Raport 2
Statystyka Stosowana

Natalia Lach 262303, Alicja Myśliwiec 262275

Matematyka Stosowana
Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

21 czerwca 2022

Spis treści

1. Wstęp

2. Teoria

Do wykonania zadań z sekcji 3 i 4 wykorzystane zostały następujące definicje.

— Obszar krytyczny - zbiór wartości statystyki testowej prowadzących do odrzucenia hipotezy zerowej H_0.
— Poziom istotności α - stanowi próg, który określa, czy wynik badania można uznać za statystycznie istotny, czy jest on dziełem przypadku.
— p-wartość - najmniejszy poziom istotności α, przy którym zaobserwowane wartości statystyki testowej prowadzą do odrzucenia hipotezy zerowej.

3. Zadanie 1

3.1. Cel zadania

Celem tego zadania jest przeprowadzenie testu dla wartości średniej z populacji generalnej o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(\mu, 0.2)$. Należało przetestować hipotezę zerową $H_0 : \mu = 1.5$ przeciwko trzem hipotezom alternatywnym, to jest $\mu \neq 1.5$, $\mu < 1.5$, $\mu > 1.5$. W tym celu, należało wyznaczyć wartość statystyki testowej, obszary krytyczne i p-wartość, a także zobrazować te wielkości na wykresach.

3.2. Obliczenia

3.2.1. Statystyka testowa

Aby przetestować hipotezę zerową dla wartości średniej, skorzystamy ze statystyki

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

gdzie $\bar{X}$ - średnia z próby, μ_0 - wartość hipotezy zerowej, σ - odchylenie standardowe, n - liczność próby.

Wiemy, że $n = 1000$, $\sigma = 0.2$ oraz $\mu_0 = 1.5$. Obliczając średnią z próby, otrzymujemy

$$\bar{X} = 1.45546595425 \approx 1.4555,$$

dzięki czemu jesteśmy w stanie wyznaczyć wartość statystyki testowej Z.

$$Z = -7.041450899607091 \approx -7.0415$$

3.2.2. Obszary krytyczne

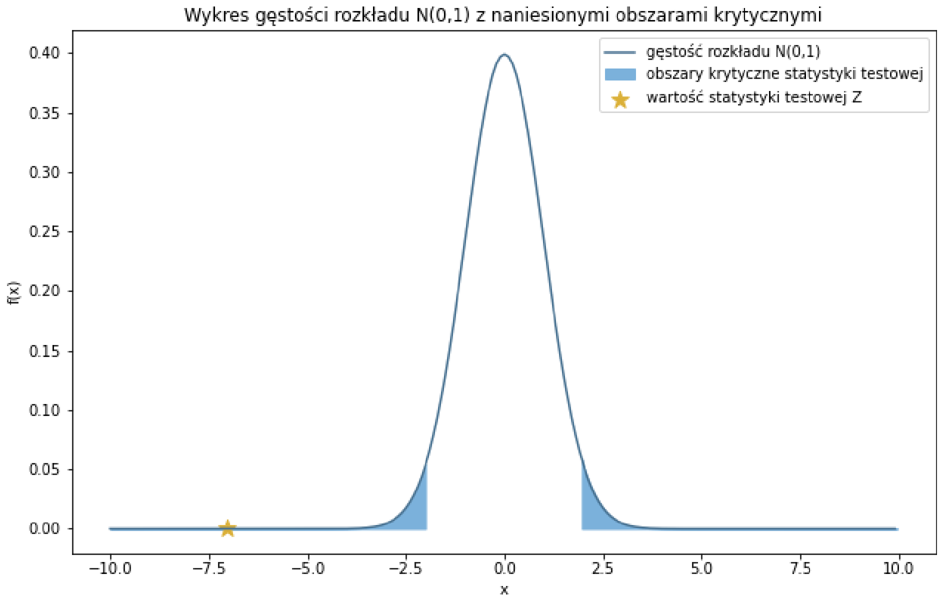
Dla hipotezy alternatywnej $\mu \neq 1.5$, obszar krytyczny jest dany jako

$$C = \{x : x < -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \vee x > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\},$$

gdzie $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ jest kwantylem rzędu $1 - \frac{\alpha}{2}$ standardowego rozkładu normalnego. Korzystając z faktu, iż $\alpha = 0.05$, otrzymujemy

$$C = (-\infty, -1.96) \cup (1.96, \infty).$$

W celu zobrazowania powyższego obszaru, zostanie on przedstawiony wraz z gęstością standardowego rozkładu normalnego. Naniesiona zostanie również wcześniej wyznaczona statystyka testowa Z.



Rys. 1: Wykres gęstości rozkładu $\mathcal{N}$ z naniesionymi obszarami krytycznymi i statystyką testową dla hipotezy alternatywnej $\mu \neq 1.5$

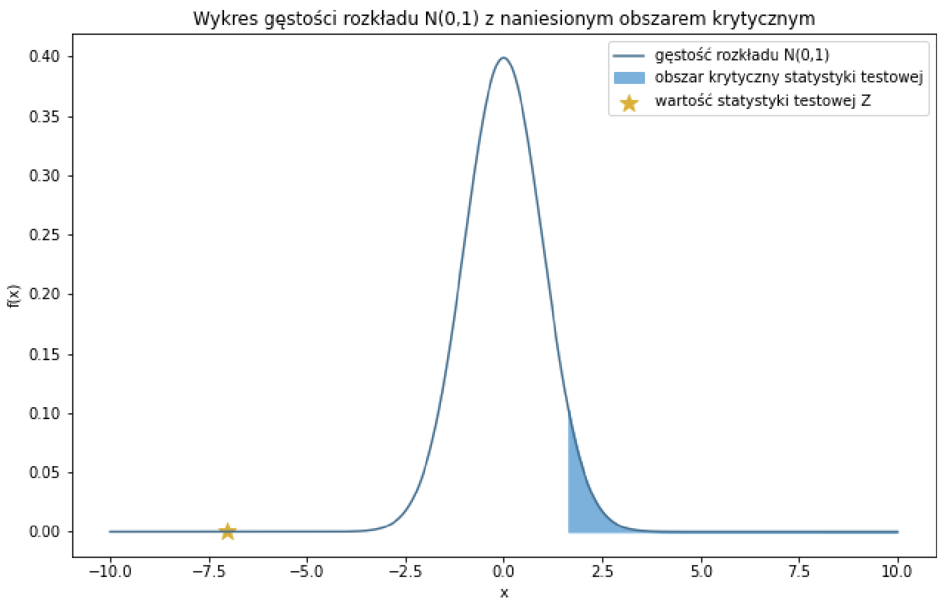
Naniesione na wykres obszary krytyczne są oczywiście symetryczne. Statystyka Z znajduje się w jednym z nich, więc hipoteza zerowa zostaje odrzucona.

Dla hipotezy alternatywnej $\mu > 1.5$, obszar krytyczny jest dany jako

$$C = \{x : x > z_{1-\alpha}\}.$$

Teraz podstawiając odpowiednie wartości, prezentuje się on następująco.

$$C = (1.645, \infty).$$



Rys. 2: Wykres gęstości rozkładu $\mathcal{N}$ z naniesionymi obszarami krytycznymi i statystyką testową dla hipotezy alternatywnej $\mu > 1.5$

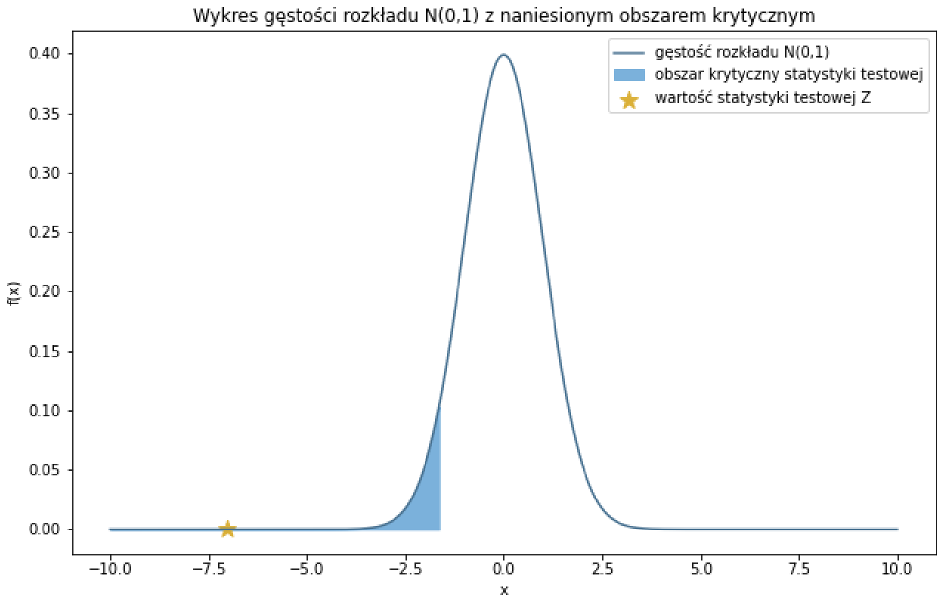
Jak widać na rysunku 2, w przeciwieństwie do poprzedniej hipotezy, statystyka testowa znajduje się poza obszarem krytycznym. Stwierdzamy zatem, że została ona przyjęta.

Ostatnią rozpatrywaną hipotezą alternatywną jest $\mu < 1.5$. Jej obszar krytyczny zapisujemy jako

$$C = \{x : x < z_\alpha\}.$$

Analogicznie tak jak w przypadku poprzednim możemy zapisać, iż

$$C = (-\infty, -1.645).$$



Rys. 3: Wykres gęstości rozkładu $\mathcal{N}$ z naniesionymi obszarami krytycznymi i statystyką testową dla hipotezy alternatywnej $\mu < 1.5$

Można zauważyć, że rozpatrywany obszar jest symetrycznie odbitym względem zera odpowiednikiem obszaru dla hipotezy $\mu > 1.5$. Dlatego i tym razem statystyka Z mieści się w obszarze krytycznym, przez co została odrzucona.

3.2.3. P-wartość

Zgodnie z definicją, p-wartość jest to najmniejszy poziom istotności α, dla którego wartość statystyki testowej prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej. Dla hipotezy alternatywnej $\mu \neq 1.5$ możemy ją zapisać jako

$$p\text{-wartość} = 2P_{H_0}(Z \geqslant |z|) = 2(1 - P_{H_0}(Z \leqslant |z|)) = 2(1 - F_Z(|z|)),$$

gdzie F_z jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego, a z jest wcześniej wyznaczoną wartościa statystyki testowej. Podstawiając dane wartości do wzoru otrzymujemy następujący wynik.

$$p\text{-wartość} = 2(1 - F_Z(|-7.0415|)) \approx 1.9018 \cdot 10^{-12}$$

W tym przypadku p-wartość jest dużo mniejsza od 0.01. W takim przypadku hipoteza zerowa H_0 zostaje odrzucona.

Dla hipotezy alternatywnej $\mu > 1.5$ wzór na p-wartość przyjmuje postać

$$p\text{-wartość} = P_{H_0}(Z > z) = 1 - P_{H_0}(Z \leqslant z), = 1 - F_Z(z).$$

Ponownie podstawiając

$$p\text{-wartość} = 1 - F_Z(-7.0415) \approx 1.$$

Otrzymany wynik jest zdecydowanie większy niż 0.1, dlatego też hipoteza nie zostanie odrzucona. Dla hipotezy alternatywnej $\mu < 1.5$ wzór na p-wartość przedstawia się jako

$$p\text{-wartość} = P_{H_0}(Z \leqslant z) = F_Z(z).$$

Stosując odpowiednie podstawienia, otrzymujemy

$$p\text{-wartość} = F_Z(-7.0415) \approx 9.509 \cdot 10^{-13}.$$

Tu ponownie wartość jest znacznie mniejsza od 0.01, analogicznie więc, hipoteza zerowa zostanie odrzucona, to znaczy nie zostanie przyjęta.

3.3. Wnioski

Wszystkie powyższe rachunki dotyczą poziomu istotności $\alpha = 0.05$. Co dzieje się jednak, gdy poziom ten zwiększymy bądź zmniejszymy? Weźmy dwie wartości $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.1$ oraz znajdźmy ich obszary krytyczne dla każdej z hipotez alternatywnych. Wyniki zostaną przedstawione w tabeli.

	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$
$\mu_0 \neq 1.5$	(-∞, $-$ 2.576) $\cup$ (2.576,∞)	(-∞, $-$ 1.96) $\cup$ (1.96,∞)	(-∞, $-$ 1.645) $\cup$ (1.645,∞)
$\mu_0 > 1.5$	(2.326,∞)	(1.645,∞)	(1.282,∞)
$\mu_0 < 1.5$	(-∞, $-$ 2.326)	(-∞, $-$ 1.645)	(-∞, $-$ 1.282)

Tab. 1: Tabela obszarów krytycznych dla różnych poziomów istotności α

Analizując powyższą tabelę, widać, że im większy jest poziom istotności tym większą powierzchnię zajmują obszary krytyczne.

Z racji tego, że poziom istotności α jest teoretycznym odpowiednikiem błędu I rodzaju (którego symulacja zostanie przeprowadzona w sekcji 5), wartość ów błędu będzie bezpośrednio zależała od wartości α. Wraz z zwiększeniem α nastąpi zwiększenie jego wartości.

Ponadto, manipulowanie wartościami poziomu istotności α wpływa bezpośrednio na moc testu (zagadnienie także wytłumaczono i wysymulowane w sekcji 5). Wraz ze zwiększeniem α następować powinno zwiększenie mocy testu.

4. Zadanie 2

4.1. Cel zadania

Celem tego zadania jest przeprowadzenie testu dla wariancji na podstawie próby z populacji generalnej o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0.2, \sigma^2)$. Należało przetestować hipotezę zerową $H_0 : \sigma^2 = 1.5$ przeciwko trzem hipotezom alternatywnym, to jest $\sigma^2 \neq 1.5$, $\sigma^2 < 1.5$, $\sigma^2 > 1.5$. W tym celu, podobnie jak w zadaniu 1., należało wyznaczyć wartość statystyki testowej, obszary krytyczne i p-wartość, a także zobrazować te wielkości na wykresach.

4.2. Obliczenia

4.2.1. Statystyka testowa

Do testowania hipotezy zerowej dla wariancji w rodzinie rozkładów normalnych używa się statystyki

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2},$$

gdzie n - liczność próby, $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ - estymator wariancji, σ_0 - wartość hipotezy zerowej.

W przypadku danych z zadania $n = 1000$ oraz $\sigma_0 = 1.5$. Dodatkowo

$$s^2 = 1.6681207941464065 \approx 1.6681$$

Ostatecznie uzyskujemy wartość statystyki testowej X^2 i wynosi ona

$$X^2 = 1110.9684489015067 \approx 1111$$

4.2.2. Obszary krytyczne

Przy zachodzeniu hipotezy zerowej $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ owa statystyka X^2 ma rozkład chi kwadrat z $n-1$ stopniami swobody.

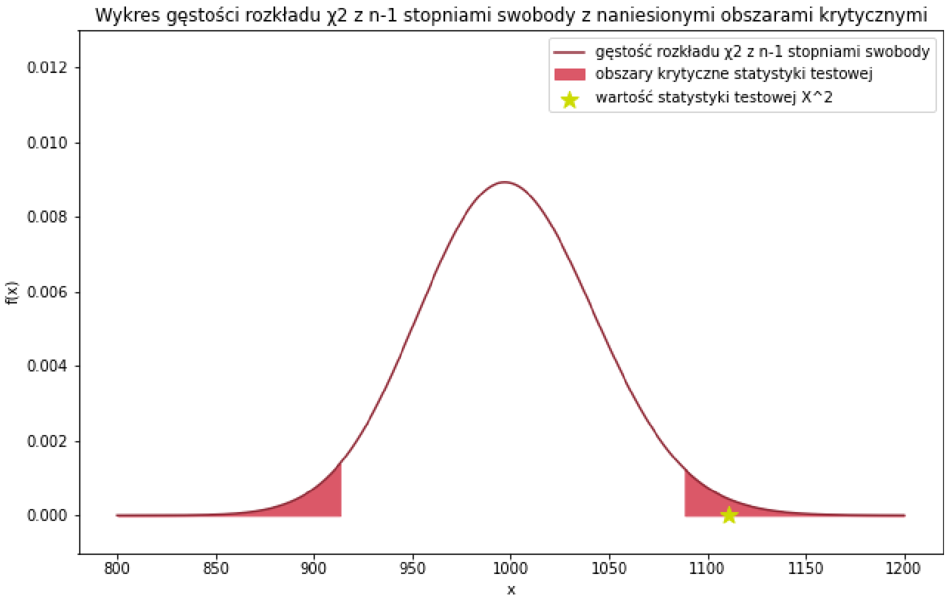
Wtedy dla hipotezy alternatywnej $\sigma^2 \neq 1.5$ obszar krytyczny jest postaci

$$C = \{x^2 : x^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} \vee x^2 > \chi^2_{\frac{1-\alpha}{2},n-1}\},$$

gdzie $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ oznacza kwantyl rzędu $\frac{\alpha}{2}$ rozkładu chi kwadrat z n-1 stopniami swobody. Podstawiając odpowiednie wartości, tj. $\alpha = 0.05$ otrzymujemy

$$C = (-\infty, 913.3) \cup (1088.49, \infty).$$

Naniesiono ów obszar na wykres gęstości rozkładu χ^2, wraz z wartością statystyki testowej X^2.



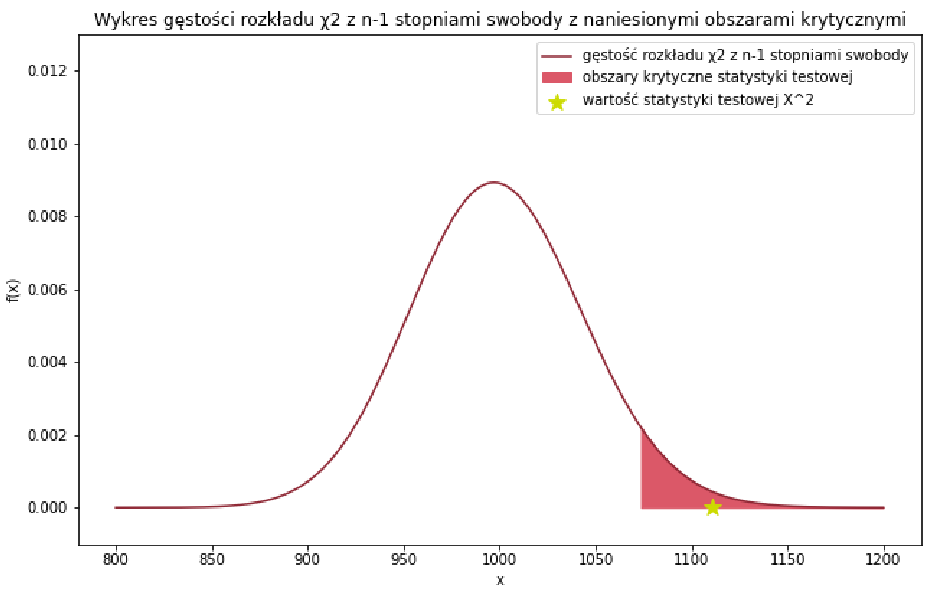
Rys. 4: Wykres gęstości rozkładu χ^2 z naniesionymi obszarami krytycznymi i statystyką testową dla hipotezy alternatywnej $\sigma^2 \neq 1.5$

Obszary krytyczne, wyznaczone na powyższym wykresie, są oczywiście symetryczne. Statystyka testowa X^2 znajduje się w prawej części obszaru. Z obliczeń, jak i z powyszego wykresu wynika, że hipoteza zerowa została odrzucona, gdyż statystyka X^2 znajduje się w obszarze krytycznym.
Dla drugiej hipotezy alternatywnej $\sigma^2 > 1.5$ obszar krytyczny jest postaci

$$C = \{x^2 : x^2 > \chi^2_{1-\alpha,n-1}\},$$

z oznaczeniami jak wyżej. Analogicznie, podstawiając odpowiednie wartości, otrzymujemy

$$C = (1073.64, \infty). \tag{1}$$



Rys. 5: Wykres gęstości rozkładu χ^2 z naniesionymi obszarami krytycznymi i statystyką testową dla hipotezy alternatywnej $\sigma^2 > 1.5$

Tym razem obszar krytyczny nie jest już symetryczny. Pozostał jedynie obszar po prawej stronie, którego pole zwiększyło się wskutek użycia kwantylu rzędu $1-\alpha$ zamiast $1-\alpha/2$. Z wykresu 5 wynika, że statystyka testowa znajduje się w obszarze krytycznym. Oznacza to, że dla rozważanej hipotezy alternatywnej, hipoteza zerowa zostałaby odrzucona.

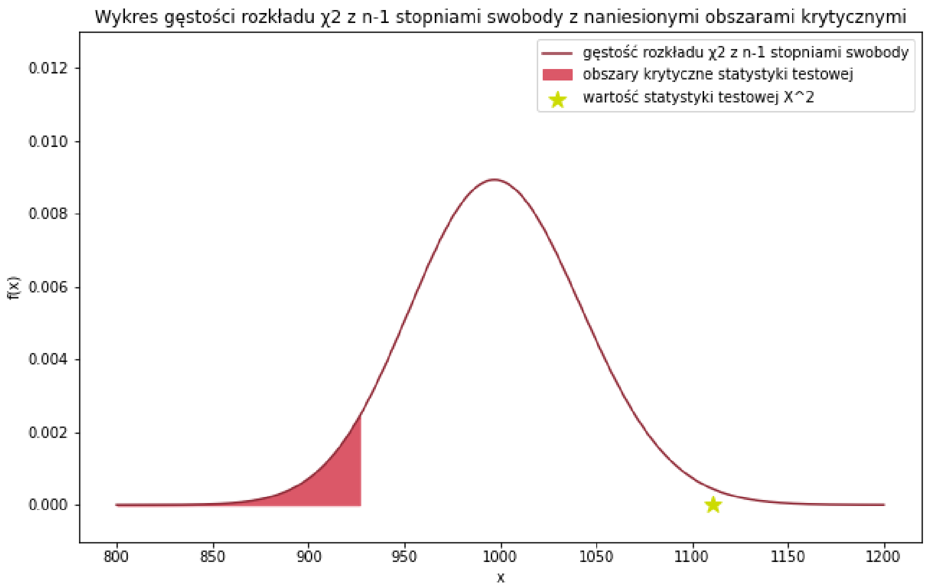
Dla ostatniej hipotezy alternatywnej $\sigma^2 < 1.5$ obszar krytyczny jest postaci

$$C = \{x^2 : x^2 < \chi^2_{\alpha,n-1}\},$$

z oznaczeniami jak wyżej. Ponownie, podstawiając odpowiednie wartości, otrzymujemy

$$C = (-\infty, 926.63).$$

Ponownie naniesiono otrzymany obszar krytyczny na wykres gęstości rozkładu χ^2 i zaznaczono statystykę testową X^2.



Rys. 6: Wykres gęstości rozkładu χ^2 z naniesionymi obszarami krytycznymi i statystyką testową dla hipotezy alternatywnej $\sigma^2 < 1.5$

Tym razem jednak, statystyka X^2 nie znalazła się w obszarze krytycznym, zatem została ona przyjęta.

4.2.3. P-wartość

Zgodnie z podaną wcześniej definicją można wyznaczyć p-wartości dla rozważanych hipotez alternatywnych.
Dla hipotezy alternatywnej $\sigma^2 \neq 1.5$ dany jest wzór

$$\text{p-wartość} = 2P_{H_0}(\chi^2 \geqslant |X^2|) = 2(1 - P_{H_0}(\chi^2 \leqslant |X^2|)) = 2(1 - F_{\chi^2}(|X^2|)),$$

gdzie $F_{\chi^2}(x)$ - dystrybuanta rozkładu χ^2 z $n-1$ stopniami swobody oraz X^2 - statystyka testowa, której wartość wyznaczono wcześniej. Podstawiając wartość X^2 i korzystając z wbudowanych funkcji dystrybuanty rozważanego rozkładu otrzymujemy

$$p\text{-wartość} = 2(1 - F_{\chi^2}(|1111|)) \approx 2 - 2 \cdot 0.9925 \approx 0.015$$

p-wartość w tym przypadku należy do przedziału (0.01,0.1). Jest to sytuacja graniczna, w której przyjęcie, bądź odrzucenie hipotezy zerowej H_0 zależy od preferencji i sytuacji, w której się znajdujemy. Jej wartość jest jednak bliższa 0.01, więc można skłaniać się ku odrzuceniu H_0.

Dla hipotezy alternatywnej $\sigma^2 < 1.5$ dany jest wzór

$$p\text{-wartość} = P_{H_0}(\chi^2 \leqslant X^2) = F_{\chi^2}(X^2),$$

z oznaczeniami jak wcześniej. Podstawiając wartość X^2 i korzystając z wbudowanych funkcji dystrybuanty rozważanego rozkładu otrzymujemy

$$p\text{-wartość} = F_{\chi^2}(1111) \approx 0.9925$$

p-wartość w tym przypadku jest większa od 0.1, zatem hipoteza zerowa H_0 zostaje przyjęta.

Dla hipotezy alternatywnej $\sigma^2 > 1.5$ dany jest wzór

$$p\text{-wartość} = P_{H_0}(\chi^2 \geqslant X^2) = 1 - F_{\chi^2}(X^2),$$

z oznaczeniami jak wcześniej. Podstawiając wartość X i korzystając z wbudowanych funkcji dystrybuanty rozważanego rozkładu otrzymujemy

$$p\text{-wartość} = 1 - F_{\chi^2}(1111) \approx 1 - 0.9925 = 0.0075$$

p-wartość w tym przypadku jest mniejsza od 0.01, zatem hipoteza zerowa H_0 zostaje odrzucona.

4.3. Wnioski

Ostatnim zadaniem było odpowiedzenie na pytanie co dzieje się, gdy zwiększamy bądź zmniejszamy poziom istotności α. Aby odpowiedzieć na to pytanie znajdźmy obszary krytyczne dla paru innych wartości $\alpha = 0.01, \alpha = 0.1$ dla rozważanych hipotez alternatywnych. Wyniki, wraz z poprzednio otrzymanymi wartościami dla $\alpha = 0.05$, przedstawiono w poniższej tabeli.

	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$
$\sigma_0^2 \neq 1.5$	$(-\infty, 887.6) \cup (1117.9, \infty)$	$(-\infty, 913.3) \cup (1088.5, \infty)$	$(-\infty, 926.6) \cup (1073.6, \infty)$
$\sigma_0^2 > 1.5$	$(1105.9, \infty)$	$(1073.6, \infty)$	$(1056.7, \infty)$
$\sigma_0^2 < 1.5$	$(-\infty, 898.0)$	$(-\infty, 926.6)$	$(-\infty, 942.1)$

Tab. 2: Tabela obszarów krytycznych dla różnych poziomów istotności α

Z powyższej tabeli 2 wynika ponownie, że obszary krytyczne wraz ze wzrostem poziomu istotności α, zwiększają swoje pole (w tym także długość przedziału, do którego może wpaść statystyka testowa).

Jak już było wspomniane wcześniej, poziom istotności α jest teoretycznym odpowiednikiem błędu I rodzaju, więc wartość ów błędu będzie rosła wraz ze zwiększaniem α.

Analogiczna sytuacja zachodzi dla mocy testu.

5. Zadanie 3

5.1. Cel zadania

W tym zadaniu należało wyznaczyć symulacyjnie błąd I rodzaju, błąd II rodzaju oraz moc testu. Rozpatrzono oba przypadki - to znaczy testy na średnią oraz wariancję.

5.2. Teoria

Do wykonania tego zadania zostały wykorzystane następujące definicje i wzory.

— Błąd I rodzaju - prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej H_0, która jest prawdziwa. Teoretyczna wartość błędu I rodzaju wynosi α (poziom istotności testu),

— Błąd II rodzaju - prawdopodobieństwo przyjęcia fałszywej hipotezy zerowej H_0 i odrzucenia prawdziwej hipotezy alternatywnej H_1

— Moc testu - prawdopodobieństwo odrzucenia fałszywej hipotezy zerowej H_0 i przyjęcie prawdziwej hipotezy alternatywnej H_1. Wyliczane jest ze wzoru

$$\text{moc testu} = 1 - \text{błąd II rodzaju} \tag{2}$$

5.3. Obliczenia i prezentacja wyników dla zadania 1.

5.3.1. Błąd I rodzaju

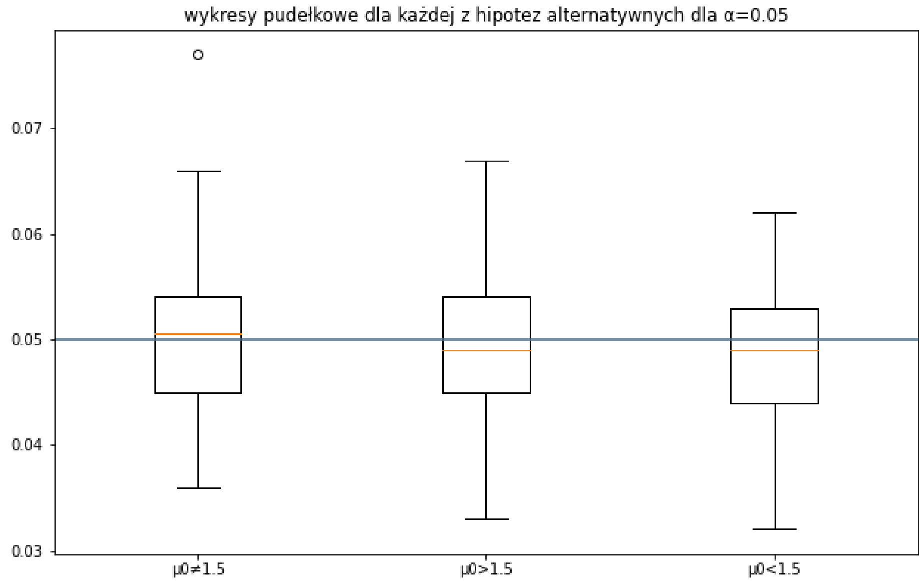
Postępując zgodnie ze schematem podanym w treści zadania, wysymulowano wartości prawdopodobieństwa popełnienia błędu I rodzaju, dla kilku poziomów istotności α, to jest $\alpha \in [0.01,0.05,0.1]$. Wyniki przedstawiono w tabeli.

	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$
$\mu \neq 1.5$	0.003	0.049	0.086
$\mu > 1.5$	0.011	0.058	0.121
$\mu < 1.5$	0.013	0.041	0.103

Tab. 3: Tabela prawdopodobieństw popełnienia błędu I rodzaju

Otrzymane wyniki z powyższej tabeli dla każdej z hipotez alternatywnych są bardzo zbliżone do swojej teoretycznej wartości, która jak wiadomo powinna pokrywać się z wartością poziomu istotności α. Sugeruje to poprawnośc wykonanych symulacji

Poniżej przedstawiono wykresy pudełkowe dla $M = 100$ prób otrzymania błędu I rodzaju dla każdej z hipotez alternatywnych dla $\alpha = 0.05$.



Rys. 7: Wykresy pudełkowe dla kolejnych hipotez alternatywnych, dla poziomu istotności $\alpha = 0.05$

Jak widać powyższe wykresy nie są identyczne, jednak mediany oscylują wokół teoretycznej wartości $\alpha = 0.05$. Żaden z rozpatrywanych boxplotów nie jest idealnie symetryczny. Dla hipotezy alternatywnej $H_1 : \mu_0 \neq 1.5$ wykres ma medianę przesuniętą bardziej w prawą stronę, tak samo jego prawy wąs jest dłuższy. Jako jedyny posiada jakąkolwiek wartość odstającą. Wykres dla $H_1 : \mu_0 > 1.5$ jest tym najbardziej symetrycznym, pomimo iż jego mediana znajduję się bardziej z lewej strony. Ostatni wykres również posiadą medianę bardziej na lewo od spodziewanej teoretycznej wartości. Także tylko on posiada dłuższego dolnego wąsa. Ogólnie analizując wykresy oraz otrzymane wyniki, można stwierdzić, iż symulacja została przeprowadzona prawidłowo.

5.3.2. Błąd II rodzaju

Zgodnie ze schematem zostały wyznaczone symulacyjnie wartości prawdopodobieństw popełnienia błędu II rodzaju. Jako największe odchylenie od hipotezy zerowej wzieęo 0.03.

	$\mu = 1.47$	$\mu = 1.48$	$\mu = 1.49$	$\mu = 1.51$	$\mu = 1.52$	$\mu = 1.53$
$\mu_0 \neq 1.5$	0.929	0.946	0.951	0.948	0.944	0.936
$\mu_0 > 1.5$	–	–	–	0.949	0.944	0.940
$\mu_0 < 1.5$	0.934	0.953	0.954	–	–	–

Tab. 4: Tabela otrzymanych wartości prawdopodobieństwa popełnienia błędu II rodzaju dla $\alpha = 0.05$

Jak można wyczytać z powyższej tabeli, granica wartości prawdopodobieństw dla hipotezy alternatywnej $H_1 : \mu_0 \neq 1.5$ dla $\mu \to \mu_0^-$ oraz dla $\mu \to \mu_0^+$ zbiegają najprawdopodobniej do wartości $1 - \alpha$. Dla hipotez alternatywnych $H_1 : \mu_0 > 1.5$ oraz $H_1 : \mu_0 < 1.5$ nie rozpatrzono niespełniających warunku wartości μ. Tutaj widać bardzo podobną tendencję zbieżności w miarę zmniejszania odległości do μ_0. Ogólnie można stwierdzić, iż prawdopodobieństwo przyjęcia hipotezy zerowej, gdy jest ona fałszywa, jest wysokie. Jak juz zostało zauważone, im bliżej znajdujemy się prawdziwej wartości $\mu_0 = 1.5$, tym większe jest ów prawdopodobieństwo.

5.3.3. Moc testu

Korzystając ze wzoru, który znajduję się w sekcji 2, jesteśmy w stanie bezpośrednio zapisać wyniki mocy testu bazując na wynikach z tabeli 4.

	$\mu = 1.47$	$\mu = 1.48$	$\mu = 1.49$	$\mu = 1.51$	$\mu = .52$	$\mu = 1.53$
$\mu_0 \neq 1.5$	0.071	0.054	0.049	0.052	0.056	0.064
$\mu_0 > 1.5$	–	–	–	0.051	0.054	0.060
$\mu_0 < 1.5$	0.066	0.047	0.046	–	–	–

Tab. 5: Tabela otrzymanych wartości mocy testu dla $\alpha = 0.05$

Ponieważ moc testu jest różnicą $1-$błąd II rodzaju, analizując wyniki można wyciągnąć odwrotne wnioski w porównaniu do wyżej opisanego właśnie błędu II rodzaju. Najmniejszą moc testu można zauważyć dla najbliższych wartości μ do $\mu_0 = 1.5$, a tym większą, im bardziej się od niej oddalimy.

5.4. Obliczenia i prezentacja wyników dla zadania 2.

5.4.1. Błąd I rodzaju

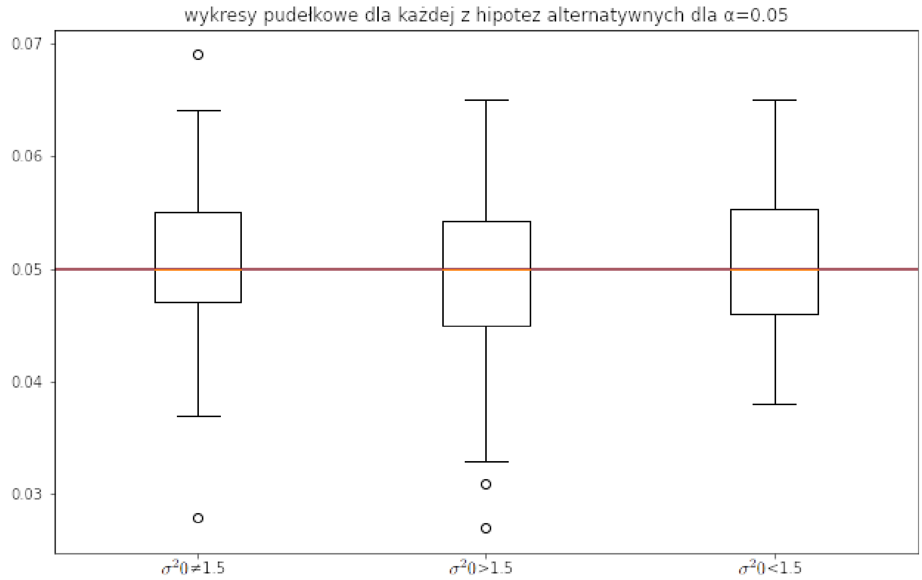
Postępując zgodnie ze schematem podanym w treści zadania, wysymulowano wartości prawdopodobieństw popełnienia błędu I rodzaju, dla kilku poziomów istotności α, to jest $\alpha \in [0.01,0.05,0.1]$. Wyniki przedstawiono w poniższej tabeli.

	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$
$\sigma_0^2 \neq 1.5$	0.012	0.057	0.095
$\sigma_0^2 > 1.5$	0.008	0.050	0.111
$\sigma_0^2 < 1.5$	0.008	0.048	0.103

Tab. 6: Tabela otrzymanych wartości prawdopodobieństw popełnienia błędu I rodzaju

Jak wiadomo, wartość prawdopodobieństwa popełnienia błędu I rodzaju teoretycznie powinna pokrywać się z wartością poziomu istotności α. Otrzymane wyniki podane w tabeli 6 dla każdej z hipotez alternatywnych rzeczywiście oscylują wokół swojej teoretycznej wartości. Nie są one jednak identyczne, lecz to wynika z natury symulacji. Gdyby wykonanych zostało więcej prób Monte Carlo, rozpatrywane wartości byłyby sobie jeszcze bliższe.

Stworzono także wykresy pudełkowe dla $M = 100$ prób otrzymania błędu I rodzaju dla każdej z hipotez alternatywnych. Przyjęto tylko $\alpha = 0.05$. Reszta przypadków powinna zachowywać się analogicznie.



Rys. 8: Wykresy pudełkowe dla kolejnych hipotez alternatywnych, dla poziomu istotności $\alpha = 0.05$

Każdy z boxplotów delikatnie różni się od siebie. W przypadku hipotezy alternatywnej $H_1 : \sigma_0^2 \neq 1.5$ wykres jest niesymetryczny, ma medianę przesuniętą bardziej na lewo. Posiada także dwie wartości odstające po obu stronach. Wykres dla $H_1 : \sigma_0^2 > 1.5$ jest już bardziej symetryczny, pomimo posiadania dwóch wartości odstających z lewej strony. Ma także lekko dłuższe wąsy. Ostatnu wykres ma najkrótsze wąsy i nie posiada wartości odstających. Pomimo braku symetrii w każdym z wykresów, mediany danych pokrywają się idealnie z wartością teoretyczną poziomu istotności $\alpha = 0.05$. Warto też zauważyć, że najbardziej odstające wartości różnią się od niej o zaledwie 0.02. Stąd wniosek, że symulacja przebiegła pomyślnie i otrzymano wyniki zgodne z przewidywaniami.

5.4.2. Błąd II rodzaju

Ponownie, korzystając ze wskazówek, wyznaczono symulacyjnie wartość prawdopodobieństwa popełnienia błędu II rodzaju. Za największe odchylenie od hipotezy zerowej przyjęto 0.03. Wyniki przedstawiono w poniższej tabeli.

	$\sigma^2 = 1.47$	$\sigma^2 = 1.48$	$\sigma^2 = 1.49$	$\sigma^2 = 1.51$	$\sigma^2 = 1.52$	$\sigma^2 = 1.53$
$\sigma_0^2 \neq 1.5$	0.927	0.937	0.942	0.943	0.935	0.925
$\sigma_0^2 > 1.5$	–	–	–	0.943	0.912	0.895
$\sigma_0^2 < 1.5$	0.879	0.908	0.937	–	–	–

Tab. 7: Tabela otrzymanych prawdopodobieństw popełnienia błędu II rodzaju dla $\alpha = 0.05$

Wartości prawdopodobieństw dla kolejnych σ bliskich σ_0 są rozłożone symetrycznie. W szczególności zauważalne jest to dla hipotezy alternatywnej $H_1 : \sigma_0^2 \neq 1.5$. Wartości rosną aż osiągną maksimum (przypuszczalnie dla $\sigma^2 = 1.5$, gdzie ów wartość powinna wynieść $\approx 1 - \alpha \approx 0.95$). Dla hipotezy alternatywnej $H_1 : \sigma_0^2 > 1.5$ opuszczono przypadek, gdy $\sigma^2 < 1.5$, a dla hipotezy alternatywnej $H_1 : \sigma_0^2 < 1.5$ przypadek, gdy $\sigma^2 > 1.5$, gdyż nie mają one sensu względem danych hipotez. Tutaj także widoczna jest symetria. Jednakże wartości ogólnie osiągają mniejsze wartości w porównaniu do hipotezy $H_1 : \sigma_0^2 \neq 1.5$.Podsumowując, prawdopodobieństwo przyjęcia hipotezy zerowej, gdy jest ona fałszywa jest dość wysokie. Jego wartość tym bardziej się zwiększa, im bliżej rozpatrywana σ^2 jest prawdziwej wartości tj. $\sigma_0^2 = 1.5$. Patrząc na różnice pomiędzy wartościami dla różnych hipotez można dojść do wniosku, że najczęściej przyjmiemy fałszywą hipotezę zerową podczas rozpatrywania hipotezy alternatywnej $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$.

5.4.3. Moc testu

Moc testu jest dopełnieniem do jedności wartości prawdopodobieństwa popełnienia błędu II rodzaju. Zatem dla wysymulowanych wcześniej wyników, opracowano wartości mocy testu dla każdej z hipotez alternatywnych względem różnych σ^2.

	$\sigma^2 = 1.47$	$\sigma^2 = 1.48$	$\sigma^2 = 1.49$	$\sigma^2 = 1.51$	$\sigma^2 = 1.52$	$\sigma^2 = 1.53$
$\sigma_0^2 \neq 1.5$	0.073	0.063	0.058	0.057	0.065	0.075
$\sigma_0^2 > 1.5$	–	–	–	0.057	0.088	0.105
$\sigma_0^2 < 1.5$	0.121	0.092	0.063	–	–	–

Tab. 8: Tabela otrzymanych wartości mocy testu dla $\alpha = 0.05$

Z racji tego, że moc testu liczy się za pomocą wartości prawdopodobieństwa popełnienia błędu II rodzaju, owe zagadnienia są ze sobą (ujemnie) skorelowane. Najmniejszą moc testu można zauważyć dla σ^2 najbliżej $\sigma_0^2 = 1.5$, a największą dla tych najbardziej od niej oddalonych. Wyniki można rozróżnić także względem rozpatrywanych hipotez alternatywnych. Analogicznie najmniejszą moc testu zauważamy dla hipotezy alternatywnej $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$

6. Wnioski

W niniejszej pracy zostały przeprowadzone testy dla wariancji i średniej z pewnego rozkładu normalnego, w ramach których przetestowane zostały trzy różne hipotezy alternatywne. Wyznaczone zostały obszary krytyczne oraz p-wartości. Wysunięto wnioski względem tego, czy hipoteza zerowa w danym przypadku zostaje odrzucona, czy przyjęta. Ponadto, zauważono zależności wartości poziomu istotności α od wielkości badanych obszarów, a także prawdopodobieństw popełnienia błędów I i II rodzaju.

Przeprowadzono także symulację, aby uzyskać wartości prawdopodobieństw popełnienia błędów I i II rodzaju. Wszystkie otrzymane wyniki oscylowały wokół ich teoretycznych odpowiedników. Sprawdziły się także wszelkie przewidywania względem otrzymanych wartości. Można zatem wywnioskować, że wszystkie zadania zostały wykonane poprawnie.