現役東大院生が教える高校数学の考え方

tarukosu

平成 26 年 9 月 10 日

目 次

1　現役東大院生が教える高校数学の考え方

1.1　はじめに

1.1.1　この本について

この本では，高校数学の問題に対する考え方，解き方を解説します．高校数学を解説した本はたくさん出版されていると思うかもしれませんが，本書の内容はかなり違います．一般的な参考書では個別の分野・個別の問題に関してその解き方や解説が書かれています．一方，本書では個別の分野に絞らず，すべての数学の問題に通じる根本的な考え方，解き方を解説します．

高校数学について，その根本的な考え方を解説した本というのは私はほとんど見たことがありません．また，学校や塾などでもこれらの部分を解説してくれる先生はあまりいないのではないでしょうか？少し大げさかもしれませんが，この根本的な考え方というのを自然に身につけている人が数学が得意な人，数学のセンスがある人，と言われている気がします．逆に言えば，考え方を身に付ければ，だれでも「数学のセンスがある人」になれるということです．本書は，この本を読んでくださった方が数学に対する考え方を身に付けられることを目的としています．

1.1.2　この本の作者について

経歴を全く知らない作者が書いた本では説得力に欠けてしまうので，少しだけ私の話をさせていただきます．

- 2006 年 4 月 大阪府立天王寺高校理数科入学
- 2009 年 3 月 大阪府立天王寺高校理数科卒業
- 2009 年 4 月 東京大学理科一類入学
- 2013 年 3 月 東京大学卒業
- 2013 年 4 月 東京大学大学院情報理工学系研究科入学

高校の時は数学オリンピックの本選を突破し，国際数学オリンピックの日本代表を決める合宿に参加しました．現在は，東京大学大学院に所属し，主にプログラミングを行なっています．

1.1.3　この本を書くきっかけについて

大学への入学後，高校数学の根本的な考え方（本書で伝えたいこと）を高校生に教えたいと思い，個別指導塾のアルバイトを始めました．ですが，個

別指導塾では教える時間数が圧倒的に足りないため，個々の分野を教えることで精一杯になってしまいました．さらに，もし教えることが出来たとしてもせいぜい数人の生徒に対してです．これではダメだ，ということで本にして伝えるのが一番良いと感じました．

2 つ目のきっかけは,『数学ガール』に出会ったことです.『数学ガール』は今まで読んだどの本よりも，数学を面白く伝えてくれました．まだ読んだことの無い方は是非読んでみてください．その『数学ガール』の作者の結城浩さんが，Web 上で数学のお話をいろいろと発信されていることを知り，私も Web 上で発信したいと思うようになりました．

最後のきっかけは，ポリア著『いかにして問題をとくか』を読んだことです.『いかにして問題をとくか』では，数学の考え方，解き方が解説されています．とてもいい本なのですが，古い本なので文章がすこし読みにくいです．文章が読みにくいために内容が多くの人に伝わっていない，というのはとてももったいないことだと感じました．そこで，文章をわかりやすく書き，解説したいと思うようになりました．そのため，本書の内容は『いかにして問題をとくか』の内容を踏まえた上で，私自身の考えを付け加えたものとなっています．

1.1.4 この本に対するご意見

この本もしくは筆者に対するご意見・ご感想・ご質問などがありましたら，email または twitter でお送りください．面白かった，よくわからなかった，など一言だけでもいいので，感想を聞かせていただけるととても嬉しいです．よろしくお願いします．

- email: tarukosu0(アットマーク)gmail.com
- twitter: @tarukosu

1.1.5 この本のライセンスについて

2　数学とは

本章では，用語に対する簡単な定義を行った上で，数学に対する基本的な考え方を解説します．また，問題を解く際の全体の流れを説明します．各ステップごとの具体的な内容は，2 章以降で解説しています．

2.1　用語の定義

まず始めに，本書で用いる用語の定義をしておきます．本当の定義とは異なる可能性があるので注意してください．

数学　本書では，**数学**という言葉は基本的には**高校数学**のことを言っていると思ってください．試験でいい点数をとることが目標となっています．

解答　解答用紙に書くすべての記述

解　問題で求められているものに対する答え

具体例を挙げてみます．
問題： $x^2+2x+1=0$ を満たす x を求めよ
に対する解答は次のようになります．

$$
\begin{aligned}
x^2+2x+1&=0\\
(x+1)^2&=0\\
x&=-1
\end{aligned}
$$

また，解は次のようになります．$x=-1$

2.2　数学は簡単？

数学という科目は他の科目に比べて簡単でしょうか？ 難しいでしょうか？考えは人それぞれですが，私は数学は**比較的簡単**だと思います．その理由は，数学では正解と間違いの線引きがはっきりしているからです．世界中の人が同じ問題に答えたとすると，解答は人それぞれですが，正しい解は必ずただ一つに決まります．

その一方， 国語や英語，社会などでは「間違っているとは言えないけれど正解（満点）ではない」という解答がたくさんあります．そのため，完璧な正解を見つけることはとても難しいです．

それでは，数学において，正解を見つけるために重要なポイントはなんでしょうか？それは**間違えないこと**です．数学では**間違いでない ＝ 正解**となるからです．

「そんなこと言われても間違ってしまうんだからしょうがない」「間違えないなんて難しい」と思われた方も多いかもしれません．もちろん「これで説明終わり」というわけではなく，本書では間違えないための考え方やテクニックを解説していきます．本書を読み進めていけば数学は簡単ということを納得してもらえるのではないかと思います．

2.3　間違えないためには

数学の問題は間違えなければ正解できると書きました．では間違えないためにはどうすればいいのでしょうか？数十行にわたる解答を間違えずに書くことはとても難しく思えます．

しかし，**上から順番に，一行ずつしっかりと確認**していけばそれほど難しいことではないのです．数学の解答というのは，小さな論理の積み重ねです．例えば以下のような流れになります．

- A ならば B
- B ならば C
- C ならば D

この 3 つの文章が全て正しいとすると，これらを組み合わせた「A ならば D」は必ず正しくなります．つまり，全体が正しいことを確認するには，それらを構成する個々の文章が全て正しいことを確認すれば良い，ということです．

では，もし「B ならば C」という内容に誤りがあったらどうなるでしょうか？この場合，その後「C」を用いて導いた全ての文章・式は誤りとなってしまいます．テストの解答の場合には，誤った文章を書いてしまうと以降どれだけ頑張って解答を書いていても全く点数になりません．

間違えないための，より詳しいテクニックについては 4 章, 5 章に記載しています．ここでは練習として，有名な証明「1+1=1」について考えてみましょう．(もちろん間違った証明です)

$$
\begin{aligned}
A =& 1 \quad \text{とする} \\
A \times A &= A \\
A \times A - 1 &= A - 1 \\
(A+1)(A-1) &= A - 1 \\
A + 1 &= 1 \\
1 + 1 &= 1
\end{aligned}
$$

証明できてしまいました．どこが間違っていたかわかりましたか？

「全体的に間違っている」,「なんとなくおかしい」などと感じてしまってはいけません．数学では，“少し間違っている” ということはありえないからです．必ずどこかまでは正しくて，どこかから間違っています．

詳しく見ていきます．

- 1 行目は定義なので問題ないです．

- 2 行目は等式の両辺に同じものをかけても等式は成り立つので正しいです．

- 3 行目，これも等式の両辺から同じものを引いているので成り立ちます．

- 4 行目は因数分解です．これも正しいです．

- 5 行目は等式の両辺を $A-1$ で割っているので正しい，と言ってしまいそうになりますがよく考えてください．割り算には 0 で割ってはいけないという条件があります．実は $A-1=0$ なので，ここで 0 で割ってしまっていた，というわけです．

つまり 5 行目で 0 で両辺を割っていることが誤りとなります．

今の例は比較的易しかったですが，どんなに難しい問題でも考え方は同じです．解答を 1 行ずつしっかりと確認していき，誤りのない行を積み重ねていくことで，間違えない解答を作ることができるのです．

2.4　解答とは何を書くべきか？

いきなり質問ですが，みなさん答案用紙には何を書いていますか？何を書くべきだと思いますか？

一番多い答えが「途中経過」ではないでしょうか？

しかしそれは間違っています．答案用紙には自分の書いた解が正しいことを示す**証明**を書くべきなのです．

証明といっても難しく考える必要はありません．1 行ずつ正しいことを書いていけばそれが証明になります．前節で説明した「間違えない解答」とかなり近いものです．証明の書き方について，詳しくは 4 章で説明します．

さて，どうして**証明**を書く必要があるのでしょうか？何度も書いている通り，数学は論理的な学問です．解だけが重要なのではありません．解が正しいということが証明されて始めて，その解には意味があるのです．

きちんとした証明が書かれていれば，その解答には文句のつけようがありません．どんなに問題作成者の意図と違っていても，それは間違いなく正しい解になるのです．

一方で，どれだけ途中経過を書いても，論理に飛躍や誤りがあった場合，その解答は意味のないものになってしまいます．テストの場合，解は合っているのに点数がもらえないということが起こってしまうのです．

2.5 問題を解く流れ

本書では，問題を解く流れを以下の 5 つに分類し，それぞれの章で解説しています．どの章から読み進めてもかまいません．

- 2 章: 問題を理解する
- 3 章: 計画を立てる
- 4 章: 解答を書く
- 5 章: 答えを検討する
- 6 章: 次へと活かす

3　問題を理解する

この章では，問題を見てまず行うべきことを解説します．

3.1　条件を理解する

問題を解くためには，問題の条件を正しく理解することが大事です．テストになるとつい焦ってしまい，問題文を勘違いしてしまうことがあるのですが，そうするとその問題について考えたことや解答がすべて無駄になってしまうため非常にもったいない結果となってしまいます．落ち着いて問題文をよく読み，正しく理解するように意識してください．

問題文を正しく理解したら，次は問題の条件を箇条書きにすることをお勧めします．数学の問題は，基本的には問題の条件をすべて使わなければ正しい解を導くことはできません．問題文を文章のまま理解しようとすると，条件を使い忘れたり，どの条件をすでに使ったかがわからなくなってしまいます．そのため，問題の条件を箇条書きにし，それらすべてを使ったかどうかチェックしましょう．

3.2　解を知る

問題文の条件をスタートだとすれば，解はゴールにあたります．ゴールを正しく知らないままでは，スタートすることはできません．

まずは，何を解とすればよいのか正しく理解してください．それは x の値かもしれませんし，角度 θ かもしれません．次に，解を導くためには何を求めればよいのかを考えてください．つまり解の一歩手前です．解の一歩手前がはっきりしているか，よくわからないかは問題によって違ってきます．よくわからなければ無理に考える必要はありません．ですが，もしはっきりしていれば，解答を考える上でとても参考になります．

4　計画を立てる

この章では，どのような解法で問題を解いていくか，という計画を立てるステップについて解説します．

4.1　パターンを適用する

問題の解き方はどうやって見つければよいのでしょうか？全く新しい解法を自分で見つけることは不可能に近いです．そのため，公式や，教科書・参考書で解説されている解法といった，解き方のパターンを適用して解き方を見つけます．

パターンを適用するために重要なことは 3 つあります．

1 つ目は，多くのパターンを知っていることです．どうやってパターンを身に付けるかについては 6 章で説明するので，ここでは説明を省略します．

2 つ目は，パターンを正しく使うことです．

そして 3 つ目は，パターンを広範囲に適用することです．

4.1.1　パターンを正しく使う

パターンを正しく使うために必要なことは，以下の 2 つです． - そのパターンがどういう条件で使えるのかを理解する - 何を用いて何を求めることができるのかを理解する

パターンがどういう条件で使えるのか　パターンには必ず，それを使うことの出来る条件というものがあります．例えば，三平方の定理が成り立つのは直角三角形の場合だけです．また，確率の加法は各事象が排反でなければ成りたちません．

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$(\text{事象 } A, B \text{ は排反})$$

条件を考えずにやみくもにパターンを当てはめてしまうと，誤った結果を出してしまいます．本当にそのパターンを使えるのかよく確認してください．

何を用いて何を求めることができるのか　言い換えれば,「どういう情報を知っている場合に，どういう値を得ることができるのか」ということです．これを理解しておけば，いま解いている問題にそのパターンが役に立つかを判断できます．

先ほどと同じ例でいえば，三平方の定理は 2 辺の長さを知っている場合に，もう 1 辺の長さを得ることができます．ですが，3 辺の長さを既に知っている

場合には役に立ちません．また，確率の加法は，各事象に対する確率を知っている場合に，それらのどちらかが起こる確率を得ることができます．ですが，その問題に $P(A \cup B)$ が必要ない場合には役に立たないでしょう．

4.1.2　パターンを広範囲に適用する

3 つ目の重要なことは，パターンを広範囲に適用することです．難しい問題ほど，どのパターンを使って解けばいいかということが分からないようになっています．自分が知っているいろいろなパターンを，その問題に使えないか考えてみてください．

例として，因数定理を考えてみます．因数定理によれば，多項式 $f(x)$ に対して $f(\alpha) = 0$ を満たす α が存在すれば，$f(x)$ は $x - \alpha$ を因数にもちます．

この定理は 3 次方程式を解くために利用できます．

$$x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = 0$$

を解く場合，

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 2$$

とおくと，以下のように $f(-2) = 0$ が成りたちます．

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 + 4(-2)^2 + 3(-2) - 2 \\ &= -8 + 16 - 6 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって，$f(x)$ は $(x + 2)$ を因数に持つため，以下のように因数分解できることがわかります．

$$f(x) = (x + 2)(x^2 + 2x - 1)$$

したがって，解は以下のように求まります．

$$x = -2, -1 \pm \sqrt{2}$$

また，因数定理は以下のような多項式の因数分解にも利用できます．

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^2b - b^2c - c^2a$$

これを，a についての多項式と見て，

$$f(a) = ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^2b - b^2c - c^2a$$

とおきます．すると，a に b を代入した値である，$f(b)$ は以下のようになります．すこしややこしいですが，$f(a)$ では a が変数，b, c は定数だと思うと理解できるはずです．

$$\begin{aligned} f(b) &= b^3 + bc^2 + cb^2 - b^3 - b^2c - c^2b \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって，$f(a)$ は $(a-b)$ を因数に持つことがわかります．よって，以下のような式変形で因数分解が可能です．

$$\begin{aligned} &ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^2b - b^2c - c^2a \\ =&ca^2 - ba^2 + b^2a - c^2a + bc^2 - b^2c \\ =&(a-b)(ca - ba - c^2 + bc) \\ =&(a-b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

このように，見た目は異なっていても，パターンを当てはめることができる場合はたくさんあります．問題の本質をとらえ，パターンを当てはめることが重要なのです．

4.2 試してみる

パターンを当てはめることが出来れば，解法が見えてきます．

ですが，解法が思いついたからと言って，すぐに解答用紙に書き始めてはいけません．なぜなら，その解法で上手くいくかどうかはまだ分からないからです．

まずは，計算用紙を使って問題を解いていきます．さらさらと解き進められて，解までの道筋がみえた場合は成功です．ここで初めて解答用紙に解答を書き出します．詳しくは 4 章を読んでください．

もし，途中で詰まってしまい，解まで辿りつけないようなら方向転換が必要かもしれません．別のパターン，別の解法が使えないか考えてみましょう．

解法を試してみる際には，それを使えば必ず解を導くことができる，という確信はなくてかまいません．むしろ，分からないからこそ試してみる必要があるのです．実際に計算を行なってみることで，その解法を使えるかどうかが分かってきます．

解法を複数思いつく場合もあるでしょう．例えば，図形問題であれば，幾何的に解く方法，座標をおいて方程式で方法，ベクトルで解く方法，という複数の方法が考えられます．これらの方法を少しずつ試してみれば，どの方法を使えば解きやすそうかが分かります．解きやすそうな方法が見つかれば，その方法を使ってさらに解き進めればいいというわけです．

4.3 必要条件と十分条件

必要条件・十分条件という単語を聞いたことがあるでしょうか？高校数学では比較的早い段階で習う分野ですが，あまりよく理解できていない人が多い気がします．ですが，必要条件・十分条件という考え方はこの分野の問題に対してだけではなく，あらゆる数学の問題を解く上で大変重要なものなのでしっかり理解してほしいです．

そのため，この節では必要条件・十分条件について解説します．

定義は以下のようなものです．

$p \Rightarrow q$ （ p ならば q ）であるとき，

p は q であるための十分条件

q は p であるための必要条件

もし，p や q だとよくわからないという場合には， p に $x = 1$, q に $x^2 = 1$ を当てはめて考えてみてください．

ですが，これをただ暗記するだけでは理解したことにはなりませんし，よく間違えてしまいます．

必要条件・十分条件という名前がつくのにはちゃんと理由があります．

まず,「p は q であるための十分条件」について見ていきます．

p は q であるための〜条件というのは，言い換えれば，**q が成り立つためには，p という条件はどういう役割なのか**ということを表しています．

$$p \Rightarrow q$$

というのは p が成り立つとき q は成り立つ，という意味です．このときに，q が成り立つにはどういう条件が必要かな，と考えると p という条件が成り立っていればそれで十分（それさえあれば q が成り立つ）と言えます．

そのため，

$$p \text{ は } q \text{ であるための十分条件}$$

と呼ぶのです．

つぎに，「q は p であるための必要条件」について見ていきます．

$$p \Rightarrow q$$

は対偶を取ると

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p} \quad (q \text{ でないなら } p \text{ でない})$$

となります．

このとき p が成り立つにはどういう条件が必要かな，と考えると，「q でないなら p でない」なので少なくとも q が成り立っている必要があります．ただし「q が成り立つと必ず p が成り立つか」と言われるとそうではありません．

つまり，p が成り立つには q という条件が成り立つことが必要であるため，

$$q \text{ は } p \text{ であるための必要条件}$$

となります．

以上の説明がよくわからなかった場合には，p に $x = 1$, q に $x^2 = 1$ といった，具体的な式を当てはめて読んでみてください．

4.4　必要×十分

$$p \Rightarrow q$$
$$p \Leftarrow q$$

が両方とも成り立つ時，

$$p \iff q$$

と表し，p **と** q **は同値である**，または p **は** q **であるための必要十分条件である**と呼びます．

この**同値**という考え方は問題を解く上でとても重要です．なぜかというと，数学の解というのは問題と同値なものだからです．

具体的な例を見ていきます． 簡単な例ですが，次のような問題文を考えます.

$$x(x-1)=x \text{ を満たす } x \text{ を求めよ}$$

誤った答え 1

$$\begin{aligned} x(x-1) &= x \\ x-1 &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

2 行目の $x-1=1$ というのは 1 行目に対する十分条件ですが必要条件ではありません.

$$x(x-1)=x \quad \Leftarrow \quad x-1=1$$

は正しいが,

$$x(x-1)=x \quad \Rightarrow \quad x-1=1$$

は誤りだからです.

このように，問題に対して十分条件（必要十分条件ではない）を考えてしまうと，求まった解は確かに問題の条件を満たすけれども他の解を見落としている，ということになります.

誤った答え 2

$$x(x-1)=x$$

左辺，右辺の正負が一致するには,

$$x \geq 0$$

この場合は，$x \geq 0$ というのは 1 行目に対する必要条件ですが十分条件ではありません.

このように，問題に対して必要条件だけを考えてしまうと，求まった解には解が含まれているけれども絞りきれていない（解でないものも含まれている）ということになります.

正しい解

$$
\begin{aligned}
x(x-1) &= x \\
x(x-2) &= 0 \\
x &= 0,\ 2
\end{aligned}
$$

この場合，2 行目，3 行目ともに上の行と同値な数式です．そのため，問題と同値な解を得ることができています．

今回は簡単な例だったので，正しい解のように解けることが当たり前の様に感じるかもしれません．ですが，問題が少し難しくなると，気づかぬうちに必要条件のみ，または十分条件のみを考えてしまっていることがあります．以下のように，先ほどの例の x を $\cos x$ に置き換えた問題の場合，誤りは増えてしまうでしょう．

$$\cos x\ (\cos x - 1) = \cos x$$

問題を解く際には，必要条件・十分条件を意識して，**同値**なものを求められているかに注意してください．

4.5　同値を意識する

前節では**解と問題は同値なもの**であることを説明しました．この節では問題を解いていく過程で同値を意識すれば，問題が解きやすくなることについて説明します．

問題の条件をいくつかに分解できる場合があります．

例として以下のような問題を考えます．

$$
\begin{aligned}
\text{関数}\ \ y = ax^2 + bx + c\ \ \text{が} \\
\text{点}\ (0,1), (1,6), (2,15)\ \text{を通るとき，} \\
a, b, c\ \text{の値を求めよ}
\end{aligned}
$$

この場合，問題の条件は，以下の 4 つに分割できます．

i. $y = ax^2 + bx + c$

ii. $x = 0,\ y = 1$

iii. $x = 1,\ y = 6$

iv. $x = 2,\ y = 15$

この条件の一部を同値なものに変形した場合，元の条件を考える代わりに変形後の条件を考えれば良くなります．

先ほどの例の場合には

$$
\begin{aligned}
&\text{i.}\quad y = ax^2 + bx + c \\
&\text{ii.}\quad x = 0,\ y = 1 \\
&\quad\Longleftrightarrow \\
&\text{i}'.\quad y = ax^2 + bx + 1 \\
&\text{ii}'.\quad c = 1
\end{aligned}
$$

と変形できます．このとき，$\mathrm{i}, \mathrm{ii}, \mathrm{iii}, \mathrm{iv}$ を考える代わりに $\mathrm{i}', \mathrm{ii}', \mathrm{iii}, \mathrm{iv}$ を考えればよいということです．

$\mathrm{i}', \mathrm{ii}', \mathrm{iii}, \mathrm{iv}$ に対して，i や ii の条件を考えても意味はありません．例えば，i' に $x = 0,\ y = 1$ を代入しても $1 = 1$ となってしまいます．

問題がなかなか解けないときには，すでに使われている条件をもう一度考えてしまっていることがよくあります．しかしこれは意味のないことで，まだ考慮していない条件を使わなければいけません．どの条件と同値になっているかを意識することで，次はまだ使っていない条件を使えばいいことがわかります．

5　解答を書く

この章では，解答の書き方について説明します．

5.1　証明の書き方

1 章「解答とは何を書くべきか」のページで書いたように，問題の解答には自分の出した解が正しいことの証明を書くべきです．

この節では，証明の書き方を解説します．

証明において必要なことは,「それぞれの文章・数式が正しいことが明らかである」ということです．大切なのは**明らかである**という部分で，単に正しいというだけでは不十分なのです．

正しいことが明らかであるというのはどういうことでしょうか？それは，解答を読んだときに文章・数式が正しいことが簡単に理解できるということです．もし，解答を読んだ時に「本当に正しいのかな？」と疑問を感じてしまう場合には，説明が足りていません．

具体例をあげて考えてみます．

問題

次の式を満たす x を求めよ．

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

良い証明

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &= 0 \\ (x+2)(x+1) &= 0 \\ x &= -1, -2 \end{aligned}$$

良くない証明

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &= 0 \\ x &= -1, -2 \end{aligned}$$

良い証明，悪い証明，両方とも解は同じです．どちらも，間違った式を書いているわけではありません．

ですが良くない証明の方では，$x=-1,-2$ となることが明らかではありません．良い証明の方では，$(x+2)(x+1)=0$ があることにより，$x+2=0$ または $x+1=0$ がいえるので，$x=-1,-2$ となることが明らかです．

これはとても簡単な例でしたが，どんなに複雑な問題でも正しいことが明らかな文章・数式を並べていくことで正しい証明というものが出来るのです．

5.2 正しい証明を書くポイント

この節では，正しい証明を書くためのポイントをより具体的に説明します．ポイントは，**計算はとばして論理をとばすな**です．

計算はとばす まずは,「**計算はとばす**」についてです．解答用紙を計算用紙がわりに使ってしまっている人が多いかと思います．しかし，そうすると解答用紙が計算で埋め尽くされて，ぐちゃぐちゃになってしまいがちです．

答案には当たり前の計算は書く必要はありません．計算は別の紙で行なって，ある程度省略して書くことが望ましいです．

ただし全部の計算を省略していいという訳ではありません．式変形において，当たり前ではない部分，というのは残す必要があります．

下の例を見てください．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^2+k\} \\
=&\sum_{k=1}^{n}\{k^2+2k+1+k\} \\
=&\sum_{k=1}^{n}\{k^2+3k+1\} \\
=&\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{3}{2}n(n+1)+n \\
=&\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)+\frac{3}{2}(n^2+n)+n \\
=&\frac{1}{3}n^3+2n^2+\frac{8}{3}n
\end{aligned}
$$

この数式で解答に書くべきなのはどの行でしょうか？1 行目から 3 行目への変形は展開しただけなので，当たり前の変形です．そのため 2 行目は省略しても問題ありません．4 行目から 6 行目も同様です．

それに対し，3 行目から 4 行目へは Σ が展開されて式が大きく変わっています．そのため，この部分は省略せずに解答に書いておくべきです．

論理をとばすな　続いて「**論理をとばすな**」の部分です．

よくやってしまいがちなのが，いきなり数式を書き始めてしまうことです．そうではなくて，数式の前に，「どうしてその数式がなりたつのか」「どうしてそう言えるのか」，という理由を書かないといけません．

理由が書かれていないと，その数式が成り立つことが明らかではありません．そのため，正しい証明にはならないのです．

また，理由をきっちり書くことで数式が本当に成り立つのか自分でも確認することができ，間違い防止にもつながります．間違いが起こりやすいのは次のような箇所です．

- 「(〜なので)A である」という文章
- 書き始めの数式（前に $=$ がついていない数式）

どちらの場合も，「自分の書いた文章や式が本当に合っているかな？」と自分自身でよく確かめることが重要です．

「〜なので」と書いたけれど〜の部分は正しいだろうか？
「〜なので A である」と書いたけれど A にはならない場合はないだろうか？
この数式が成り立つ理由を書いているだろうか？
書いている理由は正しいだろうか？

テストや入試でなければ，このようなことを考えるのは面倒だと思うかもしれません．しかし普段からやっていないことが本番でいきなりできるはずはありませんし，また，常にこのように考えることで論理的な思考が身に付きます．

一人で見直してもよくわからない，間違いに気づけない，という場合には他の人と解答を見せ合うと良いと思います．その場合には，他の人の解答を「間違っているのでは？」と批判的に読むことが大事です．

他の人の解答を読んでいくと，「どうしてこうなるんだろう？」と疑問に思う部分が出てくるはずです．そういう部分は，説明が足りない，もしくは間違っている部分となるので，自分でも気をつける必要があるということがわかります．また，逆に自分の解答を読んでもらうことで，そのような部分を教えてもらえるでしょう．

6　解答を検討する

数学の問題は間違えなければ正解できます．そのため，間違いをなくすことが重要です．この章では，間違いを少なくするテクニックについて解説します．

計画を立てて解法を試しているとき，解答を書いているとき，そして解答を書き終わったときの全ての場合に，この章で説明するテクニックを活用できます．つまり,「計画をたてる」→「解答を書く」→「解答を検討する」という流れではなく,「計画を立てる」→「解答を書く」という流れを行う過程で，常に「解答を検討する」で解説するテクニックを活用してください．

6.1　ケアレスミスの防ぎ方

数学の問題で，間違えるパターンは大きく分けて 2 種類あります．

- 論理の誤り
- ケアレスミス

論理の誤りを少なくする方法については，4 章を読んでください．この章ではケアレスミスを少なくする方法について説明します．

ケアレスミスは，計算ミスや数字の書き間違いなどのミスのことです．ケアレスミスは，少し気をつけるだけで確実に減らすことができます．

ケアレスミスを減らすために有効なのは，何度も確かめることです．

例えば，A さんは計算が苦手で，計算問題を解いて正解できる確率が 80%だとします．ですが，A さんは問題を解いたあとに，もう一度同じ問題を始めから解いてみるとどうなるでしょうか？

A さんが 2 回とも間違う確率は $0.2 \times 0.2 = 0.04$ より，たった 4%となります．2 回の計算が一致しなかった（一回だけ正解した）場合に，2 回の計算を見比べることで間違いに気付けるとすれば，96%正解できることになります．

このように，計算を確かめる回数を増やせば，その分正解する確率をあげることができます．

計算が合っているかを確かめる方法は何通りもあります．その方法については次節以降で詳しく解説します．

6.2　反復法

ケアレスミスを防ぐ 1 つ目の方法は**反復法**です．この名前は説明の便宜上，筆者がつけたものなので，覚える必要はありません．

反復法とは，1 度行った計算をもう一度繰り返して行い，結果が一致するかどうか確かめるという方法です．ポイントは 1 回目の計算をあまり見ないようにすることです．1 回目の計算を見てしまうとその式に引きずられて同じように間違いやすくなるからです．

反復法のメリット　メリットは，**どういう場合にでも使えること**です．同じ計算を行うだけなので，どんな計算でもこの方法を使えます．

反復法のデメリット　デメリットは**計算に時間がかかってしまうこと**と，**2 回とも同じように間違ってしまう可能性があること**です．

同じ計算ミスを 2 回ともしてしまう場合には間違いを見つけられません．また，Σ の展開や積分計算などで，そもそも計算方法を間違えて覚えてしまっている場合には何度やっても間違えてしまいます．

上のようなデメリットはありますが，どんなときにも使える汎用的な方法なので，是非試してみてください．

6.3　逆戻り法

次は**逆戻り法**です．

これは，計算や式変形を行った後の式から，計算前・変形前の式に戻すことが出来るか（戻して一致するか）を確かめるという方法です．

逆戻り法のメリット　メリットは，この方法が使える式であれば**ほぼ確実に間違いを見つけられること**です．反復法では 2 回とも同じ間違いをしてしまうことはしばしばありえますが，逆戻り法では行う計算が異なっているために同じ間違いは起こりにくくなります．

もうひとつのメリットは，**計算後から計算前への変形が簡単な場合に，確かめが簡単なこと**です．

例えば，因数分解は逆戻り法が有効です．

$$x^2 - 3x - 28 = 0$$
$$(x-7)(x+4) = 0$$

という因数分解を行ったとします．逆戻り法では，以下のように展開することで計算が合っていることを確かめられます．

$$(x-7)(x+4)=0$$
$$x^2-3x-28=0$$

逆戻り法のデメリット　デメリットは，積分計算や Σ の計算などは元に戻すことが難しいことです．このような場合には，別の方法を使ったほうがよいでしょう．

どのような場合に有効で，どのような場合に役に立たないのかは，いろいろな問題を解いていくなかで試して確かめてみてください．

6.4　代入法

ケアレスミスを防ぐテクニックその 3，**代入法**の解説です．

代入法とは，計算や式変形を行う前と行った後の文字に同じ値を代入し，そのときに両方の式が一致するかを確かめる方法です．

具体例をあげて説明します．

例 1

$$x^2-3x-28=(x-7)(x+4)$$

上のような因数分解を行ったとします．
左辺に $x=7$ を代入すると，$7^2-3\times 7-28=0$ となり，値は 0 になります．また，右辺に $x=7$ を代入すると，値は同じく 0 となり一致することがわかります．

例 2

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

左辺に $n=1$ を代入すると，

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1$$

より，値は 1 となります．また，右辺は $\frac{1\times 2}{2}=1$ となるため値は一致します．

代入法のメリット　代入法のメリットは**計算が比較的簡単なこと**です．ただし，代入する値によって計算の難しさは変わってくるので，できるだけ計算しやすい値を選んで代入しましょう．

もうひとつのメリットは**離れた数式でも比較できる**ことです．例えば，$A = B = C = D = E$ と式変形があった場合，これまでの反復法・逆戻り法では前後の数式同士の計算が正しいかを確かめていました．ですが，代入法の場合は式 A と式 E にそれぞれ値を代入することで離れた数式でも間違っていないか確認することができます．

また，“問題と答え” の組み合わせに対しても確認が可能です．

例えば，問題文中で $a_1 = 1$ と定められている数式の一般解を以下のように求めたとします．

$$a_n = n^2 - 2n + 3$$

すると，一般解に $n = 1$ を代入した時の値は

$$a_1 = 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 2$$

となるため，この一般解は間違っていることが分かります．

代入法のデメリット　代入法のデメリットは，間違いが見つかるかどうかわからないところです．

代入したときに一致しなければ間違っていると言えるのですが，一致したからと言って間違えていないとは言い切れません．代入した値の場合には，たまたま一致したけれども，他の値の場合には異なるということがありえるからです．

ですが，複数の値を代入して確かめることで，“本当は間違っているのに間違いを見つけられない” という場合を減らすことができます．3 種類の値を代入して一致すれば，正しい割合はかなり高くなります．

まとめ　代入法は手軽に実行することが出来る，非常に強力な方法です．計算の最初と最後や，問題と答えという組み合わせに対して，代入法を試してみてください．

特に，問題と答えの組み合わせに対しては，3 種類以上の値を代入して確かめることをおすすめします．

6.5　極限法

ケアレスミスを防ぐテクニックその 4，**極限法**の解説です．

極限法は前節で説明した代入法とよく似ています．代入法では文字に値を代入して確かめましたが，極限法では文字の極限をとって確かめます．

例 1

$$x^2 - 3x - 28 = (x - 7)(x + 4)$$

左辺において，$x \to \infty$ とすると（左辺の値）$\to \infty$
右辺において，$x \to \infty$ とすると（右辺の値）$\to \infty$
となるため，値は一致します.

例 2
問
1 つのさいころを投げ続けて，同じ目が 2 回連続して出たら終了するものとする.
r 回目以内に終了する確率を求めよ.
求めた答え

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{r-1}$$

確認
$r \to \infty$ とすると（求めた答え）$\to 1$ となります.
問題文で考えると，さいころをずっと投げ続ければ（$r \to \infty$），どこかで同じ目がでて終了するはずなので，確率は 1 となります．そのため，値は一致します.
（前回の代入法をつかって $r = 0, r = 1$ を代入して確かめると更によいでしょう.）

極限法のメリット　極限法のメリットは代入法と同じで，**計算が比較的簡単なこと**，**離れた数式でも比較できること**です.

極限法のデメリット　デメリットも代入法と同じで，**間違いが見つかるかどうかわからない**ところです.
代入法と比べると，極限法は計算がより楽ですが，その分，間違えていても一致する場合が多くなります．例 1 で考えると右辺の 7, 4 が別の数字になっていても，極限の値は一致してしまいます.

まとめ　極限法は比較的簡単な計算で確認が出来るので，使いやすい方法です，ですが，極限が一致していても，必ずしも計算が合っているというわけではありません．そのため，極限法はあくまでも確認程度のものだということを忘れないでください．

6.6　次元法

ケアレスミスを防ぐテクニックその 5，**次元法**の解説です．
これは答えの次元が合っているかを確認する方法です．

例
「1 辺が n の正六角形の面積を求めよ.」
という問題の場合，答えには n^2 が使われるはずです． なぜなら， n の値が 2 倍になると，面積は 4 倍になる （ n^2 に比例する ）からです．
そのため，答えが $3n^3$ や $2n$ となっていれば間違いであるとわかります．

次元法のメリット　次元法のメリットは確認が簡単にできることです．次元を確かめるだけなので，計算する必要がありません．

次元法のデメリット　デメリットは，次元がどうなっていれば正解なのか，というのが分かりにくいことです．そもそも正しい次元が分からなければ確かめようがありません．また，次元があっているからといって，答えが正しいとは言い切れません．

まとめ　簡単な確認程度に使ってみてください．
また，次元法とは話が少し違ってしまいますが，答えが正しい範囲に入っているかということを確かめることは重要です．
例をいくつか挙げてみます．

- 面積 → 正の値になっているか
- 確率 → 0 以上 1 以下になっているか
- 場合の数 → 整数になっているか

このような確認を行うことで間違いに気づくことができるでしょう．

6.7　単位法

6 つめのケアレスミスを防ぐテクニック **単位法** を紹介します．ケアレスミスを防ぐテクニックはこれで最後です．

単位法とは，単位があっているかを確かめる方法です．単位法は数学の問題でも使えますが，化学や物理の問題でとても役に立つ方法です．

単位には，m（メートル）, s（秒）, kg（キログラム）など，さまざまなものがあります．その中で，値を足し合わせることができるのは，同じ単位をもつ値のみです．$1[\mathrm{m}] + 1[\mathrm{kg}]$ という計算は意味がありません．

そのため，式中で足し算・引き算を行なっている場合，それらが同じ単位でなければ間違っているとわかります．

また，答えの値が正しい単位になっているかを確かめるということも有効です．

しかし，単位を確かめようと思っても，複雑な式になっている場合はどうすれば良いでしょうか？

例として，以下のような式を考えます.（等加速度運動の公式です）

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

単位:$x[\mathrm{m}]$, $v_0[\mathrm{m/s}]$, $a[\mathrm{m/s^2}]$, $t[\mathrm{s}]$

この場合，$v_0 t$ や $\frac{1}{2}at^2$ の単位を知らなくては確認できません．実は，掛け算・割り算を行った値の単位は，単位を掛け算・割り算したものになるのです．$v_0 t$ の場合は，

$$[\mathrm{m/s}] \times [\mathrm{s}] = [\mathrm{m}]$$

より，単位は [m] となります．また，$\frac{1}{2}at^2$ の場合は，

$$[\mathrm{m/s^2}] \times [\mathrm{s}] \times [\mathrm{s}] = [\mathrm{m}]$$

より，単位は [m] となります． また，x の単位も [m] なので，単位はすべて揃っていることがわかります．

上の例のように値がすべて文字になっていればわかりやすいのですが，数字が混ざっている場合には注意が必要です．たとえば，先ほどの式に，$a = 2$ が代入された場合，

$$x = v_0 t + t^2$$

となり，t^2 の単位が $[\mathrm{s}^2]$ のように見えてしまうからです．そのため，数字が混じっている場合には，数を計算する前，もしくは代入する前に単位を確認することが重要です．

7　次へと活かす

この章では，問題を解き終わった後，その経験をどのようにして次へと活かせばよいのかについて説明します．

問題は自分のといた解が合っていれば良い，というものではありません．解が合っていて，得点が取れればそれで良いのは，本番の入試問題だけです．それ以外の場合には，今後に役立てるために問題から何かを学び取るべきです．自分が解けない問題に出会ったときは，自分が成長するチャンスなのです．

7.1　パターンを覚える

どんな問題でも，解答の中で難しいポイントというのは 1, 2 個しかありません．このポイントさえ乗り越えてしまえば，後は簡単に解ける場合が多いです．

問題が解けなかった場合には，次に同じような問題を見た際に「難しいポイント」を乗り越えられるようにすることが重要になります．つまり,「難しいポイント」を「問題を解くパターン」として覚えることが大事だということです．

3.1 節で，問題を解く際にパターンを適用する方法について解説しました．パターンを使う際には，正しく使うこと，そして広範囲に適用することが重要でした．

パターンを正しく使えるようにするには，パターンが使える条件を正しく把握することが大事です．そのため，パターンを覚える際には，使える条件も合わせて覚えるようにしてください．

また，パターンを広範囲に適用できるようにするには，条件や解き方を一般化することが大事です．具体的な値を使わずに，条件や解き方を理解してください．一般化と言われてもよくわからないという場合には，できるだけパターンを簡潔にまとめるようにしてみましょう．簡潔にまとめようとすることで，具体的な値を使わずにパターンを言い表せるはずです．

具体的な例をあげて考えてみます．

問題：次の式をみたす自然数 a, b の組を求めよ

$$ab - 3a + 5b - 22 = 0$$

解答：

$$\begin{aligned} ab - 3a + 5b - 22 &= 0 \\ (a+5)(b-3) &= 7 \end{aligned}$$

7は素数であるため，2つの整数の積が7となる組み合わせは1と7, もしくは -1 と -7 の組み合わせのみである．ここで，$a+5$ は6以上の整数，$b-3$ は -2 以上の整数であるため，以下の組み合わせとなる．

$$a+5=7$$
$$b-3=1$$

よって，解は以下のようになる．

$$a=2$$
$$b=4$$

さて，この問題の難しいポイントはどこでしょうか? それは，$(a+5)(b-3)=7$ と積の形に変形するところでしょう．

しかし，問題を解くパターンを $(a+5)(b-3)=7$ と式変形する，と覚えてはいけません．なぜなら，パターンが具体的すぎるからです．まったく同じ問題が出ればこのパターンを使えますが，それ以外の場合には役に立ちません．広範囲に役立てるために，なるべく一般化してみましょう．

注目すべきは，文字を用いた式が積の形になっていることです．積の形になっていることから，当てはまる整数の組を求めることができました．

また，どういう状況でこのパターンが使えるかというと，文字の値が整数（自然数）という条件がある場合です．

よってパターンを簡潔にまとめると，

整数という条件のついた文字の値を求めるには，積の形に変形する

となります．

繰り返しになりますが，パターンを覚える際には使える条件も合わせて覚えるようにしてください．

また，パターンを広範囲に適用できるようにするには，条件や解き方を一般化することが大事です．

7.2 公式を覚える

前節では，パターンの覚え方について解説しました．今節では，それに関連して公式の覚え方について解説します．

公式はとても便利な式です．ですが，公式の「式」だけを覚えてしまうと，間違って使ってしまう可能性が高くなります．

公式を覚える際には以下の2点が重要です．

- 公式の導出過程を覚えること
- どのような場合に使えるかを覚えること

公式の導出過程を覚える　公式の導出過程とは，どのようにしてその公式を導けるのか，という理由や式変形のことです．

単純に「式」を覚えるだけでは，間違えたり忘れたりしがちです．ですが，導出過程も合わせて覚えておけば，間違えにくくなりますし，忘れた場合には自分で導出することもできます．

導出過程を覚えておけば，簡単に導ける公式というのは，実はたくさんあります．

例えば，三角関数の公式

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

は，三角関数の定義と三平方の定理より，簡単に導くことができます．

また，$\cos\theta \neq 0$ のとき，両辺を $\cos^2\theta$ で割ることで，次の公式が得られます．

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

また，三角関数を使った公式は加法定理から導けるものがかなり多いので，その導出過程を確認してみてください．

どのような場合に使えるか　どのような場合に使えるか，というのは公式を正しく使うために重要です．誤って公式を使い，間違えてしまうことはよくあります．公式を覚える際には必ずこの点を意識してください．

例えば，以下の 2 次方程式の解の公式が使えるのはどのような場合でしょうか？

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

正解は，$a \neq 0$ の場合です．そのため，

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の解を求める際には，a の値で場合分けが必要となります．

公式を誤って使うことを防ぐために，公式を覚えるとき・使うときにはそれがどのような場合に使えるのかということを意識してください．

8　その他のトピックス

この章では，いくつかの単発のトピックについて説明します．

8.1　おすすめ勉強法（教科書の読み方）

この節では，おすすめの勉強法（教科書の読み方）について書いていきます．

予習・復習のどちらの場合にも，教科書を読むという事はとても重要です．特に数学では分からないことがある場合には是非教科書を読んでください．

しかし，自分で教科書を読もうとしてもすぐに分からなくなってしまい，諦めてしまうことも多いと思います．そういう場合には，次の方法を試してみてください．

まずは，どこでもいいので自分の勉強したい単元の章を決め，その章の始めから読み始めてください．始めは比較的簡単な説明から始まるので，すらすらと読めるのではないかと思います．ですが途中から少しずつ分からなくなって来てしまうのではないでしょうか？

わからない，と感じたら,「完璧に理解できる」と思える場所まで戻ってください．もし自信がなければ，章の始めからに戻ってください．

もう一度読み始めると最初に読んだよりは理解が深まっているはずです．そうすると，先程は「わからない」と思った点のうちいくつかは分かるようになっているはずです．

そしてまたわからないと感じたら「完璧に理解できる」場所まで戻って読み始めます．このサイクルを何回も繰り返していくことで，確実に理解は深まっていき，読めるページは増えていきます．

このサイクルは１日で何回も繰り返してもいいですし，毎日１回ずつ行なっても構いません．ただし前回の内容を忘れてしまうほどは間隔を開けないでください．

数学には新しい概念（ベクトル，行列など）がたくさん登場します．聞きなれない概念というのは理解することは難しく，ある程度慣れが必要です．先程説明したサイクルを何度も繰り返し，概念の定義や仕組みになれることで，違和感なく理解できるようになるのです．