1 Tugas 3 - Analisis Sumber Daya Air

Suatu saluran persegiempat mempunyai lebar 2.5 *meter* dan mempunyai kemiringan dasar saluran sama dengan 1 : 400. Jika konstanta Chezy adalah 30 dalam satuan SI, tentukan kedalaman normal jika debit aliran adalah 0.80 $m^3/detik$. Tentukan solusi dengan menggunakan **Metoda Interval Halving, Newton Rhapson, dan Secant**.

Petunjuk: $Q = AC\sqrt{RS},\ A = by_n$, dan $y_{n1} = y_{n0} - \frac{f(y_{n0})}{f'(y_{n0})}$, untuk harga awal y_{n0} ditentukan dengan asumsi kecepatan aliran $v = 1m/detik$.

1.1 Penurunan dan Penentuan Nilai Awal

1.1.1 Fungsi dan Turunannya

Fungsi $f(y)$ diperoleh dari:

$$\begin{aligned} Q &= AC\sqrt{RS} & \leftrightarrow 0 = AC\sqrt{RS} - Q \\ f(y) &= AC\sqrt{RS} - Q = 0 \end{aligned}$$

Turunan dari fungsi $f(y)$:

$$\begin{aligned} f(y) &= Cby\sqrt{\frac{bsy}{b+2y}} - Q \\ f'(y) &= Cb\sqrt{\frac{bsy}{b+2y}} + \frac{C}{s}\sqrt{\frac{bsy}{b+2y}}\,(b+2y)\left(-\frac{bsy}{(b+2y)^2} + \frac{bs}{2\,(b+2y)}\right) \end{aligned}$$

Disederhanakan, $f'(y)$ menjadi:

$$f'(y) = \frac{Cb\sqrt{\frac{bsy}{b+2y}}}{2\,(b+2y)}\,(3b+4y)$$

Catatan : Hasil turunan menggunakan python library *sympy*.

1.1.2 Menentukan nilai awal y_{n0} dan y_{n1}

Nilai y_{n0} Dengan mengasumsikan kecepatan aliran $v = 1\ m/det$, y_{n0} dapat dicari dari persamaan $Q = VA$:

$$Q = VA \leftrightarrow Q = V\ (by_{n0})$$

Dimasukkan nilai $V = 1\ m/det$, $b = 2.5\ m$ dan $Q = 0.8\ m^3/det$, maka diperoleh nilai y_{n0} sebesar:

$$V = 1\ m/det, b = 2.5\ m, Q = 0.8\ m^3/det \rightarrow \quad \begin{aligned} Q &= V\ (b\ y_{n0}) \\ 0.8 &= 1\ (2.5\ y_{n0}) \\ y_{n0} &= \frac{0.8}{2.5} = 0.32\ m \end{aligned}$$

Nilai y_{n1} Nilai y_{n1} diperoleh dari persamaan yang diberikan di petunjuk yaitu $y_{n1} = y_{n0} - \frac{f(y_{n0})}{f'(y_{n0})}$:

$$y_{n0} = 0.32\ m, f(y_{n0}) = -0.1942946, f'(y_{n0}) = 2.646344 \rightarrow \quad \begin{aligned} y_{n1} &= y_{n0} - \frac{f(y_{n0})}{f'(y_{n0})} \\ y_{n1} &= 0.32 - \frac{-0.1942946}{2.646344} \\ y_{n1} &= 0.39342\ m \end{aligned}$$

1.1.3 Nilai y_{n0} dan y_{n1}

Disimpulkan bahwa nilai $y_{n0} = 0.32\ m$ dan $y_{n1} = 0.39342\ m$. Dengan catatan: - Untuk Metoda Interval Halving, nilai batas kiri: $x_a = y_{n0}$ dan batas kanan: $x_b = y_{n1}$. - Untuk Metoda Newton-Rhapson, nilai awal: $x_k = y_{n1}$. - Untuk Metoda Secant, nilai $x_n = y_{n1}$ dan $x_{n-1} = y_{n0}$.

Catatan: Hasil diatas diperoleh dari perhitungan melalui python dibawah ini.

```
======================================================
|                   Diketahui                        |
======================================================
|               b =    2.50000 m                     |
|               S =    0.00250 m/m                   |
|               C =   30.00000                       |
|               Q =    0.80000 m^3/det               |
======================================================

======================================================
|        Mencari nilai y_{n0} dan y_{n1}             |
======================================================
|          y_{n0} =    0.32000 m                     |
|       f(y_{n0}) =   -0.19429                       |
|      f'(y_{n0}) =    2.64634                        |
|          y_{n1} =    0.39342 m                     |
======================================================
```

1.2 Penyelesaian Numerik (Interval Halving, Newton, Secant)

Kode diperoleh dari Latihan Soal Notebook Interval-Halving, Newton-Rhapson, Secant (Minggu 15) atau dapat dilihat dengan nbviewer Interval-Halving, Newton-Rhapson, Secant (Minggu 15). Dan dimodifikasi sesuai kebutuhan.

1.2.1 Metode Interval Halving

Langkah Pengerjaan Solusi menggunakan metode *Interval Halving* dengan langkah sebagai berikut: - Nilai batas kiri dan kanan yang digunakan diperoleh dari perhitungan sebelumnya untuk mendapatkan nilai y_{n0} dan y_{n1}.

$$\begin{aligned} \text{Batas bawah/kiri:} \quad x_a &= y_{n0} & \text{Batas atas/kanan: } x_b &= y_{n1} \\ x_a &= 0.32\ m & x_b &= 0.39342\ m \end{aligned}$$

- Periksa nilai $f(x_a)$ dan $f(x_b)$ lebih kecil dari 0. Langkah ini memastikan bahwa akar persamaannya berada di antara x_a dan x_b. Dan diperoleh bahwa nilai akar-akarnya berada di antara x_a dan x_b

$$\begin{aligned} f(x_a) = \ -0.19429; f(x_b) &= \ 0.00704 \\ f(x_a)f(x_b) < 0 & \qquad \rightarrow \text{OK} \end{aligned}$$

- Cari nilai tengah (x_h) yang merupakan titik tengah dari x_a dan x_b:

$$x_h = \frac{x_a + x_b}{2}$$

- Tentukan batas atas/bawah berikutnya. Nilai x_h sebagai batas atas ketika $f(x_a)f(x_h) < 0$ dan sebaliknya menjadi batas bawah ketika $f(x_b)f(x_h) < 0$.

$$\begin{aligned} x_b \leftarrow x_h &: \text{if } f(x_a)f(x_h) < 0 \text{ TRUE} \\ x_a \leftarrow x_h &: \text{if } f(x_h)f(x_b) < 0 \text{ TRUE} \end{aligned}$$

```
=====================================================================
Periksa nilai akarnya berada diantara xa dan xb
f(x_a) x f(x_b) < 0 === OK
        dengan nilai f(x_a) =     -0.19429 dan f(x_b) =      0.00704
=====================================================================
```

Solusi Numerik Metoda Interval Halving

n	x_a	x_b	f(x_a)	f(x_b)	x_h	f(x_h)
1	0.3200000	0.3934200	-0.1942946	0.0070430	0.3567100	-0.0953224
2	0.3567100	0.3934200	-0.0953224	0.0070430	0.3750650	-0.0445413
3	0.3750650	0.3934200	-0.0445413	0.0070430	0.3842425	-0.0188469
4	0.3842425	0.3934200	-0.0188469	0.0070430	0.3888313	-0.0059261
5	0.3888313	0.3934200	-0.0059261	0.0070430	0.3911256	0.0005525
6	0.3888313	0.3911256	-0.0059261	0.0005525	0.3899785	-0.0026883
7	0.3899785	0.3911256	-0.0026883	0.0005525	0.3905521	-0.0010683
8	0.3905521	0.3911256	-0.0010683	0.0005525	0.3908389	-0.0002580
9	0.3908389	0.3911256	-0.0002580	0.0005525	0.3909822	0.0001472
10	0.3908389	0.3909822	-0.0002580	0.0001472	0.3909105	-0.0000554
11	0.3909105	0.3909822	-0.0000554	0.0001472	0.3909464	0.0000459
12	0.3909105	0.3909464	-0.0000554	0.0000459	0.3909285	-0.0000048
13	0.3909285	0.3909464	-0.0000048	0.0000459	0.3909374	0.0000206
14	0.3909285	0.3909374	-0.0000048	0.0000206	0.3909330	0.0000079
15	0.3909285	0.3909330	-0.0000048	0.0000079	0.3909307	0.0000016
16	0.3909285	0.3909307	-0.0000048	0.0000016	0.3909296	-0.0000016
17	0.3909296	0.3909307	-0.0000016	0.0000016	0.3909302	-0.0000000
18	0.3909302	0.3909307	-0.0000000	0.0000016	0.3909304	0.0000008
19	0.3909302	0.3909304	-0.0000000	0.0000008	0.3909303	0.0000004
20	0.3909302	0.3909303	-0.0000000	0.0000004	0.3909302	0.0000002

```
Maka diperoleh nilai akar-akarnya =   0.390930 dengan hasil f(x_h) =    0.0000001907
```

Solusi Numerik Metoda Interval Halving Dengan menggunakan prosedur diatas dan dilakukan iterasi sebanyak 20 kali, diperoleh bahwa nilai $y_n = 0.390930\ m$ dengan nilai $f(x_h) = 0.0000001907$. Dari tabel hasil perhitungan dibawah, dapat dilihat bahwa nilai akarnya sudah dapat ditemukan pada langkah ke 16 jika error yang ditargetkan $\epsilon = 0.000001$.

1.2.2 Metoda Newton-Rhapson

Langkah Pengerjaan Solusi Numerik menggunakan metoda *Newton-Rhapson* dimulai dari:

- Nilai awal x_k menggunakan nilai y_{n0} maka $x_k = 0.32\ m$
- Dalam metoda Newton-Rhapson diperlukan turunan dari fungsi $f(y)$. Persamaan yang digunakan:

$$\begin{aligned} f(y) &= Cby\sqrt{\frac{bsy}{b+2y}} - Q \\ f'(y) &= \frac{Cb\sqrt{\frac{bsy}{b+2y}}}{2\,(b+2y)}\,(3b+4y) \end{aligned}$$

dengan: $C = 30, b = 2.5\ m, s = \frac{1}{400}\ m/m$

- Akar persamaan x_{k+1} diperoleh dengan melakukan iterasi sebanyak k dengan menggunakan persamaan:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Solusi Numerik Metoda Newton Rhapson

k	x_k	f(x_k)	f'(x_k)	x_{k+1}
1	0.320000	-0.194295	2.646344	0.393420
2	0.393420	0.007043	2.831491	0.390933
3	0.390933	0.000007	2.825843	0.390930
4	0.390930	0.000000	2.825838	0.390930
5	0.390930	0.000000	2.825838	0.390930
6	0.390930	0.000000	2.825838	0.390930
7	0.390930	0.000000	2.825838	0.390930
8	0.390930	0.000000	2.825838	0.390930
9	0.390930	0.000000	2.825838	0.390930
10	0.390930	0.000000	2.825838	0.390930

```
Maka diperoleh nilai akar-akarnya =   0.390930 dengan hasil f(x_k) =    0.0000000000
```

Solusi Numerik Metoda Newton Rhapson Dengan menggunakan prosedur diatas dan dilakukan iterasi sebanyak 10 kali, diperoleh bahwa nilai $y_n = 0.390930\ m$ dengan nilai $f(x_k) = 0.0000000000$. Dari tabel hasil perhitungan diatas, dapat dilihat bahwa nilai akarnya sudah dapat ditemukan pada langkah ke 4 jika error yang ditargetkan $\epsilon = 0.000001$.

1.2.3 Metoda Secant

Langkah Pengerjaan Solusi Numerik menggunakan metoda *Secant* dimulai dari:

- Menentukan nilai $x_0 = x_{n-1}$ dan $x_1 = x_n$ dari nilai y_{n0} dan y_{n1}:

$$\begin{aligned} x_0 = x_{n-1} &= y_{n0} = 0.32\ m \\ x_1 = x_n &= y_{n1} = 0.39342\ m \end{aligned}$$

- Dalam metoda *Secant* hanya diperlukan fungsi $f(y)$. Persamaan yang digunakan:

$$f(y) = \quad Cby\sqrt{\frac{bsy}{b+2y}} - Q$$

dengan: $C = 30, b = 2.5\ m, s = \frac{1}{400}\ m/m$

- Akar persamaan x_{n+1} diperoleh dengan melakukan iterasi sebanyak n dengan menggunakan persamaan:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Solusi Numerik Menggunakan Metoda Secant

n	x_{n-1}	x_n	N_n	D_n	x_{n+1}-x_n
1	0.393420	0.320000	0.014265	-0.201338	0.070852
2	0.320000	0.390852	-0.000016	0.194073	0.000081
3	0.390852	0.390933	0.000000	0.000229	-0.000002
4	0.390933	0.390930	0.000000	-0.000007	0.000000
5	0.390930	0.390930	-0.000000	0.000000	0.000000
6	0.390930	0.390930	0.000000	0.000000	0.000000

Maka diperoleh nilai akar-akarnya =   0.390930 dengan f(x_{n+1}) =   0.0000000000

Solusi Numerik Metoda *Secant* Dengan menggunakan prosedur diatas dan dilakukan iterasi sebanyak 6 kali, diperoleh bahwa nilai $y_n = 0.390930\ m$ dengan nilai $f(x_k) = 0.0000000000$. Dari tabel hasil perhitungan diatas, dapat dilihat bahwa nilai akarnya sudah dapat ditemukan pada langkah ke 4 jika error yang ditargetkan $\epsilon = 0.000001$.

1.3 Kesimpulan

Ringkasan dari penyelesaian permasalahan dengan 3 metoda yaitu *Interval-Halving, Newton-Rhapson, Secant*:

Metoda	Jumlah Iterasi Coba	y_{n0}	$f(y_{n0})$	Jumlah Iterasi jika $\epsilon = 0.000001$
Interval-Halving	20	0.390930	0.0000001907	16
Newton-Rhapson	10	0.390930	0.0000000000	4
Secant	6	0.390930	0.0000000000	4

Dari ketiga metoda diatas, metoda *Newton-Rhapson* dan *Secant* memiliki iterasi yang lebih sedikit dengan $\epsilon = 1 \times 10^{-6}$, akan tetapi metoda *Newton-Rhapson* memerlukan persamaan turunan $f'(y)$ yang jika persamaannya akan sulit diturunkan jika dilakukan secara manual. Sedangkan metoda *Secant* hanya menggunakan persamaan $f(y)$.

Kode dapat diakses di: https://nbviewer.jupyter.org/github/taruma/belajar-tsa/blob/master/ansis/Tugas%203%20-%20Taruma%20S.%20%2825017046%29.ipynb atau scan barcode dibawah