

Compressão por interpolação e *wavelets*

Cristiano Marcos Agulhari e Ivanil Sebastião Bonatti
Departamento de Telemática, FEEC/UNICAMP, Campinas SP - Brazil,
{agulhari, ivanil}@dt.fee.unicamp.br

12 de fevereiro de 2007

Resumo

Um estudo comparativo entre as diversas técnicas de compressão de sinais, particularmente sinais de eletrocardiogramas, é realizado neste artigo. A comparação se dá através de dois parâmetros: a taxa de compressão do sinal e a distorção do sinal recuperado. Para tanto são apresentados os métodos de compressão por interpolação linear, interpolação cúbica, interpolação *spline*, interpolação de Nyquist/Shannon e a compressão via *wavelets*.

Palavras-Chave: Taxa de compressão, compressão de dados, ECG, sinal de eletrocardiograma, erro médio quadrático, distorção quadrática, *wavelets*.

1 INTRODUÇÃO

A compressão de sinais de ECG é de grande importância, sendo o foco de vários autores nos últimos anos. Muitas técnicas de compressão de dados de ECG têm sido propostas durante as últimas três décadas com o objetivo de reduzir o volume de dados para armazenamento e transmissão (telemedicina). Muitas técnicas de compressão de sinais são baseadas na redundância dos dados dos arquivos originais. Tais técnicas usam símbolos para representar a informação e um dicionário para conversão desses símbolos nos dados originais. A compressão pode ser com perda parcial ou sem perda de informação. A compressão sem perdas é aplicada, por exemplo, no armazenamento de textos cuja fidelidade precisa ser preservada, como a compressão obtida com o algoritmo ZIP [1]. Na compressão com perda considera-se que a informação original pode ser recuperada pelo receptor através de inferência aplicada nos dados comprimidos, como a compressão de voz aplicada na telefonia celular. A maior parte dos algoritmos de compressão com perda pertence a uma das seguintes categorias: métodos diretos de compressão de dados, que detectam redundâncias analisando as amostras do sinal como por exemplo as compressões usando técnicas de interpolação, ou métodos de transformada, que primeiro transformam o sinal em outra representação tempo-frequência mais indicada para a detecção e remoção de redundâncias. No final da década de 80, uma base de sinais com dois parâmetros (deslocamento e escalamento) teve um grande desenvolvimento, sendo tais sinais chamados *wavelets*. Técnicas de compressão utilizando *wavelets* tem sido aplicadas em diversos setores da engenharia com eficiência, especialmente em sinais de eletrocardiogramas (ECG) [4].

Este artigo tem como objetivo comparar os métodos de compressão utilizando técnicas de interpolação com as compressões utilizando *wavelets* usando exemplos de sinais de ECG. A Seção 2 apresenta diversas técnicas de interpolação utilizadas na compressão de sinais. A Seção 3 descreve os experimentos numéricos cujos resultados são mostrados e analisados na Seção 4. A Seção 5 conclui o artigo.

2 INTERPOLAÇÃO

A técnica de interpolação consiste em, dada uma sequência de pontos (x, y) que sejam considerados amostras de uma dada função $y(x)$, encontrar os valores da função $y(x)$ em pontos intermediários e que

estejam no intervalo dos pontos conhecidos. A interpolação pode ser feita de forma implícita (quando os valores da função são obtidos por um algoritmo numérico) ou explícita (quando uma expressão analítica da função é obtida). Dois tipos de interpolação são explicados: a interpolação polinomial, que consiste em encontrar os pontos intermediários através da determinação de polinômios que satisfaçam as amostras dadas, e a interpolação de Nyquist/Shannon, que utiliza o teorema da amostragem [3] para encontrar tais pontos intermediários.

A compressão de um sinal via interpolação é realizada colhendo-se amostras do sinal a uma taxa inferior à usada originalmente para descrever o sinal, que é então recuperado através das técnicas de interpolação para estimar as amostras originais.

2.1 Interpolação polinomial

A interpolação polinomial consiste em obter um polinômio de grau n , $p_n(x)$, que satisfaça os $(n + 1)$ pontos fornecidos. Como a obtenção do polinômio pode ser numericamente instável, escolhem-se polinômios de grau não muito alto, em geral de grau inferior ao número de amostras suprimidas.

Newton e Lagrange propuseram métodos numéricos para a obtenção de polinômios de interpolação [5]. O método de Newton é iterativo em relação ao grau do polinômio, isto é, o polinômio de grau $k + 1$ é obtido a partir do polinômio de grau k . Os métodos de Newton e de Lagrange não determinam os coeficientes do polinômio.

2.1.1 Interpolação de Lagrange

O algoritmo de interpolação de Lagrange [5] é dado por

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{\Pi_{k,n}(x)}{\Pi_{k,n}(x_k)} \quad (1)$$

sendo

$$\Pi_{k,n}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_i).$$

Note que $p_n(x_r) = y_r$ para $r = 0, \dots, n$ e que as funções $\Pi_{k,n}(x)$ são polinômios de grau n para todo k .

2.1.2 Interpolação das diferenças divididas de Newton

O algoritmo de interpolação de Newton [5] é um algoritmo iterativo com o polinômio $p_n(x)$ dado por

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + (y_n - p_{n-1}(x_n)) \frac{\Pi_{n-1}(x)}{\Pi_{n-1}(x_n)}, \quad p_0(x_0) = y_0 \quad (2)$$

sendo

$$\Pi_{n-1}(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i).$$

Note que $\Pi_{n-1}(x)$ é um polinômio de grau n e que $p_n(x_r) = y_r$ para $r = 0, \dots, n$.

O algoritmo de Newton pode ser escrito como função de valores pré-computados denominados de diferenças divididas na forma

$$p_n(x) = p[x_0] + \sum_{k=1}^n p[x_0, \dots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \quad (3)$$

sendo

$$\begin{aligned}
p[x_i] &= y_i, & i &= 0, \dots, n \\
p[x_i, x_{i+1}] &= \frac{p[x_{i+1}] - p[x_i]}{x_{i+1} - x_i}, & i &= 0, \dots, n-1 \\
&\vdots \\
p[x_0, \dots, x_n] &= \frac{p[x_1, \dots, x_n] - p[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.
\end{aligned}$$

Devido ao mau condicionamento numérico na determinação dos polinômios de interpolação é conveniente o uso de polinômios de no máximo grau 3.

2.1.3 Interpolação *spline* cúbica

A interpolação *spline* cúbica (Proposta por I.J. Schoenberg em 1946) [5] determina um mapeamento $f(x)$ para os $n+1$ pontos usando polinômios cúbicos entre cada dois pontos consecutivos da seqüência de pontos (x, y) dada, de tal forma que a função resultante seja contínua em todos os pontos do conjunto. A determinação dos polinômios necessita ainda de mais duas condições arbitrárias de contorno dando origem a diferentes *splines*. As derivadas primeiras nos pontos x_0 e x_n podem ser arbitrariamente definidas. A condição *natural* impõe que as derivadas segundas nos pontos x_0 e x_n sejam nulas e a condição *sem nó* (*not-a-knot end condition*) impõe que os pontos x_0, x_1, x_{n-1} e x_n sejam interpolados por um polinômio cúbico.

Os polinômios cúbicos $q_k(x)$ que passam nos pontos (x_k, y_k) e (x_{k+1}, y_{k+1}) com derivadas d_k e d_{k+1} , respectivas, são definidos por

$$\begin{aligned}
q_k(x) &= y_k \left(1 + 2 \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right) \left(\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \right)^2 + y_{k+1} \left(1 + 2 \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \right) \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right)^2 + \\
&\quad + d_k (x - x_k) \left(\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \right)^2 - d_{k+1} (x_{k+1} - x) \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right)^2. \quad (4)
\end{aligned}$$

As derivadas primeiras são obtidas impondo-se que as derivadas segundas sejam contínuas

$$\frac{d^2}{dx^2} q_{k-1}(x_k) = \frac{d^2}{dx^2} q_k(x_k) \quad , \quad k = 1, \dots, n-1$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}
d_{k-1} + 2 \left(1 + \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k+1} - x_k} \right) d_k + \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k+1} - x_k} \right) d_{k+1} &= \\
= 3 \left(\frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \right) + 3 \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k+1} - x_k} \right) (y_{k+1} - y_k).
\end{aligned}$$

Observe que este sistema linear de $n-1$ equações tem solução única nas derivadas primeiras, pois os coeficientes do lado esquerdo da igualdade são positivos e os centrais são dominantes [5].

2.2 Interpolação de Nyquist/Shannon

A interpolação pode ser obtida usando o teorema da amostragem de Nyquist/Shannon [3] para pontos igualmente espaçados. Supondo que as amostras sejam dadas por

$$x_k = k\delta \quad , \quad k = 0, \dots, n.$$

A interpolação é dada por

$$f(x) = \sum_{k=0}^n y_k \operatorname{Sa} \left[\frac{\pi}{\delta} (x - k\delta) \right] \quad (5)$$

sendo

$$Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Observe que $f(r\delta) = y_r$, para $r = 0, \dots, n$.

3 DESCRIÇÃO DOS EXPERIMENTOS

Os experimentos numéricos desenvolvidos neste artigo consistem na comparação entre os métodos de compressão por interpolação descritos e os métodos de compressão via *wavelets*. As compressões via *wavelets* são realizadas utilizando-se a ferramenta *Wavelet Toolbox* do pacote computacional Matlab [6]. As comparações entre as técnicas de compressão são feitas por dois parâmetros: A taxa de compressão, que é a razão entre o número de amostras do sinal original e o número de amostras do sinal comprimido; e a distorção do sinal, que é a diferença quadrática entre o sinal original e o sinal recuperado. A medida de distorção, também chamada de PRD (*Percent Root-mean-square Distortion*), é dada por

$$\text{PRD} = \left[\frac{\sum_k (\nu[k] - \hat{\nu}[k])^2}{\sum_k \nu^2[k]} \right]^{1/2} \times 100 \quad (6)$$

sendo $\nu[k]$ o sinal original e $\hat{\nu}[k]$ o sinal reconstruído. Uma boa técnica de compressão apresenta um compromisso entre uma alta taxa de compressão e baixa distorção.

Os sinais a serem comprimidos nos experimentos são sinais de eletrocardiograma obtidos do banco de dados “*Research Resource for Complex Physiologic Signals*” [2].

4 EXPERIMENTOS

4.1 Experimento 1

Para este experimento, foi utilizado o sinal ECG 103 [2], mostrado na Figura 1. O sinal possui 1024 amostras no intervalo entre 0 e 2.8147s.

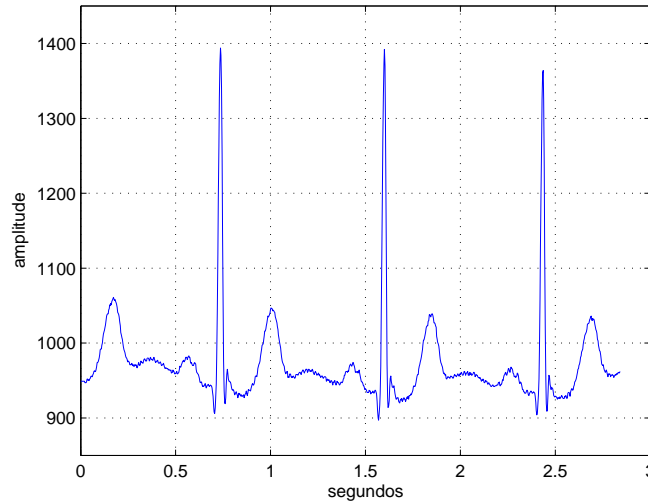


Figura 1: Sinal ECG 103.

A Tabela 1 mostra o resultado das medidas de distorção de cada técnica de compressão quando a taxa de compressão é igual a 10.9. Note que as compressões utilizando *wavelets* apresentam distorções bem menores quando comparando com as técnicas de interpolação, sendo que neste caso a compressão utilizando a *wavelet* biortogonal Bior3.9 resultou na menor distorção, com pouca diferença quando

comparado com a compressão utilizando a *wavelet* Db3. A interpolação de Nyquist/Shannon apresentou o pior resultado, pois a frequência de amostragem do sinal é menor que a frequência Nyquist.

Tabela 1: Distorção na compressão do sinal ECG 103 com razão de compressão igual a 10.9.

método	distorção
interpolação linear	57.2
interpolação cúbica	57.5
interpolação <i>spline</i>	59.9
interpolação de Nyquist/Shannon	74.7
<i>wavelet</i> Haar	9.85
<i>wavelet</i> Db3	6.59
<i>wavelet</i> Bior3.9	4.74
<i>multiwavelet</i> CL1	6.71

A Tabela 2 mostra a maior taxa de compressão para que o sinal recuperado apresente uma distorção menor ou igual a 1%. Note que a maior taxa de compressão é resultante da compressão utilizando a *wavelet* Db3, seguida da *wavelet* Bior3.9. Novamente os métodos de compressão via interpolação apresentaram os piores resultados.

Tabela 2: Razão de compressão do sinal ECG 103 com distorção menor ou igual a 1%.

método	razão de compressão
interpolação linear	1.05
interpolação cúbica	1.20
interpolação <i>spline</i>	1.20
<i>wavelet</i> Haar	1.74
<i>wavelet</i> Db3	2.11
<i>wavelet</i> Bior3.9	2.05
<i>multiwavelet</i> CL1	1.65

4.2 Experimento 2

Para este experimento, foi utilizado o sinal de ECG 08730-07-0 [2], conforme mostrado na Figura 2. O sinal utilizado possui 1024 amostras no intervalo entre 0 e 4.0960s.

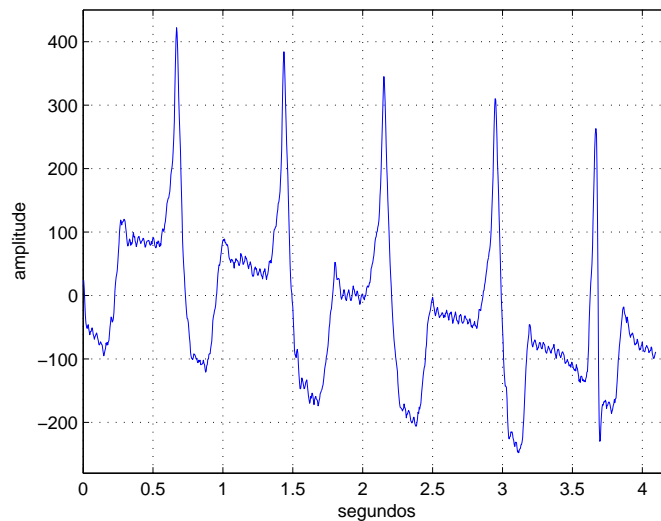


Figura 2: Sinal ECG 08730-07-0.

A Tabela 3 mostra o resultado das medidas de distorção de cada técnica de compressão quando a taxa de compressão é igual a 10.9. Novamente, as compressões utilizando *wavelets* apresentam distorções bem menores quando comparando com as técnicas de interpolação, sendo que neste caso a compressão utilizando a *wavelet* Db3, seguida da *multiwavelet* CL1 e da *wavelet* Bior3.9.

Tabela 3: Distorção na compressão do sinal ECG 08730-07-0 com razão de compressão igual a 10.9.

método	distorção
interpolação linear	18.5
interpolação cúbica	17.4
interpolação <i>spline</i>	18.4
interpolação de Nyquist/Shannon	22.1
<i>wavelet</i> Haar	12.6
<i>wavelet</i> Db3	6.55
<i>wavelet</i> Bior3.9	8.31
<i>multiwavelet</i> CL1	7.20

A Tabela 4 mostra a maior taxa de compressão para que o sinal recuperado apresente uma distorção menor ou igual a 1%. A maior taxa de compressão é resultante da compressão utilizando a *wavelet* Bior3.9, seguida da *wavelet* Db3.

Tabela 4: Razão de compressão do sinal ECG 08730-07-0 com distorção menor ou igual a 1%

método	razão de compressão
interpolação linear	1.10
interpolação cúbica	1.14
interpolação <i>spline</i>	1.14
<i>wavelet</i> Haar	1.52
<i>wavelet</i> Db3	2.00
<i>wavelet</i> Bior3.9	2.10
<i>multiwavelet</i> CL1	1.41

5 CONCLUSÃO

Um estudo comparativo entre diversas técnicas de compressão foi realizado neste artigo. Os parâmetros de comparação entre as técnicas são a taxa de compressão do sinal e a distorção do sinal recuperado, sendo que uma boa compressão é aquela que apresenta uma alta taxa de compressão e baixa distorção. Dois sinais foram submetidos às técnicas de compressão descritas no artigo (interpolação e *wavelets*) e ambos apresentaram resultados parecidos, com as compressões utilizando a *wavelet* Db3 e a *wavelet* Bior3.9 apresentando as melhores compressões e as compressões utilizando interpolação apresentando os piores resultados.

Referências

- [1] Winzip. Available at <http://www.winzip.com>.
- [2] A. L. Goldberger, L. A. N. Amaral, L. Glass, J. M. Hausdorff, P. Ch. Ivanov, R. G. Mark, J. E. Mietus, G. B. Moody, C.-K. Peng, and H. E. Stanley. PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: Components of a new research resource for complex physiological signals. *Circulation*, 101(23):e215–e220, 2000 (June 13). Circulation Electronic Pages: <http://circ.ahajournals.org/cgi/content/full/101/23/e215>.
- [3] Simon Haikin. *Communication Systems*. John Wiley & Sons, Inc., 4th. edition, 2001.

- [4] M. L. Hilton. Wavelet and wavelet packet compression of electrocardiograms. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 44(5):394 – 402, May 1997.
- [5] Erwin Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, Inc., 8th. edition, 1999.
- [6] G. Oppenheim M. Misiti, Y. Misiti and J. M. Poggi. *Wavelet Toolbox*. second edition, 2000.