TRAITEMENT NUMERIQUE DU SIGNAL

INTRODUCTION.

Comparaison entre les propriétés du traitement analogique et du traitement numérique.

ANALOGIQUE

(-) Reproductibilité difficile à assurer si n (ordre) grand ; composants précis.

(-) Dérive en température et vieillisement.

(-) La fiabilité diminue beaucoup quand n augmente. Quand n augmente, il faut plus de composants et plus précis, il y a plus de soudures.

(-) Un changement au niveau du cahier des charges entraîne une refonte complète complète du système.

(+) Rapidité : les filtres actifs peuvent aller jusqu'à plusieurs Mhz, les passifs jusqu'au Ghz.

NUMERIQUE

(+) Reproduire : c'est reproduire une succession de nombres (mémoires) $\rightarrow$ reproductibilité assurée.

(+) Pas de dérive : vieillisement extrêmement lent (le nombre mis en mémoire n'a pas une durée de vie infinie).

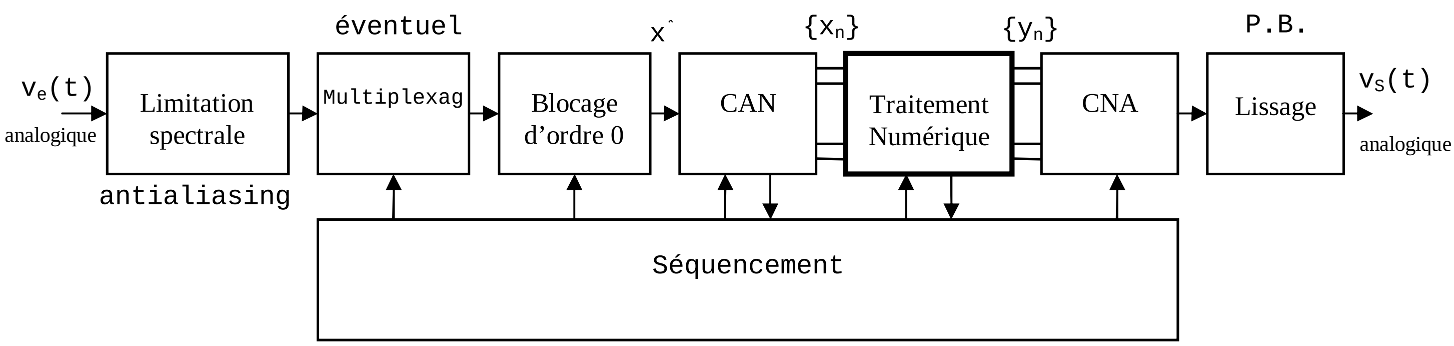
(+) La fiabilité diminue peu avec l'ordre. La fiabilité n'est pas bonne pour les ordres n petits mais décroît faiblement quand n augmente.

(+) Réécriture du programme avec conservation du hard. On peut utiliser une même carte pour plusieurs signaux en temps partagé avec multiplexage.

(-) Il est difficile de travailler au delà de 100 kHz.

(-) Précision : problème de retenue, bit de poids faible.

I. STRUCTURE D'UN FILTRE NUMERIQUE.



En entrée et en sortie d'un filtre numérique, on trouve des nombres. On les met en mémoire et on fabrique un nombre en sortie.

II. TRANSFORMEE EN Z.

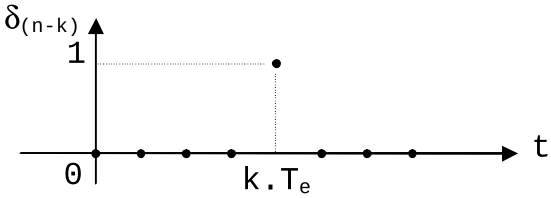
2.1. Séquence de nombres.

a) Définition.

On appelle séquence, une suite ordonnée et repérable de nombres représentée par $\{x_{(n)}\}$.
On peut développer cette écriture : $\{x_{(n)}\} = [....x_{(-2)}, x_{(-1)}, x_{(0)}, x_{(1)}, ...]$.
En électronique, cela correspond à des valeurs à des instants donnés.

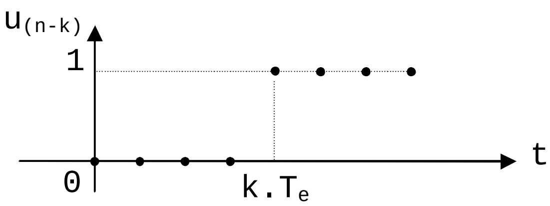
b) Exemples de séquence.

- Séquence impulsion unité retardée :
  $\{\delta_{(n-k)}\} = [.....,0,0....,1,0,0....]$.



Toute séquence se représente à partir de la séquence impulsion unité : $\{x_{(n)}\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x_{(k)}.\{d_{(n-k)}\}$

- Séquence échelon unité retardée :
  $\{u_{(n-k)}\} = [.....,0,0....0,1,1,1...,1,..]$.



2.2. Définition de la transformée en z.

A une suite d'échantillons, une séquence, on associe un polynôme en z^{-1}.

Ce sont les anglo-saxons qui ont imposé la transformée en z. En France, on utilisait la transformée en r (r pour retard), donc c'est z^{-1} qui sera le retard.

C'est une transformée <u>linéaire à opérateur complexe z^{-1}</u> dont la transformée de $\{\delta_{(n-k)}\}$ est z^{-k} ($z \in C$).

Ce n'est rien d'autre que la transformée de Laplace d'un signal échantillonné !

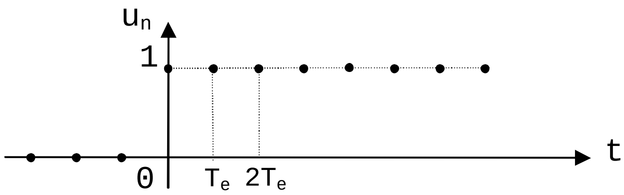
$$X(p) = L[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t).e^{-pt}\,dt$$

$$X(z) = Z[x^*(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} x_{(n.T_e)}.e^{-npT_e}$$

On pose : $z = e^{pT_e}$:

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_{(n)}.z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n.z^{-n}}$$

<u>Exemple :</u> calcul de la transformée en z d'une séquence échelon unité $U_{(z)} = Z[u_n]$.



$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.z^{-n} = 1 + 1.z^{-1} + 1.z^{-2} + ... = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Suite géométrique de raison z^{-1}. Lorsque $n \to \infty$ la suite tend vers $\dfrac{1}{1 - \text{raison}}$ si $|z| < 1$.

2.3. Propriétés essentielles de la transformée en z.

a)Linéarité.

$e_1(t) \to E_1(z)$
$e_2(t) \to E_2(z)$

$a_1.e_1(t) + a_2.e_2(t) = a_1.E_1(z) + a_2.E_2(z)$

b) Retard.

$e_1(t) \to E_1(z)$

$e_2(t) = e_1(t-n.T_e) \to E_2(z) = E_1(z).z^{-n}$

c) Théorème de la valeur initiale.

$E(z) = e(0) + e(T_e).z^{-1} + e(2.T_e).z^{-2} + ...$

$$e(0) = \lim_{z \to \infty} E(z)$$

d) Théorème de la valeur finale.

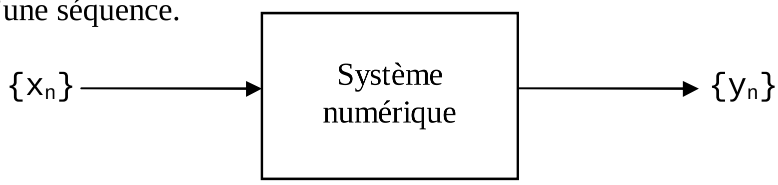
$$e(\infty) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}).E(z)$$

III. LES SYTEMES NUMERIQUES.

3.1. Définition.

C’est un algorithme de calcul qui transforme une séquence d’entrée $\{x_n\}$ en une séquence de sortie $\{y_n\}$. Cette transformation s’appelle filtrage numérique $\{y_n\} = F(\{x_n\})$

Trois opérateurs entrent dans cette transformation :
- addition algébrique de séquences ;
- multiplication par un scalaire ;
- retard d’une séquence.



L’unité de calcul a un nombre d’instructions réduit. Ces opérations doivent être rapides.

Utilisation de processeurs à structure RISC : Reduced Instruction Set Computer.

Utilisation de processeurs spécialisés DSP : Digital Signal Processor.

Propriétés :
- linéarité ;
- invariance temporelle (quelque soit l’instant on a la même réponse à une excitation retardée).
- causalité (la réponse ne dépend que de ce qui s’est passé avant).

3.2. Equations de récurrence.

On distingue deux catégories de systèmes numériques :

- **les systèmes non récursifs ou à réponse impulsionnelle finie (RIF)** : une valeur de sortie y_n est obtenue par une sommation pondérée d’un nombre fini de valeurs d’entrée représentant les échantillons du signal à filtrer :

  $$y_n = a_n.x_n + a_{n-1}.x_{n-1} + ... + a_{n-M+1}.x_{n-M+1} \quad (1)$$

  Ils sont toujours stables.

- **les systèmes récursifs ou à réponse impulsionnelle infinie (RII)** : une valeur de sortie y_n est obtenue par une sommation pondérée d’un nombre fini de valeurs d’entrée représentant les échantillons du signal à filtrer et de valeurs de sortie précédentes :

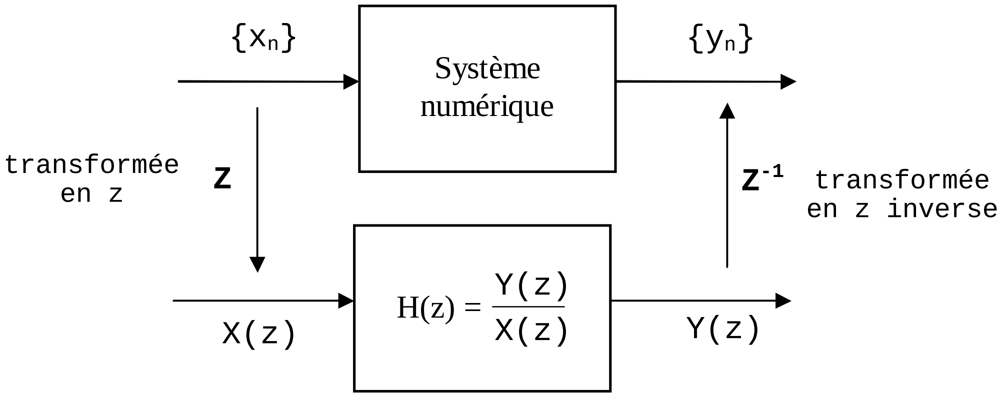
  $$y_n = a_n.x_n + a_{n-1}.x_{n-1} + ... + b_0.y_{n-1} + b_1.y_{n-2} + ... \quad (2)$$

  Ils peuvent être instables.

Les équations (1 et 2) précédentes sont appelées **équations de récurrence** des filtres.

3.3. Fonction de transfert en z.

La fonction de transfert H(z) d'un filtre numérique est la transformée en z de sa réponse impulsionnelle.



H(z) permet de :

- prévoir le comportement du filtre : réponse impulsionnelle, indicielle, ... ;
- connaître la stabilité du système : stable si les pôles de H(z) sont dans le cercle unité (|z| < 1) ;
- connaître le comportement fréquentiel du filtre :

  $H(p) \rightarrow p = j\omega \rightarrow \underline{H}(j\omega) \rightarrow$ Bode

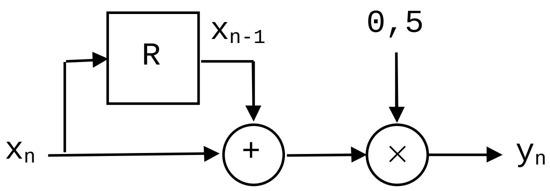
  $H(z) \rightarrow z = e^{pT_e} \rightarrow z = e^{j\omega T_e} \rightarrow \underline{H}(j\omega) \rightarrow$ Bode

3.4. Etude d'un système non récursif.

a) Equation de récurrence.

Considérons le filtre d'équation de récurrence $y_n = \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}$,

dont la symbolisation est :

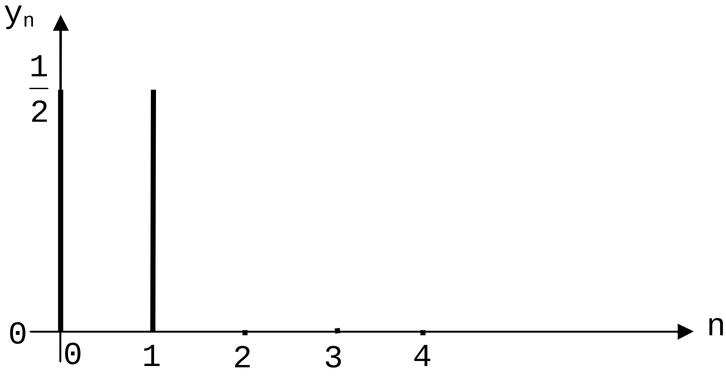


b) Réponse impulsionnelle.

On dresse un tableau de valeurs de la forme :

n	-2	-1	0	1	2	3
$x_n = \delta_n$	0	0	1	0	0	0
$y_n = h_n$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0

On remarque que la réponse impulsionnelle est finie (filtre RIF) et $y_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$:
le système est stable.



c) Fonction de transfert H(z).

On peut la déterminer à partir de la réponse impulsionnelle ou à partir de l'équation de récurrence.

- A partir de la réponse impulsionnelle :

$$H(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.z^{-1}$$

$$= \frac{1 + z^{-1}}{2}$$

- A partir de l'équation de récurrence :

$$y_n = \frac{1}{2}.x_n + \frac{1}{2}.x_{n-1}$$

$$Y(z) = \frac{1}{2}.X(z) + \frac{1}{2}.X(z).z^{-1}$$

D'où :

$$Y(z) = \frac{1}{2}.X(z).(1 + z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{2}$$

d) Etude fréquentielle.

$H(z) = \dfrac{1 + z^{-1}}{2}$ d'où :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{jwT_e}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos wT_e + j.\sin wT_e\right)$$

- De module :

$$H = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 + \cos wT_e\right)^2 + \sin^2 wT_e}$$
$$H = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \cos^2 wT_e + 2.\cos wT_e + \sin^2 wT_e}$$

$$H = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2.\cos wT_e} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 + \cos wT_e} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2.\cos^2\frac{wT_e}{2}} = \left|\cos\frac{wT_e}{2}\right|$$

Soit :

$$H(f) = \left|\cos\frac{p.f}{f_e}\right|$$

- <u>D'argument :</u>

$\varphi = Arg(\underline{H}) = -\tan^{-1}\dfrac{\sin wT_e}{1 + \cos wT_e}$

or, $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$ et sin 2a = 2.sina.cosa.

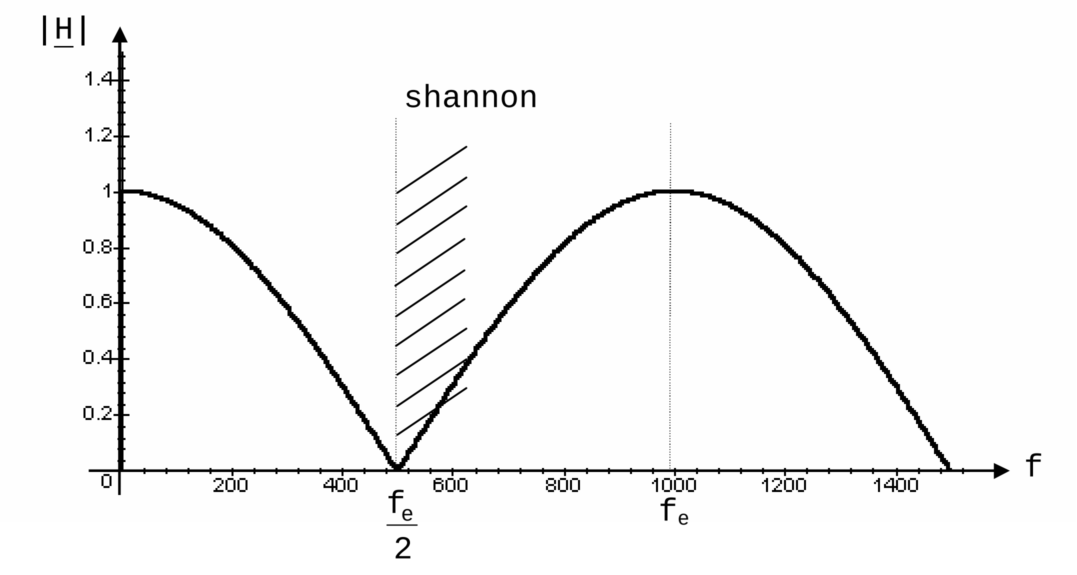
d'où :

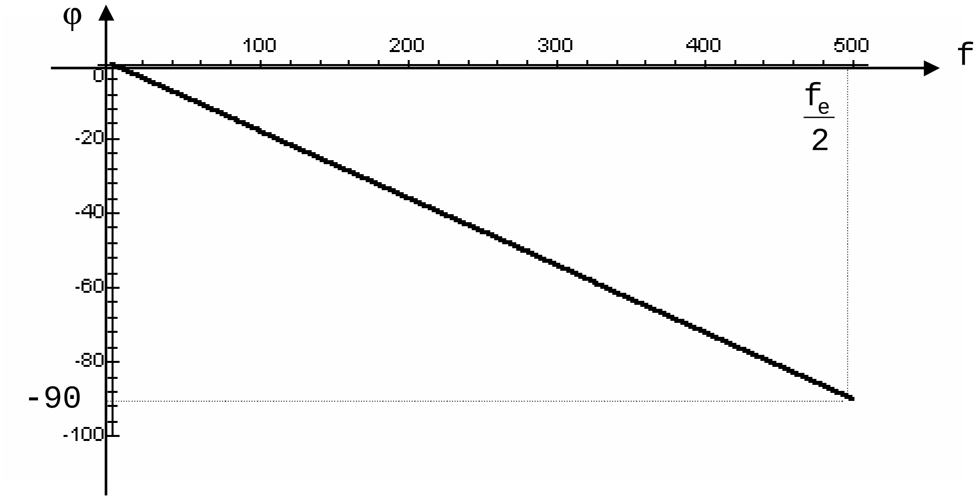
$$\varphi = -\tan^{-1}\frac{2\sin\frac{wT_e}{2}.\cos\frac{wT_e}{2}}{2\cos^2\frac{wT_e}{2}} = -\tan^{-1}\frac{\sin\frac{wT_e}{2}}{\cos\frac{wT_e}{2}} = -\tan^{-1}\tan\frac{wT_e}{2}$$

d'où :

$$\varphi = -\frac{wT_e}{2} = -\frac{p.f}{f_e}$$

Dessinons les allures :





e) Conclusion.

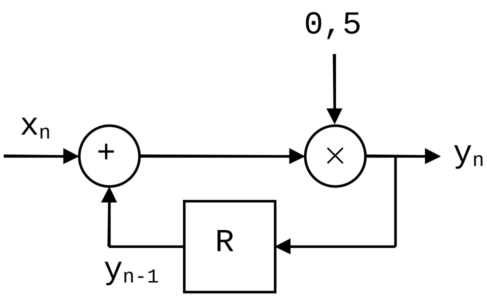
Il s'agit d'un filtre passe-bas numérique pour f < $\frac{f_e}{2}$ à phase linéaire, de fréquence de coupure à -3 dB $f_c = \frac{f_e}{4}$. Pour changer f_c, il suffit de modifier la fréquence d'échantillonnage ce qui peut être fait par logiciel.

3.5. Etude d'un filtre récursif.

a) Equation de récurrence.

Considérons le filtre d'équation de récurrence $y_n = \frac{x_n + y_{n-1}}{2}$, dont la

symbolisation est :

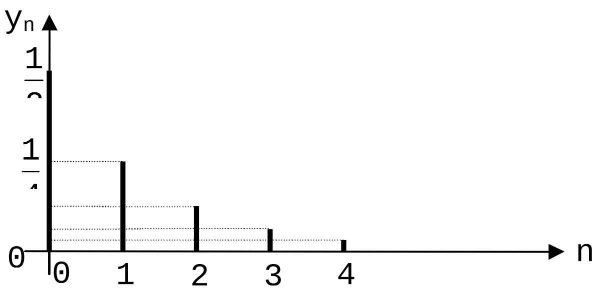


b) Réponse impulsionnelle.

On dresse un tableau de valeurs de la forme :

n	-2	-1	0	1	2	3
$x_n = \delta_n$	0	0	1	0	0	0
$y_n = h_n$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

On remarque que la réponse impulsionnelle est infinie (filtre RII) et $y_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$:
le filtre est stable.



c) Fonction de transfert H(z).

On peut la déterminer à partir de la réponse impulsionnelle ou à partir de l'équation de récurrence.

- A partir de la réponse impulsionnelle :

$$H(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.z^{-1} + \frac{1}{8}.z^{-2} + \frac{1}{16}.z^{-3} + \ldots$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}.z^{-1} + \frac{1}{4}.z^{-2} + \frac{1}{8}.z^{-3} + \ldots\right]$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}.z^{-n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^{-1}}{2}\right)^n$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{z^{-1}}{2}} = \frac{1}{2 - z^{-1}} = \frac{z}{2.z - 1}.$$

- A partir de l'équation de récurrence :

$$y_n = \frac{1}{2}.x_n + \frac{1}{2}.y_{n-1}$$
$$Y(z) = \frac{1}{2}.X(z) + \frac{1}{2}.Y(z).z^{-1}$$

D'où :

$$Y(z).\left[1 - \frac{1}{2}.z^{-1}\right] = \frac{1}{2}.X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}.z^{-1}} = \frac{1}{2 - z^{-1}}$$

Remarque : le filtre est stable car le pôle est $z = \frac{1}{2}$ et il se trouve dans le cercle unité.

d) Etude fréquentielle.

$$H(z) = \frac{z}{2.z - 1} \text{ d'où :}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{e^{jwT_e}}{2.e^{jwT_e} - 1} = \frac{e^{jwT_e}}{2.(\cos wT_e + j.\sin wT_e) - 1}$$

- De module :

$$H = \frac{1}{\sqrt{(2.\cos wT_e - 1)^2 + 4.\sin^2 wT_e}} \qquad \text{Car } \left|e^{jq}\right| = 1$$

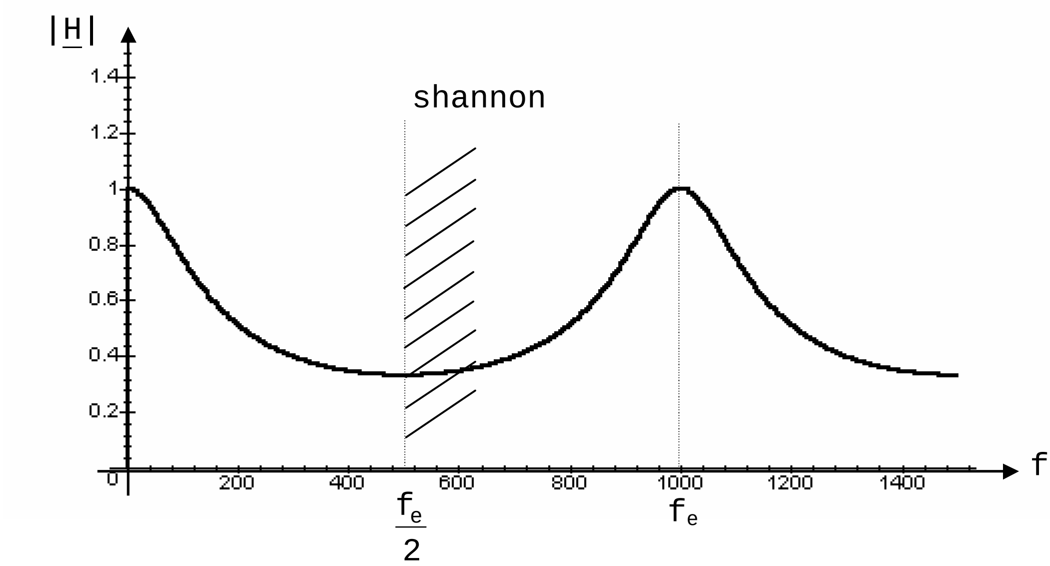
$$\underline{H} = \frac{1}{\sqrt{4.\cos^2\omega T_e - 4.\cos\omega T_e + 1 + 4.\sin^2\omega T_e}}$$

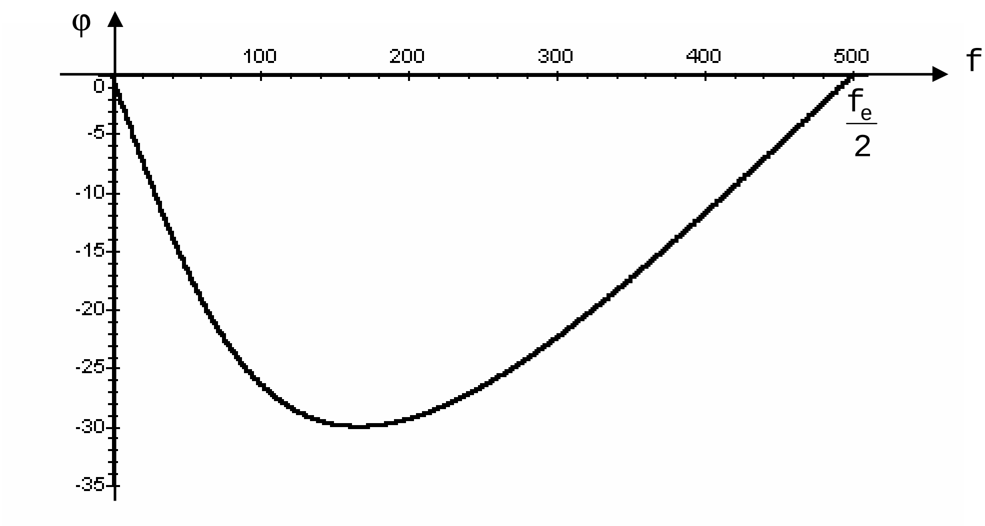
$$\underline{H} = \frac{1}{\sqrt{5 - 4.\cos\omega T_e}} = \frac{1}{\sqrt{5 - 4.\cos\frac{2\pi f}{f_e}}}$$

- D'argument :

$$\varphi = \mathrm{Arg}(\underline{H}) = \frac{2\pi f}{f_e} - \tan^{-1}\frac{2.\sin\omega T_e}{2.\cos\omega T_e - 1}$$

Dessinons les allures :





e) Conclusion.

Il s'agit d'un filtre passe-bas numérique pour $f < \frac{f_e}{2}$.

IV. SABILITE D’UN SYSTEME NUMERIQUE.

CRITÈRE DE JURY POUR UN SYSTÈME ASSERVI NUMÉRIQUE

Ce critère permet de conclure à la stabilité, ou à l'instabilité, d'un système asservi à retour unitaire à partir des coefficients de son équation caractéristique écrite en Z.

Énoncé: soit un système asservi de fonction de transfert $F(Z) = \dfrac{Num(Z)}{Dén(Z)}$

Avec $Dén(Z) = a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + a_{n-2} Z^{n-2} + ... + a_1 Z + a_o$

Il faut établir le tableau suivant:

		Z^0	Z^1	Z^2		Z^{n-j}		Z^{n-1}	Z^n
Poser	1	a_0	a_1	a_2		a_{n-j}		a_{n-1}	a_n
	2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}		a_j		a_1	a_0
Calculer	3	b_0	b_1	b_2		b_{n-j}		b_{n-1}	
	4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}		b_j		b_0	
	5	c_0	c_1	c_2			c_{n-2}		
	6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}			c_0		
	$2n-5$	p_0	p_1	p_2	p_3				
	$2n-4$	p_3	p_2	p_1	p_0				
	$2n-3$	q_0	q_1	q_2					

avec: $b_j = a_0 a_j - a_n a_{n-j}$; $c_j = b_0 b_j - b_{n-1} b_{n-j-1}$

$q_0 = p_0 p_0 - p_3 p_3$; $q_1 = p_0 p_1 - p_3 p_2$; $q_2 = p_0 p_2 - p_3 p_1$

Jury a établi que le système est stable si, pour an > 0, les trois conditions suivantes sont réunies:

- en remplaçant Z par 1 : le dénominateur Dén (1) est positif;
- en remplaçant Z par -1 : le dénominateur Dén (- 1) est positif pour n pair,
  le dénominateur Dén (-1) est négatif pour n impair.

V. PRÉCISION EN RÉGULATION NUMÉRIQUE

La méthode est exactement la même; en régime permanent la valeur de e peut être déterminée à l'aide du théorème de la valeur finale:

$$\varepsilon = \lim_{t\to\infty}\big(\varepsilon(t)\big) = \lim_{Z\to 1}\left[\frac{1-Z^{-1}}{Z^{-1}}\,\varepsilon(z)\right]$$

$$C(z)H(z) = \frac{K}{(Z-1)^{\alpha}}\,T(z) \text{ avec K : constante ; T(1) = 1 ;}$$

α : nombre d'intégrations, ou nombre de pôles égaux à 1.

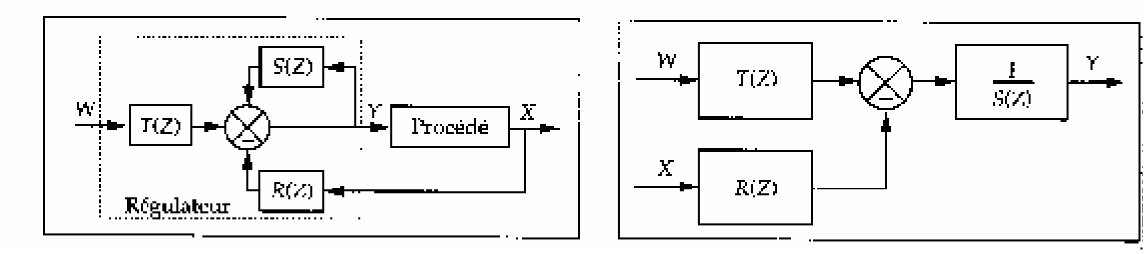
	Échelon de position $w(t) = A\,u(t)$	Échelon de vitesse $w(t) = b.t.u(t)$	Échelon d'accélération $w(t) = c.t^2.u(t)$
$\alpha = O$	$\varepsilon s = \dfrac{A}{1+K}$	$\varepsilon v \to \infty$	$\varepsilon a \to \infty$
$\alpha = 1$	$\varepsilon s = 0$	$\varepsilon v = \dfrac{bTe}{K}$	$\varepsilon a \to \infty$
$\alpha = 2$	$\varepsilon s = 0$	$\varepsilon v = 0$	$\varepsilon a = \dfrac{cT_e^2}{K}$

La précision ainsi calculée ne tient compte d'aucune saturation en régime permanent. Seul l'échelon de position en entrée ne provoque pas de saturation et l'écart statique calculé peut toujours être mesuré en pratique. Lorsque les calculs de εv et εa conduisent à une valeur de plus de 100 %, ils ne donnent qu'un aperçu de l'aptitude du système asservi à suivre le signal d'entrée imposé.

VI. RÉGLAGE PAR RÉGULATEUR PID NUMÉRIQUE R-S-T

6.1. Principe d'un régulateur R-S-T

C'est un régulateur PID numérique dont la commande est une moyenne, pondérée par les coefficients du régulateur, de la sortie mesurée X aux instants t, t - 1, t - 2, ..., t - n, des valeurs précédentes de la commande Y aux instants t - 1, t - 2, ..., t - m, et de la consigne W .



La structure d'un tel régulateur comprend trois fonctions R-S- T et l'équation de la commande s'écrit : $Y(z) = -\dfrac{R(z)}{S(z)}.X(z) + \dfrac{T(z)}{S(z)}W(z)$

avec $R(z) = T(z) = r_0 + r_1.Z^{-1} + r_2.Z^{-2}$ et $S(z) = (1- Z^{-1}).(1 + s_1.Z^{-1})$.

La fonction de transfert échantillonnée en chaîne ouverte de l'ensemble CNA (convertisseur numérique analogique), BOZ (bloqueur d'ordre zéro), procédé continu et CAN (convertisseur analogique numérique), est notée : $H_b(z) = \dfrac{B(z)}{A(z)}$

La fonction de transfert en chaîne fermée est : $F(z) = \frac{B(z)R(z)}{A(z)S(z) + B(z)R(z)} = \frac{B(z)R(z)}{P(z)}$

Où $P(z) = A(z)S(z) + B(Z)\,R(Z) = 1 + P_1 Z^{-1} + P_2 Z^{-2} + ... + P_n Z^{-n}$ définit les pôles du système en chaîne fermée.

Les performances désirées en chaîne fermée sont exprimées en terme de pôles souhaités. Le plus souvent P(Z) est un polynôme du 2e degré correspondant à la discrétisation d'un système continu du 2e ordre dont le coefficient ξ et la pulsation ωn sont fixés.

6.2. Méthode de calcul des paramètres du régulateur PID numérique R-S-T

- Déterminer le modèle échantillonné du procédé discret.
- Spécifier les performances en chaîne fermée et déterminer P(z).
- À partir de l'équation P(z) = A(z)S(z) + B(z)R(z), calculer les coefficients des polynômes R(z), S(z) et T(z). Ce sont les paramètres du régulateur PID numérique R-S-T.
- Les éventuels dépassements indésirables en chaîne fermée peuvent être éliminés en remplaçant T(z) = R(z) par T(z) = R(1).

Cette méthode de calcul ne s'applique qu'à un procédé continu modélisable par une fonction de transfert de degré égal à 2 au maximum, avec ou sans retard pur. Le retard pur du procédé doit être cependant inférieur à une période d'échantillonnage.

VII. TRANSFORMEE BILINEAIRE

On peut déterminer la fonction de tranfert en Z à partir d'une fonction de transfert en p (variable de Laplace) en utilisant la transformée bilinéaire suivante : $p \leftrightarrow \frac{2}{Te} \times \frac{Z-1}{Z+1}$