# Pomiar ryzyka rynkowego cz. 3

23.05.2023

## 1 Metody testowania wstecznego (*backtesting*) dla wartości zagrożonej

**Przypomnijmy przykład dotyczący testowania wstecznego.**
Rozważmy miarę ryzyka określoną jako kwantyl ($\alpha\%$) rozkładu zmiennej ryzyka (**ta miara to właśnie wartość zagrożona, VaR**). Jeśli wartość tego kwantyla została oszacowana poprawnie, to dla danych z niedalekiej przyszłości ilość stóp zwrotu mniejszych niż ten kwantyl powinna wynosić około $\alpha\%$.

Załóżmy, że mamy dane $(r_1, r_2, ..., r_{2n})$ z okresu $(1, 2, ..., 2n)$. Można zastosować następującą procedurę:

1. Szacujemy kwantyl rzędu $\alpha$, $K_\alpha^1$ na podstawie danych $(1, 2, ..., n)$.
2. Sprawdzamy, czy wartość $r_{n+1}$ przekracza $K_\alpha^1$. Podstawiamy $I_\alpha^1 = 1$, jeśli $r_{n+1} < K_\alpha^1$ lub $I_\alpha^1 = 0$, jeśli $r_{n+1} > K_\alpha^1$.
3. Szacujemy kwantyl rzędu $\alpha$, $K_\alpha^2$ na podstawie danych $(2, 3, ..., n+1)$.
4. Sprawdzamy, czy wartość $r_{n+2}$ przekracza $K_\alpha^2$. Podstawiamy $I_\alpha^2 = 1$, jeśli $r_{n+2} < K_\alpha^2$ lub $I_\alpha^2 = 0$, jeśli $r_{n+2} > K_\alpha^2$.
5. ...
6. Szacujemy kwantyl rzędu $\alpha$, $K_\alpha^n$ na podstawie danych $(n, n+1, ..., 2n-1)$.
7. Sprawdzamy, czy wartość $r_{2n}$ przekracza $K_\alpha^n$. Podstawiamy $I_\alpha^n = 1$, jeśli $r_{2n} < K_\alpha^n$ lub $I_\alpha^n = 0$, jeśli $r_{2n} > K_\alpha^n$.

Jeśli oszacowania są poprawne, to $(I_\alpha^1, I_\alpha^2, ..., I_\alpha^n)$ powinno mieć rozkład Bernoulliego o średniej $E(I_\alpha) = \alpha$ i wariancji $Var(I_\alpha) = \alpha(1-\alpha)$.

W dalszej części wprowadzimy testy bazujące na własnościach wektora przekroczeń $(I_\alpha^1, I_\alpha^2, ..., I_\alpha^n)$.
Uwaga: Długości okresu, z którego wyznaczamy VaR i okresu, dla którego wyznaczamy wektor przekroczeń mogą być różne.

## 1.1 Test pokrycia (test Kupca, *unconditional coverage test*)

Niech:
$\pi$ - procent przekroczeń wynikający z danych (czyli średnia z wektora przekroczeń);
$p$ - procent przekroczeń wynikający z założonego modelu (czyli $\alpha$).
Możemy testować równość tych dwóch wartości. Test Kupca opiera się na następujących hipotezach:

$$H_0: \quad \pi = p,$$

$$H_1: \quad \pi \neq p.$$

Możemy zapisać funkcję wiarygodności z rozkładu Bernoulliego:

$$L(\pi) = \prod_{i=1}^{n} (1-\pi)^{(1-I_\alpha^i)} \pi^{I_\alpha^i} = (1-\pi)^{I_0} \pi^{I_1}, \tag{1}$$

gdzie $I_0$ - ilość zer, a $I_1$ - ilość jedynek w wektorze przekroczeń.
Zatem dla estymatora średniej ilości przekroczeń $\hat{\pi} = \frac{I_1}{n}$ mamy:

$$L(\hat{\pi}) = \left(1 - \frac{I_1}{n}\right)^{I_0} \left(\frac{I_1}{n}\right)^{I_1}. \tag{2}$$

Jeżeli spełniona jest hipoteza $H_0$, tzn. $\pi = p$, to również:

$$L(p) = (1-p)^{I_0} (p)^{I_1}. \tag{3}$$

Możemy zastosować test ilorazu wiarygodności. Służy do porównywania dwóch modeli, z których jeden jest zagnieżdżony w drugim (tzn. ma w stosunku do niego ograniczoną przestrzeń parametrów). Formalnie: rozważmy model statystyczny z przestrzenią parametrów $\Theta$. Niech $\Theta_0$ będzie podprzestrzenią $\Theta$, $\Theta_0 \subset \Theta$. Hipoteza $H_0$ mówi, że parametr modelu $\theta$ należy do przestrzeni $\Theta_0$, $H_0 : \theta \in \Theta_0$ , tzn model z parametrami ograniczonymi do podprzestrzeni $\Theta_0$ nie jest gorszy od modelu ogólniejszego. Hipoteza alternatywna przjmuje postać $H_1 : \theta \in \Theta \backslash \Theta_0$. Wtedy statystyka testowa (nazywana ilorazem wiarygodności) przyjmuje postać:

$$LR = -2 \ln \left[ \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta)} \right], \tag{4}$$

gdzie $L$ to funkcja wiarygodności. Jeśli hipoteza $H_0$ jest spełniona, to statystyka $LR$ zbiega asymptotycznie do rozkładu $\chi^2$ z liczbą stopni swobody równą różnicy wymiarów pomiędzy $\Theta$ i $\Theta_0$.

W przypadku testu pokrycia modelem zagnieżdżonym jest model z ustaloną wartością $p$. Modelem ogólniejszym jest model, w którym dopuszczamy różne wartości procentu przekroczeń. W tym przypadku funkcja wiarygodności osiąga supremum dla parametru $\hat{\pi}$. Zatem iloraz wiarygodności przyjmuje następującą postać:

$$LR = -2 \ln \left[ \frac{L(p)}{L(\hat{\pi})} \right] = -2 \ln \left[ \frac{(1-p)^{I_0} (p)^{I_1}}{(1 - \frac{I_1}{n})^{I_0} (\frac{I_1}{n})^{I_1}} \right]. \tag{5}$$

Jeśli hipoteza $H_0$ jest prawdziwa, to $LR \sim \chi_1^2$. Zatem zarówno obszar krytyczny testu, jak i jego $p$-wartość można wyznaczyć bazując na dystrybunacie rozkładu $\chi_1^2$. Na przykład przypomnijmy, że $p$-wartość to prawdopodobieństwo otrzymania większej wartości statystyki testowej przy prawdziwej hipotezie $H_0$, czyli $P(X > LR) = 1 - \chi_1^2(LR)$, gdzie $X$ to zmienna o rozkładzie $\chi_1^2$ (statystyka testowa), $LR$ to wartość statysytki otrzymana z danych, a $\chi_1^2(\cdot)$ to dystrybuanta rozkładu $\chi_1^2$.

## 2 Literatura uzupełniająca

[1] Alexander J. McNeil , Rudiger Frey, Paul Embrechts, Quantitative Risk Management, Princeton University Press, New Jersey, 2005,

[2] Carol Alexander, Market Risk Analysis, vol. IV: Value at Risk Models, Wiley, Chichester, 2008,

[3] Kevin Dowd, Measuring Market Risk, Wiley, 2002,

[4] Philippe Jorion, Value at Risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk, MCGraw-Hill, 2001.