

Układy równań liniowych

Taras Shuliakevych

Kwiecień 2025

1 Wstęp

Celem projektu jest implementacja i analiza dwóch metod iteracyjnych: Jacobiego i Gaussa-Seidla, oraz jednej metody bezpośredniej – faktoryzacji LU – służących do rozwiązywania układów równań liniowych. W niniejszym sprawozdaniu zostaną omówione wykresy wygenerowane przez program dołączony do tego sprawozdania, które przedstawiają wydajność poszczególnych algorytmów dla konkretnych przykładów układów. Rozwiązujemy równanie liniowe $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, a więc potrzebujemy zdefiniować macierz \mathbf{A} i wektor \mathbf{b} . Macierz, która zostanie wykorzystana, to tzw. pięciopasmowa macierz systemowa rzadka o wymiarach $N \times N$, gdzie:

$$N = 1200 + 10c + d$$

gdzie:

- $c = 1$ (piąta cyfra indeksu, indeks=1966**1**5),
- $d = 5$ (szósta cyfra indeksu, indeks=19661**5**).

Zatem $N = 1215$.

1.1 Struktura macierzy \mathbf{A}

Macierz systemowa \mathbf{A} ma następującą strukturę:

- Na głównej przekątnej znajdują się wartości zależne od zadania (podane zostaną w odpowiednich punktach sprawozdania),
- Na dwóch sąsiednich przekątnych po obu stronach głównej przekątnej znajdują się wartości -1 ,
- Pozostałe elementy macierzy są równe 0.

1.2 Struktura wektora \mathbf{b}

Wektor pobudzenia \mathbf{b} jest zdefiniowany jako:

$$b_n = \sin(n \cdot (f + 1))$$

gdzie:

- $f = 6$ (trzecia cyfra indeksu, indeks=196615),
- n – indeks komórki w wektorze.

1.3 Wizualizacja

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 11 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 11 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 11 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 11 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 11 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 11 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sin(1 \cdot (6 + 1)) \\ \sin(2 \cdot (6 + 1)) \\ \sin(3 \cdot (6 + 1)) \\ \vdots \\ \sin(1213 \cdot (6 + 1)) \\ \sin(1214 \cdot (6 + 1)) \\ \sin(1215 \cdot (6 + 1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6569866 \\ 0.99060736 \\ 0.83665564 \\ \vdots \\ 0.66309252 \\ 0.00812787 \\ -0.65083728 \end{pmatrix}$$

1.4 Teoretyczne wiadomości

1.4.1 Metoda Jacobiego

Jeden z algorytmów iteracyjnych, służący do znalezienia rozwiązania układów równań liniowych. Wykonuje poniższy wzór w każdej iteracji w pętli do momentu osiągnięcia pewnej normy residuum, czyli granicy wskazującej, jak dokładne chcemy uzyskać wyniki. Ponieważ metoda ta jest iteracyjna, nie daje ona gwarancji zbieżności, czyli znalezienia rozwiązania.

$$x^{(k+1)} = -D^{-1} (L + U) x^{(k)} + D^{-1}b$$

- $x^{(k)}$ – przybliżenie rozwiązania w k -tej iteracji
- $x^{(k+1)}$ – nowe przybliżenie rozwiązania w $(k + 1)$ -szej iteracji

- $A = D + L + U$ – dekompozycja macierzy układu na:
 - D – macierz diagonalna (elementy na głównej przekątnej)
 - L – macierz dolnotrójkątna (elementy poniżej przekątnej)
 - U – macierz górnortrójkątna (elementy powyżej przekątnej)
- b – wektor pobudzenia

1.4.2 Metoda Gaussa-Seidla

Podobnie do metody Jacobiego, metoda ta jest iteracyjna, pętla której działa również do momentu osiągnięcia pewnej normy residuum. Nie gwarantuje zbieżność.

$$x^{(k+1)} = -(D + L)^{-1} (Ux^{(k)}) + (D + L)^{-1}b$$

- $x^{(k)}$ – przybliżenie rozwiązania w k -tej iteracji
- $x^{(k+1)}$ – nowe przybliżenie rozwiązania w $(k + 1)$ -szej iteracji
- $A = D + L + U$ – dekompozycja macierzy układu na:
 - D – macierz diagonalna (elementy na głównej przekątnej)
 - L – macierz dolnotrójkątna (elementy poniżej przekątnej)
 - U – macierz górnortrójkątna (elementy powyżej przekątnej)
- b – wektor pobudzenia

1.4.3 Metoda faktoryzacji LU

Faktoryzacja LU to metoda bezpośrednia rozwiązywania układów równań liniowych, polegająca na rozkładzie macierzy systemowej \mathbf{A} na iloczyn dwóch macierzy trójkątnych: dolnotrójkątnej z jedynkami na przekątnej i górnortrójkątnej. Dzięki temu rozkładowi, rozwiązanie układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sprowadza się do kolejnego rozwiązywania dwóch prostszych układów z macierzami trójkątnymi: $Ly = b$ (podstawienie w przód), $Ux = y$ (podstawienie w tył).

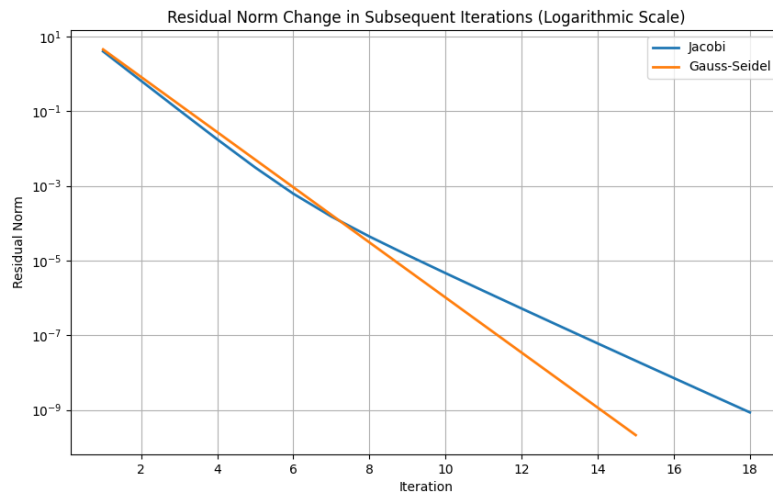
2 Analiza metod iteracyjnych

2.1 Przykład I

W tej sekcji przyjmujemy, że wartość na głównej przekątnej macierzy systemowej \mathbf{A} wynosi $5 + e$, gdzie:

- $e = 6$ (czwarta cyfra indeksu, indeks=196615).

Zatem na przekątnej znajduje się wartość 11.



Rysunek 1: Porównanie zmian normy residuum dla metod iteracyjnych Jacobiego i Gaussa-Seidla.

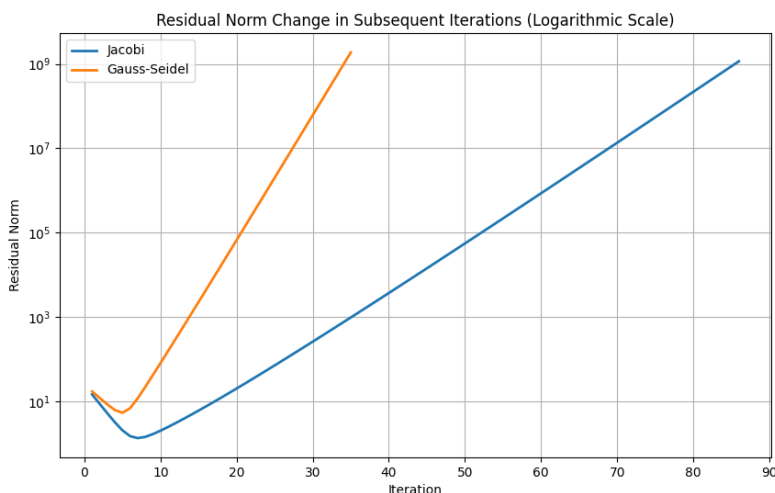
Uzyskane wyniki:

- Jacobi:
 - Czas: 50 ms,
 - Iteracje: 18.
- Gauss-Seidel:
 - Czas: 33 ms,
 - Iteracje: 15.

Porównując efektywność metod iteracyjnych w rozwiązywaniu układów równań liniowych, możemy zaobserwować znaczące różnice w ich działaniu. Metoda Jacobiego wymagała wykonania 18 iteracji i zajęła 50 ms, podczas gdy metoda Gaussa-Seidla osiągnęła rozwiązanie w 15 iteracjach, co przełożyło się na czas 33 ms. Różnica w liczbie wymaganych iteracji wskazuje na większą skuteczność metody Gaussa-Seidla – zdecydowanie lepiej by zadziałała dla potężniejszych układów. Analiza wykresu normy residuum potwierdza tę obserwację. Krzywa zbieżności dla metody Gaussa-Seidla charakteryzuje się bardziej stromym przebiegiem, co oznacza szybszą redukcję błędu w kolejnych krokach – metoda ta okazała się około 1.5 raza szybsza od metody Jacobiego. Te obserwacje mają istotne znaczenie praktyczne przy wyborze algorytmu do rozwiązywania dużych układów równań, gdzie nawet niewielka poprawa efektywności może prowadzić do znaczącego skrócenia czasu obliczeń.

2.2 Przykład II

W tej sekcji przyjmujemy, że wartość na głównej przekątnej macierzy systemowej \mathbf{A} wynosi 3. Górny limit normy residuum to wartość bezwzględna dolnego limitu, czyli 10^9 .



Rysunek 2: Porównanie zmian normy residuum dla metod iteracyjnych Jacobiego i Gaussa-Seidla. Przypadek rozbieżności.

Uzyskane wyniki:

- Jacobi:
 - Czas: 45 ms,
 - Iteracje: 86.
- Gauss-Seidel:
 - Czas: 35 ms,
 - Iteracje: 35.

Wbrew oczekiwaniom, obie metody doprowadziły do rozbieżności, co wyraźnie widoczne jest na przedstawionym wykresie – zamiast zbliżać się do rozwiązania, oddalają się od niego. Metoda Gaussa-Seidla osiągnęła górną granicę normy residuum w 35 iteracjach, podczas gdy metoda Jacobiego potrzebowała na to 86 iteracji. Wykres normy residuum dla metody Gaussa-Seidla wykazuje znacznie bardziej stromy wzrost wartości, co wskazuje na szybszą dynamikę procesu iteracyjnego, nawet w warunkach rozbieżności. Te obserwacje prowadzą

do wniosku, że nawet w przypadku rozbieżności, metoda Gaussa-Seidla zachowuje swoje charakterystyczne cechy - szybszą zbieżność (lub w tym przypadku rozbieżność) i większą efektywność obliczeniową.

3 Analiza metody bezpośredniego rozwiązania

W tej sekcji przyjmujemy, że wartość na głównej przekątnej macierzy systemowej **A** wynosi 3.

Uzyskane wyniki:

- Czas: 5.09 s,
- Norma residuum: 6.47e-10.

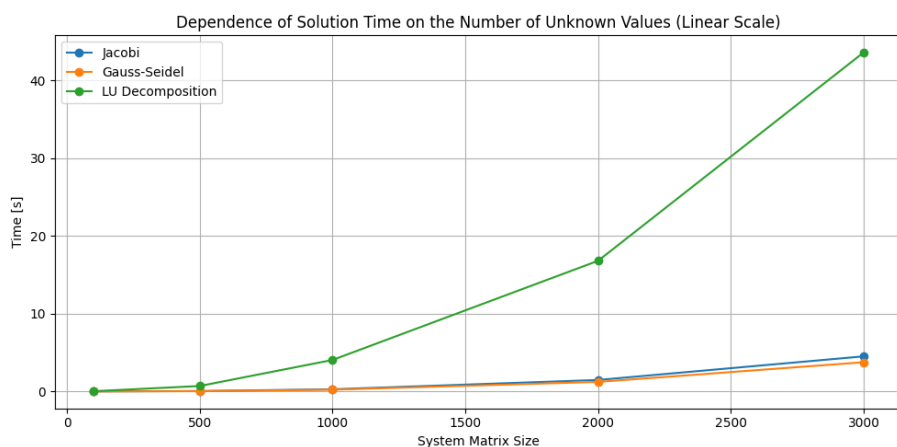
Choć czas rozwiązania był około 10 razy dłuższy w porównaniu do metod iteracyjnych, kluczową zaletą faktoryzacji LU okazała się jej niezawodność. W przeciwieństwie do wcześniej testowanych metod Jacobiego i Gaussa-Seidla metoda bezpośrednia zapewniła poprawne rozwiązanie z bardzo wysoką dokładnością. Warto zauważyć, że osiągnięta wartość normy residuum na poziomie 6.47e-10 świadczy o znakomitej precyzji obliczeń. Metody iteracyjne mogą być szybsze, aczkolwiek w trudniejszych przypadkach mogą zawieść, podczas gdy metody bezpośrednie, choć obliczeniowo są bardziej kosztowne, gwarantują uzyskanie rozwiązania.

4 Porównanie metod pod kątem czasu

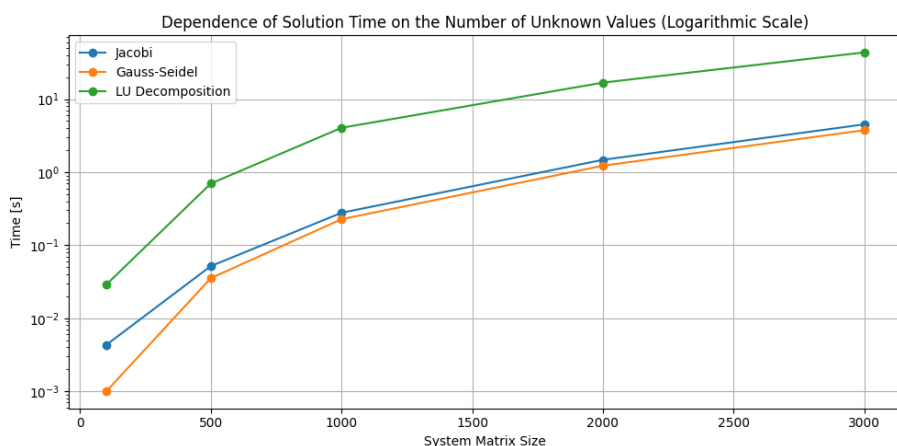
W tej sekcji przyjmujemy, że wartość na głównej przekątnej macierzy systemowej **A** wynosi $5 + e$, gdzie:

- $e = 6$ (czwarta cyfra indeksu, indeks=196615).

Zatem na przekątnej znajduje się wartość 11.



Rysunek 3: Zależność czasu znalezienia rozwiązania od liczby niewiadomych - skala liniowa.



Rysunek 4: Zależność czasu znalezienia rozwiązania od liczby niewiadomych - skala logarytmiczna.

Z przeprowadzonych analiz wynika, że faktoryzacja LU jest znacznie wolniejszą metodą w porównaniu do metod iteracyjnych, a czas obliczeń rośnie szybko wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy. Z kolei metoda Gaussa-Seidla okazuje się być nieco szybsza niż metoda Jacobiego, co zostało wcześniej potwierdzone. Wybierając odpowiednią metodę, warto rozważyć, na czym nam bardziej zależy: na gwarancji znalezienia rozwiązania, choć wiąże się to z czasem obliczeń, który może być dziesięciokrotnie dłuższy, czy też na szybkości obliczeń, z jednoczesnym ryzykiem braku gwarancji zbieżności.

5 Podsumowanie

W niniejszym sprawozdaniu przeprowadzono analizę trzech metod rozwiązywania układów równań liniowych: iteracyjnych metod Jacobiego i Gaussa-Seidla oraz metody bezpośredniej faktoryzacji LU. Metody iteracyjne okazały się szybsze, niż metoda bezpośrednia faktoryzacji LU. Warto pamiętać jednak, że metoda Gaussa-Seidla jest bardziej efektywną, wymagając mniejszej liczby iteracji i czasu obliczeń w porównaniu do metody Jacobiego. Faktoryzacja LU, mimo drastycznie wyższych kosztów obliczeniowych, zapewnia gwarancję rozwiązania z bardzo wysoką precyzją, co robi z niej "koło ratunkowe" w przypadku, gdy metody iteracyjne się rozbiegają i nie potrafią nie tylko znaleźć rozwiązanie, ale nawet zbliżyć się do niego. Wybór metody zależy od priorytetów: szybkości obliczeń lub gwarancji dokładności rozwiązania. Idealną ścieżką postępu będzie spróbować rozwiązać problem za pomocą metody Gaussa-Seidla, a w przypadku rozbieżności – metodą faktoryzacji LU.