 / R2\right)^k = 0$$

La puissance des actions réciproques entre deux solides pour toute loi d'interaction k est indépendante du référentiel du mouvement choisi. On la note donc : $P\left(S1 \leftrightarrow S2\right)^k$

5.2.3 Travail

Se étant un système matériel appartenant à \overline{Si} . Le travail entre les dates $t1$ et $t2$ des actions mécaniques de Se sur Si , pour la loi k (contact, attraction gravitationnelle ...), dans le mouvement de Si par rapport au repère R , est par définition :

$$W\left(Se \rightarrow Si / R\right)_{t1}^{t2} = \int_{t=t1}^{t=t2} P\left(Se \rightarrow Si / R\right)^k dt$$

5.2.4 Energie Potentielle

On suppose deux solides $S1$ et $S2$ en mouvement par rapport à un référentiel R .

◇ Energie potentielle associée à des efforts extérieurs

La puissance développée par les efforts exercés par $S2$ sur $S1$, en accord avec la loi d'interaction k , s'écrit :

$$P\left(S2 \rightarrow S1 / R\right)^k = \int_{S1 \times S2} \vec{\Psi}_{S2 \rightarrow S1}^k(P2, P1) \cdot \vec{V}(P1 / R) dP1 . dP2$$

On procède à une double intégration. On intègre l'effet de chacun des points $P2$ de $S2$ sur un même point $P1$ de $S1$. Puis on intègre sur l'ensemble des points $P1$ de $S1$.

Alors, si quel que soit le mouvement de $S1$ par rapport à R on peut écrire :

$$P\left(S2 \rightarrow S1 / R\right)^k = -\frac{d}{dt} \int_{S1 \times S2} \Theta(P1, P2) dP1 . dP2$$

On peut associer une énergie potentielle aux actions mécaniques de $S2$ sur $S1$ dans son mouvement par rapport à R , avec :

$$E_p\left(S2 \rightarrow S1 / R\right)^k = \int_{S1 \times S2} \Theta(P1, P2) dP1 . dP2$$

Et dans ce cas :

$$P\left(S2 \rightarrow S1 / R\right)^k = -\frac{d}{dt} E_p\left(S2 \rightarrow S1 / R\right)^k$$

◇ Energie potentielle associée à des actions mutuelles

De même, si quels que soient les mouvements de $S1$ et $S2$ par rapport à R quelconque, la puissance des actions mutuelles entre $S1$ et $S2$ peut s'écrire explicitement :

$$P\left(S2 \leftrightarrow S1\right)^k = -\frac{d}{dt} \int_{S1 \times S2} \Theta(P1, P2) dP1 . dP2$$

On pourra alors associer une énergie potentielle aux actions mutuelles entre S1 et S2 :

$$E_p \left(S2 \overset{k}{\leftrightarrow} S1 \right) = \int_{S1 \times S2} \Theta(P1, P2) dP1 . dP2$$

Et comme précédemment :

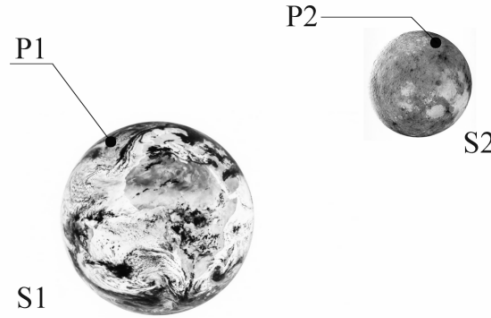
$$P \left(S2 \overset{k}{\leftrightarrow} S1 \right) = - \frac{d}{dt} E_p \left(S2 \overset{k}{\leftrightarrow} S1 \right)$$

Dans tout les cas l'énergie potentielle n'est définie qu'à une constante additive près qu'on omet d'écrire en général.

◇ *Exemple : énergie potentielle associée aux inter-efforts gravitationnels.*

L'attraction gravitationnelle d'un point P1 du solide S1 sur un point P2 du solide S2 en mouvement par rapport à un référentiel Rg, s'écrit comme suit :

$$\Psi_{P1 \rightarrow P2}^{\vec{g}}(P1, P2) = - \mathcal{G}_o . dm(P1) dm(P2) \frac{\overrightarrow{P1P2}}{\|P1P2\|^3} \quad \text{Où } \mathcal{G}_o \text{ est la constante de gravitation universelle.}$$



Alors l'action du solide S1 sur un point P2 du solide S2 s'écrit donc :

$$\Psi_{S1 \rightarrow P2}^{\vec{g}}(P2) = - \mathcal{G}_o \cdot \int_{S1} dm(P1) dm(P2) \frac{\overrightarrow{P1P2}}{\|P1P2\|^3}$$

Et la puissance développée par l'attraction gravitationnelle de S1 sur S2, où S2 est en mouvement par rapport au repère Rg, s'écrit :

$$P \left(S1 \overset{\vec{g}}{\rightarrow} S2 / Rg \right) = \int_{S2} \Psi_{S1 \rightarrow P2}^{\vec{g}}(P2) \cdot \vec{V}(P2 / Rg)$$

Par ailleurs, la puissance développée par l'attraction gravitationnelle de S2 sur S1, où S1 est en mouvement par rapport au repère Rg, s'écrit :

$$P \left(S2 \overset{\vec{g}}{\rightarrow} S1 / Rg \right) = \int_{S2} \Psi_{S2 \rightarrow P1}^{\vec{g}}(P1) \cdot \vec{V}(P1 / Rg)$$

Par conséquent la puissance développée par les actions mutuelles entre S1 et S2 est :

$$P \left(S2 \overset{\vec{g}}{\leftrightarrow} S1 \right) = P \left(S1 \overset{\vec{g}}{\rightarrow} S2 / Rg \right) + P \left(S2 \overset{\vec{g}}{\rightarrow} S1 / Rg \right)$$

En développant :

$$P\left(S2 \leftrightarrow S1\right)^{\vec{g}} = -\mathcal{G}_o \cdot \int_{S1 \times S2} \frac{\overrightarrow{P_1 P_2}}{\|\overrightarrow{P_1 P_2}\|^3} \left(\vec{V}(P2 / Rg) - \vec{V}(P1 / Rg) \right) dm(P_1) dm(P_2)$$

$$P\left(S2 \leftrightarrow S1\right)^{\vec{g}} = \mathcal{G}_o \cdot \int_{S1 \times S2} \frac{\overrightarrow{P_1 P_2}}{\|\overrightarrow{P_1 P_2}\|^3} \cdot \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{P_1 P_2} \right]_{Rg} dm(P_1) dm(P_2)$$

Soit finalement :

$$P\left(S2 \leftrightarrow S1\right)^{\vec{g}} = \mathcal{G}_o \cdot \int_{S1 \times S2} \left[\frac{d}{dt} \frac{1}{\|\overrightarrow{P_1 P_2}\|} \right]_{Rg} dm(P_1) dm(P_2)$$

Et comme il s'agit de systèmes à masse conservative :

$$P\left(S2 \leftrightarrow S1\right)^{\vec{g}} = \frac{d}{dt} \left[\mathcal{G}_o \cdot \int_{S1 \times S2} \frac{dm(P_1) dm(P_2)}{\|\overrightarrow{P_1 P_2}\|} \right]$$

Donc il existe une énergie potentielle associée aux actions mutuelles de l'attraction gravitationnelle entre deux solides S1 et S2 qui s'écrit :

$$E_p\left(S2 \leftrightarrow S1\right)^{\vec{g}} = -\mathcal{G}_o \cdot \int_{S1 \times S2} \frac{dm(P_1) dm(P_2)}{\|\overrightarrow{P_1 P_2}\|}$$

◇ Quelques actions mutuelles avec énergie potentielle associée

○ Attraction gravitationnelle entre deux solides S1 et S2 : $E_p\left(S2 \leftrightarrow S1\right)^{\vec{g}} = -\mathcal{G}_o \cdot \int_{S1 \times S2} \frac{dm(P_1) dm(P_2)}{\|\overrightarrow{P_1 P_2}\|}$

○ Attraction gravitationnelle à la surface de la terre entre la terre et un solide S : *approximation !*

$$E_p\left(Terre \leftrightarrow S\right)^{\vec{g}} = E_p\left(Pes \rightarrow S / Terre\right)^{\vec{g}} = -m(S) \cdot \vec{g} \cdot \overrightarrow{OG}$$

O étant le point de référence à la surface de la terre, g le vecteur accélération de la pesanteur en O et G le centre d'inertie du solide S.

○ Ressort de traction-compression : $E_p\left(S2 \leftrightarrow S1\right)^r = \frac{k}{2} (l - l_o)^2$

Où r est un ressort de traction compression, de raideur k, et de longueur libre l_o , et où l paramètre la distance entre les points d'attache du ressort sur les deux solides S1 et S2.

○ Ressort de torsion : $E_p\left(S2 \leftrightarrow S1\right)^r = \frac{C}{2} (\theta - \theta_o)^2$

Où r est un ressort de torsion, de raideur C, et de rotation libre θ_o , et où θ paramètre la torsion du ressort.

5.2.5 Énergie cinétique

L'énergie cinétique du système matériel Σ de centre d'inertie G dans son mouvement par rapport à un repère R est le scalaire suivant :

$$T(\Sigma/R) = \frac{1}{2} \int_{P \in \Sigma} [\vec{V}(P/R)]^2 dm(P)$$

Ceci s'écrit aussi :

$$T(\Sigma/R) = \frac{1}{2} m(\Sigma) [\vec{V}(G/R)]^2 + \frac{1}{2} \Omega(\Sigma/R) \cdot J_G(\Sigma) \Omega(\Sigma/R)$$

5.3 Conservation de l'énergie : Théorème de l'énergie cinétique

5.3.1 Théorème de l'énergie pour un solide S

Le principe de conservation de l'énergie conduit à écrire, pour un solide S, que la puissance développée par les actions mécaniques extérieures au solide S, est égale à la variation d'énergie cinétique du solide soit :

$$P(\bar{S} \rightarrow S / Rg) = \frac{dT(S / Rg)}{dt}$$

5.3.2 Théorème de l'énergie cinétique pour deux solides S1 et S2

Si l'on considère maintenant un système Σ constitué de deux solides S1 et S2, on peut appliquer le principe de conservation de l'énergie à chacun des deux solides :

$$P(\bar{S}1 \rightarrow S1 / Rg) = \frac{dT(S1 / Rg)}{dt} \quad \text{et} \quad P(\bar{S}2 \rightarrow S2 / Rg) = \frac{dT(S2 / Rg)}{dt}$$

$$\text{Donc : } \frac{dT(\Sigma / Rg)}{dt} = \frac{dT(S1 / Rg)}{dt} + \frac{dT(S2 / Rg)}{dt} = P(\bar{S}1 \rightarrow S1 / Rg) + P(\bar{S}2 \rightarrow S2 / Rg)$$

$$\text{Soit : } \frac{dT(\Sigma / Rg)}{dt} = \mathcal{F}(\bar{S}1 \rightarrow S1) \times \mathcal{V}(S1 / Rg) + \mathcal{F}(\bar{S}2 \rightarrow S2) \times \mathcal{V}(S2 / Rg) \quad \text{Donc :}$$

$$\frac{dT(\Sigma / Rg)}{dt} = [\mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S1) + \mathcal{F}(S2 \rightarrow S1)] \times \mathcal{V}(S1 / Rg) + [\mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S2) + \mathcal{F}(S1 \rightarrow S2)] \times \mathcal{V}(S2 / Rg)$$

$$\text{Comme } \mathcal{F}(S2 \rightarrow S1) = -\mathcal{F}(S1 \rightarrow S2)$$

$$\text{On en déduit : } \frac{dT(\Sigma / Rg)}{dt} = \sum_{i=1,2} \mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow Si) \times \mathcal{V}(Si / Rg) + \mathcal{F}(S1 \rightarrow S2) \times [\mathcal{V}(S2 / Rg) - \mathcal{V}(S1 / Rg)]$$

$$\text{Ou encore} \quad \boxed{\frac{dT(\Sigma / Rg)}{dt} = P(\bar{S} \rightarrow \Sigma / Rg) + P(S1 \leftrightarrow S2)}$$

La puissance développée par les efforts extérieurs et intérieurs au système Σ est égale à la variation de l'énergie cinétique du système. Ceci se généralise naturellement à un système de n solides.

5.3.3 Théorème de l'énergie cinétique pour un système Σ de n solides

La généralisation à un système Σ de n solides donne :

$$\frac{dT(\Sigma / Rg)}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow Si) \times \mathcal{V}(Si / Rg) + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \mathcal{F}(Sj \rightarrow Si) \times \mathcal{V}(Si / Sj)$$

Le théorème de l'énergie cinétique pour un système Σ de n solides s'écrit donc :

$$\boxed{\frac{dT(\Sigma / Rg)}{dt} = \underbrace{P(\bar{S} \rightarrow \Sigma / Rg)}_{\text{Puissance des efforts extérieurs}} + \underbrace{P(Si \leftrightarrow Sj)}_{\text{Puissance des efforts intérieurs}}}$$

5.3.4 Intégrale première de l'énergie cinétique : Système conservatif

Si les puissances des efforts intérieurs et extérieurs sont nulles ou bien se calculent par dérivation d'une énergie potentielle, dont on notera la somme $E_p(\Sigma/Rg)$, alors le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{dT(\Sigma / Rg)}{dt} = - \frac{dE_p(\Sigma / Rg)}{dt}$$

Et par conséquent, il existe une intégrale première du mouvement, appelée intégrale première de l'énergie cinétique :

$$T(\Sigma / Rg) + E_p(\Sigma / Rg) = \text{Constante}$$

Cette intégrale première traduit directement la conservation de l'énergie du système. Il y a transformation de l'énergie potentielle en énergie cinétique et réciproquement. Le système est alors dit « conservatif ».

5.4 A retenir

- Torseur des actions mécanique de \bar{S} sur S , au point A :

$$\mathcal{T}(\bar{S} \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{l} \int_S \Psi_{\bar{S} \rightarrow S} \cdot dP \\ \int_A \overrightarrow{AP} \wedge \Psi_{\bar{S} \rightarrow S} \cdot dP \end{array} \right\}$$

- Energie potentielle pour quelques lois d'interaction :
- Attraction gravitationnelle entre deux solides $S1$ et $S2$: $E_p(S2 \leftrightarrow S1) = -\mathcal{G}_o \cdot \int_{S1 \times S2} \frac{dm(P_1)dm(P_2)}{\|P_1 P_2\|}$
- Attraction gravitationnelle à la surface de la terre, entre la terre et un solide S en mouvement par rapport à la terre :

$$E_p(Terre \xleftrightarrow{\vec{g}} S) = E_p(Pes \rightarrow S / Terre) = -m(S) \vec{g} \cdot \overrightarrow{OG}$$

- Ressort de traction-torsion : $E_p(S1 \xleftrightarrow{r} S2) = \frac{1}{2} K(L - L_o)^2 + \frac{1}{2} C(\theta - \theta_o)^2$

Où r est un ressort de traction torsion, de raideur k en traction-compression, de raideur C en torsion, et de longueur libre l_o , et où l paramètre la distance entre les points d'attache du ressort sur les deux solides $S1$ et $S2$ et de torsion libre θ_o où θ paramètre la torsion du ressort.

- Théorème de l'énergie cinétique pour un système Σ de n solides

$$\frac{dT(\Sigma / Rg)}{dt} = \underbrace{P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / Rg)}_{\text{Puissance des efforts extérieurs}} + \underbrace{P(S_i \leftrightarrow S_j)}_{\text{Puissance des efforts intérieurs}}$$

- Intégrale première de l'énergie cinétique : Conservation de l'énergie

$$\text{Si } P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / Rg) = 0 \text{ et } P(S_i \leftrightarrow S_j) = 0 \quad \text{Alors } T(\Sigma / Rg) = \text{Constante}$$

$$\text{Si } P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / Rg) = -\frac{d}{dt} E_p(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / Rg) \quad \text{et-} \quad P(S_i \leftrightarrow S_j) = -\frac{d}{dt} E_p(S_i \leftrightarrow S_j)$$

$$\text{Alors} \quad T(\Sigma / Rg) + E_p(\Sigma / Rg) = \text{Constante}$$

6 CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

6.1 Introduction

Le principe fondamental de la dynamique a été énoncé pour la première fois vers la fin du XVII^e siècle par Newton. Il permet de prévoir avec une très bonne précision les phénomènes mécaniques classiques. Cette présentation traditionnelle est actuellement remplacée par une présentation équivalente, le principe des puissances virtuelles qui permet de faire le lien entre les différentes branches de la mécanique, mécanique des structures, des plaques et coques et mécanique des milieux continus ...

Dans ce chapitre, nous allons d'abord présenter le principe fondamental de la dynamique dans sa forme classique puis le principe des puissances virtuelles et les différents théorèmes qui en découlent. Le choix de l'une ou l'autre des expressions de ce principe sera généralement guidé par la simplicité de mise en œuvre pour un problème précis. Le principe des puissances virtuelles et les équations de Lagrange seront généralement employés pour déterminer les mouvements de systèmes de solides.

6.2 Actions mécaniques ou efforts

6.2.1 Torseur des actions mécaniques extérieures à un système de solides Σ

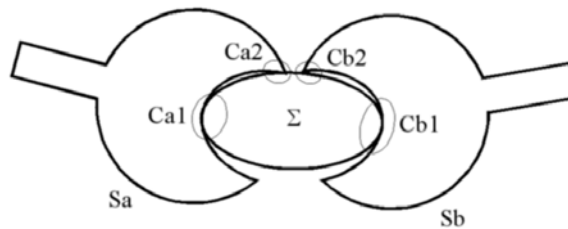
Les efforts extérieurs à un solide ou à un système de solides, sont représentés par des champs vectoriels $\Psi.dP$ définis par rapport à une mesure dP , volumique, surfacique ou linéique. S'il s'agit d'action à distance (attraction gravitationnelle, par exemple), l'intégrale est une intégrale volumique. S'il s'agit d'actions de contact, l'intégrale est alors une intégrale de surface. On peut leur associer des torseurs.

Supposons un solide S et un solide Σ_e . Le torseur des actions mécanique de Σ_e sur S s'écrit au point A :

$$\mathcal{T}\{\Sigma_e \rightarrow S\} = \left\{ \begin{array}{c} \int \Psi_{\Sigma_e \rightarrow S} . dP \\ \int_A \frac{Si}{AP} \wedge \Psi_{\Sigma_e \rightarrow S} . dP \end{array} \right\}$$

Lorsque plusieurs solides interviennent, les contributions de chacun des solides sont distinguées. Dans le cas particulier ci-dessous, si l'on note $\bar{\Sigma}$ l'extérieur de Σ , $\bar{\Sigma}$ est ici constitué des deux solides Sa et Sb . Alors :

$$\mathcal{T}\{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma\} = \mathcal{T}\{Sa \rightarrow \Sigma\} + \mathcal{T}\{Sb \rightarrow \Sigma\}$$



Par ailleurs, sur chacun des solides, le contact se produit en deux zones, $Ca1$ et $Ca2$ pour Sa et $Cb1$ et $Cb2$ pour Sb :

$$\mathcal{T}\{Sa \rightarrow \Sigma\} = \left\{ \begin{array}{c} \int \Psi_{Sa \rightarrow \Sigma} . dP + \int \Psi_{Sa \rightarrow \Sigma} . dP \\ \int_{Ca1} \frac{Ca1}{AP} \wedge \Psi_{Sa \rightarrow \Sigma} . dP + \int_{Ca2} \frac{Ca2}{AP} \wedge \Psi_{Sa \rightarrow \Sigma} . dP \end{array} \right\} = \mathcal{T}\left\{Sa \rightarrow \Sigma\right\}^{Ca1} + \mathcal{T}\left\{Sa \rightarrow \Sigma\right\}^{Ca2}$$

On écrira ainsi pour chacune des liaisons entre solides, et pour chacune des actions à distances, un torseur des actions mécaniques associé.

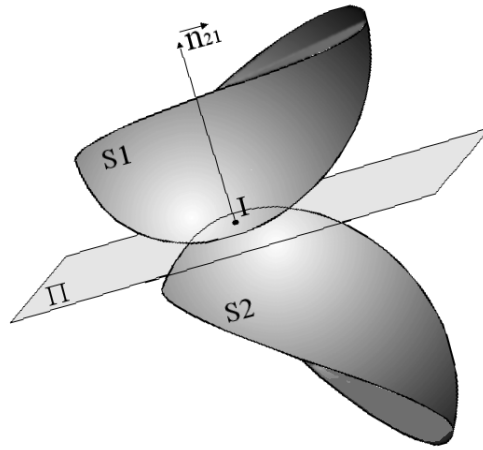
6.2.2 Exemple d'action à distance : la pesanteur

Le torseur, en un point A, des actions de la pesanteur sur un solide S de masse m et de densité (homogène) ρ d'écrira comme suit :

$$\mathcal{T}\left\{pes \rightarrow S\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \int_S \rho \cdot \vec{g} \cdot dv \\ \int_A \frac{S}{AP} \wedge \rho \cdot \vec{g} \cdot dv \end{array} \right\} \quad \text{Ou encore : } \mathcal{T}\left\{pes \rightarrow S\right\} = \left\{ \begin{array}{c} m \cdot \vec{g} \\ \vec{AG} \wedge m \vec{g} \end{array} \right\}_A$$

n.b. On reviendra sur ce cas particulier

6.2.3 Actions de contact : Loi de Coulomb



Supposons deux solides S1 et S2 en contact en un point I. Il existe un unique plan tangent Π entre les deux solides, défini par la normale n_{21} , à S2 ou à S1, au point de contact I, dirigée de S2 vers S1.

Les éléments de réduction du torseur cinématique en I du mouvement de S1 par rapport à S2 sont :

$${}_I\{V(S1/R2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S1/S2) \\ \vec{G}(I \in S1/S2) \end{array} \right\}$$

Par ailleurs le torseur des actions de contact au point I se note :

$${}_I\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M} \end{array} \right\} (S2 \rightarrow S1) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}[S2 \rightarrow S1] \\ \vec{M}[I, S2 \rightarrow S1] \end{array} \right\}$$

On pose alors :

- N_{21} : Composante normale $N_{21} = \vec{n}_{12} \cdot \vec{R}[S2 \rightarrow S1]$
- T_{21} : Composante tangentielle : $\vec{T}_{21} = \vec{n}_{12} \wedge (\vec{R}[S2 \rightarrow S1] \wedge \vec{n}_{12})$
- $M_{21}(I)$: Moment en I : $\vec{M}_{21}(I) = \vec{M}[I, S2 \rightarrow S1]$
- $M_{21P}(I)$: Moment de résistance au pivotement en I : $M_{21P}(I) = (\vec{n}_{12} \cdot \vec{M}[I, S2 \rightarrow S1]) \vec{n}_{12}$
- $M_{21R}(I)$: Moment de résistance au roulement en I :

$$M_{21R}(I) = \vec{n}_{12} \wedge (\vec{M}[I, \mathcal{F}(S_2 \rightarrow S_1)] \wedge \vec{n}_{12})$$

◇ *Lois de Coulomb relatives à la résultante.*

La nature du contact entre les deux solides est caractérisée par un coefficient de frottement sans dimension f (coefficient de frottement de glissement). Naturellement ces lois n'ont de sens que si le contact est maintenu, soit $N_{21} > 0$.

On admet dans ce cas $\vec{M}[I, \mathcal{F}(S_2 \rightarrow S_1)] = \vec{0}$

Si $f=0$ (liaison parfaite) $\vec{T}_{21} = \vec{0}$

Si $f \neq 0$

Condition de non-glissement en I : $\vec{G}(I \in S_1 / S_2) = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{T}_{21}\| \leq f \cdot |N_{21}|$

Condition de glissement en I : $\vec{G}(I \in S_1 / S_2) \neq \vec{0} \Rightarrow \|\vec{T}_{21}\| = f \cdot |N_{21}|$

Et dans le cas où on a glissement :

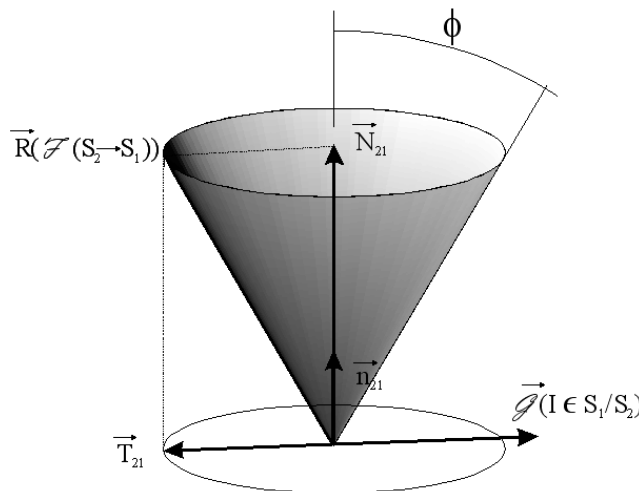
$$\vec{T}_{21} \wedge \vec{G}(I \in S_1 / S_2) = \vec{0}$$

$$\vec{T}_{21} \cdot \vec{G}(I \in S_1 / S_2) < 0$$

Soit : $\vec{T}_{21} = -f \cdot \frac{\vec{G}(I \in S_1 / S_2)}{\|\vec{G}(I \in S_1 / S_2)\|} \cdot \|\vec{T}_{21}\|$

En pratique on en déduit deux équations scalaires dans le plan de contact.

Ainsi, la résultante du torseur des actions de contact appartient t'elle à un cône, dit cône de frottement (voir la figure ci-dessous). Le coefficient de frottement f est la tangente de l'ouverture de ce cône ou angle de frottement ϕ .



◇ *Lois de Coulomb relatives au moment en I.*

Comme dans le cas des lois de Coulomb relative à la résultante, dans le cas des lois de Coulomb relative au moment en I, on décompose le moment en I du torseur des actions mécaniques de S_2 sur S_1 en un terme normal au plan de contact, appelé résistance au pivotement et en un terme appartenant au plan de contact, appelé résistance au roulement.

Par ailleurs la résultante du torseur cinématique se décompose en un terme de roulement et un terme de pivotement. Si le torseur cinématique en I du mouvement de S_1 par rapport à S_2 s'écrit :

$${}_I\{V(S1/R2)\} = \begin{cases} \bar{\Omega}(S1/S2) \\ \bar{G}(I \in S1/S2) \end{cases}$$

On note alors :

$$\bar{\Omega}(S1/S2) = \underbrace{(\bar{\Omega}(S1/S2) \cdot \vec{n}_{21})}_{P_{1/2} : \text{Pivotement}} \vec{n}_{21} + \underbrace{\vec{n}_{21} \wedge (\bar{\Omega}(S1/S2) \wedge \vec{n}_{21})}_{\bar{R}_{1/2} : \text{Roulement}}$$

Condition de roulement en I : $\vec{R}_{1/2} \neq \vec{0}$

$$\text{Alors } \vec{M}_{21R}(I) \cdot \vec{R}_{1/2} < 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{M}_{21R}(I)\| = h \cdot \|\vec{N}_{21}\|$$

Condition de non-roulement en I : $\vec{R}_{1/2} = \vec{0}$

$$\text{Alors } \|\vec{M}_{21R}(I)\| < h \cdot \|\vec{N}_{21}\|$$

Des lois équivalentes sont écrites pour le pivotement :

Condition de pivotement en I : $P_{1/2} \neq 0$

$$\text{Alors } \vec{M}_{21P}(I) \cdot P_{1/2} \vec{n}_{21} < 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{M}_{21P}(I)\| = k \cdot \|\vec{N}_{21}\|$$

Condition de non-pivotement en I : $P_{1/2} = 0$

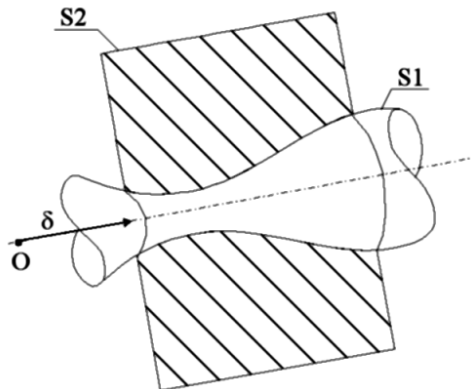
$$\text{Alors } \|\vec{M}_{21P}(I)\| < k \cdot \|\vec{N}_{21}\|$$

Le coefficient de résistance au roulement h et le coefficient de résistance au pivotement k sont homogènes à une longueur. En outre les moments résistants au roulement et au pivotement sont proportionnels à l'effort normal. En effet, les solides sont considérés ici comme indéformables, mais ils sont en réalité toujours déformables. De ce fait, plus l'effort normal est grand, plus l'aire de contact entre les deux solides est importante et plus la conformation des deux surfaces est marquée. Le roulement nécessite de quitter cette configuration adaptée et de conformer de nouvelles surfaces ce qui nécessite d'autant plus d'énergie que la surface de contact est grande, c'est-à-dire que l'effort normal est grand.

Naturellement, la dimension de l'aire de contact dépend également de la déformabilité des solides au niveau du contact. Vous pouvez, par exemple, expérimenter facilement à l'aide d'un vélo et d'une côte que le coefficient de résistance au roulement h pour le contact du pneu avec la route diminue avec la pression des pneus.

◇ Contact non ponctuel, exemple d'une liaison pivot sans frottement

Dans cet exemple « théorique » la liaison pivot est réalisée à l'aide d'une surface de contact de révolution s , d'axe (O, δ) , entre deux solides $S1$ et $S2$, qui est non cylindrique.



Comme la liaison est sans frottement, $f=0$, alors en tout point P de la surface de contact s , la composante tangentielle des actions de contact de S1 sur S2 est nulle donc :

$$\vec{\psi}_{S1 \rightarrow S2}(P) = \Psi_{S1 \rightarrow S2}(P) \vec{n}_{12}(P) d$$

Alors le torseur en O des actions de contact de S1 sur S2 s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{T}}(S1 \rightarrow S2) \\ O \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \left[\vec{\mathcal{T}}(S1 \rightarrow S2) \right] = \int_s \Psi_{S1 \rightarrow S2}(P) \vec{n}_{12}(P) ds(P) \\ \vec{M} \left[O, \vec{\mathcal{T}}(S1 \rightarrow S2) \right] = \int_s \vec{OP} \wedge \Psi_{S1 \rightarrow S2}(P) \vec{n}_{12}(P) ds(P) \end{array} \right.$$

On ne peut rien dire de particulier de la résultante, en revanche comme il s'agit d'une surface de révolution le moment dynamique en O est aligné avec l'axe de la liaison :

$$O \{ \mathcal{Z}(S1/S2) \} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{P \in S1} \vec{\Gamma}(P/S2) dm(P) \\ \vec{\delta}_O = \int_{P \in S1} \vec{OP} \wedge \vec{\Gamma}(S1/S2) dm(P) \end{array} \right.$$

Donc on peut écrire pour le moment du torseur des actions de contact :

$$\vec{\delta}_O \cdot \vec{M} \left[O, \vec{\mathcal{T}}(S1 \rightarrow S2) \right] = \int_s \underbrace{\vec{\delta}_O \cdot (\vec{OP} \wedge \vec{n}_{12}(P))}_{=0} \Psi_{S1 \rightarrow S2}(P) ds(P)$$

$$\text{Soit : } \vec{\delta}_O \cdot \vec{M} \left[O, \vec{\mathcal{T}}(S1 \rightarrow S2) \right] = 0$$

◇ *Liaisons parfaites : Actions de contact sans frottement.*

On procède de même pour chacune des liaisons normalisées par contact sans frottement entre S1 et S2, on pourra noter qu'il existe autant d'équations que de degrés de liberté pour la liaison. Les différentes équations de liaison pour les liaisons parfaites (sans frottement) sont regroupées dans le tableau ci-dessous. A part la liaison hélicoïdale, les particularités des torseurs d'actions de contact se trouvent facilement en mettant en évidence des propriétés géométriques liant les caractéristiques géométriques des liaisons et l'ensemble des normales aux surfaces de contact.

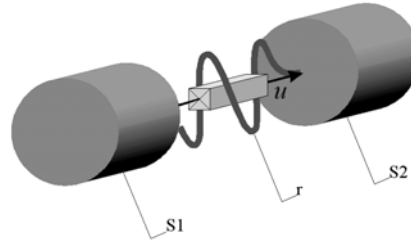
Noms	Caractéristiques	Equations de liaisons
glissière	\vec{x}	$\vec{R} \cdot \vec{x} = 0$
pivot	(A, \vec{x})	$\vec{M}_A \cdot \vec{x} = 0$
hélicoïdale	(A, \vec{x}) , pas réduit p	$(\vec{M}_A + p\vec{R}) \cdot \vec{x} = 0$
pivot glissant	(A, \vec{x})	$\vec{M}_A \cdot \vec{x} = 0$, $\vec{R} \cdot \vec{x} = 0$
rotule à doigt	A, \vec{x} , \vec{y} avec $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$	$\vec{M}_A \cdot \vec{x} = 0$, $\vec{M}_A \cdot \vec{y} = 0$
rotule	A	$\vec{M}_A = \vec{0}$
appui plan	\vec{z}	$\vec{M}_A \cdot \vec{z} = 0$, $\vec{R} \wedge \vec{z} = \vec{0}$
linéique rectiligne	(A, \vec{x}) , \vec{z} avec $\vec{x} \cdot \vec{z} = 0$	$\vec{M}_A \wedge (\vec{x} \wedge \vec{z}) = \vec{0}$, $\vec{R} \wedge \vec{z} = \vec{0}$
ponctuelle	P, \vec{z}	$\vec{M}_P = \vec{0}$, $\vec{R} = R\vec{z}$

◇ Lois de comportement de liaisons.

En dehors des liaisons parfaites, il existe aussi des liaisons élastiques, assimilables à des ressorts de traction compression pour les degrés de liberté en translation et à des ressorts de torsion pour les degrés de liberté en rotation. Il existe également des liaisons dissipatives, telles que des amortisseurs par exemple. Les équations de liaison associées à ces lois de comportement de liaisons sont présentées ci-dessous.

○ Ressort de traction compression

Supposons deux solides S1 et S2 liés par une liaison glissière élastique de direction u . La projection de la résultante des actions mécaniques de S2 sur S1 selon la direction de la liaison u s'écrit alors, où $\lambda = l - l_0$ est l'allongement du ressort :



$$\vec{R}(\mathcal{F}(S2 \rightarrow S1)) \cdot \vec{u} = -k \lambda$$

○ Ressort de torsion

Supposons deux solides S1 et S2 liés par une liaison pivot élastique de direction u . La projection du moment en un point de l'axe A des actions mécaniques de S2 sur S1 selon la direction de la liaison u s'écrit alors, où $\delta\theta = \theta - \theta_0$ est l'angle de torsion du ressort :

$$\vec{M}(A, \mathcal{F}(S2 \rightarrow S1)) \cdot \vec{u} = -k \delta\theta$$

○ Amortisseur de traction-compression

Supposons deux solides S1 et S2 liés par une liaison glissière avec amortissement de direction u . La projection de la résultante des actions mécaniques de S2 sur S1 selon la direction de la liaison u s'écrit, où A est le point d'attache de l'amortisseur sur le solide S1 :

$$\vec{R}(\mathcal{F}(S2 \rightarrow S1)) \cdot \vec{u} = -d (\vec{V}(A \in S1 / S2) \cdot \vec{u})$$

○ Amortisseur de torsion

De même, supposons deux solides S1 et S2 liés par une liaison pivot avec amortissement de direction u . La projection du moment en A des actions mécaniques de S2 sur S1 selon la direction de la liaison u s'écrit, où A est le point d'attache de l'amortisseur sur le solide S1 :

$$\vec{M}(A, \mathcal{F}(S2 \rightarrow S1)) \cdot \vec{u} = -d (\vec{\Omega}(S1 / S2) \cdot \vec{u})$$

6.2.4 Graphe d'analyse

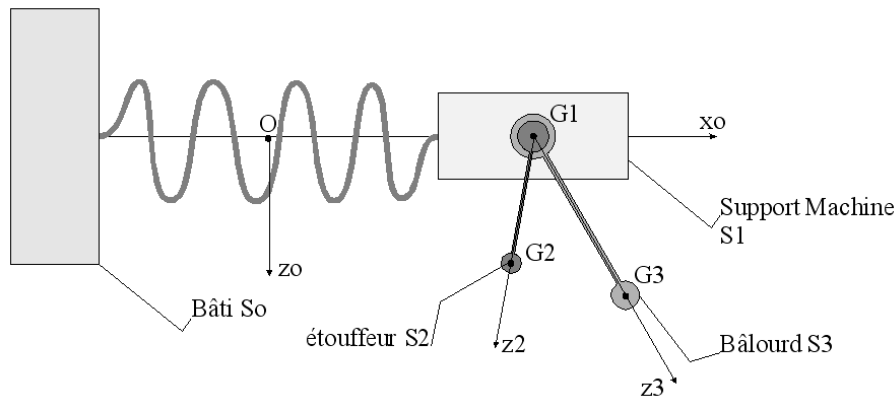
Dès que les actions mécaniques appliquées à un système de solides sont bien identifiées, le graphe de structure peut être complété afin de construire un graphe d'analyse. Dans un graphe de structure, les sommets sont les solides et les arcs les liaisons. A chacun des arcs on pourra donc associer autant d'équations de liaison qu'il y a de degré de liberté dans la liaison. Dans un graphe d'analyse on fait également figurer les actions mécaniques, et les lois de comportement.

Ce graphe permet de bien identifier les équations à mettre en place, les axes de projection à choisir et les sous-systèmes de solides à identifier. L'intérêt de ce graphe est illustré ci-dessous à l'aide d'un exemple, qui sera repris par la suite, lorsque les théorèmes fondamentaux auront été tous exposés.

◇ Exemple : principe d'un étouffeur de vibrations

Le système étudié est constitué d'un bâti So. Sur ce bâti est fixé un support de machine tournante S1 par une liaison glissière d'axe (O,xo). Un ressort de rappel est monté entre S1 et S0. Par ailleurs, sur le support machine

est monté sur une liaison pivot d'axe $(G1, y0)$, un moteur dont la masse est incluse dans la masse $M1$ du support. La partie tournante du moteur présente un balourd $S3$, de masse $M3$, dont le centre d'inertie $G3$ est à la distance R du centre d'inertie $G1$ du support de la machine tournante. Enfin un pendule simple $S2$, l'étouffeur, est également attaché par une liaison pivot d'axe $(G1, y0)$ au support $S1$. La masse de l'étouffeur est notée $M2$ et la distance $G1G2$ est notée d .



○ Objectifs :

Déterminer les caractéristiques à donner au pendule $S2$ (masse $M2$, distance d) pour qu'il joue effectivement un rôle d'étouffeur de vibrations, le reste du système étant supposé donné.

○ Graphe de structure :

On a quatre solides en présence, $S0$, $S1$, $S2$ et $S3$. On construit le graphe de structure en précisant les équations de liaison associées et les paramètres du mouvement. On peut alors compléter le graphe de manière à faire apparaître les actions mécaniques. Ici : l'action de la pesanteur et l'action du ressort monté entre $S0$ et $S1$.

Dans cet exemple, le degré de mobilité est de trois. Nous avons trois inconnues cinématiques, X le déplacement horizontal de $S1/S0$, θ la rotation de $S2/S1$ et ϕ la rotation de $S3/S1$. Nous devons donc établir trois équations scalaires.

○ Analyse

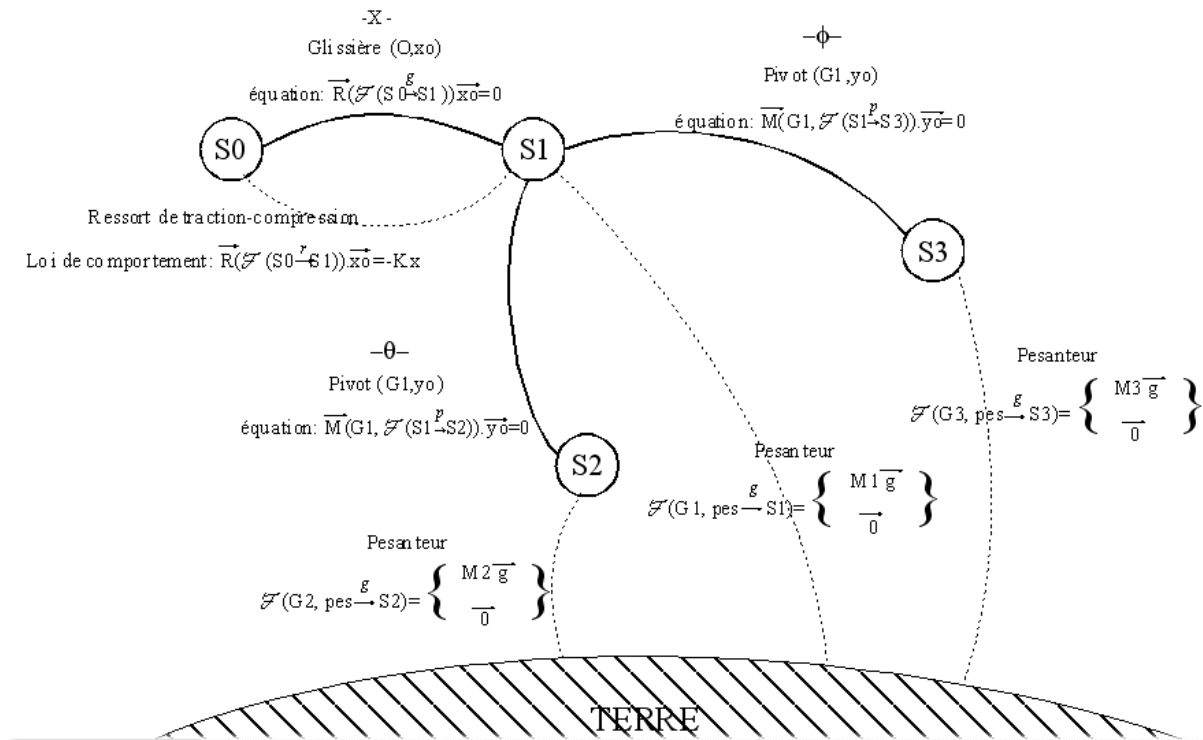
En utilisant le graphe d'analyse, on identifie les équations nécessaires et les sous-systèmes à isoler. Il nous faut trois équations, puisque le degré de mobilité est de trois. Il suffit de regarder le graphe d'analyse que nous venons de construire pour déterminer de quel type d'équation nous aurons besoin :

1 : une équation portant sur la résultante des actions mécaniques de $S0$ sur $(S1 \cup S2 \cup S3)$. Cette équation sera projetée sur l'axe $x0$ pour lequel n'apparaît pas d'inconnue de liaison.

2 : une équation portant sur le moment en $G1$ des actions mécaniques de $S3$ sur $S1$. Cette équation sera projetée sur l'axe $y0$ pour lequel n'apparaît pas d'inconnue de liaison.

3 : une équation portant sur le moment en $G1$ des actions mécaniques de $S2$ sur $S1$. Cette équation sera projetée sur l'axe $y0$ pour lequel n'apparaît pas d'inconnue de liaison.

Nous avons donc identifié en utilisant le graphe d'analyse, les sous-systèmes à isoler, les équations à écrire et les projections à effectuer. Ce travail est à faire préalablement à tout calcul.



6.3 Principe fondamental de la dynamique

6.3.1 Introduction : un peu d'histoire

Au début du 16^{ème} siècle, la notion de force restait obscure. Une force, à la différence d'un mouvement, est difficile à mettre en évidence. Dans le système de Ptolémée, par exemple, les trajectoires et les mouvements relatifs des planètes sont relativement bien décrits, quoique de façon complexe, par les systèmes d'épicycles, mais les lois qui régissent ces mouvements restent encore inconnues. Le principe d'inertie, énoncé par Galilée, puis le principe fondamental de la dynamique, énoncé par Newton, sont à la base de la mécanique classique. La dynamique étant le régime où dominent les effets d'inertie, par opposition à la statique.

Le principe d'inertie: Ce principe est peut-être le plus grand apport de Galilée (1564-1642) à la physique. En faisant des expériences avec des billes qui roulent sur des plans de différentes natures, il observe que si le plan est très rugueux, la bille s'arrête rapidement, par contre, si le plan est très lisse ou recouvert d'huile par exemple, la bille parcourt une distance beaucoup plus grande avant de s'arrêter. Galilée eut alors l'idée de *forces de frottement* : le plan rugueux frotte très fortement sur la bille et l'oblige à s'arrêter rapidement, en revanche, sur le plan lisse les forces de frottement sont très faibles et n'empêchent pas la bille de rouler. Dans la vie de tous les jours, les forces de frottement sont partout présentes et obligent les corps à stopper leur mouvement, c'est pour cela que pour entretenir ce mouvement on doit constamment appliquer une force extérieure à un corps pour contrebalancer ces forces de frottement.

Mais si on pouvait réduire ces forces de frottement à zéro, alors, le corps conserverait son mouvement indéfiniment. C'est en faisant une telle extrapolation que, Galilée donne une première formulation du principe d'inertie :

« Tout corps possède une certaine "inertie" qui l'oblige à conserver sa vitesse, à moins qu'une force extérieure, une force de frottement par exemple, ne l'oblige à arrêter ce mouvement, i.e. à modifier cette vitesse ».

C'est finalement à partir de ce principe que Newton (1642-1727) introduit en 1687 la description des causes du mouvement et introduira la notion fondamentale de force: le mouvement d'un système isolé étant rectiligne et uniforme, toute déviation par rapport à cette loi du mouvement est caractérisée par une force. En l'absence de force, le corps poursuit sa trajectoire et conserve sa vitesse.

Il en découle d'ailleurs que l'étude de petites déviations à une loi du mouvement d'un corps permet l'étude des forces auxquelles ce corps est soumis, ce qui sera à la base des principes variationnels.

Le principe fondamental de la dynamique: La formalisation des principes de la mécanique est publiée dans l'ouvrage principal de I. Newton: les « *Philosophiae naturalis principia mathematica* » (1687), où sont définies les notions de masse, de quantité de mouvement, de forces (motrice, centripète). Newton introduit un espace et un temps absolus, et énonce les principes fondamentaux de l'inertie, de l'égalité des actions réciproques ainsi que la « relation fondamentale de la dynamique » exprimant chez lui l'égalité entre force et dérivée de la quantité de mouvement

6.3.2 Enoncé du principe fondamental de la dynamique

Il existe au moins un repère R_g appelé repère Galiléen, tel que pour tout système matériel Σ en mouvement par rapport à R_g , le torseur dynamique de Σ dans son mouvement par rapport à R_g soit égal au torseur des actions mécaniques extérieures à Σ . Si l'on note $\bar{\Sigma}$ l'extérieur de Σ le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors :

$$\left\{ \mathcal{D}(\Sigma / R_g) \right\} = \left\{ \mathcal{T}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \right\}$$

6.3.3 Conséquences

En écrivant qu'en tout point de l'espace, les deux torseurs intervenant dans le principe fondamental de la dynamique sont égaux, on obtient deux équations vectorielles appelées théorèmes généraux de la dynamique.

Soit m la masse et G le centre d'inertie du système matériel S en mouvement par rapport au référentiel galiléen R_g . On pose en un point A quelconque :

$$\left\{ \mathcal{D}(\Sigma / R_g) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} m \vec{\Gamma}(G / R_g) \\ \vec{\delta}_A(\Sigma / R_g) \end{array} \right\} \quad \left\{ \mathcal{T}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \\ \vec{M}_A(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \end{array} \right\}$$

◇ Théorème de la résultante dynamique

Alors, la résultante du torseur dynamique de Σ dans son mouvement par rapport à R_g est égale à la résultante du torseur des actions mécaniques extérieures à Σ .

$$m \vec{\Gamma}(G / R_g) = \vec{R}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$$

◇ Théorème du moment dynamique

Par ailleurs, le moment en tout point A du torseur dynamique de Σ dans son mouvement par rapport à R_g est égal au moment du torseur des actions mécaniques extérieures à Σ au même point.

$$\vec{\delta}_A(\Sigma / R_g) = \vec{M}_A(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$$

◇ Théorème des actions mutuelles

Soit un système matériel Σ constitué de deux sous parties Σ_1 et Σ_2 . On peut appliquer successivement le principe fondamental de la dynamique aux deux sous parties Σ_1 et Σ_2 de Σ . Alors :

$$\left\{ \mathcal{D}(\Sigma_1 / R_g) \right\} + \left\{ \mathcal{D}(\Sigma_2 / R_g) \right\} = \left\{ \mathcal{D}(\Sigma / R_g) \right\} = \left\{ \mathcal{T}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \right\} = \left\{ \mathcal{T}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma_1) \right\} + \left\{ \mathcal{T}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma_2) \right\}$$

$$\text{Par ailleurs : } \left\{ \mathcal{D}(\Sigma_1 / R_g) \right\} = \left\{ \mathcal{T}(\bar{\Sigma}_1 \rightarrow \Sigma_1) \right\} = \left\{ \mathcal{T}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma_1) \right\} + \left\{ \mathcal{T}(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1) \right\}$$

$$\text{Et : } \left\{ \mathcal{D}(\Sigma_2 / R_g) \right\} = \left\{ \mathcal{T}(\bar{\Sigma}_2 \rightarrow \Sigma_2) \right\} = \left\{ \mathcal{T}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma_2) \right\} + \left\{ \mathcal{T}(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2) \right\}$$

En recombinaison ces équations, on en déduit :

$$\{\mathcal{T}(\Sigma 1 \rightarrow \Sigma 2)\} = -\{\mathcal{T}(\Sigma 2 \rightarrow \Sigma 1)\}$$

◇ Cas particulier de la statique

Le principe fondamental de la dynamique se ramène à celui de la statique lorsque le torseur dynamique du système matériel Σ par rapport à R_g est nul. Il est nul en particulier dans les trois cas suivants :

- Les effets d'inertie sur le système matériel Σ sont négligés
- La masse du système matériel Σ est supposée nulle
- Le système matériel Σ est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au repère galiléen R_g .

◇ Equations du mouvement

L'application du principe fondamental de la dynamique conduit à écrire deux équations vectorielles dont les projections sur une base orthonormée donnent au maximum six équations scalaires indépendantes. Ces équations scalaires sont des équations différentielles du second ordre, en général non linéaires de la forme :

$$f(q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t)) = 0, \text{ où les paramètres } q_i \text{ sont les } i \text{ paramètres du mouvement.}$$

Outre les q_i , ces équations peuvent également contenir des composantes inconnues d'actions mécaniques.

Par définition, une équation du mouvement est une équation différentielle du second ordre des paramètres du mouvement ne contenant aucune composante inconnue d'action mécanique.

Par définition une intégrale première du mouvement est une équation différentielle du premier ordre de la forme $f(q_i(t), \dot{q}_i(t)) = \text{Constante}$, obtenue par intégration d'une équation du mouvement.

6.3.4 Référentiels Galiléens/non Galiléens

En mécanique classique le temps est le même pour tous les observateurs, il est donné par des mouvements particuliers ou des processus naturels appelés horloges (oscillation d'un quartz, mouvement de certains astres, désintégration de la matière ...). On parle alors de Chronologie Galiléenne.

◇ Référentiels Galiléens

On montre que tout repère R en translation rectiligne uniforme par rapport à un repère Galiléen R_g est également un repère Galiléen. Le choix d'un repère Galiléen est fonction du problème posé. Un repère Galiléen est un repère dans lequel le principe fondamental de la dynamique est vérifié avec une bonne approximation, pour une étude donnée.

○ Repère de Copernic

Ce repère est défini par le centre d'inertie du système solaire (sensiblement le centre du soleil) et par les directions stellaires. Il constitue une excellente approximation d'un repère galiléen pour l'étude des fusées interplanétaires par exemple.

○ Repère défini par le centre de la terre et les directions stellaires

Ce repère constitue une excellente approximation d'un repère galiléen pour l'étude du mouvement de systèmes matériels restant dans le domaine terrestre, à l'intérieur d'une sphère centrée sur le centre de la terre et de rayon maximal égal à quatre ou cinq fois celui de la terre.

○ Repère terrestre

Pour la plupart des problèmes terrestres, un repère lié à la terre constitue une très bonne approximation d'un repère galiléen.

◇ *Référentiel non Galiléen*

Supposons un repère R ayant un mouvement quelconque mais connu par rapport à un repère galiléen R_g . Le principe fondamental de la dynamique, appliqué au système matériel Σ dans son mouvement par rapport au repère galiléen R_g s'écrit :

$$\left\{ \mathcal{D}(\Sigma / R_g) \right\} = \left\{ \mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \right\}$$

Le torseur dynamique a pour éléments de réduction en un point A quelconque :

$$\left\{ \mathcal{D}(\Sigma / R_g) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{P \in \Sigma} \vec{\Gamma}(P / R_g) dm \\ \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P / R_g) dm \end{array} \right\}$$

On utilise alors la relation de composition des vecteurs accélération :

$$\vec{\Gamma}(P / R_g) = \vec{\Gamma}(P / R) + \vec{\Gamma}(P \in R / R_g) + 2\vec{\Omega}(R / R_g) \wedge \vec{V}(P / R)$$

Ceci permet de construire le torseur « des forces d'inertie d'entraînement » de Σ dans son mouvement par rapport à R et R_g .

$$\left\{ \mathcal{D}_{ie}(\Sigma \in R / R_g) \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} \int_{P \in \Sigma} \vec{\Gamma}(P \in R / R_g) dm \\ \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P \in R / R_g) dm \end{array} \right\}$$

En utilisant les formules issues du principe de conservation de la masse :

$$\left\{ \mathcal{D}_{ie}(\Sigma \in R / R_g) \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} m\vec{\Gamma}(G / R_g) \\ \vec{AG} \wedge m\vec{\Gamma}(G / R_g) + \frac{d}{dt} [J_G(\Sigma)\vec{\Omega}(R / R_g)] \end{array} \right\}$$

On construit de même le torseur « des forces d'inertie de Coriolis » de Σ dans son mouvement par rapport à R et R_g .

$$\left\{ \mathcal{D}_{ic}(\Sigma \in R / R_g) \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} \int_{P \in \Sigma} 2\vec{\Omega}(R / R_g) \wedge \vec{V}(P / R) dm \\ \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge [2\vec{\Omega}(R / R_g) \wedge \vec{V}(P / R)] dm \end{array} \right\}$$

Avec ces conventions le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors dans le repère non-galiléen R :

$$\left\{ \mathcal{D}(\Sigma / R) \right\} = \left\{ \mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \right\} + \left\{ \mathcal{D}_{ie}(\Sigma \in R / R_g) \right\} + \left\{ \mathcal{D}_{ic}(\Sigma \in R / R_g) \right\}$$

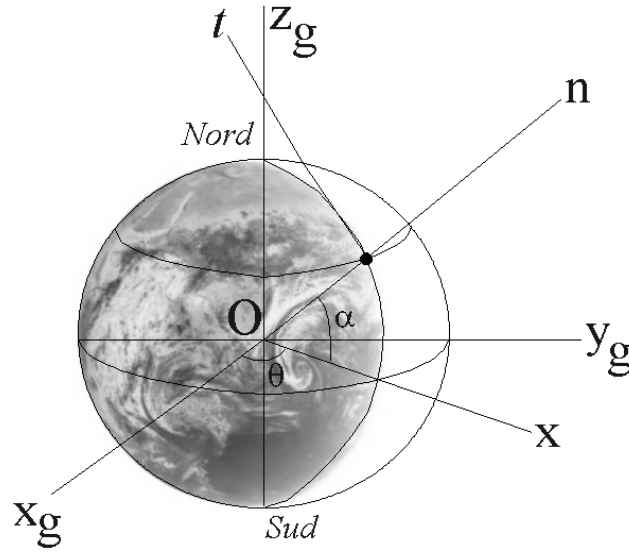
◇ *Exemple : Accélération de la pesanteur.*

Considérons un fil à plomb en équilibre à la surface de la terre, matérialisant la verticale en un lieu donné. On choisit un repère galiléen $R_g(O, x_g, y_g, z_g)$, centré sur le centre de la terre et dont les axes pointent vers des directions stellaires.

Un second repère $R(O, x, y, z_g)$ est attaché à la terre et en rotation uniforme par rapport à R_g autour de z_g à la vitesse ω (un tour en 24 heures). On pose $\theta = (x_g, x)$ avec $\dot{\theta} = \omega$.

Le fil à plomb, constitué d'un fil de masse négligeable et d'une sphère S , de masse m , de centre d'inertie G est situé dans le plan méridien (O, z_g, x) . On pose : $\vec{OG} = r\vec{n}$, $\alpha = (\vec{n}, \vec{x})$. \vec{n} est un vecteur unitaire du plan méridien (O, z_g, x) normal à la terre et dirigé vers le ciel, \vec{t} est un vecteur unitaire du plan méridien (O, z_g, x) normal

à n , α est la latitude du point G. Le fil à plomb est en équilibre dans le repère R soit : $\vec{\Omega}(S/R_g) = \omega \vec{z}_g$. On peut donc considérer S et R comme équivalents pour la dérivation.



La sphère S est soumise à deux actions mécaniques, représentables au point G par deux forces, T : la tension du fil, de même direction que le fil, F_a : la force d'attraction Newtonienne de la terre, telle que : $\vec{F}_a = -K \frac{mM}{r^2} \vec{n}$, Où m est la masse de la sphère, M, la masse de la terre ($M = 5,9742 \cdot 10^{24}$ kg), K la constante de gravitation universelle ($K = 6.67 \cdot 10^{-11}$) et r la distance entre les centres d'inertie de la terre et de la sphère.

Le torseur dynamique de la sphère S au point G vaut :

$$\left\{ \mathcal{D}(S/R_g) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} m \vec{\Gamma}(G \in S/R_g) \\ \vec{\delta}_G(S/R_g) = \frac{d}{dt} [J_G(S) \vec{\Omega}(S/R_g)] = \vec{0} \end{array} \right\}$$

Par ailleurs les actions mécaniques appliquées au point G se réduisent, à la tension du fil T et à la force d'attraction gravitationnelle F_a . Soit :

$$\left\{ \mathcal{S}(\bar{S} \rightarrow S) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{T} + \vec{F}_a \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

En appliquant maintenant le principe de la résultante dynamique :

$$m \vec{\Gamma}(G \in S/R_g) = \vec{T} + \vec{F}_a$$

Par conséquent :

$$\vec{T} = m \vec{\Gamma}(G \in S/R_g) - \vec{F}_a = m \vec{\Gamma}(G \in S/R_g) + K \frac{mM}{r^2} \vec{n}$$

Dans le repère terrestre, le fil à plomb est en équilibre sous l'action de deux forces, la tension du fil et le poids de la sphère $P = mg$. Ceci permet d'en déduire l'expression de l'accélération de la pesanteur dans le repère terrestre :

$$\vec{T} + \vec{P} = \vec{T} + m \vec{g} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{g} = -K \frac{M}{r^2} \vec{n} - \vec{\Gamma}(G \in S/R_g)$$

En utilisant maintenant la formule de changement de point du vecteur accélération :

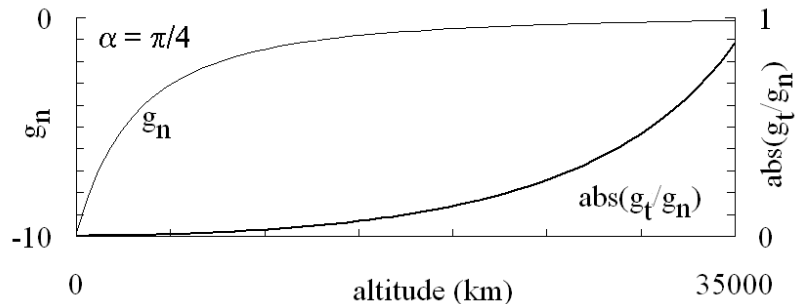
$$\vec{\Gamma}(G \in S / Rg) = \vec{\Gamma}(O \in S / Rg) + \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(S / Rg) \right]_R \wedge \vec{OG} + \vec{\Omega}(S / Rg) \wedge \left[\vec{\Omega}(S / Rg) \wedge \vec{OG} \right]$$

On en déduit :

$$\vec{\Gamma}(G \in S / Rg) = \omega \cdot \vec{z}_g \wedge [\omega \cdot \vec{z}_g \wedge r \cdot \vec{n}] = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha \cdot \vec{x}$$

Soit :

$$\vec{g} = -K \frac{M}{r^2} \vec{n} + r \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha \cdot \vec{x} \Rightarrow \vec{g} = \left[-K \frac{M}{r^2} + r \cdot \omega^2 \cdot \cos^2 \alpha \right] \cdot \vec{n} - r \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \vec{t}$$



Ainsi, le vecteur accélération de la pesanteur, relatif au repère terrestre n'est-il pas exactement dirigé vers le centre de la terre sauf à l'équateur et aux pôles. La composante tangentielle de l'accélération de la pesanteur, g_t , reste inférieure à 1% de sa composante normale en deçà de 5000 km d'altitude.

6.4 Principe des puissances virtuelles

6.4.1 Introduction : un peu d'histoire.

En 1743, d'Alembert (1717-1783) publie le *Traité de dynamique*, dans lequel il expose le principe « de la conservation des forces vives » aujourd'hui appelé principe de d'Alembert :

L'énoncé du principe de d'Alembert est le suivant :

« Si l'on imagine un système de corps en mouvement, liés entre eux d'une manière quelconque, et réagissant les uns sur les autres au moyen de ces liaisons, de manière à modifier les mouvements que chaque corps isolé prendrait en vertu des seules forces qui l'animent, on pourra considérer ces mouvements comme composés :

1° des mouvements que les corps prennent effectivement, en vertu des forces qui les animent séparément, combinées avec les réactions du système

2° d'autres mouvements qui sont détruits par suite des liaisons du système.

d'où il résulte que les mouvements ainsi détruits doivent être tels, que les corps animés de ces seuls mouvements se feraient équilibre au moyen des liaisons du système ».

On pourra noter que par rapport au principe fondamental de la dynamique de Newton, l'objet du traité de dynamique de d'Alembert est le comportement de systèmes de solides présentant des liaisons ou en contact mutuel.

En 1788, Lagrange publie la « *Mécanique analytique* », qui est fondé sur un nouveau principe variationnel, issu de l'association du principe des vitesses virtuelles et de celui de d'Alembert.

Lagrange écrit que le travail total des forces appliquées et des forces d'inertie est nul pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons. Lagrange aboutit ainsi, pour les systèmes conservatifs, à un système d'équations différentielles universel liant les dérivées de la «force vive» (assimilable à notre énergie cinétique) et celles de la fonction de force (qui joue le même rôle que l'énergie potentielle).

6.4.2 Enoncé du principe des puissances virtuelles ou PPV.

A tout instant t , pour tout système matériel S , et pour tout champ de vitesse virtuelle, la puissance virtuelle des quantités d'accélération galiléenne est égale à la somme de la puissance virtuelle des actions extérieures et de la puissance virtuelle des actions intérieures à S .

En mécanique des solides indéformables, on utilise des champs de vitesses virtuelles dont la restriction sur chacun des solides est le champ des moments d'un torseur, afin de respecter la rigidité de chacun de ces solides.

En conséquence, la puissance virtuelle des actions intérieure à chacun des solides d'un système de solides est nulle, la puissance virtuelle des efforts intérieurs se réduit donc à la puissance virtuelle des interactions entre les solides du système.

Ce qui se note pour un système de solides Σ , et un champ de vitesses virtuelles quelconque $\vec{\mathcal{V}}^*$ dont la restriction sur chacun des solides S_i constituant Σ est le champ des moments d'un torseur noté \mathcal{V}_i^* :

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{D}(S_i / Rg) \times \mathcal{V}_i^* = \sum_{i=1}^n P^*(\bar{\Sigma} \rightarrow S_i, Rg) + \sum_{i=1}^n P^*(S_i \leftrightarrow S_j) \quad \forall \vec{\mathcal{V}}^*$$

6.5 Choix de torseurs virtuels particuliers et théorèmes de la dynamique

6.5.1 Torseur global quelconque : Equivalence du principe des puissances virtuelles et du principe fondamental de la dynamique

Si le champ des vitesses virtuelles $\vec{\mathcal{V}}^*$ est en totalité le champ des moments d'un torseur \mathcal{V}^* quelconque, le principe des puissances virtuelles conduit à :

$$\mathcal{D}(\Sigma / Rg) \times \mathcal{V}^* = \mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \times \mathcal{V}^* \quad \forall \mathcal{V}^*$$

On retrouve ainsi le principe fondamental de la dynamique sous la forme :

$$\mathcal{D}(\Sigma / Rg) = \mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$$

6.5.2 Torseur des vitesses galiléennes : Théorème de l'énergie cinétique

◇ *Théorème de l'énergie cinétique pour un solide unique.*

Si le champ des vitesses virtuelles $\vec{\mathcal{V}}^*$ est le champ des moments du torseur des vitesses galiléennes $\mathcal{V}(S_i / Rg)$, le principe des puissances virtuelles pour un solide S_i , conduit à :

$$\mathcal{D}(S_i / Rg) \times \mathcal{V}(S_i / Rg) = \mathcal{F}(\bar{S}_i \rightarrow S_i) \times \mathcal{V}(S_i / Rg)$$

$$\text{Or : } \mathcal{D}(S_i / Rg) \times \mathcal{V}(S_i / Rg) = \int_{S_i} \vec{\Gamma}(P / Rg) dm(P) \cdot \vec{V}(P / Rg) = \int_{S_i} \left[\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \vec{V}(P / Rg)^2 \right]_{Rg} dm(P)$$

En appliquant le principe de conservation de la masse :

$$\mathcal{D}(S_i / Rg) \times \mathcal{V}(S_i / Rg) = \frac{d}{dt} \left[\int_{S_i} \frac{1}{2} \vec{V}(P / Rg)^2 dm(P) \right]_{Rg} = \frac{dT(S_i / Rg)}{dt}$$

On retrouve ainsi le théorème de l'énergie cinétique pour un solide S_i :

$$\frac{dT(S_i / Rg)}{dt} = P(\bar{S}_i \rightarrow S_i / Rg)$$

◇ *Théorème de l'énergie cinétique pour un système de solides.*

Si maintenant on considère un système de solide Σ , constitué de n solides S_i , il suffit de faire la somme des équations issues du théorème de l'énergie pour chacun des n solides, soit :

$$\frac{dT(\Sigma / Rg)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dT(S_i / Rg)}{dt} = \sum_{i=1}^n F(\bar{S}_i \rightarrow S_i) \times \mathcal{V}(S_i / Rg)$$

$$\frac{dT(\Sigma / Rg)}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[F(\bar{\Sigma} \rightarrow S_i) + \sum_{j \neq i} F(S_j \rightarrow S_i) \right] \times \mathcal{V}(S_i / Rg)$$

En rassemblant terme à terme :

$$\frac{dT(\Sigma / Rg)}{dt} = \sum_{i=1}^n F(\bar{\Sigma} \rightarrow S_i) \times \mathcal{V}(S_i / Rg) + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} F(S_j \rightarrow S_i) \times \mathcal{V}(S_i / Rg) + \sum_{j>i} F(S_i \rightarrow S_j) \times \mathcal{V}(S_j / Rg)$$

Soit :

$$\frac{dT(\Sigma / Rg)}{dt} = \sum_{i=1}^n F(\bar{\Sigma} \rightarrow S_i) \times \mathcal{V}(S_i / Rg) + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} F(S_j \rightarrow S_i) \times [\mathcal{V}(S_i / Rg) - \mathcal{V}(S_j / Rg)]$$

Ce qui donne finalement :

$$\frac{dT(\Sigma / Rg)}{dt} = \sum_{i=1}^n F(\bar{\Sigma} \rightarrow S_i) \times \mathcal{V}(S_i / Rg) + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} F(S_j \rightarrow S_i) \times \mathcal{V}(S_i / S_j)$$

Le théorème de l'énergie cinétique pour un système de solides s'écrit donc :

$\frac{dT(\Sigma / Rg)}{dt} = \underbrace{P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / Rg)}_{\text{Puissance des efforts extérieurs}} + \underbrace{P(S_i \leftrightarrow S_j)}_{\text{Puissance des efforts intérieurs}}$

6.5.3 Torseurs de Lagrange : équations de Lagrange

◇ *Définition des torseurs de Lagrange :*

Supposons que la position d'un solide S dans Rg soit paramétrée par n paramètres q_i et la variable temps t . Puisque le champ des vitesses de S est le champ des moments d'un torseur il vérifie :

$$\forall (P, Q) \in S \quad \vec{V}(Q / Rg) = \vec{V}(P / Rg) + \vec{\Omega}(S / Rg) \wedge \overrightarrow{PQ}$$

Alors quel que soit le paramètre du mouvement q_i :

$$\forall (P, Q) \in S \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \vec{V}(Q / Rg) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \vec{V}(P / Rg) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \vec{\Omega}(S / Rg) \wedge \overrightarrow{PQ} + \vec{\Omega}(S / Rg) \wedge \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \overrightarrow{PQ}$$

Le dernier terme est nul donc :

$$\forall (P, Q) \in S \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \vec{V}(Q / Rg) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \vec{V}(P / Rg) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \vec{\Omega}(S / Rg) \wedge \overrightarrow{PQ}$$

Ainsi, les champs $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{q}_i}$ sont également des torseurs, appelés torseurs de Lagrange et notés $\mathcal{L}_{qi}(S/Rg)$.

◇ *Conséquences*

○ Conséquence N°1 :

Comme les paramètres q_i sont les paramètres du mouvement :

$$\forall P \in S \quad \vec{V}(P/Rg) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \right]_{Rg} \frac{dq_i}{dt} + \left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} \right]_{Rg}$$

En dérivant une seconde fois, les paramètres (q_i, \dot{q}_i, t) étant indépendants, on trouve :

$$\forall P \in S \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \vec{V}(P/Rg) = \left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \right]_{Rg}$$

○ Conséquence N°2 :

Le produit du torseur dynamique du solide S par un torseur de Lagrange est noté $P_{qi}(S/Rg)$ et vaut :

$$P_{qi}(S/Rg) = \mathcal{D}(S/Rg) \times \mathcal{L}_{qi}(S/Rg)$$

Compte tenu de ce qui vient d'être montré :

$$P_{qi}(S/Rg) = \left(\int_{P \in S} \vec{\Gamma}(P/Rg) \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} dm(P) \right)$$

$$\text{Or : } \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} \vec{V}(P/Rg)^2 \right) = \vec{V}(P/Rg) \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}$$

Et par suite :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} \vec{V}(P/Rg)^2 \right) \right]_{Rg} = \frac{d}{dt} [\vec{V}(P/Rg)]_{Rg} \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} + \vec{V}(P/Rg) \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \right]_{Rg}$$

Soit :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} \vec{V}(P/Rg)^2 \right) \right]_{Rg} = \vec{\Gamma}(P/Rg) \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} + \vec{V}(P/Rg) \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \right]_{Rg}$$

Par ailleurs :

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} \vec{V}(P/Rg)^2 \right) = \vec{V}(P/Rg) \cdot \frac{\partial \vec{V}(P/Rg)}{\partial q_i} = \vec{V}(P/Rg) \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \right]_{Rg}$$

On en déduit donc :

$$P_{qi}(S/Rg) = \left(\int_{P \in S} \vec{\Gamma}(P/Rg) \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} dm(P) \right) = \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} \cdot T(S/Rg)$$

◇ Application du PPV à un unique solide S.

Si, pour écrire le principe des puissances virtuelles, on choisit comme champ de vitesses virtuelles $\vec{\mathcal{V}}^*$ le champ des moments du torseur de Lagrange $\mathcal{L}_{qi}(S/Rg)$, on obtient alors pour chacun des paramètres q_i , l'équation suivante :

$$\mathcal{D}(S/Rg) \times \mathcal{L}_{qi}(S/Rg) = \mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S) \times \mathcal{L}_{qi}(S/Rg)$$

Le second membre est alors noté $Q_{q_i}(\bar{S} \rightarrow S/Rg)$ et est appelée la i ème composante des efforts extérieurs généralisés sur S.

Le principe des puissances virtuelles s'écrit alors sous la forme d'équations de Lagrange :

$$P_{q_i}(S/Rg) = Q_{q_i}(\bar{S} \rightarrow S/Rg)$$

$$\text{Avec } P_{q_i}(S/Rg) = \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} \cdot T(S/Rg) \text{ et } Q_{q_i}(\bar{S} \rightarrow S/Rg) = \mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S) \times \mathcal{Q}_{q_i}(S/Rg)$$

On note qu'on obtient autant d'équations de Lagrange qu'il y a de paramètres du mouvement, ce qui permet de résoudre le problème.

◇ *Application du PPV à un système de solides Σ :*

On écrit alors que la puissance virtuelle des quantité d'accélération est égale à la puissance virtuelle des efforts extérieurs plus la puissance virtuelle des efforts intérieurs. Soit :

$$P_{q_i}(S/Rg) = Q_{q_i}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/Rg) + Q_{q_i}(\text{int } \Sigma)$$

Comme nous l'avons fait pour l'énergie cinétique, on trouve la puissance virtuelle des efforts intérieurs en écrivant le PPV pour chacun des solides puis en regroupant les termes deux à deux, alors :

$$Q_{q_i}(\text{int } \Sigma) = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} F(S_j \rightarrow S_i) \times [\mathcal{Q}_{q_i}(S_i/Rg) - \mathcal{Q}_{q_i}(S_j/Rg)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} F(S_j \rightarrow S_i) \times \mathcal{Q}_{q_i}(S_i/S_j)$$

◇ *Fonction de force.*

○ Définition

On dit que les actions mécaniques (*) d'une partie S_e extérieure à Σ sur une partie S_i intérieure à Σ dérivent d'une fonction de force si il existe une fonction numérique U des variables (q_i, t) telle que :

$$\forall i = 1, n \quad Q_{q_i}(S_e \rightarrow S_i/Rg) = \frac{\partial U(S_e \rightarrow S_i/Rg)}{\partial q_i}$$

L'existence d'une fonction de force simplifie considérablement le calcul de Q_{q_i} .

○ Relation entre fonction de force et énergie potentielle

On rappelle peut associer une énergie potentielle aux actions extérieures (exercées par un solide S_e) sur un solide S_i en mouvement par rapport à R , si il existe une fonction scalaire E_p telle que :

$$P(S_e \rightarrow S_i/R) = -\frac{d}{dt} E_p(S_e \rightarrow S_i/R)$$

Où $P(S_e \rightarrow S_i/R)$ est la puissance des actions extérieures à S_i (exercées par S_e) sur S_i .

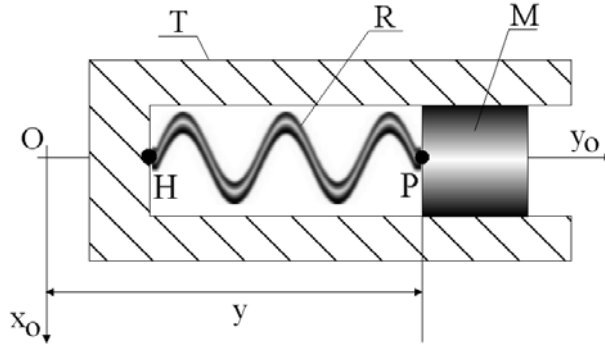
En développant par rapport aux paramètres du mouvement :

$$P(S_e \rightarrow S_i/R) = -\frac{d}{dt} E_p(S_e \rightarrow S_i/R) = -\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial E_p(S_e \rightarrow S_i/R)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial E_p}{\partial t} \right]$$

L'existence d'une énergie potentielle $E_p(S_e \rightarrow S_i/R)$ entraîne l'existence d'une fonction de force $U(S_e \rightarrow S_i/R)$, telle que $U(S_e \rightarrow S_i/R) = -E_p(S_e \rightarrow S_i/R)$. Attention la réciproque n'est pas vraie !

○ Illustration

On étudie un ressort de traction compression R (raideur k , longueur libre l_0 , masse négligeable) monté entre deux solides, T le cylindre, et M la masse. La liaison T - M est une glissière. On suppose que T est en mouvement par rapport à $Ro(O, x_0, y_0, z_0)$ d'un mouvement rectiligne vibratoire connu : $\overrightarrow{OH} = h \sin \omega t \cdot \vec{y}_0$. La position de M dans Ro est repérée par le paramètre y tel que : $\overrightarrow{OP} = y \vec{y}_0$



Alors : $\{\mathcal{C}(M / Ro)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{y} \vec{y}_o \end{Bmatrix}$, Et : $\{\mathcal{C}(M / T)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ (\dot{y} - h\omega \cos \omega t) \vec{y}_o \end{Bmatrix}$

Par ailleurs : $\{\mathcal{F}(r \rightarrow M)\} = \begin{Bmatrix} -k(y - h \sin \omega t - l_o) \vec{y}_o \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

Donc : $P(T \leftarrow r \rightarrow M) = \{\mathcal{F}(r \rightarrow M)\} \times \{\{\mathcal{C}(M / Ro)\} - \{\mathcal{C}(T / Ro)\}\} = \{\mathcal{F}(r \rightarrow M)\} \times \{\mathcal{C}(M / T)\}$

Soit : $P(T \leftarrow r \rightarrow M) = -k(y - h \sin \omega t - l_o)(\dot{y} - h\omega \cos \omega t) = \frac{d}{dt} \left[-\frac{k}{2}(y - h \sin \omega t - l_o)^2 \right]_{Ro}$

Il existe donc une énergie potentielle E_p pour les inter-efforts entre T et M par l'intermédiaire du ressort r. On a donc :

$E_p(T \leftarrow r \rightarrow M) = \frac{k}{2}(y - h \sin \omega t - l_o)^2$ et $U(T \leftarrow r \rightarrow M) = -\frac{k}{2}(y - h \sin \omega t - l_o)^2$

Alors :

$Q_y(T \leftarrow r \rightarrow M) = \frac{\partial U(T \leftarrow r \rightarrow M)}{\partial y} = -k(y - h \sin \omega t - l_o)$

On cherche maintenant à déterminer les Q_{qi} associés aux efforts extérieurs exercés sur M par l'intermédiaire du ressort r :

$P(r \rightarrow M / Ro) = \{\mathcal{F}(r \rightarrow M)\} \times \{\mathcal{C}(M / Ro)\}$ Soit $P(r \rightarrow M / Ro) = -k(y - h \sin \omega t - l_o)\dot{y}$

Il n'existe pas d'énergie potentielle ici telle que $P(r \rightarrow M / Ro) = -\frac{d}{dt} E_p(r \rightarrow M / Ro)$

On calcule donc directement Q_y , pour cela il faut calculer le torseur de Lagrange :

$\{\mathcal{C}(M / Ro)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{y} \vec{y}_o \end{Bmatrix}$ Donc $\{\mathcal{C}_y(M / Ro)\} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \{\mathcal{C}(M / Ro)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{y}_o \end{Bmatrix}$

Alors : $Q_y(r \rightarrow M / Ro) = \mathcal{F}(r \rightarrow M) \times \mathcal{C}_y(M / Ro)$

Soit : $Q_y(r \rightarrow M / Ro) = -k(y - h \sin \omega t - l_o) = \frac{d}{dy} \left[-\frac{1}{2} k(y - h \sin \omega t - l_o)^2 \right]$

Donc, bien qu'il n'existe pas d'énergie potentielle $E_p(r \rightarrow M / Ro)$ dans ce cas, il existe néanmoins une fonction de force $U(r \rightarrow M / Ro)$.

Si l'on suppose maintenant que le mouvement de T par rapport à M est libre et paramétré par λ tel que : $\vec{OH} = \lambda \vec{y}_o$, tandis que le mouvement de M par rapport à T est paramétré par γ tel que : $\vec{HP} = l \vec{y}_o$

Alors : $\{\mathcal{V}(M / Ro)\} = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{0} \\ (\dot{\lambda} + \dot{l})\vec{y}_o \end{pmatrix} \right\}$ Donc $\{\mathcal{V}_\lambda(M / Ro)\} = \{\mathcal{V}_l(M / Ro)\} = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{y}_o \end{pmatrix} \right\}$

Par ailleurs : $\{\mathcal{F}(r \rightarrow M)\} = \left\{ \begin{pmatrix} -k(l - l_o)\vec{y}_o \\ \vec{0} \end{pmatrix} \right\}$

Alors : $Q_\lambda(r \rightarrow M / Ro) = Q_l(r \rightarrow M / Ro) = -k(l - l_o)$

Donc : $\frac{\partial}{\partial l} Q_\lambda(r \rightarrow M / Ro) = -k$ et $\frac{\partial}{\partial \lambda} Q_l(r \rightarrow M / Ro) = 0$

Donc : $\frac{\partial}{\partial l} Q_\lambda(r \rightarrow M / Ro) \neq \frac{\partial}{\partial \lambda} Q_l(r \rightarrow M / Ro)$

Donc la fonction de force $U(r \rightarrow M / Ro)$ n'existe pas.

Cet exemple montre qu'il faut être très rigoureux dans la définition des grandeurs à déterminer et que cela implique des notations complètes.

○ Action de la pesanteur

Dans un repère $R(O, x, y, z)$ lié à la terre. On considère que l'accélération de la pesanteur \vec{g} est dirigée selon la verticale à la surface (O, z) (ce qui est une approximation) et dirigée vers le bas. $\vec{g} = -g\vec{z}$.

Alors, il existe une énergie potentielle associée à l'action de la pesanteur sur le solide S de masse m et de centre d'inertie G , dans son mouvement par rapport à la terre :

$$E_p\left(\begin{matrix} \vec{g} \\ pes \rightarrow S / R \end{matrix}\right) = -m\vec{g} \cdot \overrightarrow{OG}$$

Il existe donc également une fonction de force U associée :

$$U\left(\begin{matrix} \vec{g} \\ pes \rightarrow S / R \end{matrix}\right) = m\vec{g} \cdot \overrightarrow{OG}$$

Si le mouvement de G par rapport à R est paramétré par i paramètres q_i , alors le calcul des Q_{q_i} est immédiat :

$$\forall i = 1, n \quad Q_{q_i}\left(\begin{matrix} \vec{g} \\ pes \rightarrow S / R \end{matrix}\right) = \frac{\partial U\left(\begin{matrix} \vec{g} \\ pes \rightarrow S / R \end{matrix}\right)}{\partial q_i} = m\vec{g} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OG}}{\partial q_i}$$

○ Ressort de traction-torsion

Deux solides $S1$ et $S2$ sont liés par une liaison pivot glissant dans laquelle est intercalée un ressort de traction-torsion de raideur K en traction-compression, de raideur C en torsion, de longueur à vide L_o et de torsion à vide θ_o . Le paramètre L mesure la distance entre les deux solides le long de l'axe de la liaison et le paramètre θ mesure la rotation du solide $S2$ par rapport au solide $S1$.

L' énergie potentielle pour les actions mutuelles de $S1$ et $S2$ s'écrit :

$$E_p(S1 \leftarrow r \rightarrow S2) = \frac{1}{2} K(L - L_o)^2 + \frac{1}{2} C(\theta - \theta_o)^2$$

On en déduit la fonction de force pour les inter-efforts entre $S1$ et $S2$

$$U(S1 \leftarrow r \rightarrow S2) = -\frac{1}{2} K(L - L_o)^2 - \frac{1}{2} C(\theta - \theta_o)^2$$

Les mouvements relatifs de $S1$ et $S2$ sont paramétrés ici par les deux paramètres L et θ , donc :

$$Q_L(S1 \leftarrow r \rightarrow S2) = \frac{\partial U(S1 \leftarrow r \rightarrow S2)}{\partial L} = -K(L - L_o)$$

$$Q_\theta(S1 \leftarrow r \rightarrow S2) = \frac{\partial U(S1 \leftarrow r \rightarrow S2)}{\partial \theta} = -C(\theta - \theta_0)$$

6.5.4 Combinaison des torseurs de Lagrange : Equation de Painlevé

◇ *Définition du torseur de Painlevé:*

On choisit le champ $\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \right]_{Rg} \frac{dq_i}{dt}$ comme champ de vitesses virtuelles pour écrire le principe des

puissances virtuelles. Ce champ est le champ des moments d'un torseur, appelé torseur de Painlevé, étant donné qu'il est une combinaison linéaire de torseur de Lagrange.

$$\text{On rappelle que } \vec{V}(P / Rg) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \right]_{Rg} \frac{dq_i}{dt} + \left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} \right]_{Rg}.$$

Donc le torseur de Painlevé est distinct du torseur des vitesses galiléennes. L'équation de Painlevé est donc aussi distincte du théorème de l'énergie cinétique, à condition que le mouvement du système dépende explicitement du temps. Autrement dit, si le système contient des actionneurs qui imposent partiellement la cinématique du système.

◇ *Conséquences*

- Premier membre de l'équation de Painlevé.

Pour chacun des torseurs de Lagrange on a :

$$P_{q_i}(\Sigma / Rg) = \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} \cdot T(\Sigma / Rg)$$

Donc pour le torseur de Painlevé, le premier membre du principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$P_P(\Sigma / Rg) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} \cdot T(\Sigma / Rg) \frac{dq_i}{dt}$$

Si l'on développe :

$$P_P(\Sigma / Rg) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} T(\Sigma / Rg) \right] \frac{dq_i}{dt} - \frac{dq_i}{dt} \frac{\partial}{\partial q_i} T(\Sigma / Rg)$$

L'énergie cinétique se développe comme suit vis-à-vis des paramètres q_i :

$$T(\Sigma / Rg) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \vec{V}^2(P / Rg) dm = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} \right]^2 dm$$

Si l'on développe :

$$T(\Sigma / Rg) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_j} \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_j}{dt} \right] dm}_{T2(\Sigma / Rg)} + \underbrace{\int_{\Sigma} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} \frac{dq_i}{dt} \right] dm}_{T1(\Sigma / Rg)} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} \right]^2 dm}_{T0(\Sigma / Rg)}$$

Avec ces notations on peut alors écrire :

$$P_P(\Sigma / Rg) = \frac{d}{dt} [T2(\Sigma / Rg) - T0(\Sigma / Rg)] + \frac{\partial}{\partial t} T(\Sigma / Rg)$$

- Second membre de l'équation de Painlevé.

Le second membre ne présente aucune particularité.

Au final, l'équation de Painlevé s'écrit :

$$\frac{d}{dt} [T2(\Sigma / Rg) - T0(\Sigma / Rg)] + \frac{\partial}{\partial t} T(\Sigma / Rg) = \sum_{i=1}^n \left(Q_{qi}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / Rg) + Q_{qi}(\text{int } \Sigma) \right) \frac{dq_i}{dt}$$

◇ Intégrale première de Painlevé

L'intérêt principal de l'équation de Painlevé est de fournir dans certaines conditions une intégrale première du mouvement :

- toutes les liaisons géométriques sont parfaites
- toutes les liaisons géométriques extérieures le sont avec des solides ayant un mouvement imposé par rapport à Rg.
- Toutes les actions mécaniques dérivent d'une fonction de force U
- T(S/Rg) et U ne dépendent pas explicitement du temps.

Alors :

$$T2(\Sigma / Rg) - T0(\Sigma / Rg) = U + \text{constante}$$

6.5.5 Application de la méthode de Lagrange et paramétrage du mouvement

◇ Résumé et mise en forme des problèmes.

- Rappel sur les hypothèses des équations de Lagrange :

Pour établir les équations de Lagrange, on applique le principe des puissances virtuelles, avec comme champ de vitesse virtuel cinématiquement admissible, les torseurs cinématiques de Lagrange $\mathcal{L}_{qi}(S/Rg)$.

$$\text{Avec : } \mathcal{L}_{qi}(S_j / Rg) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \bar{\Omega}(S_j / Rg) \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \vec{V}(A \in S_j / Rg) \end{array} \right\}_A$$

On suppose que les (q_i, \dot{q}_i, t) sont indépendants. Cette hypothèse est cruciale (§6.5.3). Ceci permet d'établir autant d'équations qu'il y a de paramètres q_i du mouvement. Chacune des équations s'écrit, dans le cas le plus général, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{q_i} : \quad & \underbrace{\left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} T(\Sigma / Rg)}_{P_{qi}(\Sigma / Rg)} = \underbrace{\sum_{j=1}^N \mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow S_j) \times \mathcal{L}_{qi}(S_j / Rg)}_{Q_{qi} \text{ Ext}} \\ & + \underbrace{\sum_{j=1}^N \sum_{k>j} \mathcal{F}(S_k \rightarrow S_j) \times \mathcal{L}_{qi}(S_j / S_k)}_{Q_{qi} \text{ Int}} \end{aligned}$$

Lorsque l'action mécanique dérive d'une fonction de force, le calcul de Q_{qi} est grandement simplifié:

$$\forall i = 1, n \quad Q_{qi}(S_e \rightarrow S_i / Rg) = \frac{\partial U(S_e \rightarrow S_i / Rg)}{\partial q_i}$$

Dans le cas d'un système de solides, des équations de liaisons apparaissent. Les paramètres ne sont alors plus indépendants. Néanmoins, pour l'écriture des équations de Lagrange, on commence par faire l'hypothèse que les paramètres du mouvement sont indépendants. Nous avons donc deux possibilités,

-soit employer l'équation de liaison pour éliminer le paramètre du mouvement. On revient alors à un problème à *paramètres indépendants*.

-soit conserver le paramètre, écrire les équations de Lagrange, puis adjoindre ensuite l'équation de liaison au système d'équation obtenu. On travaille alors avec un système à *paramètres liés*. Naturellement, lorsqu'on ajoute une équation de liaison, il faut aussi ajouter une inconnue. Cette inconnue est l'action de liaison associée au paramètre du mouvement contraint.

Les équations de liaison peuvent être réparties en deux groupes, les équations holonomes et les équations non-holonomes.

○ Equations holonomes :

Les équations de liaisons holonomes portent sur les paramètres du mouvement q_i et sont du type :

$$f_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0 \quad j=1 \text{ à } h \quad \text{où } h \text{ est le nombre de liaisons holonomes}$$

Par dérivation composée par rapport au temps, on obtient directement une équation sur les vitesses de variations des paramètres du mouvement :

$$\frac{\partial f_j}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial f_j}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_{ji}(q_k, t) \dot{q}_i = b_j(q_k, t) \quad j=1 \text{ à } h$$

Chaque équation de liaison holonome permet donc d'éliminer complètement un paramètre du mouvement, puisqu'on peut éliminer à la fois q_p et \dot{q}_p .

○ Equations non-holonomes :

Les équations de liaisons non-holonomes portent sur les paramètres du mouvement q_i et les vitesses de variations de ces paramètres (exemple : un roulement sans glissement), elles sont du type :

$$f_j(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_{ji}(q_k, t) \dot{q}_i = b_j(q_k, t) \quad j=1 \text{ à } k$$

où k est le nombre de liaisons non-holonomes

Dans certains cas, l'équation est intégrable et l'on connaît les valeurs des paramètres du mouvement à l'instant initial, on se ramène alors à une équation holonome.

Dans le cas général, comme on ne dispose que d'une seule équation, on ne peut pas éliminer à la fois q_p et \dot{q}_p supposés indépendants. On doit donc conserver le paramètre du mouvement q_p dans le paramétrage. Les paramètres du mouvement sont donc nécessairement liés. Une inconnue supplémentaire de type action de liaison doit alors être adjointe au système.

○ Inconnues et équations du problème.

Les équations du problème sont donc en général, les équations de Lagrange et les équations de liaison non-holonomes (toujours) et holonomes (si nécessaire).

Les inconnues du problème peuvent être uniquement des paramètres du mouvement (liés ou indépendants), mais peuvent également être des actions de liaison, une action de contact par exemple.

Si l'on écrit une équation de liaison non-holonome, on devra toujours adjoindre une action de liaison complémentaire (ou, sinon, introduire un multiplicateur de Lagrange).

Par ailleurs, on peut vouloir déterminer des actions mécaniques supplémentaires, par exemple un effort tranchant sur une poutre. Ce dernier cas nous ramène directement à l'énoncé original du principe de d'Alembert (§6.4.1). Si l'on cherche à déterminer une action de liaison inconnue, on pourra imaginer un paramétrage non-compatible avec cette liaison. On ajoute un degré de liberté imaginaire au système, complémentaire de l'action mécanique cherchée. Ce mouvement imaginaire non-compatible avec la liaison réelle fait « travailler » l'action de liaison inconnue, qui apparaît alors dans les équations de Lagrange. La solution réelle du problème est telle que la liaison se trouve en équilibre et « détruit » donc le mouvement

imaginaire (§6.4.1). Ce qui revient à adjoindre les équations de liaison sur le paramètre supplémentaire au système d'équations de Lagrange obtenu.

En conclusion, pour un même problème, le choix du paramétrage dépendra des objectifs du calcul et pas uniquement de la mobilité du système et de l'existence d'équations de liaison non-holonomes.

◇ Lagrange avec multiplicateur

Pour établir les équations de Lagrange, on applique le principe des puissances virtuelles, avec comme champ de vitesse virtuel cinématiquement admissible, les torseurs cinématiques de Lagrange $\mathcal{Q}_{qi}(S/Rg)$. On peut aussi prendre toute combinaison linéaire des torseurs cinématiques de Lagrange

$$\text{Alors : } \mathcal{V}(S/Rg) = \sum_{i=1}^n \mathcal{Q}_{qi}(S/Rg) \dot{q}_i^* \quad \forall \dot{q}_i^*$$

L'application du PPV donne alors :

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i^* \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} T(\Sigma/Rg) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^* Q_{qi}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/Rg) + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^* \sum_{\substack{h,j=1 \\ h < j}}^n Q_{qi}(S_h \leftrightarrow S_j)$$

Mais on veut en outre, que le champ de vitesse virtuelle soit compatible avec les k équations de liaison du problème. Ces équations, sont issues d'équations sur les vitesses, ou sur les positions. Par exemple, les équations non-holonomes de liaison pour un contact sans glissement d'un solide S sur un plan P , au point I , s'écriront :

$\vec{V}(P \in S/P) \cdot \vec{x}_p = \vec{V}(P \in S/P) \cdot \vec{y}_p = 0$, où $(\vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)$ est la base attachée à P , z_p étant la normale à la surface de contact au point I .

Les équations de liaison « virtualisées » s'obtiennent de la même manière, mais appliquées cette fois au champ des vitesses virtuel, tel qu'il a été construit ici :

$$\vec{V}^*(P \in S/Rg) \cdot \vec{x}_p = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^* \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \vec{V}(P \in S/Rg) \cdot \vec{x}_p$$

Ainsi, lorsqu'on travaille avec un problème à paramètres liés, les équations de liaisons, holonomes ou non, peuvent se mettre sous la forme :

$$\sum_{i=1}^n a_{ji}(q_k, t) \dot{q}_i = b_j(q_k, t) \quad j=1 \text{ à } k$$

Les équations de liaisons virtualisées sont alors telles que :

$$\sum_{i=1}^n a_{ji}(q_k, t) \dot{q}_i^* = 0 \quad j=1 \text{ à } k$$

En conclusion, le PPV, écrit avec un champ virtuel compatible avec les équations de liaison, donne :

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i^* P_{qi} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^* Q_{qi} \quad \forall (\dot{q}_i^*, i=1, n) \text{ tels que } \left(\sum_{i=1}^n a_{ji}(q_k, t) \dot{q}_i^* = 0, j=1, k \right)$$

Un théorème classique permet d'écrire ceci, sous la forme équivalente suivante, en introduisant k scalaire λ_j tels que :

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i^* P_{qi} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^* Q_{qi} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \sum_{i=1}^n a_{ji}(q_k, t) \dot{q}_i^* \quad \forall (\dot{q}_i^*, i=1, n)$$

Alors, en inversant les signes somme et en rassemblant, le PPV peut désormais s'écrire:

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i^* \left(P_{qi} - Q_{qi} - \sum_{j=1}^k \lambda_j a_{ji}(q_k, t) \right) = 0 \quad \forall (\dot{q}_i^*, i=1, n)$$

Ce qui implique :

$$P_{qi} = Q_{qi} + \sum_{j=1}^k \lambda_j a_{ji}(q_k, t) \quad i=1, n$$

Avec les notations appropriées, on trouve un système de n équations de Lagrange à multiplicateur :

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} T(\Sigma / Rg) = Q_{qi}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / Rg) + Q_{qi}(S_h \leftrightarrow S_j) + \sum_{j=1}^k \lambda_j a_{ji}(q_k, t)$$

$i=1 \text{ à } n$

Auquel il faut adjoindre les k équations de liaisons réelles :

$$\sum_{i=1}^n a_{ji}(q_k, t) \dot{q}_i = b_j(q_k, t) \quad j=1 \text{ à } k$$

Le système a pour inconnues les n paramètres de mouvement q_i auquel il faut ajouter les k multiplicateurs de Lagrange λ_j .

◇ *Problèmes à paramètres liés, bilan des méthodes.*

Inventaire initial des inconnues du problème.

Paramètres du mouvement	: $n+h$
Actions de liaison	: a

Inventaire initial des équations

Equations de liaisons	: $k+h$
Equations de Lagrange	: $n+h$

En règle générale, on commence par éliminer du problème les h paramètres du mouvement correspondant aux h équations de liaisons holonomes.

Si $a = k$ Le nombre total d'inconnues ($n+a$) est égal au nombre total d'équations. On peut résoudre directement.

Inconnues du problème

Paramètres du mouvement	: n
Actions de liaison	: a

Equations

Equations de liaisons	: a
Equations de Lagrange	: n

Si $k > a$ Le nombre total d'équations est plus grand que le nombre d'inconnues. Des actions de liaison complémentaires sont à ajouter.

Première méthode : *Champ des vitesses virtuelles compatible et multiplicateurs de Lagrange.*

On ajoute $(k-a)$ paramètres inconnus, homogènes à des actions de liaisons, appelés « multiplicateurs de Lagrange ».

Le système compte alors autant d'inconnues que d'équations :

Inconnues du problème

Paramètres du mouvement	: n
Actions de liaison	: a
Multiplicateurs de Lagrange	: $k-a$

Equations

Equations de liaisons	: k
Equations de Lagrange	: n

Seconde méthode : *Champ des vitesses virtuelles non-compatible et actions de liaison.*

On introduit $(k-a)$ actions de liaisons inconnues complémentaires correspondant aux degrés de libertés liés. Les actions de liaisons inconnues travaillent dans le mouvement virtuel non-compatible choisi et apparaissent donc dans le second membre des équations de Lagrange.

Le système compte alors autant d'inconnues que d'équations :

Inconnues du problème

Paramètres du mouvement	: n
Actions de liaison	: $a+k-a=k$

Equations

Equations de liaisons	: k
Equations de Lagrange	: n

Si $k < a$ Le nombre d'inconnues du problème est plus grand que le nombre d'équations. On cherche à déterminer des actions de liaisons supplémentaires.

Une seule méthode: *Paramétrage non-compatible et actions de liaisons.*

On modifie le paramétrage de façon à faire apparaître les $(a-k)$ inconnues du mouvement manquantes complémentaires des actions mécaniques cherchées. Le paramétrage est alors totalement incompatible, puisqu'on autorise des mouvements normalement interdits par les liaisons. Les $(a-k)$ actions de liaisons inconnues travaillent dans le mouvement virtuel incompatible choisi et apparaissent donc aussi dans le second membre des équations de Lagrange. On adjoint, ensuite, au système d'équations les équations de liaisons qui restaurent la compatibilité de la solution avec les liaisons réelles du système.

Le système compte alors autant d'inconnues que d'équations :

Inconnues du problème

Paramètres du mouvement	: $n+a-k$
Actions de liaison	: a

Equations

Equations de liaisons	: $k+a-k=a$
Equations de Lagrange	: $n+a-k$

◇ Illustration 1 : Lagrange avec multiplicateur

On considère un cerceau C de rayon R et de centre d'inertie G qui roule sans glisser sur un plan P avec lequel il est en contact en un point I. On associe au plan P le repère Galiléen $R_g(O, X_o, Y_o, Z_o)$

Paramétrage : 6 paramètres, coordonnées (x, y, z) du point G et angles d'Euler ψ, θ, ϕ .

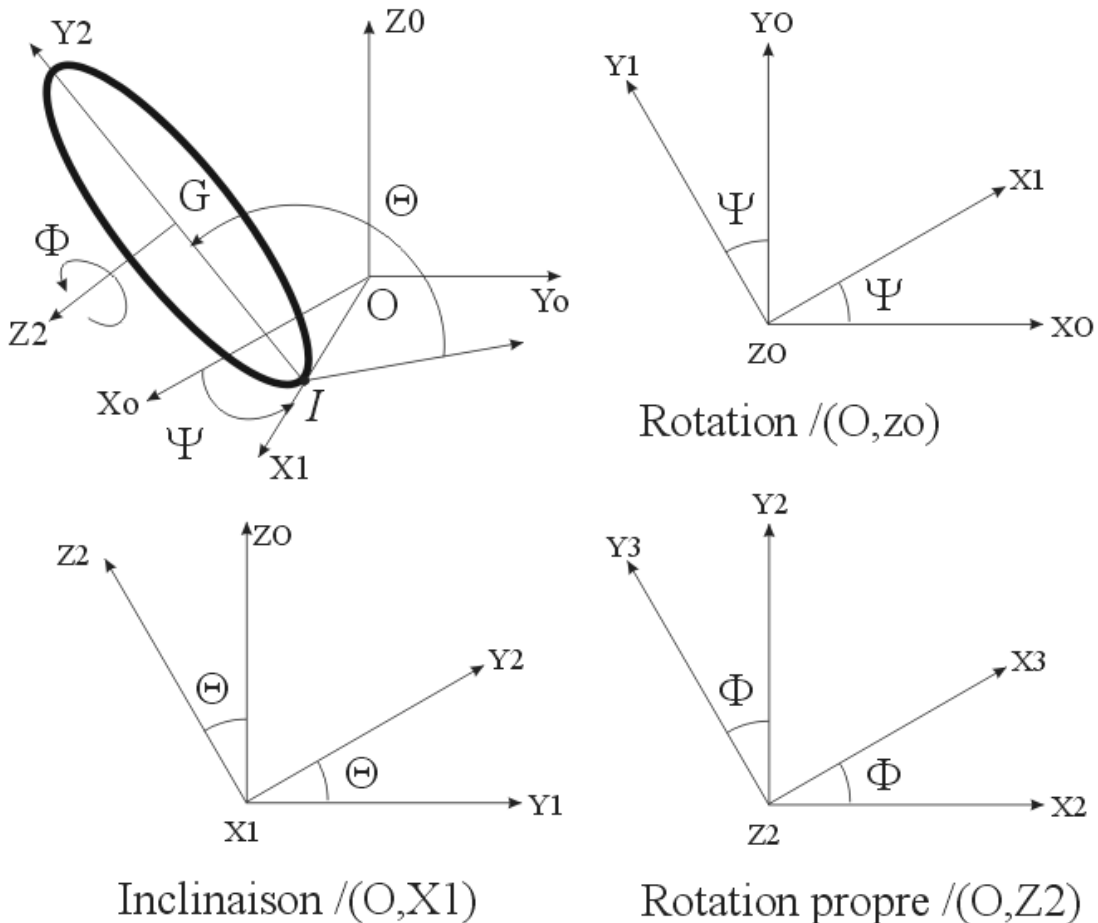
Equations de liaisons : - maintien du contact : $\overrightarrow{OI} \cdot \vec{z}_o = 0$

- roulement sans glissement : $\vec{V}(I \in C / Rg) = \vec{0}$

La première équation de liaison est holonome, un du mouvement pourra être éliminé (dans ce cas z , la cote verticale de G). La seconde fournit deux équations scalaires non-holonomes. Aucun autre paramètre du mouvement ne peut être éliminé.

Nous avons un système à 5 paramètres du mouvement, soit 5 équations de Lagrange et 2 équations de liaisons. Nous avons plus d'équations que d'inconnues.

Dans un premier temps nous choisissons un mouvement virtuel compatible avec les liaisons.



Expression des équations de liaison

Maintien du contact :

$$\vec{OI} \cdot \vec{z}_o = 0 \Rightarrow (\vec{OG} + \vec{GI}) \cdot \vec{z}_o = 0 \Rightarrow z = R \cdot \sin \theta$$

Roulement sans glissement :

$$\vec{V}(I \in C / Rg) = \vec{V}(G \in C / Rg) + \vec{\Omega}(C / Rg) \wedge \vec{GI}$$

$$\text{Or : } \vec{V}(G / Rg) = \dot{x} \cdot \vec{x}_o + \dot{y} \cdot \vec{y}_o + \dot{z} \cdot \vec{z}_o$$

$$\text{Et : } \vec{\Omega}(C / Rg) = \dot{\Psi} \vec{z}_o + \dot{\Theta} \vec{x}_1 + \dot{\Phi} \vec{z}_2$$

$$\text{Ou encore : } \vec{\Omega}(C / Rg) = (\dot{\Psi} \cos \Theta \cdot \vec{z}_2 + \dot{\Psi} \sin \Theta \cdot \vec{y}_2) + \dot{\Theta} \vec{x}_1 + \dot{\Phi} \vec{z}_2$$

$$\text{Soit : } \vec{V}(I \in C / Rg) = \dot{x}.\vec{xO} + \dot{y}.\vec{yO} + \dot{z}.\vec{zO} + \left(\dot{\Theta}.\vec{x}_1 + (\dot{\Phi} + \dot{\Psi} \cos \Theta).\vec{z}_2 + \dot{\Psi} \sin \Theta \vec{y}_2 \right) \wedge (-R\vec{y}_2)$$

Alors :

$$\vec{V}(I \in C / Rg) = \dot{x}.\vec{xO} + \dot{y}.\vec{yO} + R.\dot{\Theta}.\cos \Theta.\vec{zO} + -R.\dot{\Theta}.\vec{z}_2 + R(\dot{\Phi} + \dot{\Psi} \cos \Theta).\vec{x}_1$$

Dont on déduit :

$$\vec{V}(I \in C / Rg) \cdot \vec{x}_1 = \dot{x}.\cos \Psi + \dot{y}.\sin \Psi + R(\dot{\Phi} + \dot{\Psi} \cos \Theta)$$

$$\vec{V}(I \in C / Rg) \cdot \vec{y}_1 = -\dot{x}.\sin \Psi + \dot{y}.\cos \Psi + R.\dot{\Theta}.\sin \Theta$$

Ceci nous permet d'exprimer deux équations non-holonomes :

$$\begin{cases} \dot{x}.\cos \Psi + \dot{y}.\sin \Psi + R(\dot{\Phi} + \dot{\Psi} \sin \Theta) = 0 \\ -\dot{x}.\sin \Psi + \dot{y}.\cos \Psi + R.\dot{\Theta}.\sin \Theta = 0 \end{cases}$$

Calcul de l'énergie cinétique :

$$J(G, C) = A.(\vec{X}_2 \otimes \vec{X}_2 + \vec{Y}_2 \otimes \vec{Y}_2) + C.(\vec{Z}_2 \otimes \vec{Z}_2)$$

La vitesse du point G et la vitesse de rotation du cerceau ont déjà été calculées, on en déduit :

$$2.T(C / Rg) = m.(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (R.\dot{\Theta}.\cos \Theta)^2) + A.(\dot{\Theta}^2 + (\dot{\Psi} \sin \Theta)^2) + C(\dot{\Phi} + \dot{\Psi} \cos \Theta)^2$$

On peut alors calculer chacun des P_{qi}

$$T(C / Rg) \Rightarrow P_x, P_y, P_\Theta, P_\Psi, P_\Phi$$

Par exemple :

$$P_x = \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial}{\partial x} \right\} T(C / Rg) = m.\ddot{x}$$

$$P_y = m.\ddot{y} \quad \text{etc...}$$

Calcul des puissances virtuelles

Etant donné que le champ de vitesse virtuelle choisi est compatible avec la condition de roulement sans glissement, les actions de contact ne travaillent pas dans le mouvement virtuel.

Liaisons : Paramétrage compatible \rightarrow

$$\text{Pesanteur : } Q_\Theta(\vec{C} \xrightarrow{\text{pesanteur}} C) = -m.g.\cos \Theta$$

$$\Rightarrow Q_x = Q_y = Q_\Phi = Q_\Psi = 0 \quad Q_\Theta = -mg.\cos \Theta$$

Equations de liaisons « virtualisées »

$$\begin{cases} \dot{x}^*.\cos \Psi + \dot{y}^*.\sin \Psi + R(\dot{\Phi}^* + \dot{\Psi}^* \sin \Theta) = 0 \\ -\dot{x}^*.\sin \Psi + \dot{y}^*.\cos \Psi + R.\dot{\Theta}^*.\sin \Theta = 0 \end{cases}$$

L'écriture des équations de Lagrange nécessitera l'introduction de deux multiplicateurs λ_1 et λ_2 .

Résultat : Système d'équations à résoudre 7x7

5 équations de Lagrange

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x : P_x = Q_x + \lambda_1 \cdot \cos \Psi - \lambda_2 \sin \Psi = \lambda_1 \cdot \cos \Psi - \lambda_2 \sin \Psi \\ \mathcal{L}_y : P_y = Q_y + \lambda_1 \cdot \sin \Psi + \lambda_2 \cos \Psi = \lambda_1 \cdot \sin \Psi + \lambda_2 \cos \Psi \\ \mathcal{L}_\Theta : P_\Theta = Q_\Theta + \lambda_2 \cdot R \cdot \sin \Theta = -m \cdot g \cdot R \cdot \cos \Theta + \lambda_2 \cdot R \cdot \sin \Theta \\ \mathcal{L}_\Psi : P_\Psi = Q_\Psi + \lambda_1 \cdot R \cdot \sin \Theta = \lambda_1 \cdot R \cdot \sin \Theta \\ \mathcal{L}_\Phi : P_\Phi = Q_\Phi + \lambda_1 \cdot R = \lambda_1 \cdot R \end{cases}$$

2 équations de Liaison

$$\begin{cases} \dot{x} \cdot \cos \Psi + \dot{y} \cdot \sin \Psi + R \cdot (\dot{\Phi} + \dot{\Psi} \sin \Theta) = 0 \\ -\dot{x} \cdot \sin \Psi + \dot{y} \cdot \cos \Psi + R \cdot \dot{\Theta} \cdot \sin \Theta = 0 \end{cases}$$

◇ *Illustration 2 : Champ des vitesses virtuelles non-compatible et actions de liaisons adjointes.*

On considère le même cerceau C de rayon R et de centre d'inertie G qui roule sans glisser sur un plan P avec lequel il est en contact en un point I.

Paramétrage : 6 paramètres, coordonnées (x,y,z) du point G et angles d'Euler Ψ, Θ, Φ .

Equations de liaisons : - maintien du contact : $z = R \cdot \sin \Theta$

- roulement sans glissement : $\vec{V}(I \in C / Rg) = \vec{0}$

$$\begin{cases} \dot{x} \cdot \cos \Psi + \dot{y} \cdot \sin \Psi + R \cdot (\dot{\Phi} + \dot{\Psi} \sin \Theta) = 0 \\ -\dot{x} \cdot \sin \Psi + \dot{y} \cdot \cos \Psi + R \cdot \dot{\Theta} \cdot \sin \Theta = 0 \end{cases}$$

Nous avons toujours, un système à 5 paramètres du mouvement, et donc 5 équations de Lagrange et 2 équations de liaisons. Nous avons plus d'équations que d'inconnues.

Cette fois ci, nous choisissons un mouvement virtuel non-compatible avec les liaisons réelles. Le glissement virtuel de C, par rapport au plan de contact au point I est autorisé.

$$\begin{aligned} \vec{V}(I \in C / Rg)^* &= (\dot{x} \cdot \cos \Psi + \dot{y} \cdot \sin \Psi + R \cdot (\dot{\Phi} + \dot{\Psi} \sin \Theta)) \vec{x}_1 \\ &+ (-\dot{x} \cdot \sin \Psi + \dot{y} \cdot \cos \Psi + R \cdot \dot{\Theta} \cdot \sin \Theta) \vec{y}_1 \end{aligned}$$

On adjoint deux actions de contact au point I :

$$\mathcal{F}(\bar{C} \xrightarrow{\text{contact}} C)_I = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{F}_I \\ \vec{0} \end{pmatrix} \right\} \text{ avec } \vec{F}_I = X_F \cdot \vec{x}_1 + Y_F \cdot \vec{y}_1$$

Calcul de l'énergie cinétique (ici, pas de changement)

$$\begin{aligned} 2.T(C / Rg) &= m \cdot (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (R \cdot \dot{\Theta} \cdot \cos \Theta)^2) + A \cdot (\dot{\Theta}^2 + (\dot{\Psi} \sin \Theta)^2) + C \cdot (\dot{\Phi} + \dot{\Psi} \cos \Theta)^2 \\ &\Rightarrow P_x, P_y, P_\Theta, P_\Psi, P_\Phi \end{aligned}$$

Calcul des puissances virtuelles

Liaisons : Paramétrage non-compatible

$$Q_{qi}(\overline{C} \xrightarrow{\text{contact}} C) = X_F \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} [\dot{x} \cdot \cos \Theta + \dot{y} \cdot \sin \Psi + R \cdot (\dot{\Phi} + \dot{\Psi} \sin \Theta)]$$

$$+ Y_F \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} [-\dot{x} \cdot \sin \Theta + \dot{y} \cdot \cos \Psi + R \cdot \dot{\Theta} \cdot \sin \Theta]$$

$$\text{Pesanteur: } Q_{\Theta}(\overline{C} \xrightarrow{\text{pesanteur}} C) = -m \cdot g \cdot \cos \Theta$$

$$\Rightarrow Q_x, Q_y, Q_{\Phi}, Q_{\Psi}, Q_{\Theta}$$

Système d'équations à résoudre 7x7

5 équations de Lagrange

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x : P_x = Q_x + X_F \cdot \cos \Psi - Y_F \sin \Psi = X_F \cdot \cos \Psi - Y_F \sin \Psi \\ \mathcal{L}_y : P_y = Q_y + X_F \cdot \sin \Psi + Y_F \cos \Psi = X_F \cdot \sin \Psi + Y_F \cos \Psi \\ \mathcal{L}_{\Theta} : P_{\Theta} = Q_{\Theta} + Y_F \cdot R \cdot \sin \Theta = -m \cdot g \cdot R \cdot \cos \Theta + Y_F \cdot R \cdot \sin \Theta \\ \mathcal{L}_{\Psi} : P_{\Psi} = Q_{\Psi} + X_F \cdot R \cdot \sin \Theta = X_F \cdot R \cdot \sin \Theta \\ \mathcal{L}_{\Phi} : P_{\Phi} = Q_{\Phi} + X_F \cdot R = X_F \cdot R \end{cases}$$

2 équations de Liaison

$$\begin{cases} \dot{x} \cdot \cos \Psi + \dot{y} \cdot \sin \Psi + R \cdot (\dot{\Phi} + \dot{\Psi} \sin \Theta) = 0 \\ -\dot{x} \cdot \sin \Psi + \dot{y} \cdot \cos \Psi + R \cdot \dot{\Theta} \cdot \sin \Theta = 0 \end{cases}$$

Remarques :

On retrouve les mêmes équations qu'avec l'autre méthode, les deux multiplicateurs ayant été remplacé par les deux composantes horizontales de l'action de contact au point I.

Cette méthode a pour avantage de mettre en évidence les actions de contact qui sont cachées derrière les multiplicateurs de Lagrange dans la première méthode. Elle permet de vérifier la validité du critère de non-glissement au point I (Loi de Coulomb).

Si l'on voulait calculer la composante normale N de l'action de contact au point I, il suffirait d'oublier l'équation holonome $z = R \cdot \sin \Theta$ et de travailler avec 6 paramètres du mouvement in dépendant. Lors de l'écriture des équations de Lagrange, on doit modifier l'expression de l'énergie cinétique, puisque un mouvement supplémentaire a été autorisé. Par ailleurs, comme dans les cas précédents, l'action de liaison recherchée N « travaille » dans le mouvement virtuel non-compatible proposé et apparaît donc au second membre. Enfin, il faut adjoindre au système d'équation obtenue, une équation de liaison supplémentaire : $z = R \cdot \sin \Theta$

La problème aurait alors 6 + 3 inconnues, 6 paramètres du mouvement et 3 actions de liaisons et 6+3 équations, 6 équations de Lagrange et 3 équations de liaison.

A retenir

- Torseur des actions des Σ_i sur Σ au point A :

$$\mathcal{T}\{\Sigma_i \rightarrow \Sigma\} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{\Sigma} \Psi_{\Sigma_i \rightarrow \Sigma} . dP \\ \int_A \frac{\Sigma}{AP} \wedge \Psi_{\Sigma_i \rightarrow \Sigma} . dP \end{array} \right\}$$

- Principe fondamental de la dynamique : il existe au moins un repère R_g appelé repère Galiléen, tel que pour tout système matériel Σ en mouvement par rapport à R_g :

$$\{\mathcal{D}(\Sigma / R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)\}$$

- Dans un référentiel non Galiléen R en mouvement (connu) par rapport à R_g , le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\{\mathcal{D}(\Sigma / R)\} = \{\mathcal{T}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)\} + \{\mathcal{D}_{ic}(\Sigma \in R / R_g)\} + \{\mathcal{D}_{ic}(\Sigma \in R / R_g)\}$$

Avec :

$$\{\mathcal{D}_{ic}(\Sigma \in R / R_g)\} = - \left\{ \begin{array}{c} \int \vec{\Gamma}(P \in R / R_g) dm \\ \int_{P \in \Sigma} \frac{P \in \Sigma}{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P \in R / R_g) dm \end{array} \right\}$$

$$\{\mathcal{D}_{ic}(\Sigma \in R / R_g)\} = - \left\{ \begin{array}{c} \int 2.\vec{\Omega}(R / R_g) \wedge \vec{V}(P / R) dm \\ \int_{P \in \Sigma} \frac{P \in \Sigma}{AP} \wedge [2.\vec{\Omega}(R / R_g) \wedge \vec{V}(P / R)] dm \end{array} \right\}$$

- Principe des puissances virtuelles (PPV) : pour un système de solides Σ , et un champ de vitesses virtuelles $\vec{\mathcal{V}}^*$ dont la restriction sur chacun des solides S_i constituant Σ est le champ des moments d'un torseur noté \mathcal{Q}_i^* quelconque s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{D}(S_i / R_g) \times \mathcal{Q}_i^* = \sum_{i=1}^n P^*(\bar{\Sigma} \rightarrow S_i, R_g) + \sum_{i=1}^n P^*(S_i \leftrightarrow S_j) \quad \forall \vec{\mathcal{V}}^*$$

- PPV avec $\vec{\mathcal{V}}^*$ égal au champ des vitesses Galiléennes : théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{dT(\Sigma / R_g)}{dt} = \underbrace{P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / R_g)}_{\text{Puissance des efforts extérieurs}} + \underbrace{P(S_i \leftrightarrow S_j)}_{\text{Puissance des efforts intérieurs}}$$

- PPV avec $\vec{\mathcal{V}}^*$ égal au champ des moments de l'un quelconque des torseurs de Lagrange : équation de Lagrange

$$P_{q_i}(S / R_g) = Q_{q_i}(\bar{S} \rightarrow S / R_g)$$

$$\text{Avec } P_{q_i}(S / R_g) = \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} . T(S / R_g) \text{ et } Q_{q_i}(\bar{S} \rightarrow S / R_g) = \mathcal{T}(\bar{S} \rightarrow S) \times \mathcal{Q}_{q_i}(S / R_g)$$

$$\text{Avec } \mathcal{Q}_{q_i}(S / R_g) \rightarrow \forall (P, Q) \in S \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \vec{V}(Q / R_g) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \vec{V}(P / R_g) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \vec{\Omega}(S / R_g) \wedge \overrightarrow{PQ}$$

- Fonction de force : les actions mécaniques (*) d'une partie S_e extérieure à Σ sur une partie S_i intérieure à Σ dérivent d'une fonction de force, s'il existe une fonction numérique U des variables (q_i, t) telle que :

$$\forall i = 1, n \quad Q_{q_i}(S_e \rightarrow S_i / Rg) = \frac{\partial U(S_e \rightarrow S_i / Rg)}{\partial q_i}$$

- Quelques fonctions de force bien utiles :
- Attraction gravitationnelle entre deux solides $S1$ et $S2$: $U(S2 \leftrightarrow S1) = \mathcal{G}_o \cdot \int_{S1 \times S2} \frac{dm(P_1)dm(P_2)}{\|\vec{P_1P_2}\|}$
- Attraction gravitationnelle à la surface de la terre, entre la terre et un solide S en mouvement par rapport à la terre :

$$U(Terre \leftrightarrow S) = U(Pes \rightarrow S / Terre) = m(S) \cdot \vec{g} \cdot \vec{OG}$$

- Ressort de traction-torsion : $U(S1 \leftrightarrow S2) = -\frac{1}{2} K(L - L_o)^2 - \frac{1}{2} C(\theta - \theta_o)^2$

Où r est un ressort de traction torsion, de raideur k en traction-compression, de raideur C en torsion, et de longueur libre l_o , et où l paramètre la distance entre les points d'attache du ressort sur les deux solides $S1$ et $S2$ et de torsion libre θ_o où θ paramètre la torsion du ressort.

7 METHODES DE RESOLUTION

7.1 Introduction

Dans les chapitres précédents nous nous sommes attachés à décrire la cinématique retenue, et à exprimer les principes fondamentaux dans le formalisme de la mécanique des solides indéformables. L'écriture de ces principes permet de mettre en place un système d'équations différentielles contenant autant d'équations que d'inconnues.

L'objectif de cette partie est d'exposer différentes méthodes permettant de résoudre les systèmes d'équations différentielles obtenus pour des applications particulières. On s'intéressera aux problèmes d'équilibre, de stabilité des équilibres et de vibrations autour des positions d'équilibre. Généralement, on procèdera d'abord à une linéarisation des équations puis on appliquera une procédure de résolution numérique. Cependant, on verra que des solutions analytiques peuvent être obtenues dans de nombreux cas.

Dans un premier temps, nous allons rapidement résumer les chapitres précédents afin de dégager une méthodologie à suivre pour la mise en place des équations du système. Puis nous verrons ensuite comment résoudre les systèmes d'équations différentielles obtenus.

Méthodologie:

- A : Objectifs.
 - Bien préciser les objectifs de l'étude afin de choisir une schématisation cinématique et un paramétrage adaptés au problème.
- B : Cinématique.
 - Tracer un graphe de structure
 - Déterminer la mobilité du système
 - Réduire éventuellement le graphe de structure.
 - Mettre en place le paramétrage et les figures de projections associées.

\Rightarrow Nombre d'équations du mouvement à trouver.
- C : Analyse.
 - Compléter le graphe de structure avec les actions mécaniques, tracer le graphe d'analyse.
 - Compte tenu de l'objectif visé et en s'appuyant sur le graphe d'analyse choisir :

Choisir : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Le ou les sous systèmes à isoler} \\ \text{La ou les projections à effectuer.} \\ \text{Le ou les théorèmes fondamentaux à utiliser.} \end{array} \right.$

- Préciser clairement quelles équations doivent être écrites et pourquoi avant de les expliciter.
- N'effectuer les projections qu'au dernier moment et se contenter du minimum nécessaire, pour éviter des calculs fastidieux.

\Rightarrow Système d'équations différentielles non-linéaires.

Mise en forme du problème.

7.2 Linéarisation

Dans le cas général, on ne sait pas trouver une solution analytique au système d'équations différentielles obtenu. Aussi utilise-t-on une méthode approchée. On procède à une linéarisation au premier ordre du système d'équations différentielles obtenu afin de pouvoir le résoudre.

Supposons qu'à l'instant t_o on connaisse les paramètres du mouvement, on note $q(t_o)$ le vecteur dont les composantes sont les n paramètres du mouvement à l'instant t_o et $q(t)$ le vecteur dont les composantes sont les n paramètres du mouvement à l'instant t . On note ε la variation infinitésimale des paramètres du mouvement correspondant à une variation infinitésimale du temps dt , autour du point $(t_o, q(t_o))$:

$$q(t) = q(t_o + dt) = q(t_o) + \varepsilon \quad \text{alors} \quad \frac{dq}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2}$$

On suppose pour la linéarisation que ε est très petit et on suppose également que les dérivées successives par rapport au temps de ε restent aussi très petites. Cette dernière hypothèse n'est pas toujours vérifiée. Lors d'un choc en particulier, de très grandes variations de vitesses sont observées pour de très petites variations de position. D'autres techniques de résolution devront alors être employées.

7.2.1 Linéarisation des équations de Lagrange

Nous allons voir ce qu'implique cette opération de linéarisation, lorsque les paramètres du mouvement d'un système de solides sont n paramètres du mouvement indépendants, et que les équations du mouvement sont données par les équations de Lagrange :

$$P_{q_i}(S/Rg) = Q_{q_i}(\bar{S} \rightarrow S/Rg)$$

$$\text{Avec } P_{q_i}(S/Rg) = \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} \cdot T(S/Rg) \text{ et } Q_{q_i}(\bar{S} \rightarrow S/Rg) = \mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S) \times \mathcal{Q}_{q_i}(S/Rg)$$

◇ Premier membre des équations de Lagrange

On rappelle que, l'énergie cinétique d'un solide S , se développe comme suit en fonction des dérivées partielles vis-à-vis des paramètres du mouvement :

$$T(S/Rg) = \frac{1}{2} \int_S \vec{v}^2(P/Rg) dm = \frac{1}{2} \int_S \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} \right]^2 dm$$

Si l'on développe et que l'on simplifie en considérant que les produits deux à deux des vitesses de variations des paramètres du mouvement sont nulles, puisqu'on linéarise, on obtient alors :

$$P_{q_i}(S/Rg) = \sum_{j=1}^n \frac{d^2 q_j}{dt^2} \int_S \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_j} dm + \sum_{j=1}^n \frac{dq_j}{dt} \int_S 2 \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial^2 \vec{OP}}{\partial q_j \partial t} dm + \int_S \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial^2 \vec{OP}}{\partial t^2} dm$$

Si le système ne contient aucun actionneur, alors la position du point P ne dépend pas explicitement du temps. Le premier membre des équations de Lagrange s'écrit alors comme suit :

$$\frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow P_{q_i}(S/Rg) = \sum_{j=1}^n \frac{d^2 q_j}{dt^2} \int_S \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_j} dm = \sum_{j=1}^n M_{ij} \frac{d^2 q_j}{dt^2} = \sum_{j=1}^n M_{ij} \frac{d^2 \varepsilon_j}{dt^2}$$

Compte tenu de la commutativité du produit scalaire : $M_{ij} = M_{ji}$. Par ailleurs, M_{ii} est nécessairement positif.

Le premier membre du système formé par les n équations de Lagrange linéarisées, peut donc se noter dans ce cas particulier :

$$M(q_o, t) \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2}$$

Où M est une matrice carrée symétrique définie positive de dimension nxn , où n est la mobilité du système et ε un vecteur de dimension n , contenant les n variations des paramètres du mouvement autour d'une position q_o .

Dans le cas général, le premier membre du système formé par les équations de Lagrange linéarisées, se note de la façon suivante :

$$M(q_o, t) \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + C(q_o, t) \frac{d\varepsilon}{dt} + \mathcal{F}(q_o, t)$$

Où M et C sont des matrices carrées de dimension nxn , où n est la mobilité du système et ε un vecteur de dimension n , contenant les n variations des paramètres du mouvement autour d'une position q_o . M est symétrique, définie positive.

◇ Second membre des équations de Lagrange : Fonction de force

Lorsque les actions mécaniques extérieure à S appliquées sur S du fait d'une loi (*), dérivent d'une fonction de force, il existe une fonction numérique U des variables q_i telle que :

$$Q_{q_i} \left(S \xrightarrow{(*)} S / Rg \right) = \frac{\partial U \left(S \xrightarrow{(*)} S / Rg \right)}{\partial q_i}$$

La linéarisation par rapport aux n variations infinitésimales par rapport à la position q_o s'écrit donc :

$$Q_{q_i} \left(S \xrightarrow{(*)} S / Rg \right) = \left. \frac{\partial U \left(S \xrightarrow{(*)} S / Rg \right)}{\partial q_i} \right|_{q=q_o} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 U \left(S \xrightarrow{(*)} S / Rg \right)}{\partial q_i \cdot \partial q_j} \cdot \varepsilon_j$$

La partie du second membre du système formé par les équations de Lagrange linéarisées, issue d'une action mécanique dérivant d'une fonction de force U, se note donc :

$$K(q_o, t) \cdot \varepsilon + Q(q_o, t)$$

Où K est une matrice carrée symétrique de dimension nxn , où n est la mobilité du système, Q un vecteur de dimension n et ε un vecteur de dimension n , contenant les n variations des paramètres du mouvement autour de la position de départ q_o .

◇ Second membre des équations de Lagrange : Loi visqueuse

Lorsque les actions mécaniques extérieure à S appliquées sur S sont décrite par une loi de comportement de type visqueux, le second membre des équations de Lagrange se calcule alors comme suit :

$$Q_{q_i} (\bar{S} \rightarrow S / Rg) = \{ \mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S) \} \times \mathcal{Q}_{q_i} (S / Rg)$$

Soit aussi :

$$Q_{q_i} (\bar{S} \rightarrow S / Rg) = \bar{R} \{ \mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S) \} \cdot \frac{\partial \bar{V}(P / Rg)}{\partial \dot{q}_i} + \bar{M}_P \{ \mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S) \} \cdot \frac{\partial \bar{\Omega}(S / Rg)}{\partial \dot{q}_i}$$

Si l'on admet que les efforts découlent d'une loi visqueuse telle que, au point P :

$$\bar{R} \{ \mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S) \} = -C_v \cdot \bar{V}(P / Rg) \quad \text{et} \quad \bar{M}_P \{ \mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S) \} = -\eta \cdot \bar{\Omega}(S / Rg)$$

$$\text{Et comme :} \quad \bar{V}(P / Rg) = \left[\frac{d\overline{OP}}{dt} \right]_R \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \bar{V}(P / Rg) = \frac{\partial \overline{OP}}{\partial q_i}$$

$$\bar{R}\{\mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S)\} \cdot \frac{\partial \bar{V}(P/Rg)}{\partial \dot{q}_i} = -C_v \left[\sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar{OP}}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \bar{OP}}{\partial t} \right] \cdot \frac{\partial \bar{OP}}{\partial q_i}$$

$$\bar{R}\{\mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S)\} \cdot \frac{\partial \bar{V}(P/Rg)}{\partial \dot{q}_i} = -C_v \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \bar{OP}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \bar{OP}}{\partial q_i} \right) \frac{dq_k}{dt} - C_v \left(\frac{\partial \bar{OP}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{OP}}{\partial q_i} \right)$$

Par ailleurs :

$$\bar{\Omega}(S/Rg) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar{\Omega}(S/Rg)}{\partial \dot{q}_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \bar{\Omega}(S/Rg)}{\partial t}$$

Donc :

$$\bar{M}_P \{\mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S)\} \cdot \frac{\partial \bar{\Omega}(S/Rg)}{\partial \dot{q}_i} = -\eta \left[\sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar{\Omega}(S/Rg)}{\partial \dot{q}_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \bar{\Omega}(S/Rg)}{\partial t} \right] \cdot \frac{\partial \bar{\Omega}(S/Rg)}{\partial \dot{q}_i}$$

Soit alors :

$$\bar{M}_P \{\mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S)\} \cdot \frac{\partial \bar{\Omega}(S/Rg)}{\partial \dot{q}_i} = -\eta \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \bar{\Omega}(S/Rg)}{\partial \dot{q}_k} \cdot \frac{\partial \bar{\Omega}(S/Rg)}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{dq_k}{dt} - \eta \left(\frac{\partial \bar{\Omega}(S/Rg)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{\Omega}(S/Rg)}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

Donc :

$$Q_{q_i}(\bar{S} \rightarrow S/Rg) = \sum_{k=1}^m \left[-C_v \left(\frac{\partial \bar{OP}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \bar{OP}}{\partial q_i} \right) - \eta \left(\frac{\partial \bar{\Omega}(S/Rg)}{\partial \dot{q}_k} \cdot \frac{\partial \bar{\Omega}(S/Rg)}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \frac{dq_k}{dt}$$

$$+ -C_v \left(\frac{\partial \bar{OP}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{OP}}{\partial q_i} \right) - \eta \left(\frac{\partial \bar{\Omega}(S/Rg)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{\Omega}(S/Rg)}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

La partie du second membre, issue d'effets visqueux, du système formé par les équations de Lagrange linéarisées, peut donc se noter

$$C(q_o, t) \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} + \mathcal{F}(q_o, t)$$

Où C est une matrice carrée symétrique de dimension $n \times n$ et \mathcal{F} un vecteur de dimension n , où n est la mobilité du système et ε un vecteur de dimension n , contenant les n variations des paramètres du mouvement autour d'une position q_o . On peut noter que \mathcal{F} est nul si le système ne contient pas d'actionneur.

◇ Système d'équations du mouvement après linéarisation :

Dans le cas général, le système formé par les n équations de Lagrange s'écrit donc après linéarisation :

$$M(t, q_o) \cdot \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + C(t, q_o) \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} + K(t, q_o) \cdot \varepsilon = \mathcal{F}(t, q_o)$$

Où ε est un vecteur de dimension égale à la mobilité du système m , dont les composantes sont les m variations infinitésimales autour d'une position q_o repérées par m paramètres du mouvement q_i supposés connus à l'instant t .

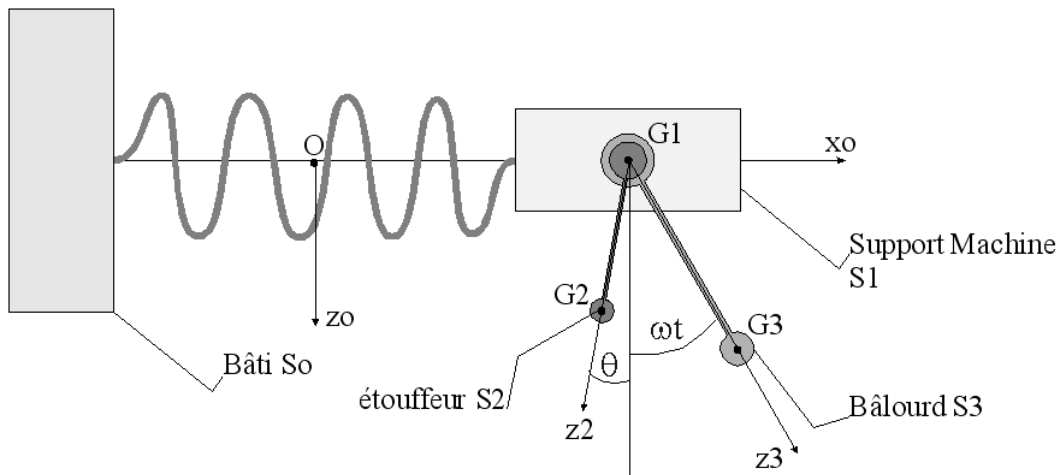
M est appelée la matrice de masse, C la matrice d'amortissement et K la matrice de raideur. La matrice de masse est toujours symétrique, définie positive, de par sa définition. K est toujours symétrique, de par sa définition.

7.2.2 Exemple : L'étouffeur de vibrations

Afin d'illustrer cette procédure de linéarisation, on revient au problème de l'étouffeur de vibrations déjà exposé au chapitre précédent. Le système est constitué d'un moteur rotatif, dont la partie fixe est montée sur un support machine S1, de masse M1 et de centre d'inertie G1, lui-même attaché au bâti S0 par une liaison glissière élastique (paramètre du mouvement X). Par ailleurs, la partie tournante du moteur présente un balourd S3, de masse M3, dont le centre d'inertie G3 est situé à une distance R de G1, et dont la position est repérée par l'angle ϕ . Si le moteur tourne à vitesse constante, le mouvement de S2/S1 est connu :

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega = \text{constante}.$$

On ajoute au système un étouffeur de vibration S2, de masse M2, dont le centre d'inertie G2 est situé à une distance l de G1 et dont la position par rapport à S1 est repérée par l'angle θ .



On va utiliser la méthode de Lagrange pour écrire les équations du mouvement. Le principe des puissances virtuelles s'écrit en utilisant les torseurs de Lagrange, où Σ désigne ($S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$) :

$$P_{q_i}(S/Rg) = Q_{q_i}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/Rg) + Q_{q_i}(\text{int } \Sigma)$$

$$\text{Avec } P_{q_i}(S/Rg) = \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} \cdot T(S/Rg) \text{ et } Q_{q_i}(\bar{S} \rightarrow S/Rg) = \mathcal{T}(\bar{S} \rightarrow S) \times \mathcal{C}'_{q_i}(S/Rg)$$

◇ *Calcul des Q_{q_i} :*

Les liaisons pivots entre S3 et S1 et entre S2 et S1 ainsi que la liaison glissière entre S1 et S0 sont supposées parfaites, elles ne développent donc pas de puissances virtuelles.

Seuls le poids et l'action du ressort développent de la puissance. Dans les deux cas, on dispose d'une fonction de force :

$$\text{Ressort : } U(S_0 \leftarrow r \rightarrow S1) = -\frac{1}{2} K(X - X_o)^2$$

$$\text{Soit : } Q_X(S_0 \leftarrow r \rightarrow S1) = -K(X - X_o), \quad Q_\theta(S_0 \leftarrow r \rightarrow S1) = 0$$

Pesanteur :

L'axe (O, G1) reste confondu avec x, donc :

$$Q_X \left(\overset{\vec{g}}{\text{pes}} \rightarrow S1/Rg \right) = M1 \cdot \vec{g} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OG_1}}{\partial X} = 0,$$

$$Q_{\theta} \left(\vec{g} \rightarrow S1 / Rg \right) = 0$$

Par ailleurs :

$$Q_{\theta} \left(\vec{g} \rightarrow S2 / Rg \right) = M2 \cdot \vec{g} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OG_2}}{\partial \theta} = -M2 \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta$$

$$Q_X \left(\vec{g} \rightarrow S2 / Rg \right) = 0$$

◇ Calcul des P_{qi} :

L'énergie cinétique du système se calcule comme suit :

$$T(\Sigma / Rg) = T(S1 / Rg) + T(S2 / Rg) + T(S3 / Rg)$$

Avec :

$$T(S1 / Rg) = \frac{1}{2} M1 \cdot \left[\frac{dX}{dt} \right]^2$$

Et :

$$T(S2 / Rg) = \frac{1}{2} M2 \cdot \left(\left[\frac{dX}{dt} \right]^2 + \left[l \cdot \frac{d\theta}{dt} \right]^2 + 2 \frac{dX}{dt} \frac{d\theta}{dt} l \cos \theta \right)$$

Enfin :

$$T(S3 / Rg) = \frac{1}{2} M3 \cdot \left(\left[\frac{dX}{dt} \right]^2 + [R \cdot \omega]^2 + 2 \frac{dX}{dt} \omega \cdot R \cos \omega t \right)$$

$$\text{Par conséquent, comme : } P_{q_i}(S / Rg) = \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} \cdot T(S / Rg)$$

$$P_{\theta}(\Sigma / Rg) = M2 \cdot l \cdot \left(l \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d^2 X}{dt^2} \cos \theta \right)$$

Et

$$P_X(\Sigma / Rg) = M1 \cdot \frac{d^2 X}{dt^2} + M2 \cdot l \cdot \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} \cos \theta - \left[\frac{d\theta}{dt} \right]^2 \sin \theta \right) - M3 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t$$

◇ Equations de Lagrange :

On obtient donc deux équations de Lagrange :

$$\mathcal{L}(X) \rightarrow M1 \cdot \frac{d^2 X}{dt^2} + M2 \cdot l \cdot \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} \cos \theta - \left[\frac{d\theta}{dt} \right]^2 \sin \theta \right) - M3 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t = -K \cdot (X - X_o)$$

$$\mathcal{L}(\theta) \rightarrow M2 \cdot l \cdot \left(l \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d^2 X}{dt^2} \cos \theta \right) = -M2 \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta$$

◇ Equations linéarisées

Pour pouvoir résoudre ce système, on se place en un point (X_i, θ_i) et on fait un développement limité au premier ordre autour de ce point des équations du mouvement obtenues. On rappelle que les développements limités de $\cos \theta$ et $\sin \theta$ autour d'un point θ_i s'écrivent :

$$\cos(\theta_i + \varepsilon) = \cos \theta_i - \varepsilon \sin \theta_i + O(\varepsilon^2)$$

$$\sin(\theta_i + \varepsilon) = \sin \theta_i + \varepsilon \cos \theta_i + O(\varepsilon^2)$$

Pour linéariser, on suppose que les paramètres X et θ sont peu différents de la position de référence (X_i, θ_i) , et par ailleurs, on fait également l'hypothèse que les dérivées temporelles des paramètres du mouvement sont petites devant celles au point de référence. Après linéarisation, les deux équations du mouvement s'écrivent :

$$\text{En posant : } X = X_i + \chi \quad \text{et} \quad \theta = \theta_i + \varepsilon$$

$$\mathcal{L}(X) \rightarrow M1 \cdot \frac{d^2 \chi}{dt^2} + M2.l \cos \theta_i \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + K \cdot \chi = -K(X_i - X_o) + M3.R.\omega^2 \cdot \sin \omega t$$

$$\mathcal{L}(\theta) \rightarrow M2.l \cos \theta_i \frac{d^2 \chi}{dt^2} + M2.l^2 \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + M2.l.g.\varepsilon \cos \theta_i = -M2.g.l \sin \theta_i$$

Le système obtenu peut alors se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$M \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} + K \cdot w + \mathcal{F}(t) = 0$$

Avec :

$$w = \begin{pmatrix} \chi \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M1 & M2.l \cos \theta_i \\ M2.l \cos \theta_i & M2.l^2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & M2.g.l \cos \theta_i \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad \mathcal{F}(t) = \begin{pmatrix} -K(X_i - X_o) + M3.R.\omega^2 \cdot \sin \omega t \\ -M2.g.l \sin \theta_i \end{pmatrix}$$

7.3 Rappels : Résolution de systèmes linéaires d'équations différentielles

Dans le cas général, nous aurons donc à résoudre des systèmes d'équations différentielles linéaires de la forme suivante :

$$M(t, q_o) \frac{d^2 w}{dt^2} + C(t, q_o) \frac{dw}{dt} + K(t, q_o) w = \mathcal{F}(t, q_o)$$

Où w est un vecteur de dimension égale à la mobilité du système m , dont les composantes sont les m variations infinitésimales autour d'une position q_o repérées par m paramètres du mouvement q_i supposés connus à l'instant t . La matrice de masse M est toujours symétrique, définie positive.

Nous distinguerons deux cas. Si les matrices M , C et K sont à coefficients constants le système pourra être résolu analytiquement. Sinon, le problème sera résolu numériquement.

La résolution de systèmes d'équations différentielles linéaires est un problème commun à de nombreuses disciplines, cette partie vise donc essentiellement à donner quelques rappels rapides sur les différentes techniques à employer selon les cas rencontrés.

n.b. En mécanique du solide indéformable, dans le cas où l'on applique une procédure de résolution numérique, il vaut mieux paramétrer les rotations à l'aide des coordonnées des quaternions plutôt qu'à l'aide d'angles de rotations.

7.3.1 Résolution numérique.

On considère un système d'équations différentielles linéaires de dimension n . Dans ce cas, nous supposons connues à un instant donné t , toutes les caractéristiques du mouvement, et nous cherchons à les déterminer à l'instant $t+h$. h étant le pas de temps choisi. Divers algorithmes de résolution numériques existent, qui ne sont pas l'objet de ce cours. On donne juste ici un aperçu des méthodes les plus courantes. Les méthodes les plus employées sont les méthodes du point milieu et de Runge-Kutta. Pour appliquer ces méthodes, il faut transformer le système d'équations différentielles linéaires du second ordre de dimension n en un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre de dimension $2n$. On pose un vecteur y dont les composantes à l'instant t sont, les n paramètres du mouvement et les n vitesses de variation de ces paramètres :

$$y = \begin{pmatrix} w \\ dw/dt \end{pmatrix}$$

Alors, M étant inversible, le système : $M \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} + C \frac{dw}{dt} + K \cdot w = \mathcal{F}(t)$ s'écrit maintenant:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}\mathcal{F}(t) \end{pmatrix}$$

Ayant fixé un pas de temps h , on construit alors une suite :

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h \\ y_{i+1} = y_i + m \cdot h \end{cases}$$

Où m est une pente moyenne sur l'intervalle (t_i, t_{i+1}) , si l'on pose :

$$m_1 = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{(t_i, x_i)} \quad m_2 = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} m_1)} \quad m_3 = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} m_2)} \quad m_4 = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{(t_i + h, x_i + h m_3)}$$

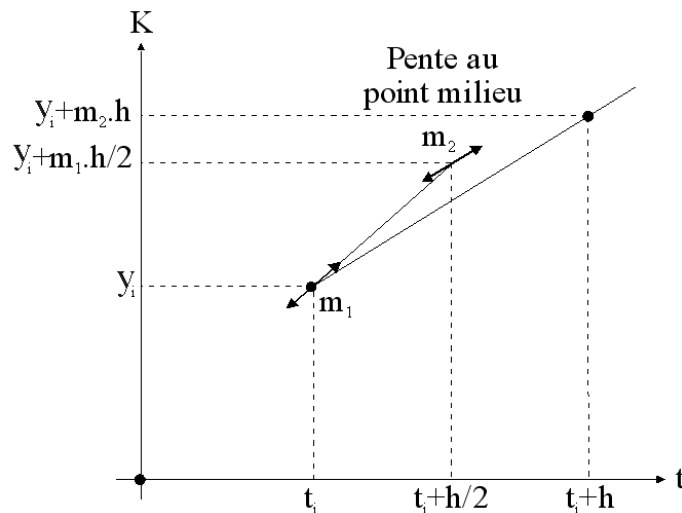


Illustration graphique de la méthode du point milieu

Pour la méthode du point milieu, on choisit $m=m_2$ comme pente moyenne sur l'intervalle (t_i, t_{i+1}) . Cette méthode est illustrée graphiquement ci-dessus.

Pour la méthode de Runge Kutta (plus précise), la pente moyenne sur l'intervalle (t_i, t_{i+1}) se calcule comme suit:

$$m = \frac{1}{6} (m_1 + 2.m_2 + 2.m_3 + m_4)$$

7.3.2 Résolution analytique

Un système d'équations différentielles du second ordre à coefficients constants, et dont le second membre est périodique et ne dépend que du temps, peut, dans certains cas, être résolu de manière analytique :

$$M \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} + C \frac{dw}{dt} + K \cdot w = \mathcal{F}(t)$$

M, C et K sont des matrices carrées de dimension $m \times m$ où m est la mobilité du système, w un vecteur inconnu de dimension m et $\mathcal{F}(t)$ un vecteur connu de dimension m . La matrice M est inversible.

◇ *Cas N°1 : Le second membre $\mathcal{F}(t)$ est nul.*

Le système s'écrit alors :

$$M \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} + C \frac{dw}{dt} + K \cdot w = 0$$

On cherche des solutions de la forme : $w(t) = r \cdot e^{\omega t}$, où r est un vecteur de dimension m , et où ω est un nombre complexe. Etant donné que $e^0 = I$, le vecteur r contient les valeurs initiales des paramètres du mouvement. Il reste à déterminer ω .

En remplaçant dans l'équation différentielle ci-dessus il vient :

$$\left. \begin{aligned} M \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} + C \frac{dw}{dt} + K \cdot w &= 0 \\ w(t) &= r \cdot e^{\omega t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (M \cdot \omega^2 + C \cdot \omega + K) r \cdot e^{\omega t} = 0$$

En dehors de la solution triviale $r=0$, on a des solutions à cette équation à condition que :

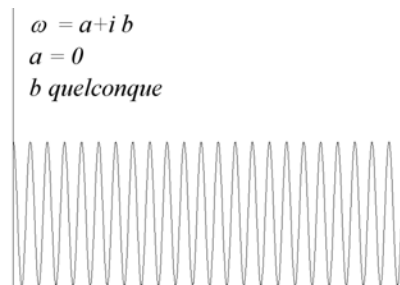
$$\Delta = D(\omega) = \text{Det}(M \cdot \omega^2 + C \cdot \omega + K) = 0$$

Cette équation, dite équation caractéristique, est un polynôme de degré $2 \cdot m$, où m est la mobilité du système. Elle admet donc $2 \cdot m$ racines (distinctes ou non) qui sont soit réelles, soit complexes conjuguées. On obtient l'ensemble des fonctions à valeurs réelles solution du système en prenant les parties réelles des solutions complexes conjuguées. Trois cas particuliers se présentent :

- Solution imaginaire pure : $\omega = i b$: b réel.

La solution est alors une solution périodique de type $\cos(bt)$.

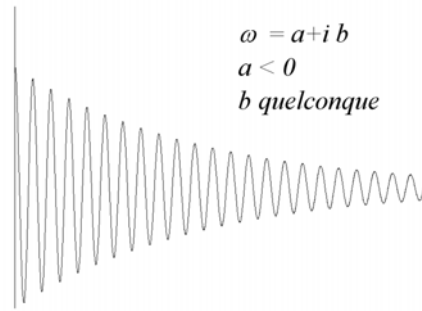
Cette solution est compatible avec l'hypothèse de petits mouvements qui est sous-jacente à l'opération de linéarisation.



- Solution à partie réelle négative : $\omega = a + i b$, avec a et b réels et $a < 0$.

La solution est alors une fonction composée de type : $e^{at} \cdot \cos(bt)$ avec $a < 0$.

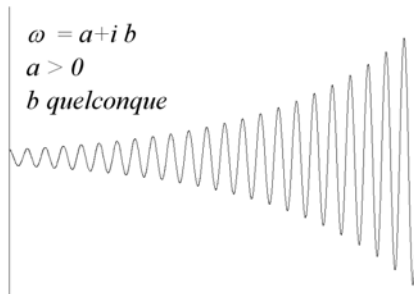
Cette fonction est décroissante cycliquement et reste également compatible avec l'hypothèse des petits mouvements.



- Solution à partie réelle positive : $\omega = a + i b$, avec a et b réels, $a > 0$.

La solution est alors une fonction composée de type : $e^{a t} . \cos(b t)$ avec $a > 0$.

Cette fonction croît cycliquement de manière exponentielle et conduit donc à des mouvements qui deviennent rapidement incompatibles avec l'hypothèse des petits mouvements, qui a permis d'établir le système d'équations différentielles linéaires étudié.



L'étude du signe de la partie réelle des solutions de l'équation caractéristique est donc primordiale pour juger de la stabilité de la validité de la solution obtenue. Le critère de Routh qui est donné plus loin permet de discuter du signe des parties réelles des solutions de l'équation caractéristique sans résoudre cette équation.

◇ Cas N°2 : Le second membre $\mathcal{F}(t)$ est nul et C est nulle.

Le système s'écrit alors :

$$M . \frac{d^2 w}{dt^2} + K . w = 0$$

Comme précédemment le système admet des solutions de la forme $w(t) = r . e^{\omega t}$, où ω est cette fois ci imaginaire pur, $\omega = i . b$, avec b réel, et où r est un vecteur de dimension m contenant les valeurs initiales des paramètres du mouvement. Les solutions de l'équation caractéristique $\text{Det}(M . b^2 - K) = 0$ sont appelées les pulsations propres du système. On obtient m solutions imaginaires pures conjuguées.

Comme les matrices M et K sont symétriques définies positives, et compte tenu des solutions trouvées, le système linéaire peut être réécrit de la façon suivante :

$$M^{-1} K . w(t) = b^2 . w(t)$$

Les solutions cherchées sont donc des vecteurs propres de la matrice $D = M^{-1} K$, c'est-à-dire que les solutions w sont telles que : $D . w = \lambda . w$, avec ici $\lambda = b^2$ réel et positif. Les vecteurs propres sont aussi appelés « modes propres ».

On peut donc définir une base propre à partir des vecteurs propres de la matrice D , et une matrice de rotation Q constituée de ces vecteurs propres : $Q = (w_1, \dots, w_m)$. Si x est un vecteur exprimé dans la base propre, x est solution si :

$$\lambda x(t) = Q^T . D . Q x(t) \quad \text{où} \quad Q^T . D . Q \text{ est diagonale}$$

Cette propriété implique que, écrites dans la base propre, les équations du mouvement sont complètement découplées. Ce qui se dit aussi plus succinctement : « les modes propres sont découplés ».

Toutes les combinaisons linéaires de modes propres sont également solutions. Une combinaison linéaire de modes propres se définit à l'aide de ses « coordonnées modales » dans la base propre.

◇ *Cas N°3 : Le second membre $\mathcal{F}(t)$ est non-nul et C est nulle.*

Le système s'écrit alors :

$$M \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} + K \cdot w = \mathcal{F}(t)$$

Un moyen simple de résoudre un tel système est de le projeter dans la base des modes propres du système sans second membre, défini par la matrice Q (voir Cas N°2).

Alors on obtient un système de m équations du mouvement découplées, de la forme suivante, où ε est un vecteur de la base modale :

$$Q^T \cdot M \cdot Q \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + Q^T \cdot K \cdot Q \cdot \varepsilon = Q^T \cdot \mathcal{F}(t)$$

On note alors la $i^{\text{ème}}$ équation à résoudre : $m_i \cdot \ddot{\varepsilon}_i + k_i \cdot \varepsilon_i = f_i(t)$

Chaque équation se résout indépendamment en cherchant des solutions du type :

$$\varepsilon_i = a_i \cdot \cos(\omega_i t + \varphi_i) + \varepsilon_{ip}(t) \quad \text{avec} \quad \omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}$$

Où ε_{ip} est une solution particulière et ω_i la pulsation propre associée au $i^{\text{ème}}$ mode propre.

Si le second membre $f_i(t)$ est périodique de pulsation ω , on peut le décomposer en séries de Fourier, et le système s'écrit alors :

$$m_i (\ddot{\varepsilon}_i + \omega_i^2 \cdot \varepsilon_i) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{i \cdot n \cdot \omega_i \cdot t}$$

Dans le cas le plus simple, où la fonction est sinusoïdale :

$$m_i (\ddot{\varepsilon}_i + \omega_i^2 \cdot \varepsilon_i) = C_f \cdot \cos(\omega_f t + \varphi_f)$$

La solution de cette équation est alors la suivante, a_i et φ_i se déterminent à l'aide des valeurs initiales :

$$\varepsilon_i(t) = a_i \cdot \cos(\omega_i t + \varphi_i) + \frac{C_f \cdot \cos(\omega_f t + \varphi_f)}{m_i (\omega_i^2 - \omega_f^2)}$$

Cette solution présente une singularité pour $\omega_i = \omega_f$, qu'on appelle une résonance

◇ *Cas N°4 : Le second membre $\mathcal{F}(t)$ est nul et C est une combinaison linéaire de M et K .*

Le système s'écrit alors, avec a et b deux scalaires réels :

$$M \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} + (a \cdot M + b \cdot K) \frac{dw}{dt} + K \cdot w = 0$$

Ce système s'écrit aussi :

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + (aI + b \cdot M^{-1} K) \frac{dw}{dt} + M^{-1} K \cdot w = 0$$

Les vecteurs propres de $D = M^{-1}K$ sont encore vecteurs propres de combinaisons linéaires quelconques de D et de l'identité, donc le système est toujours découpé une fois projeté dans la base modale du système suivant :

$$M \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} + K \cdot w = 0$$

Après projection le système s'écrit comme suit :

$$Q^T M Q \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + Q^T (aM + bK) Q \frac{d \varepsilon}{dt} + Q^T K Q \varepsilon = 0$$

Il reste alors à résoudre m équations différentielles découplées, du type :

$$\ddot{\varepsilon}_i + \frac{c_i}{m_i} \dot{\varepsilon}_i + \omega_i^2 \varepsilon_i = 0$$

La solution de chacune de ces équations s'écrit comme suit :

$$\varepsilon_i(t) = e^{-d_i t} \operatorname{Re} \left[a e^{-t \sqrt{d_i^2 - \omega_i^2}} + b e^{t \sqrt{d_i^2 - \omega_i^2}} \right] \quad \text{avec} \quad d_i = \frac{c_i}{2m_i}$$

Ceci correspond en général à une solution sinusoïdale amortie.

◇ Critère de Routh

Le critère de Routh permet de discuter du signe des parties réelles des solutions d'une équation algébrique à coefficients réels, sans résoudre cette équation.

Supposons une équation, telle que $a_0 > 0$:

$$a_n \cdot y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + a_{n-2} \cdot y^{n-2} + \dots + a_1 \cdot y + a_0 = 0$$

Les solutions de cette équation sont soit réelles, soit complexes conjuguées. On construit alors le tableau suivant, par « déterminant » successifs, jusqu'à n'avoir que des zéros en bas de chacune des colonnes.

y^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-6}	...	a_0
y^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...	0
y^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	...	
y^{n-3}	c_{n-3}	c_{n-5}	...		
...		
y	...	0			
1	P_{n+1}				

Avec

$$b_{n-2} = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \quad b_{n-4} = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \quad b_{n-6} = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

$$c_{n-3} = \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix}}{b_{n-2}} \quad c_{n-5} = \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-2} & b_{n-6} \end{vmatrix}}{b_{n-2}}, \text{ etc } \dots$$

Le nombre de solutions à partie réelle positive de l'équation testée est égal au nombre de changement de signes dans la suite $(a_n, a_{n-1}, b_{n-2}, c_{n-3}, \dots, P_{n+1})$.

Exemple :

Ensemble de solutions : $s_1 = -5 + 3i$, $s_2 = -5 - 3i$, $s_3 = 4$, $s_4 = -8 + 2i$, $s_5 = -8 - 2i$

Equation : $\prod_{i=1}^5 (y - si) = y^5 + 22y^4 + 158y^3 + 176y^2 - 2584y - 9248 = 0$

Construction du tableau de Routh :

y^5	1	158	-2584
y^4	22	176	-9248
y^3	150	-2163	0
y^2	493	-9248	0
y	648	0	
1	-9248	0	

Un seul changement de signe, une seule solution à partie réelle positive. (ici $s_3=4$)

◇ *Rappel : Calcul du déterminant d'une matrice*

Pour une matrice 2×2 , on montre que la matrice inverse est donnée par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Le nombre $ad - bc$ est appelé *déterminant* de la matrice \mathbf{A} , noté :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A})$$

La matrice inverse \mathbf{A}^{-1} n'existe donc que si $\det \mathbf{A}$ est différent de zéro.

La matrice \mathbf{A} est singulière si $\det \mathbf{A} = 0$, régulière dans le cas contraire. Ce résultat se généralise à une matrice de dimension quelconque.

Le déterminant peut se calculer de manière récursive. Par exemple, pour $n = 3$, on a, en développant par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

$$= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

Dans ce développement, chaque déterminant d'ordre 2 est appelé *mineur* du terme qui le précède. Par exemple, le mineur de a est :

$$\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne. Pour chaque élément a_{ij} de la ligne ou colonne choisie :

L mineur est le déterminant de la sous-matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j

Le signe du produit est donné par le tableau ci-dessous :

+	-	+
-	+	-
+	-	+

◇ *Rappel : Matrice 2x2 valeurs propres, vecteurs propres*

Matrice 2x2 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Déterminant $-a_{12} a_{21} + a_{11} a_{22}$

Valeurs Propres $\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(a_{11} + a_{22} - \sqrt{a_{11}^2 + 4 a_{12} a_{21} - 2 a_{11} a_{22} + a_{22}^2} \right)$

$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(a_{11} + a_{22} + \sqrt{a_{11}^2 + 4 a_{12} a_{21} - 2 a_{11} a_{22} + a_{22}^2} \right)$

Vecteurs Propres $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{-a_{11} + a_{22} + \sqrt{a_{11}^2 + 4 a_{12} a_{21} - 2 a_{11} a_{22} + a_{22}^2}}{2 a_{21}} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{-a_{11} + a_{22} - \sqrt{a_{11}^2 + 4 a_{12} a_{21} - 2 a_{11} a_{22} + a_{22}^2}}{2 a_{21}} \\ 1 \end{pmatrix}$

Equilibre et stabilité

7.4 Equilibre et Stabilité

7.4.1 Introduction

L'objectif de cette partie est de présenter diverses méthodes permettant de définir et d'étudier la stabilité d'une position d'équilibre. Deux méthodes peuvent être envisagées.

La méthode directe, qui s'appuie sur le théorème de Lejeune-Dirichlet, permet de définir les positions d'équilibre indépendamment des équations du mouvement. Cette méthode est bien adaptée aux systèmes dont les forces dérivent d'un potentiel indépendant du temps.

La méthode générale, consiste à écrire les équations du mouvement linéarisées au voisinage des positions d'équilibre ce qui permet de discuter de leur stabilité.

7.4.2 Systèmes conservatifs

Si les puissances des efforts intérieurs et extérieurs sont nulles ou bien se calculent par dérivation d'une énergie potentielle qui ne dépend pas du temps, dont on notera la somme $E_p(\Sigma/Rg)$, alors l'intégrale première de l'énergie cinétique traduit directement la conservation de l'énergie du système :

$$T(\Sigma / Rg) + E_p(\Sigma / Rg) = \text{Constante}$$

Le système est alors dit « conservatif ». L'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique et réciproquement au cours du mouvement.

Les équations de Lagrange pour un système conservatif, donnent :

$$P_{q_i}(S / Rg) = Q_{q_i}(\bar{S} \rightarrow S / Rg)$$

$$\text{Avec } P_{q_i}(S / Rg) = \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} T(S / Rg) \text{ et } Q_{q_i}(\bar{S} \rightarrow S / Rg) = \frac{\partial U \left(S \xrightarrow{(*)} S / Rg \right)}{\partial q_i}$$

Soit :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] T(S / Rg) - \frac{\partial}{\partial q_i} (T + U) = 0$$

Et comme, pour un système conservatif, la fonction de force U ne dépend que des paramètres de position q_i :

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} (T + U) = 0$$

On définit alors la fonction L, dite Lagrangien du système, telle que : $L = T + U$

Alors les équations de Lagrange, pour un système conservatif s'écrivent aussi :

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} L = 0$$

◇ Equilibre

Les positions d'équilibre sont telles que les paramètres du mouvement restent constants. Dans cette configuration, l'énergie cinétique est nulle et les dérivées par rapport au temps sont nulles.

On déduit alors des équations de Lagrange, pour toute position d'équilibre :

$$\forall i \in (1, n) \rightarrow \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} L = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial L}{\partial q_i} \right|_{q=q_e} = 0$$

Et comme, à l'équilibre, l'énergie cinétique est nulle, ceci équivaut à écrire :

$$\forall i \in (1, n) \rightarrow \left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{q=q_e} = 0 \Leftrightarrow \left. \frac{\partial E_p}{\partial q_i} \right|_{q=q_e} = 0$$

Les positions d'équilibre sont donc obtenues pour les extremums (maximums, minimums ou points d'inflexion locaux) de la fonction de force U ou de l'énergie potentielle Ep.

◇ Stabilité : Définition

Une position d'équilibre d'un système matériel est dite stable si le mouvement induit par une perturbation (conditions initiales en vitesse et en position très petites) reste au voisinage de cette position.

◇ Stabilité : Théorème de Lejeune Dirichlet

D'après l'intégrale première du théorème de l'énergie cinétique, pour un système conservatif Σ , nous pouvons écrire :

$$T(\Sigma / Rg)_{t_0} + E_p(\Sigma / Rg)_{t_0} = T(\Sigma / Rg)_t + E_p(\Sigma / Rg)_t = \text{Constante}$$

Supposons que l'énergie potentielle présente un minimum local strict dans la position d'équilibre étudiée. Comme l'énergie potentielle est définie à une constante près, on peut choisir une expression de cette énergie potentielle telle que le minimum local de l'énergie potentielle soit nul dans la position d'équilibre étudiée.

Si l'on choisit une petite perturbation, telle que à to :

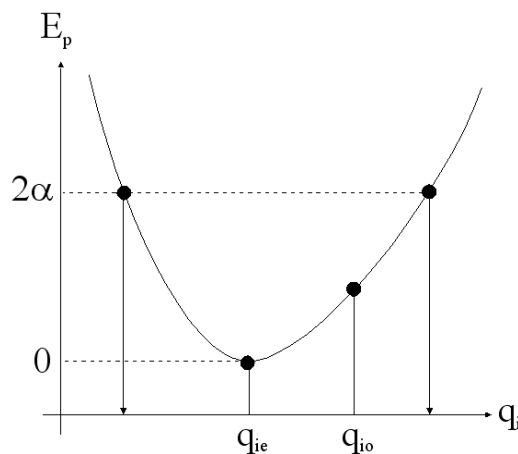
$$T(\Sigma / Rg)_{t_0} \leq \alpha \quad \text{et} \quad E_p(\Sigma / Rg)_{t_0} \leq \alpha \quad \text{soit} \quad T(\Sigma / Rg)_{t_0} + E_p(\Sigma / Rg)_{t_0} \leq 2\alpha$$

α étant très petit.

Comme à tout instant : $0 \leq T(\Sigma / Rg)_t$ et $0 \leq E_p(\Sigma / Rg)_t$

On en déduit que par la suite, à tout instant : $0 \leq T(\Sigma / Rg)_t \leq 2\alpha$ et $0 \leq E_p(\Sigma / Rg)_t \leq 2\alpha$

- Comme l'énergie potentielle ne dépend que de la position, $0 \leq E_p(\Sigma / Rg)_t \leq 2\alpha$, signifie que tous les $|q_i - q_{ie}|$ restent très petits.
- Comme dans un système conservatif, l'énergie cinétique est une forme quadratique des vitesses de variation des paramètres du mouvement, (les liaisons sont indépendantes du temps), alors : $0 \leq T(\Sigma / Rg)_t \leq 2\alpha$ signifie que les $\left| \frac{dq_i}{dt} \right|$ restent également très petits.
- La position d'équilibre est donc stable.



Théorème de Lejeune Dirichlet :

Etant donné un système conservatif, tout maximum local strict de la fonction de force (tout minimum local strict de l'énergie potentielle), définit une position d'équilibre stable.

Pour un système conservatif, la recherche des positions d'équilibre et l'étude de leur stabilité peut donc se faire directement à l'aide de l'énergie potentielle du système, sans qu'il soit besoin d'écrire complètement les équations du mouvement.

◇ Extension aux systèmes visqueux

On considère le cas particulier où le système développe une résistance passive opposée à la vitesse (force visqueuse, traînée aérodynamique).

Les équations de Lagrange pour un tel système, donnent toujours :

$$P_{q_i}(S/R_g) = Q_{q_i}(\bar{S} \rightarrow S/R_g)$$

$$\text{Avec } P_{q_i}(S/R_g) = \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} \cdot T(S/R_g) \text{ et : } Q_{q_i}(\bar{S} \rightarrow S/R_g) = \frac{\partial U}{\partial q_i} + \bar{R} \left\{ \mathcal{T} \left(\bar{S} \xrightarrow{\text{visq}} S \right) \right\} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \vec{V}(P/R_g).$$

En tenant compte de la nature visqueuse de la résistance passive :

$$Q_{q_i}(\bar{S} \rightarrow S/R_g) = \frac{\partial U}{\partial q_i} - C_v \vec{V}(P/R_g) \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \vec{V}(P/R_g)$$

En définissant alors la fonction L, dite Lagrangien du système, telle que : $L = T + U$; les équations de Lagrange, pour un système visqueux s'écrivent alors :

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} L = -C_v \vec{V}(P/R_g) \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \vec{V}(P/R_g)$$

Dans toute position d'équilibre la vitesse est nulle et le second membre de cette équation est donc nul également, ce qui nous ramène au cas précédent pour la détermination des positions d'équilibres.

Pour un système visqueux, les positions d'équilibre correspondent encore aux extremums de la fonction de force du système.

Pour l'étude de la stabilité, on peut encore appliquer le théorème de Lejeune Dirichlet. En effet, d'après le principe de conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt} + P_{visq}$$

Entre deux instants t et t_0 on peut toujours écrire :

$$\int_{t_0}^t \frac{dT}{dt} dt = \int_{t_0}^t \frac{dU}{dt} dt + \int_{t_0}^t \frac{P_{visq}}{dt} dt \text{ soit } T_t - T_{t_0} = U_t - U_{t_0} + W_{visq}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$T(\Sigma/R_g)_{t_0} + E_p(\Sigma/R_g)_{t_0} + W_{visq} = T(\Sigma/R_g)_t + E_p(\Sigma/R_g)_t$$

avec dans tous les cas $W_{visq} < 0$

Si, comme précédemment, on choisit une petite perturbation α , telle que à t_0 :

$$T(\Sigma/R_g)_{t_0} \leq \alpha \text{ et } E_p(\Sigma/R_g)_{t_0} \leq \alpha \text{ soit } T(\Sigma/R_g)_{t_0} + E_p(\Sigma/R_g)_{t_0} \leq 2\alpha$$

Comme à tout instant : $0 \leq T(\Sigma/R_g)_t \text{ et } 0 \leq E_p(\Sigma/R_g)_t$

On en déduit que par la suite, à tout instant :

$$0 \leq T(\Sigma/R_g)_t \leq 2\alpha + W_{visq} \text{ et } 0 \leq E_p(\Sigma/R_g)_t \leq 2\alpha + W_{visq}$$

Donc W_{visq} étant négative, la position d'équilibre est encore stable.

◇ *Equilibre et stabilité pour un système à un seul paramètre*

La position d'équilibre est un aussi un minimum local si :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q=q_e} = 0 \text{ et } \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=q_e} < 0$$

◇ *Equilibre et stabilité pour un système à n paramètres*

La position q_e est une position d'équilibre si :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{q=q_e} = 0 \quad \forall i$$

Cette position d'équilibre est stable si la matrice $\left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=q_e} = a_{ij}$ est à valeurs propres toutes négatives.

Il est généralement plus simple de procéder à un développement limité à l'ordre 2 de la fonction de force U au voisinage de la position d'équilibre. Soit :

$$U = U_{q=q_e} + \sum_{i=1}^n (q_i - q_{i_e}) \left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{q=q_e} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (q_j - q_{j_e}) (q_i - q_{i_e}) \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=q_e}$$

Or la condition d'équilibre impose : $\left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{q=q_e} = 0 \quad \forall i$

Donc le développement limité s'écrit :

$$U = U_{q=q_e} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (q_j - q_{j_e}) (q_i - q_{i_e}) \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=q_e}$$

Pour que la position d'équilibre soit stable, il suffira alors que dans tous les cas :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (q_j - q_{j_e}) (q_i - q_{i_e}) \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=q_e} < 0$$

◇ *Exemple, étouffeur de vibration*

Si l'on revient au cas de l'étouffeur de vibration déjà vu plus haut. Dans le cas où, la vitesse de rotation ω du balourd est nulle, on peut chercher des positions d'équilibre à l'aide du théorème de Lejeune Dirichlet étant donné que toutes les forces dérivent d'un potentiel. On peut alors écrire pour le système complet :

$$Q_X(\text{int}) = -K(X - X_0) = \frac{\partial U_{\text{ressort}}}{\partial X}$$

$$Q_\theta(\text{int}) = -M_2 \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta = \frac{\partial U_{\text{pesanteur}}}{\partial \theta}$$

Les positions d'équilibre sont telles que $Q_{\text{int}}=0$ soit : $X = X_0$ et $\sin \theta = 0$

Il existe donc deux positions d'équilibre, l'une pour laquelle la masse M_2 est en haut ($\theta=\pi$) et l'autre pour laquelle elle est en bas ($\theta=0$)

$$\text{Alors : } a_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = -K \quad a_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -M_2 \cdot g \cdot l \cdot \cos \theta \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial X} = 0$$

En appliquant le critère précédent, la position d'équilibre est donc stable si :

est une matrice à valeurs propres négatives. Ce qui impose que :

$$a_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = -K < 0, \text{ ce qui est toujours vrai}$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -M_2 \cdot g \cdot l \cdot \cos \theta < 0 \quad \text{ce qui implique que } \cos \theta \text{ soit positif.}$$

Comme on l'attendait, seule la position $\theta=0$ est stable, c'est-à-dire celle pour laquelle la masse M_2 est en bas.

7.4.3 Cas général, méthode directe ou méthode de Liapounov

Dans le cas général, la méthode décrite ci-dessus ne permet pas de déterminer les positions d'équilibre. En effet, en absence de potentiel par exemple, la méthode de Lejeune Dirichlet ne pourra pas être appliquée. On appliquera donc la méthode directe.

◇ *Etat de mouvement*

Si l'on considère un système mécanique à n paramètres q_i , l'état du mouvement de ce système est défini par une solution connue du système différentiel formé par les équations du mouvement :

$$q_i = q_i(t) \quad \forall i = 1, n$$

○ *Equilibre :*

C'est une solution particulière pour laquelle tous les paramètres sont constants.

$$\dot{q}_i = \ddot{q}_i = 0 \quad \forall i = 1, n$$

○ *Mouvement stationnaire :*

C'est un problème plus général pour lequel, certains paramètres du mouvement sont constants, tandis que d'autres voient leur vitesse de variation rester constante. Ce type de mouvement est fréquemment rencontré lors de l'étude du fonctionnement de machines en régime permanent.

$$q_i(t) = cst \quad \forall i = 1, j \text{ et } \dot{q}_i(t) = cst \quad \forall i = j, n$$

◇ *Détermination de l'équilibre par la méthode directe*

Dans le cas général, on écrit les équations du mouvement et on cherche directement les positions telles que les paramètres du mouvement correspondant à l'état du mouvement étudié restent constants. S'il s'agit d'un équilibre on remplace \dot{q}_i et $\ddot{q}_i \quad \forall i = 1, n$ par zéro, dans les équations du mouvement, et on cherche une solution qui vérifiant le système d'équation restant.

◇ *Stabilité au sens de Liapounov*

Soit $(q(t), \dot{q}(t))$ et $(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t))$ deux états du mouvement distinct provenant de conditions initiales $(q_o(t), \dot{q}_o(t))$ et $(\tilde{q}_o(t), \dot{\tilde{q}}_o(t))$ très légèrement différentes. On dira que le mouvement est stable si :

$$\forall \lambda \text{ tel que } \begin{cases} |q_{io} - \tilde{q}_{io}| < \lambda \\ |\dot{q}_{io} - \dot{\tilde{q}}_{io}| < \lambda \end{cases} \text{ il existe } \varepsilon \text{ tel que } \begin{cases} |q_i(t) - \tilde{q}_i(t)| < \varepsilon \\ |\dot{q}_i(t) - \dot{\tilde{q}}_i(t)| < \varepsilon \end{cases} \text{ avec } t > 0.$$

On peut aussi exprimer la condition de stabilité de manière globale à l'aide d'une fonction écart qui doit rester petite :

$$r^2 = \sum_i (q_i(t) - \tilde{q}_i(t))^2 + \sum_i (\dot{q}_i(t) - \dot{\tilde{q}}_i(t))^2$$

◇ Théorème de Liapounov

Dans le cas général, lorsqu'on a un équilibre au sens strict du terme, on étudie sa stabilité en linéarisant les équations du mouvement autour de la position d'équilibre étudiée. On aboutit alors à un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, qui peut être résolu analytiquement :

$$M \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} + C \frac{dw}{dt} + K \cdot w = \mathcal{F}(t)$$

L'oscillateur linéaire L associé à ce système est alors le suivant :

$$M \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} + C \frac{dw}{dt} + K \cdot w = 0$$

On cherche des solutions de la forme : $w(t) = r \cdot e^{\omega t}$ où les pulsations propres ω sont solutions de l'équation caractéristique du système :

$$\Delta = D(\omega) = \text{Det}(M \cdot \omega^2 + C \cdot \omega + K) = 0$$

Théorème de Liapounov :

Soit L l'oscillateur linéaire associé au système mécanique étudié et à la position d'équilibre So . Si toutes les racines de l'équation caractéristique de L ont leur partie réelle négative alors So est stable. Si l'une au moins a sa partie réelle positive alors So est instable. Si l'une au moins des solutions a sa partie réelle nulle, on ne peut pas conclure.

◇ Stabilité asymptotique

En considérant les mêmes états du mouvement que dans le paragraphe précédent, on dira que le système présente une stabilité asymptotique si :

$$\begin{cases} |q_i(t) - \tilde{q}_i(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \\ |\dot{q}_i(t) - \dot{\tilde{q}}_i(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

◇ Stabilité orbitale

Si l'on considère deux points d'origine très voisins dans un système de solides, le système reste stable si :

$$\left\| \overrightarrow{MM^*}(t_o) \right\| < \lambda \Rightarrow \left\| \overrightarrow{MM^*}(t) \right\| < \varepsilon \quad \forall t$$

Si l'on considère par exemple deux satellites tournant sur des orbites très proches mais avec des périodes différentes. Si les deux satellites sont très voisins à l'instant t_o , la différence des périodes peut entraîner des écarts importants lorsque t augmente.

Vibrations autour d'une position d'équilibre stable

7.5 Vibrations

7.5.1 Introduction

Pour un système donné, si des positions d'équilibre stables ont été identifiées, on peut s'intéresser aux petits mouvements autour de ces positions d'équilibre.

L'étude des petits mouvements se fait à l'aide des équations du mouvement linéarisées, qui ont la forme suivante dans le cas général :

$$M(t, q_o) \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} + C(t, q_o) \cdot \frac{dw}{dt} + K(t, q_o) \cdot w = \mathcal{F}(t, q_o)$$

Lorsque les mouvements du système sont de petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable $q_0 = q_e$, alors les matrices M , C et K ne dépendent plus du temps.

$$M(q_e) \frac{d^2 w}{dt^2} + C(q_e) \frac{dw}{dt} + K(q_e) w = \mathcal{F}(t, q_e)$$

Seul le second membre est susceptible de dépendre du temps. On se trouve alors dans le cas de systèmes linéaire d'équations différentielles à coefficients constants, qui peuvent être résolus de manière analytiques.

7.5.2 Vibrations libres

Lorsque le second membre de cette équation est nul, que la matrice C est nulle et que K est symétrique définie positive. Le système est un oscillateur libre :

$$M(q_e) \frac{d^2 w}{dt^2} + K(q_e) w = 0$$

Les solutions sont des combinaisons linéaires de vecteurs $w(t)$ sinusoïdaux, appelées modes propres, qui sont les vecteurs propres de la matrice $M^{-1}K$, multipliés par $\cos(\omega t)$, où ω^2 est la valeur propre correspondante.

7.5.3 Vibrations forcées

Lorsque le second membre est non nul et périodique de pulsation ω_f , que la matrice C est nulle et que K est symétrique définie positive, on parle alors de vibrations forcées.

$$M(q_e) \frac{d^2 w}{dt^2} + K(q_e) w = \mathcal{F}(t)$$

Les solutions de ce système d'équations, sont des combinaisons linéaires de modes propres plus une solution particulière, qui présente des singularités en $\omega_f = \omega_i$ où les ω_i sont les pulsations propres du système.

7.5.4 Vibrations amorties

Lorsque le second membre est nul, que la matrice C est une combinaison linéaire quelconque de M et K , on parle alors de vibrations amorties.

$$M(q_e) \frac{d^2 w}{dt^2} + C(q_e) \frac{dw}{dt} + K(q_e) w = 0$$

Projetée dans la base définie par les vecteurs propres de la matrice $M^{-1}K$, le système est alors complètement découplé. Et les solutions sont des combinaisons linéaires de solution du type suivant :

$$\varepsilon_i(t) = e^{-d_i t} \operatorname{Re} \left[a e^{-t \sqrt{d_i^2 - \omega_i^2}} + b e^{t \sqrt{d_i^2 - \omega_i^2}} \right] \quad \text{avec} \quad d_i = \frac{c_i}{2m_i}$$

Ceci correspond en général à une solution sinusoïdale amortie.

Mécanique des Chocs-Percussions

7.6 Chocs et Percussions

7.6.1 Introduction

Lorsque deux solides entrent en contact au cours de leur mouvement, il se produit ce que l'on appelle un « choc ».

On s'intéresse à l'état du mouvement juste avant (instant t_1) et juste après (instant t_2) le choc, t_1 et t_2 étant très proches, de l'ordre de un centième à un millième de secondes. Pendant cet intervalle de temps, la position d'un point M a très peu changé, tandis que sa vitesse a subi une forte variation. Si l'on confond les instants t_1 et t_2 , on

parlera alors d'une discontinuité du vecteur vitesse. De ce fait les techniques de calcul exposées plus haut ne pourront pas être appliquées.

L'analyse précise du choc, c'est-à-dire de ce qui se passe entre les instants t_1 et t_2 , est un problème très complexe. Lorsque M arrive au contact avec l'obstacle, il se produit des déformations locales qui dépendent de la nature des matériaux en présence, de la vitesse d'impact, de la nature des surfaces... Elle nécessite une étude complète en mécanique des milieux continus, en viscoplasticité et en dynamique et avec établissement et perte de contact, ce qui reste un problème difficile à traiter.

En mécanique des solides on cherche une modélisation simplifiée permettant, si l'on connaît l'état du mouvement avant le choc de déterminer l'état du mouvement après le choc.

7.6.2 Cas d'un point matériel

En l'absence de choc, le principe fondamental de la dynamique s'écrit dans un repère Galiléen R_g , pour un point matériel M de masse m :

$$m.\vec{\Gamma}(M / R_g) = \vec{F}_{ext}$$

En intégrant entre deux instants t_1 et t_2 , il vient :

$$m.\vec{V}(t_2, M / R_g) - m.\vec{V}(t_1, M / R_g) = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \vec{F}_{ext}.dt$$

Le second membre de cette équation est appelé l'impulsion intégrée du vecteur F_{ext} pendant l'intervalle de temps $(t_2 - t_1)$. Lorsque la limite de ce second membre, lorsque l'intervalle de temps tend vers zéro, est un vecteur fini non nul, on parle alors de percussion. Ceci correspond physiquement à l'application d'une force très grande pendant un temps très court, du type « Dirac ».

$$\vec{P} = \lim_{(t_2 - t_1) \rightarrow 0} \int_{t=t_1}^{t=t_2} \vec{F}_{ext}.dt$$

On retrouve alors la discontinuité du vecteur vitesse, à l'instant t , que l'on note de la manière suivante :

$$m.\vec{V}(t^+, M / R_g) - m.\vec{V}(t^-, M / R_g) = \llbracket m.\vec{V}(t, M / R_g) \rrbracket_t = \vec{P}$$

Par définition \vec{P} est appelée le vecteur-percussion à l'instant du choc. Sa dimension physique est $M.L.T^{-1}$. Si le vecteur percussion est donné, il détermine complètement la discontinuité du vecteur vitesse lors du choc.

7.6.3 Cas d'un solide ou d'un système de solides

Pour un système de solides Σ , le principe fondamental de la dynamique postule que, il existe au moins un repère R_g appelé repère Galiléen, le torseur dynamique de Σ dans son mouvement par rapport à R_g est égal au torseur des actions mécaniques extérieures à Σ . Ce qui se note :

$$\{\mathcal{D}(\Sigma / R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)\}$$

Soit m la masse et G le centre d'inertie du système matériel Σ en mouvement par rapport au référentiel galiléen R_g . On a alors :

$$\{\mathcal{D}(\Sigma / R_g)\} = \left\{ \begin{matrix} m.\vec{\Gamma}(t, G / R_g) \\ \vec{\sigma}_G(t, \Sigma / R_g) \end{matrix} \right\} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \\ \vec{M}_G(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \end{matrix} \right\}$$

En intégrant comme précédemment entre deux instants t_1 et t_2 on obtient :

$$\left\{ \begin{matrix} m.\left(\vec{V}(t_2, G / R_g) - \vec{V}(t_1, G / R_g)\right) \\ \vec{\sigma}_G(t_2, \Sigma / R_g) - \vec{\sigma}_G(t_1, \Sigma / R_g) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \int_{t_1}^{t_2} \vec{R}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) dt \\ \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_G(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) dt \end{matrix} \right\}$$

En supposant que les limites des intégrales des efforts et moments extérieurs ont des limites finies non nulles lorsque l'intervalle de temps tend vers zéro, on obtient l'expression de la discontinuité du vecteur quantité de mouvement et du moment cinétique.

$$_G \left\{ \begin{array}{l} m \llbracket \vec{V}(t, G / Rg) \rrbracket_t \\ \llbracket \vec{\sigma}_G(t, \Sigma / Rg) \rrbracket_t \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = \lim_{(t_2-t_1) \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \vec{R}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) dt \\ \vec{K}_G = \lim_{(t_2-t_1) \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_G(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) dt \end{array} \right\}$$

- $_G \left\{ \begin{array}{l} m \llbracket \vec{V}(t, G / Rg) \rrbracket_t \\ \llbracket \vec{\sigma}_G(t, \Sigma / Rg) \rrbracket_t \end{array} \right\}$ est la discontinuité du tenseur cinétique du système matériel Σ à l'instant du choc t .
- $_G \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} \\ \vec{K}_G \end{array} \right\}$ est le tenseur des percussions extérieures appliquées au système pendant le choc.

On peut donc énoncer le principe fondamental des chocs :

Pour tout système matériel en mouvement par rapport à un repère galiléen Rg , pendant un choc, la discontinuité du tenseur cinétique du système matériel à l'instant du choc, est égal au tenseur des percussions extérieures appliquées au système. Ce qui se note :

$$\llbracket \mathcal{C}(\Sigma / Rg) \rrbracket_t = \mathcal{P}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$$

◇ *Remarque 1 :*

A partir du principe fondamental des chocs, on peut, comme pour le principe fondamental de la dynamique, démontrer le théorème des percussions réciproques.

$$\mathcal{P}(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2) = -\mathcal{P}(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)$$

◇ *Remarque 2 :*

Toutes les forces qui restent bornées pendant le choc, telles que par exemple, les forces de pesanteur, correspondent à un tenseur de percussion nul.

◇ *Remarque 3 :*

Le principe fondamental des chocs est défini dans un repère galiléen, cependant lorsqu'on écrit le principe fondamental de la dynamique dans un repère R en mouvement par rapport à Rg , si les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis restent finies au cours du choc, elles correspondent alors à des percussions nulles. On pourra dans ce cas appliquer de la même façon le principe fondamental des chocs dans le repère non Galiléen R .

7.6.4 Percussion de liaison

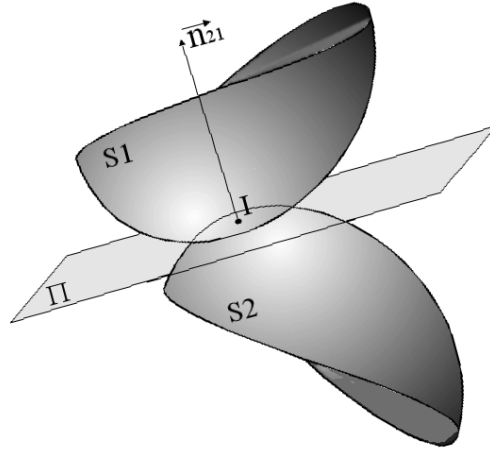
Considérons une liaison entre deux solides $S1$ et $S2$. Si le système subit un choc, il faut introduire à l'instant du choc une percussion de liaison :

$$\mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2) = -\mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1)$$

Si la liaison est parfaite on supposera que le tenseur de percussion de liaison à l'instant du choc possède les mêmes caractéristiques que le tenseur de liaison habituel.

7.6.5 Choc sans frottement entre deux solides

On considère deux solides $S1$ et $S2$, qui à l'instant t_0 entrent en contact en un point I .



Le contact étant supposé sans frottement, le torseur des percussions de contact peut s'écrire de la façon suivante:

$$\mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2)_I = \begin{Bmatrix} -P \cdot \vec{n}_{21} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le principe fondamental des chocs appliqué au solide S2 permet alors d'écrire :

$$[[\mathcal{C}(S_2 / Rg)]]_I = \mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2)$$

La valeur de P étant inconnue, ceci constitue un système de 6 équations à 7 inconnues. Comme d'habitude on écrira une loi de comportement pour le choc, qui permettra d'éliminer une inconnue.

n.b. Le cas des chocs avec frottement est beaucoup plus complexe, et ne sera pas abordé ici.

◇ Définition de e

L'équation supplémentaire, est donnée par la condition au point d'impact :

$$\vec{n}_{21} \cdot [\vec{V}(I \in S_2 / Rg) - \vec{V}(I \in S_1 / Rg)]_{t^+} = -e \vec{n}_{21} \cdot [\vec{V}(I \in S_2 / Rg) - \vec{V}(I \in S_1 / Rg)]_{t^-}$$

Qui se note aussi :

$$\vec{n}_{21} \cdot \vec{V}(t^+, I, S_2 / S_1) = -e \vec{n}_{21} \cdot \vec{V}(t^-, I, S_2 / S_1)$$

où e est un coefficient qui dépend des matériaux en présence, de la nature des surfaces, de la température ...

◇ Propriété de e et P : $0 \leq e \leq 1$ et $0 \leq P$

- Hypothèse des solides indéformables : $0 \leq e$

Compte tenu de l'hypothèse des milieux solides indéformables, il ne peut pas y avoir interpénétration des deux solides au point de contact. Dans ce cas, compte tenu de la définition de e :

$$\vec{n}_{21} \cdot \vec{V}(t^+, I, S_2 / S_1) = -e \vec{n}_{21} \cdot \vec{V}(t^-, I, S_2 / S_1)$$

Le coefficient e doit donc être positif ou nul.

- Principe des puissances virtuelles : $0 \leq P$

On applique le principe des puissances virtuelles au problème du choc, et on emploie comme torseur des vitesses virtuel $\{\mathcal{V}\}^*$ la restriction à chacun des solides de la discontinuité du champ des moments du torseur des vitesses pendant le choc. On obtient alors, en tenant compte du fait que les torseurs des percussions des actions à distance sont nuls :

$$[[\mathcal{C}(S_1 / Rg)]]_I \times \{\mathcal{V}(S_1 / Rg)\}^* = [[\mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1)]]_I \times \{\mathcal{V}(S_1 / Rg)\}^*$$

$$[\![\mathcal{C}(S2/Rg)]\!]_t \times \{\mathcal{C}(S2/Rg)\}^* = [\![\mathcal{P}(S1 \rightarrow S2)]\!]_t \times \{\mathcal{C}(S2/Rg)\}^*$$

Comme par ailleurs :

$$\mathcal{P}(S1 \rightarrow S2) = -\mathcal{P}(S2 \rightarrow S1)$$

On trouve en additionnant :

$$\sum_{i=1}^2 [\![\mathcal{C}(S_i/Rg)]\!]_t \times \{\mathcal{C}(S_i/Rg)\}^* = [\![\mathcal{P}(S2 \rightarrow S1)]\!]_t \times (\{\mathcal{C}(S1/Rg)\}^* - \{\mathcal{C}(S2/Rg)\}^*)$$

On également que :

$$[\![\mathcal{C}(S/Rg)]\!]_t \times \{\mathcal{C}(S/Rg)\}^* = \int_S [\![\vec{V}(P/Rg)]\!]_t dm \cdot \vec{V}^*(P/Rg)$$

Donc :

$$\int_{S1 \cup S2} [\![\vec{V}(P/Rg)]\!]_t dm \cdot \vec{V}^*(P/Rg) = [\![\mathcal{P}(S2 \rightarrow S1)]\!]_t \times (\{\mathcal{C}(S1/Rg)\}^* - \{\mathcal{C}(S2/Rg)\}^*)$$

On choisit d'abord, comme champ virtuel, la discontinuité du champ des vitesses des points de chacun des solides

$$\vec{V}^*(P/Rg) = [\![\vec{V}(P/Rg)]\!]_t$$

Alors :

$$\int_{S1 \cup S2} [\![\vec{V}(P/Rg)]\!]_t^2 dm = -P \cdot \vec{n}_{12} \cdot [\vec{V}(t^+, I, S1/S2) - \vec{V}(t^-, I, S1/S2)]$$

D'après la loi de choc sans frottement, employée :

$$\int_{S1 \cup S2} [\![\vec{V}(P/Rg)]\!]_t^2 dm = P(1+e) \vec{n}_{12} \cdot \vec{V}(t^-, I, S1/S2)$$

Comme les deux solides sont entrés en contact, il faut qu'avant le choc $\vec{n}_{12} \cdot \vec{V}(t^-, I, S1/S2) > 0$

Comme e doit être positif, pour éviter l'interpénétration des surfaces et comme le premier membre est positif, on en déduit que P est nécessairement positif.

○ Principe des puissances virtuelles : $e \leq 1$

On applique le principe des puissances virtuelles au problème du choc, et on emploie comme champ de vitesse virtuel, la moyenne de la vitesse avant et après le choc :

$$\vec{V}^*(P/Rg) = \frac{1}{2} [\vec{V}(P/Rg)_{t^+} + \vec{V}(P/Rg)_{t^-}]$$

Comme :

$$\int_{S1 \cup S2} [\![\vec{V}(P/Rg)]\!]_t dm \cdot \vec{V}^*(P/Rg) = [\![\mathcal{P}(S2 \rightarrow S1)]\!]_t \times (\{\mathcal{C}(S1/Rg)\}^* - \{\mathcal{C}(S2/Rg)\}^*)$$

Alors

$$\int_{S1 \cup S2} \frac{1}{2} [\![\vec{V}(P/Rg)_{t^+}]^2 - [\vec{V}(P/Rg)_{t^-}]^2] dm = -\frac{P(1-e)}{2} \vec{n}_{12} \cdot \vec{V}(t^-, I, S1/S2)$$

Soit encore :

$$[\![T(S1 \cup S2/Rg)]\!]_t = -\frac{P(1-e)}{2} \vec{n}_{12} \cdot \vec{V}(t^-, I, S1/S2)$$

Comme l'énergie cinétique ne peut pas s'accroître pendant le choc, on en déduit $e \leq 1$.

◇ *Cas particuliers importants*

Choc mou : Cela correspond à $e = 0$

Choc parfaitement élastique : Cela correspond à $e = 1$, dans ce cas l'énergie cinétique se conserve.

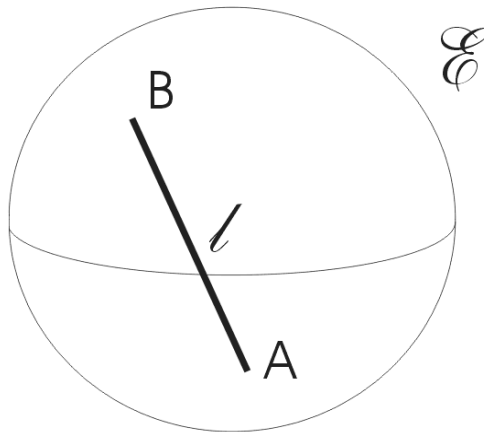
8 RECUEIL D'EXERCICES

8.1 Cinématique

◇ Exercice 1 : Choix d'un paramétrage

Un segment rectiligne, d'extrémités A et B et de longueur l , est mobile au cours du temps par rapport à une sphère de rayon R ($R > l/2$) de façon telle que A et B restent constamment sur la sphère.

- Choisir des paramètres indépendants q_i permettant de repérer le segment AB dans l'espace \mathcal{E} attaché à la sphère
- Calculez le terme $\left[\frac{d \overrightarrow{AB}}{dt} \right]_{\mathcal{E}}$ en fonction des paramètres q_i et des vitesses de variation de ces paramètres \dot{q}_i .



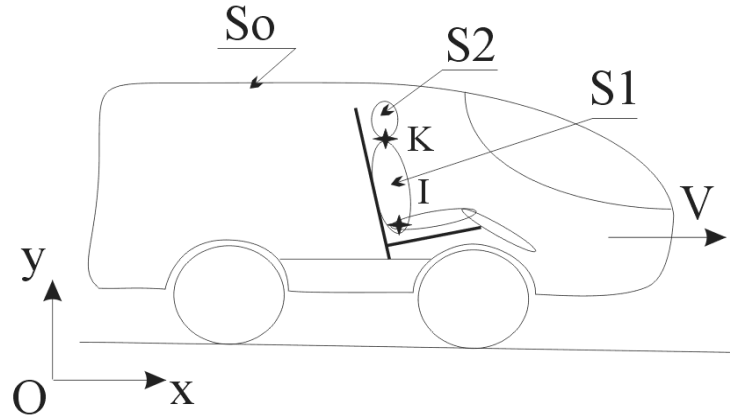
◇ Exercice 2 : Mouvements d'un passager dans un véhicule.

On considère le mouvement d'un passager dans un véhicule S_0 en mouvement dans un repère R lié au sol $\mathcal{R}(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Le véhicule se déplace à la vitesse $\vec{V} = V \cdot \vec{x}$ où V est une constante.

Le passager est représenté par un système de deux « solides », S_1 le tronc, et S_2 la tête. S_2 est en liaison pivot par rapport à S_1 autour de l'axe (K, \vec{z}) .

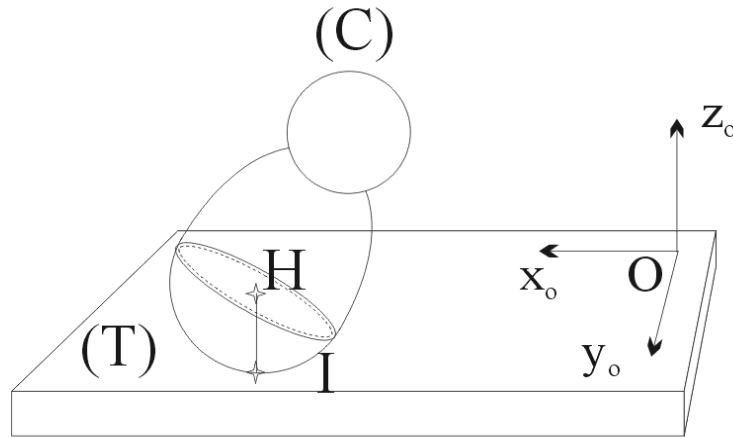
S_1 est en liaison pivot par rapport au véhicule autour de l'axe (I, \vec{z}) .



- Dessiner le graphe de structure du système de solide, paramétrer le problème
- Exprimer le vecteur position \overrightarrow{OK}
- Exprimer les torseurs cinématiques de chacun des solides dans leur mouvement par rapport à \mathcal{R} .

◇ Exercice 3 : Mouvements d'un culbuto

On étudie les mouvements d'un culbuto (C) sur une table plane (T) fixe dans un repère $\mathcal{R}(0, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$. Le culbuto est astreint au contact au point I sur le plan de la table (T). De plus on impose des conditions de non-glissement au niveau de I. La base du culbuto est une demi-sphère de rayon R.



- Paramétrer le mouvement en utilisant les angles d'Euler.
- Exprimer les conditions géométriques de contact au point I (équation holonome).
- Exprimer le torseur cinématique de (C) dans son mouvement par rapport à (T).
- Expliciter les hypothèses cinématiques au niveau du contact.

◇ Exercice 4 : Conditions de glissement d'un véhicule à quatre roues

Un véhicule à quatre roues est mobile sur un plan Π , auquel est associé un repère $\mathcal{R}_o(0_o, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$. Le véhicule est schématisé par l'ensemble des solides suivants :

- Un solide (S) auquel est attaché le repère $(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_o)$. Les O_i ($i=1,2,3,4$) sont quatre points de (S) formant un rectangle de centre C.

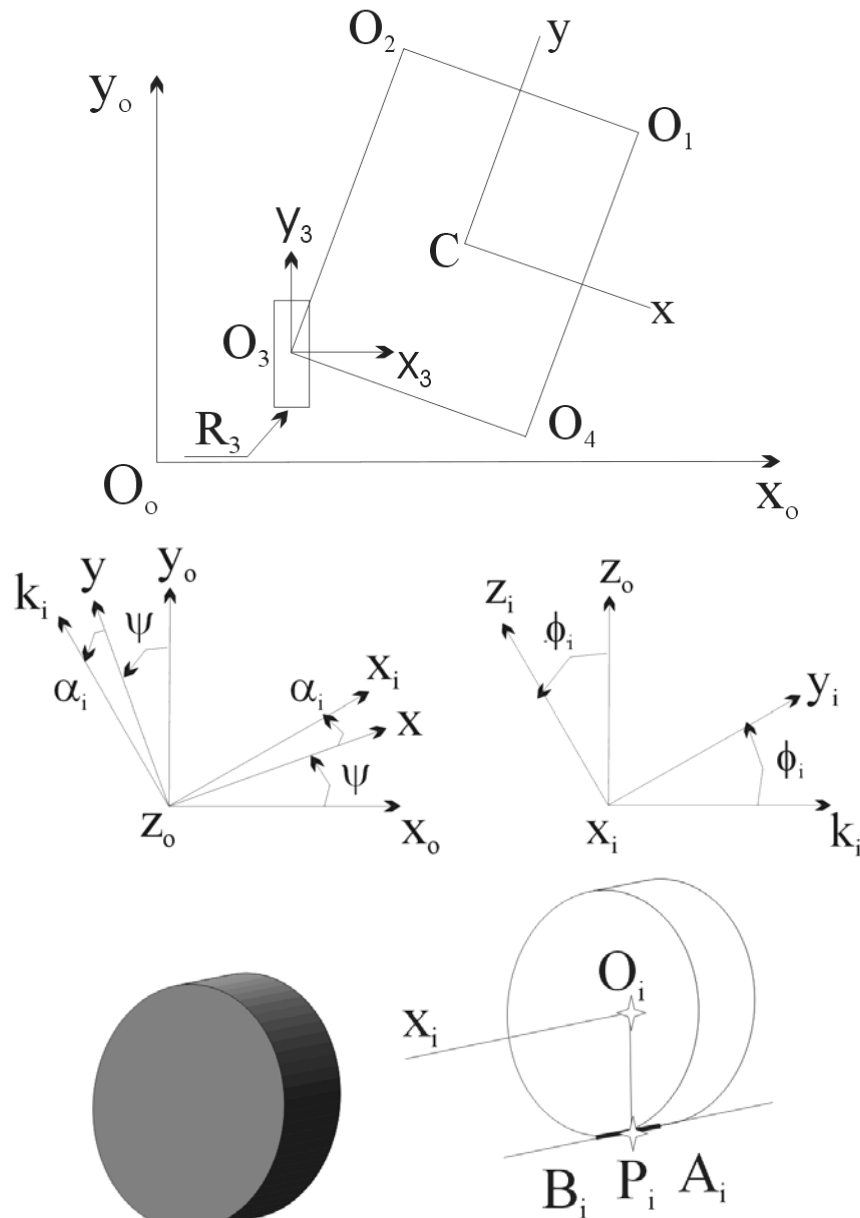
- Quatre roues identiques R_i ($i=1,2,3,4$), cylindriques de révolution, d'axes (O_i, \vec{x}_i) et de rayon r .
On note $A_i B_i$ le segment de la génératrice du contact entre Π et R_i , on note P_i la projection orthogonale de O_i sur $A_i B_i$.

On repère la position de (S) dans R_o par la position du point C et l'angle $(\vec{x}_o, \vec{x}) = \psi$

On repère l'orientation de la base $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ liée à R_i dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_o)$ par les angles α_i et ϕ_i .

On veut qu'à tout instant le glissement, en P_i , de R_i par rapport à Π soit nul pour $i=1,2,3,4$

On note : $\overrightarrow{O_2 O_1} = 2a \vec{x}$ et $\overrightarrow{O_3 O_2} = 2b \vec{y}$



- Montrer qu'il est nécessaire que les axes (O_i, \vec{x}_i) soient concourants.

- L'absence de glissement au point milieu P_i de la génératrice de contact entraîne t'elle l'absence de glissement en tout point de la génératrice ? $\vec{\mathcal{G}}(P_i, R_i/\Pi) = \vec{0}$ entraîne t'il $\vec{\mathcal{G}}(M_i, R_i/\Pi) = \vec{0} \quad \forall M_i \in A_i B_i$

◇ Exercice 5 : Mouvements d'un radar sur un nez d'avion

On considère le mouvement d'un radar monté sur un nez d'avion dans un repère $\mathcal{R}(\vec{0}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié au sol.

L'avion est en translation horizontale rectiligne définie par : $\vec{V} = v(t)\vec{x}$. On associe à l'avion le repère $(P, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Le radar est constitué de trois solides, (1), (2) et (S) où (S) est un support de fixation, fixe par rapport à l'avion. La partie mobile se compose des solides (1) et (2) et est repérée par les deux paramètres α et β .

(1) ou première sous unité de rotation, est en rotation par rapport à (S) autour de l'axe (P, \vec{z}) . On associe à (1) le repère $(P, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ avec $(\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{y}, \vec{y}_1) = \alpha$ où α est l'angle de « gisement ».

(2) ou seconde sous unité de rotation, porte l'antenne, et est en rotation par rapport à (1) autour de l'axe (H, \vec{y}_1) . On associe à (2) le repère $(H, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ avec $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}, \vec{z}_2) = \beta$ où β est l'angle de « site ».

La distance PH est constante égale à h une constante positive et $\overrightarrow{PH} = h\vec{x}_1$.

Le centre de masse de (2) est par ailleurs défini par $\overrightarrow{HG} = a\vec{x}_2$.

- Calculez la vitesse du centre de masse G de (2) par rapport à R.
- Calculez les composantes suivantes de l'accélération du centre de masse G de (2) dans R

$$\Gamma_x = \Gamma(G/R) \cdot \vec{x}$$

$$\Gamma_{x_2} = \Gamma(G/R) \cdot \vec{x}_2$$

8.2 Cinétique

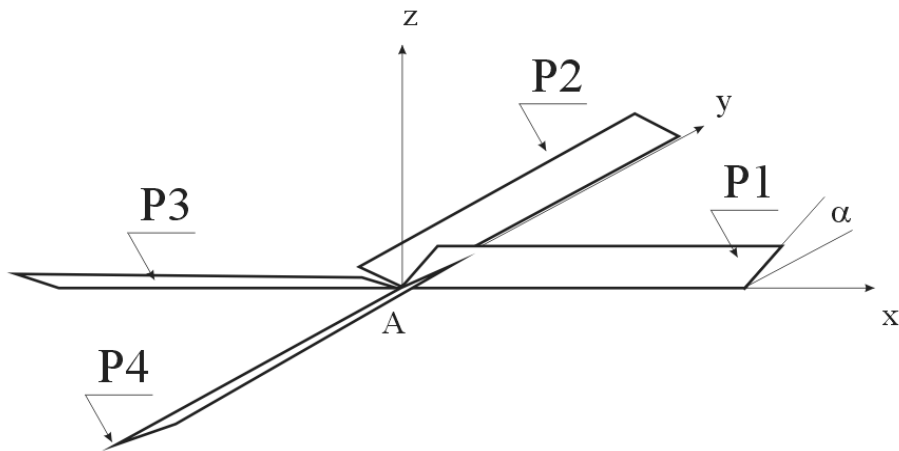
◇ Exercice 1 : Girouette

Une girouette est schématisée par une plaque homogène P, d'épaisseur négligeable, ayant la forme d'un quart de cercle. Par rapport au repère $\mathcal{R}(\vec{0}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié au sol, la girouette tourne autour de $(\vec{0}, \vec{x})$ axe confondu avec l'un de rayons qui la limitent.

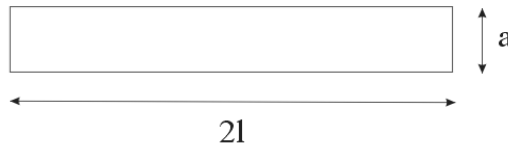
Déterminer le torseur cinétique, le torseur dynamique et l'énergie cinétique de P dans son mouvement par rapport à R.

◇ Exercice 2 : Opérateur d'inertie

Hélice H: Quatre Pales à 90° , inclinées de α

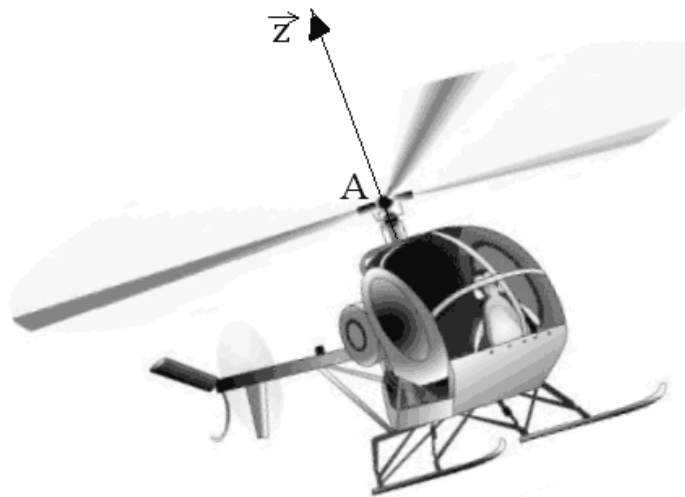


Pale P_i : Homogène, épaisseur “nulle”, masse m



La figure ci-dessus schématise (grossièrement) une hélice **H** d'hélicoptère, à 4 pales identiques P_i ($i=1,4$). Le repère $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié à l'hélice **H**. L'angle d'inclinaison de chacune des pales par rapport au plan (A, \vec{x}, \vec{y}) a pour valeur α . Déterminer l'opérateur d'inertie de l'hélice au point A $\mathcal{J}(A, H)$.

◇ Exercice 3 : Hélicoptère



Un hélicoptère, équipé de l'hélice du deuxième problème est en mouvement par rapport au sol auquel est attaché le repère $\mathcal{R}(0, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$. Le mouvement de l'hélicoptère est défini de la façon suivante :

- Le point A de l'axe (A, \vec{z}) du rotor d'écrit uniformément un cercle de centre 0 dans le plan $\mathcal{R}(0, \vec{x}_o, \vec{y}_o)$.

- L'inclinaison de l'axe (A, \vec{z}) par rapport à l'axe $(0, \vec{z}_o)$ est constante au cours du mouvement.
- La vitesse de rotation de l'hélice H par rapport à la cellule autour de l'axe (A, \vec{z}) est constante au cours du temps. L'inclinaison α des pales de l'hélice est également constante.

Question 1 : Déterminer les éléments de réduction en A du torseur cinétique de H, dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}(0, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$.

Question 2 : Déterminer l'énergie cinétique de H dans son mouvement par rapport au sol.

Question 3 : Déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de H, dans le mouvement par rapport au sol.

Question 4 : Comment procéder pour déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de H dans un mouvement quelconque par rapport au sol ? (L'hélice n'est plus alors considérée comme un solide mais comme un système de solides).

8.3 Dynamique du solide ou des systèmes de solides

8.3.1 Méthodologie pour la résolution des problèmes de mécanique avec le PFD

◇ Introduction :

- Préciser clairement les objectifs de l'étude.
- Par exemple si le mouvement est imposé, la seconde partie de l'étape d'analyse est inutile.

◇ Cinématique

- Faire un graphe de structure, préciser les torseurs cinématique de liaisons
- Mettre en place un paramétrage, dessiner les figures de projection.
- Déterminer la mobilité, écrire les équations de fermeture
- Bilan : Le nombre d'équation du mouvement à trouver est connu

◇ Analyse

- Faire un schéma d'analyse
- Préciser les hypothèses du modèle (symétries, solides dont la masse est négligeable, forme des opérateurs d'inertie ...)
- Faire apparaître les équations portant sur les actions mécaniques de liaisons
- Faire apparaître les actions mécaniques autres que les actions de liaisons (ex. pesanteur)
- Préciser les équations du mouvement à écrire
 - Définir le sous système sur lequel est appliqué le PFD
 - Préciser le théorème général employé (résultante ou moment dynamiques)
 - Préciser la projection à effectuer

- Bilan : Les équations du mouvement à écrire sont maintenant connues :

$$\text{Par exemple : } \vec{x} \cdot \vec{\delta}_A(S/R_g) = \vec{x} \cdot \vec{M}_A(\mathcal{F}\{pes \rightarrow S\}) + \vec{x} \cdot \vec{M}_A(\mathcal{F}\{S_2 \xrightarrow{\text{ressort}} S\})$$

◇ Calcul

- Expliciter les équations du mouvement
- Se limiter au strict nécessaire, il est inutile de calculer toutes les composantes d'un moment dynamique par exemple, si on n'a besoin que d'une projection
- Tenir compte des hypothèses du modèle, il est inutile, par exemple, de calculer la résultante dynamique d'un solide dont la masse est tenue pour négligeable
- Quand c'est possible résoudre directement, sinon résolution numérique

◇ Analyse et exploitation des résultats du modèle

- Interprétation physique, remise en cause éventuelle du modèle
- Calcul de certaines actions mécaniques. Une fois le mouvement connu, le PFD permet de calculer tous les efforts et les couples.
 - Dimensionnement de liaisons
 - Dimensionnement d'actionneurs, moteur par ex.
 - Etc...

8.3.2 Exercices

◇ Exercice 1 : Etude du mouvement d'une plaque

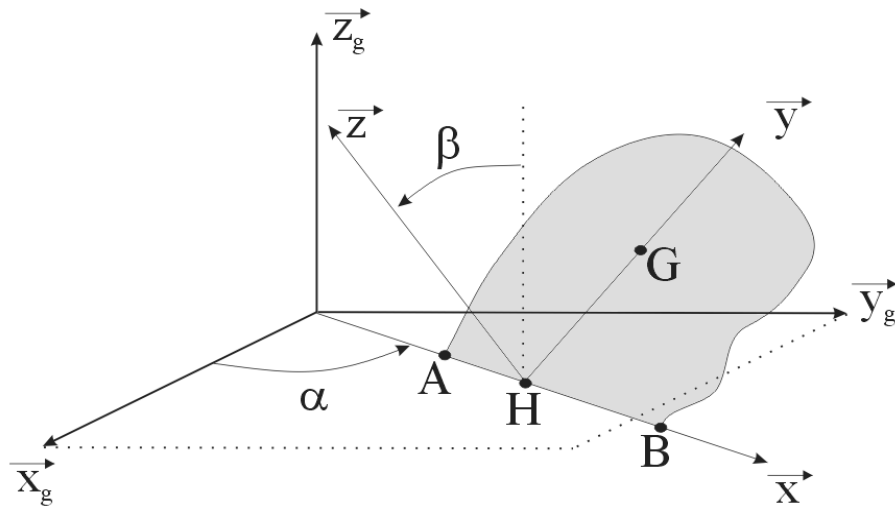
Une plaque plane (P) de forme quelconque est en contact sur un plan (Π) horizontal, par son bord rectiligne AB (voir figure). On suppose qu'il n'y a pas de frottement entre le plan (Π) et le bord AB de la plaque. On souhaite étudier le mouvement de la plaque (P) lorsqu'elle est lâchée sans vitesse initiale.

On associe au plan (Π) le repère Galiléen $\mathcal{R}_g(0, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$, \vec{z}_g étant vertical descendant.

On associe à la plaque (P) le repère $\mathcal{R}(H, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, tel que H appartienne au bord rectiligne AB de la plaque tel que $\vec{AB} = a\vec{x}$.

On note α , le paramètre de rotation de la plaque autour de l'axe $(0, \vec{z}_g)$ et β le paramètre de rotation de la plaque autour de (H, \vec{x}) , avec $\beta = (\vec{z}_g, \vec{z})$.

Enfin la plaque est plane, symétrique par rapport au plan (H, \vec{x}, \vec{y}) d'épaisseur négligeable devant ses dimensions, de masse M, de centre d'inertie G tel que $\vec{HG} = b\vec{y}$ et d'opérateur d'inertie $\mathcal{J}_G(P)$.



Question 1 : Exprimer l'opérateur d'inertie de (P) dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Question 2 : Déterminer la trajectoire du centre d'inertie G.

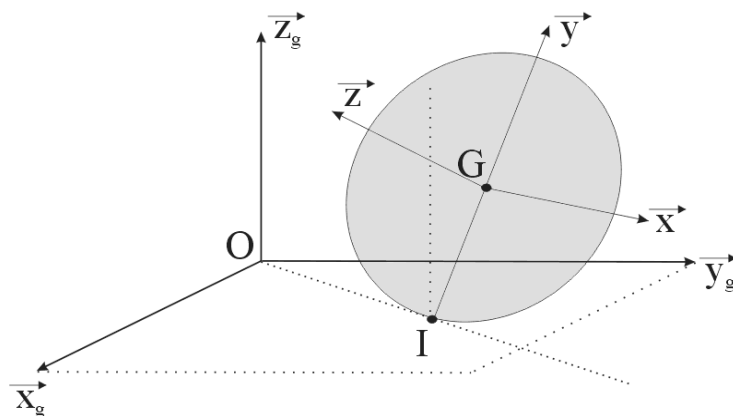
Question 3 : Montrer que le moment cinétique au point G de (P) est horizontal. En déduire une relation entre paramètres.

Question 4 : A quelle condition le bord AB se déplace-t-il parallèlement à lui-même ? Ecrire alors l'équation du mouvement de la plaque.

◇ *Exercice 2 : Contact ponctuel avec frottement. Le disque en rotation*

Un disque homogène et pesant, dont on néglige l'épaisseur, de rayon ρ , est lancé au dessus d'un plan horizontal (Π) de telle manière qu'il roule sans glisser sur ce plan, et que son centre d'inertie G décrit un cercle de rayon R, sur un plan horizontal (H) distant de h du plan (Π).

On associe au plan (Π) le repère Galiléen $\mathcal{R}_g(0, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$, \vec{z}_g étant vertical ascendant.



Question 1 : déterminer la vitesse du centre d'inertie G du disque, en fonction de ρ , R, h .

Question 2 : Quel est le coefficient de frottement f_{min} minimum en deçà duquel la condition de roulement sans glissement ne peut plus être réalisée compte tenu des hypothèses sur le mouvement.

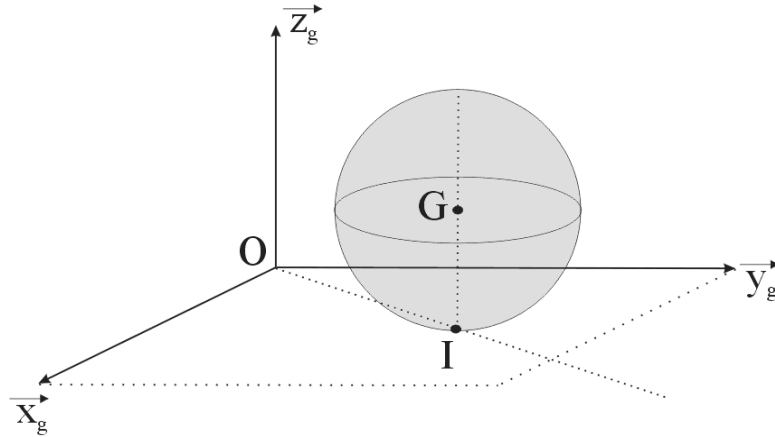
Question 3 : Application numérique, $\rho=2m$, $R=10m$, $h=1m$.

◇ *Exercice 3 : Contact ponctuel avec frottement. La boule de billard*

Une boule de billard (B), homogène, de rayon a , de masse m , de moment d'inertie I par rapport à toute droite passant par son centre d'inertie G est lancée sur une table horizontale. A la table, on associe le repère Galiléen $\mathcal{R}_g(0, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$, \vec{z}_g étant vertical ascendant.

Soit \vec{R} , l'action mécanique de la table sur la boule de billard au point de contact I . On pose $\vec{R} = N.\vec{z}_g + F.\vec{u}$. Où \vec{u} est un vecteur unitaire appartenant au plan de la table.

Le tapis de la table est tel que la boule de billard peut rouler et pivoter sans résistance au roulement et au pivotement, et glisser avec un coefficient de frottement f .



Question 1 : Déterminer $\vec{F} = F.\vec{u}$ en fonction de la vitesse de glissement en I de la boule par rapport au plan de la table: $V(I \in B / \mathcal{R}_g)$

Question 2 : Etudier en fonction des conditions initiales, la cinématique de la boule de billard. Donner, en particulier, l'expression de la vitesse de glissement, la trajectoire de G , la durée de la phase de glissement, l'expression du taux de rotation de la boule.

Question 3 : A quelles conditions la boule « rebrousse » t'elle chemin ?

◇ *Exercice 4 : La bobineuse*

On étudie les mouvements d'une bobineuse dans un référentiel du mouvement galiléen auquel est attaché le repère $\mathcal{R}(0, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, \vec{w} étant vertical ascendant. Le système est schématisé par deux solide S et Σ .

Σ est articulé sur le bâti (B) fixe dans R de la machine par une liaison pivot d'axe $(0, \vec{w})$. On associe alors à Σ le repère $\mathcal{R}_\Sigma(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{w})$.

Un moteur (M) est monté entre le bâti (B) de la machine et Σ . Son action mécanique est représentée par un couple $\vec{C} = C.\vec{w}$ et impose une rotation uniforme par rapport à (B).

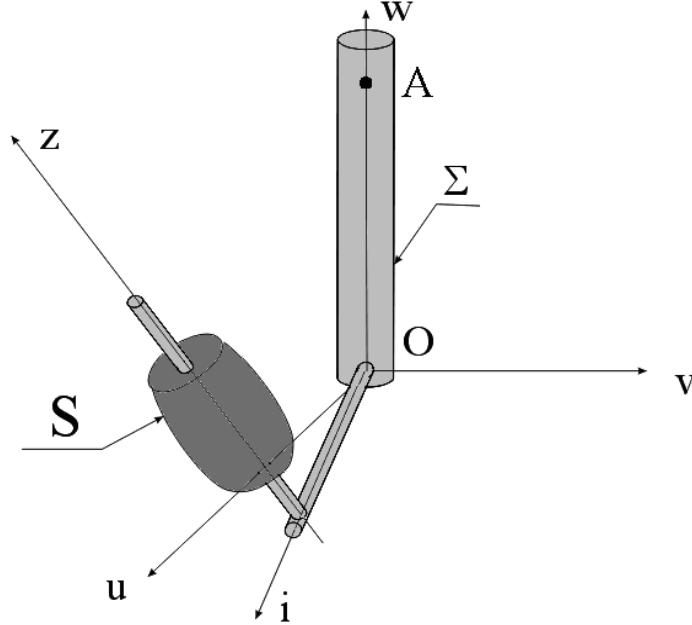
S , la bobine, est un solide de révolution d'axe (G, \vec{z}) , où G est le centre d'inertie de S . S est articulée sur Σ par une liaison pivot glissant d'axe (B, \vec{z}) . On associe à S le repère $\mathcal{R}_s(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Le point B est défini tel que $\vec{OB} = b.\vec{i}$.

Le fil à bobiner est tendu entre S et Σ par un dispositif de masse négligeable. Il exerce ainsi sur S des actions mécaniques définies par le torseur :

$$\{F(\Sigma \rightarrow S)\}_G = \begin{Bmatrix} m.k.\overrightarrow{GA} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

L'élasticité du fil k est une constante positive donnée. Le point A est fixe dans \mathcal{R}_Σ et \mathcal{R} et défini comme suit : OA=a=constante.



Question 1 : Dessiner le graphe de structure. Le compléter par les actions mécaniques.

Question 2 : Choisir et justifier les équations qui déterminent les mouvements de S.

◇ Exercice 5 : Déploiement des bras d'un satellite

Afin d'étudier le déploiement des bras d'un satellite, bras destinés au contrôle de l'autorotation, on emploie au laboratoire le modèle expérimental défini sur la figure ci-après.

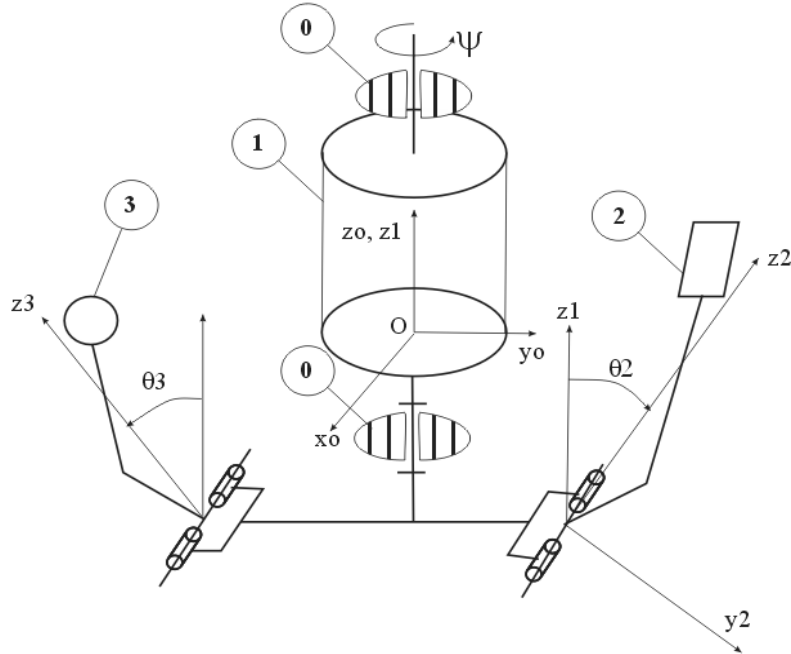
Les mouvements sont étudiés dans $\mathcal{R}_o(0, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$, repère lié au laboratoire (So), supposé galiléen, z_o étant vertical ascendant.

Le satellite Σ est composé de trois solides, S1, S2 et S3 respectivement de masse m_1, m_2 et m_3 .

- S1, ou corps du satellite, est en liaison pivot parfaite d'axe (O, \vec{z}_o) avec So. On lui associe le repère $\mathcal{R}_1(G_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}_o)$, avec $\Psi = (\vec{x}_o, \vec{x}_1)$ et G_1 centre d'inertie de S1 défini par $\overrightarrow{O_1G_1} = b_1 \vec{z}_1$.
- S2, ou premier bras de satellite, est en liaison pivot d'axe (O_2, \vec{y}_1) avec S1, avec $\overrightarrow{O_1O_2} = a_2 \vec{x}_1$. On lui associe le repère $\mathcal{R}_2(G_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2 = \vec{y}_1, \vec{z}_2)$, avec $\theta_2 = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ et G_2 centre d'inertie de S2 défini par $\overrightarrow{O_2G_2} = b_2 \vec{z}_2$. A la liaison pivot entre S1 et S2, on associe un frottement visqueux modélisé par un couple $\overrightarrow{C}_{f12} = -v_2 \cdot \frac{d\theta_2}{dt} \vec{y}_2$, un ressort de torsion de raideur K_2 et un moteur délivrant un couple $\overrightarrow{C}_{m12} = C_{m2} \vec{y}_2$.

- S3, ou second bras de satellite, est en liaison pivot d'axe (O_3, \vec{y}_1) avec S1, avec $\vec{O_1O_3} = -a_3 \vec{x}_1$. On lui associe le repère $\mathcal{R}_3 (G_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3 = \vec{y}_1, \vec{z}_3)$, avec $\theta_3 = (\vec{z}_1, \vec{z}_3)$ et G3 centre d'inertie de S3 défini par $\vec{O_3G_3} = b_3 \vec{z}_3$. A la liaison pivot entre S1 et S3, on associe un frottement visqueux modélisé par un couple $\vec{C}_{f13} = -v_3 \cdot \frac{d\theta_3}{dt} \vec{y}_3$, un ressort de torsion de raideur K_3 et un moteur délivrant un couple $\vec{C}_{m13} = C_{m3} \vec{y}_3$.

Le repère attaché à chacun des solides est un repère principal d'inertie pour ce solide.



Question 1 : dessiner le graphe de structure du système, le compléter par les différentes actions mécaniques et dessiner les figures de projection.

Question 2 : choisir les équations (PFD) qui déterminent les mouvements des trois solides.

Question 3 : exprimer le système d'équations du mouvement.

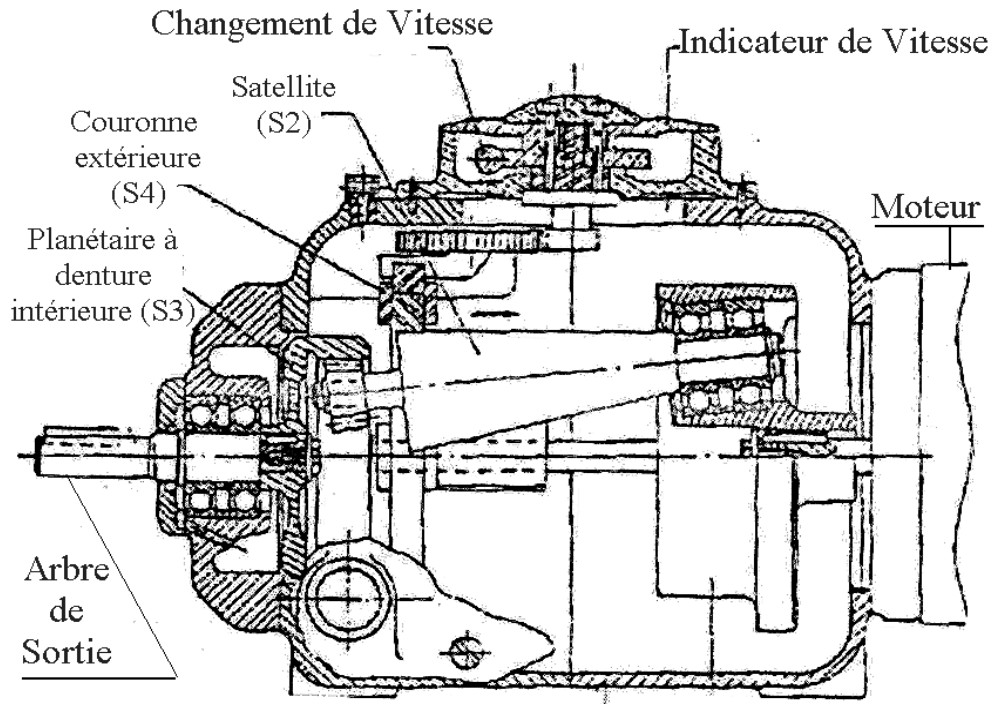
◇ Exercice 6 : Etude dynamique du variateur de Graham

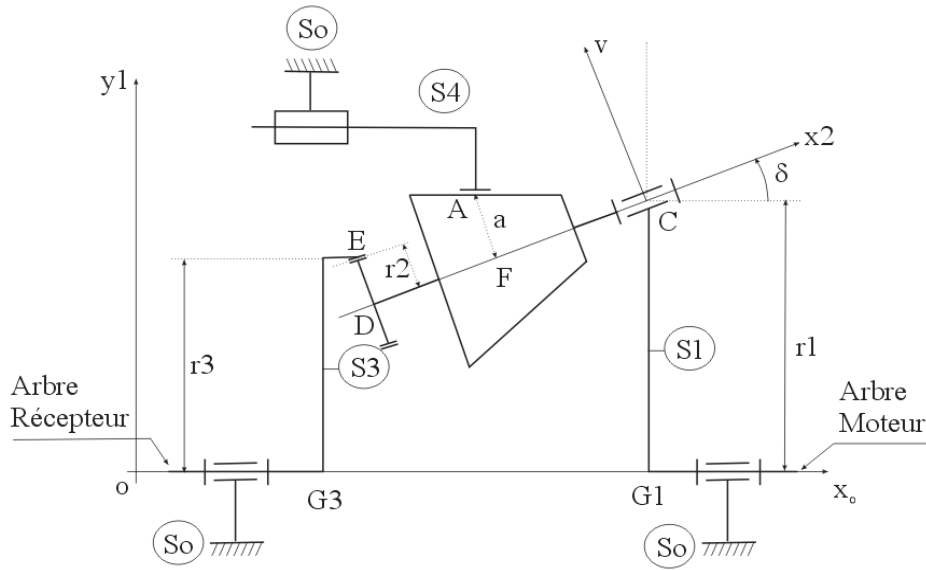
Le repérage des éléments constituant le variateur Graham ainsi que la position des différents points utiles sont indiqués sur le schéma joint. Les mouvements sont étudiés vis à vis du référentiel du mouvement $\mathcal{R}_0 (0, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$, repère lié au bâti (So) supposé Galiléen, y_o étant vertical ascendant.

- Le satellite ou solide S1 est en liaison pivot parfaite d'axe (O, \vec{x}_o) avec So. On lui associe le repère $\mathcal{R}_1 (G_1, \vec{x}_1 = \vec{x}_o, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ avec $\alpha = (\vec{y}_o, \vec{y}_1)$ et G1 centre d'inertie de S1 défini par $\vec{OG_1} = e \vec{x}_o$. On donne l'opérateur d'inertie de S1: $\mathcal{J}_{G1}(S_1) = A_1 \vec{x}_1 \otimes \vec{x}_1 + B_1 \vec{y}_1 \otimes \vec{y}_1 + B_1 \vec{z}_1 \otimes \vec{z}_1$.
- Le satellite ou solide S2 est en liaison pivot parfaite d'axe (C, \vec{x}_2) avec S1. On lui associe le repère $\mathcal{R}_2 (G_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ avec $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ et G2 centre d'inertie de S2

défini par $\overrightarrow{CG_2} = -b.\overrightarrow{x_2}$. On donne l'opérateur d'inertie de S2:
 $\mathcal{I}_{G_2}(S_2) = A_2 \overrightarrow{x_2} \otimes \overrightarrow{x_2} + B_2 \overrightarrow{y_2} \otimes \overrightarrow{y_2} + B_2 \overrightarrow{z_2} \otimes \overrightarrow{z_2}$. De plus on note δ l'angle
 défini par : $\delta = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{v})$.

- S2 est également en liaison glissière avec la couronne extérieure S4.
- Le planétaire ou solide S3 est en liaison pivot parfaite d'axe $(O, \overrightarrow{x_o})$ avec So. On lui associe le repère $\mathcal{R}_3 (G_3, \overrightarrow{x_o} = \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$ avec $\gamma = (\overrightarrow{y_o}, \overrightarrow{y_3})$ et G3 centre d'inertie de S3 défini par $\overrightarrow{OG_3} = f.\overrightarrow{x_o}$. On donne l'opérateur d'inertie de S3:
 $\mathcal{I}_{G_3}(S_3) = A_3 \overrightarrow{x_3} \otimes \overrightarrow{x_3} + B_3 \overrightarrow{y_3} \otimes \overrightarrow{y_3} + B_3 \overrightarrow{z_3} \otimes \overrightarrow{z_3}$.
- On donne de plus FC=c et DC=d.
- On désigne respectivement par $C_e \overrightarrow{x_o}$ et les couples de l'extérieur sur l'arbre d'entrée et de sortie du mécanisme. On notera $\overrightarrow{\omega_3} = \omega_3.\overrightarrow{x_o}$ le taux de rotation de S3 par rapport à S0 et $\overrightarrow{\omega_1} = \omega_1.\overrightarrow{x_o}$ le taux de rotation de S1 par rapport à S0.





Question 1 : Pour un réglage donné, exprimer les conditions de non-glissement en A et en E

Question 2 : Déterminer sous ces hypothèses le rapport de réduction ω_1/ω_3 .

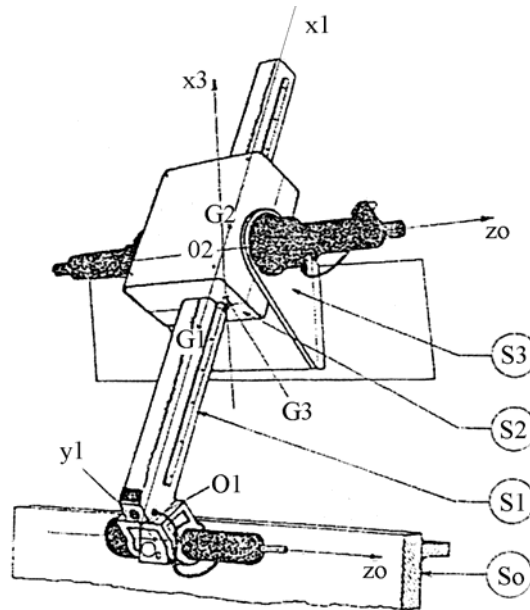
Question 3 : Quelles projections permettent d'écrire le système d'équations du mouvement ?

Question 4 : Ecrire le système d'équations du mouvement

◇ *Exercice 7 : Etude d'un robot de chargement de presse*

Les mouvements sont étudiés dans $\mathcal{R}_0(\vec{0}, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$, repère lié au bâti (So), supposé galiléen, y_o étant vertical ascendant. Le robot est constitué de trois solides S1, S2 et S3.

- S1, premier élément du robot est en liaison pivot parfaite d'axe (O_o, \vec{z}_o) avec So. On lui associe le repère $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}_o)$, avec $\alpha = (\vec{x}_o, \vec{x}_1)$ et O1 défini par $\vec{O_oO_1} = h.\vec{y}_1$. Son centre d'inertie G1 est défini par $\vec{O_1G_1} = L_1.\vec{x}_1$. On note m_1 , la masse de S1 et I1 son moment d'inertie autour de l'axe (O_o, \vec{z}_o) . Un moteur est placé entre So et S1. Son action est modélisée par un couple $\vec{C}_{m01} = C_{01}\vec{z}_o$
- S2, deuxième élément du robot est en liaison glissière parfaite d'axe (O_1, \vec{x}_1) avec S1. On lui associe le repère $\mathcal{R}_2(O_2, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}_o)$, avec O2 défini par $\vec{O_1O_2} \cdot \vec{x}_1 = x$. Son centre d'inertie G2 est défini par $\vec{O_2G_2} = L_2.\vec{x}_1$. On note m_2 , la masse de S2 et I2 son moment d'inertie autour de l'axe (O_2, \vec{z}_o) . Un moteur est placé entre S1 et S2. Son action est modélisée par un glisseur $\vec{F}_{12} = F_{12}\vec{x}_1$
- S3, troisième élément du robot est en liaison pivot parfaite d'axe (O_2, \vec{z}_o) avec S2. On lui associe le repère $\mathcal{R}_3(O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3 = \vec{z}_o)$, avec $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_3)$. Son centre d'inertie G3 est défini par $\vec{G_3O_2} = L_3.\vec{x}_3$. On note m_3 , la masse de S3 et I3 son moment d'inertie autour de l'axe (O_2, \vec{z}_o) . Un moteur est placé entre S2 et S3. Son action est modélisée par un couple $\vec{C}_{m23} = C_{23}\vec{z}_o$



Question 1 : Calculer en utilisant les équations de Lagrange C_{01} , F_{12} et Y_{12} où $Y_{12} = \vec{y}_1 \cdot \vec{R}\{\mathcal{F}(S_1 \rightarrow S_2)\}$.

Question 2 : Pour chaque inconnue, expliquer comment écrire l'équation correspondante en utilisant les théorèmes généraux.