# Lista do wykładu

## Przestrzenie afiniczne

**Zadanie 1** *Co można powiedzieć o punktach* $a, b$ *przestrzeni afinicznej* $\mathfrak{A}[V]$ *jeśli istnieje wektor* $x \in V$ *taki, że* $a\#x = b$ *oraz* $b\#x = a$.

***Zadanie 2*** *Niech* $\mathfrak{A}[V]$ *będzie przestrzenią afiniczną. Nich* $a \in \mathfrak{A}$ *będzie ustalonym punktem. Udowodnij, że*

$$\mathfrak{A} \ni b \mapsto f(b) = \bar{ab} \in V,$$

*jest bijekcją pomiędzy* $\mathfrak{A}$ *i* $V$.

***Zadanie 3*** *W pewnej przestrzeni afinicznej* $\mathfrak{A}$ *nad przestrzenią euklidesową* $\mathbb{R}^3$ *w pewnym układzie współrzędnych* $\mathcal{O}, \mathcal{E}$, *punkty* $a, b, c$ *mają następujące współrzędne*

$$(3, -5, 2), \ (1, 0, -4), \ (-2, -2, 5)$$

*odpowiednio. Napisz współrzędne wektora* $\bar{ab} - 2\bar{bc}$.

***Zadanie 4*** *Udowodnij, że dla zadanej przestrzeni afinicznej* $\mathfrak{A}[V]$, *przez dowolny punkt zbioru* $\mathfrak{A}$ *przechodzi dokładnie jedna rozmaitość afiniczna o zadanej przestrzeni kierunkowej.*

***Zadanie 5*** *Niech* $\mathfrak{A}[V]$ *będzie ustaloną przestrzenią afiniczną. Załóżmy, że* $\mathfrak{B} = b\#W$ *i* $\mathfrak{C} = c\#Z$ *będą dwiema rozmaitościami afinicznymi w* $\mathfrak{A}[V]$. *Udowodnij, że*

$$\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} \neq \emptyset \longleftrightarrow \bar{cb} \in W + Z,$$

*gdzie*

$$W + Z = \{w + z \in V : \ (w, z) \in W \times Z\}.$$

***Zadanie 6*** *Niech* $\mathfrak{A}[V]$ *będzie ustaloną przestrzenią afiniczną. Załóżmy, że* $\mathfrak{B} = b\#W$ *i* $\mathfrak{C} = c\#Z$ *będą dwiema rozmaitościami afinicznymi w* $\mathfrak{A}[V]$. *Załóżmy, że* $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} \neq \emptyset$, *udowodnij, że* $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ *jest rozmaitością afiniczną o przestrzeni kierunkowej* $W \cap Z$.

***Zadanie 7*** *Wykaż, że dowolny automorfizm przestrzeni afinicznej* $\mathfrak{A}[V]$ *przekształca rozmaitości afiniczne na rozmaitości afiniczne. Ponadto, jeśli obydwie rozmaitości afiniczne są równoległe, to ich obrazy względem automorfizu też są równoległe.*

***Zadanie 8*** *W przestrzeni afinicznej* $\mathbb{R}^2[\mathbb{R}^2]$ *dany jest punkt* $a \in \mathfrak{A}[V]$ *o współrzędnych* $(3, -1)$ *w zadanym układzie współrzędnych* $(\mathcal{O}, \mathcal{E})$. *Wyznacz współrzędne punktu* $a \in \mathfrak{A}[V]$ *w układzie współrzędnych* $(\mathcal{O}', \mathcal{E}')$, *wiedząc, że* $\mathcal{O}'$ *ma współrzędne* $(-2, -5)$ *w układzie* $(\mathcal{O}, \mathcal{E})$ *oraz*

$$\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

*jest macierzą przejścia z bazy* $\mathcal{E}$ *do bazy* $\mathcal{E}'$.

**Grafika 2D i 3D**

***Zadanie 9*** *Napisz funkcję w javascript (albo w pseudokodzie), która sprawdza, czy dane punkty* $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ *są współliniowe.*

***Zadanie 10*** *Napisz funkcję w javascript (albo w pseudokodzie), która sprawdza, czy dane punkty* $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ *są współliniowe.*

***Zadanie 11*** *Napisz funkcję sprawdzającą, czy dla punktów* $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ *punkty* $C$ *i* $D$ *leżą po tej samej stronie prostej wyznaczonej przez punkty* $A$ *i* $B$.

***Zadanie 12*** *Napisz funkcję sprawdzającą, czy punkty* $X, Y \in \mathbb{R}^3$ *leżą po tej samej stronie płaszczyzny wyznaczonej przez niewspóliniowe punkty* $A, B, C \in \mathbb{R}^3$.

***Zadanie 13*** *Napisz funkcję sprawdzającą, czy odcinek* $I$ *wyznaczony przez punkty* $X, Y \in \mathbb{R}^3$ *przecina płaszczyznę* $\pi$, *wyznaczoną przez niewspóliniowe punkty* $A, B, C \in \mathbb{R}^3$. *Jeśli odpowiedź jest pozytywna, to funkcja zwraca zbiór* $I \cap \pi$.

***Zadanie 14*** *Napisz funkcję, która zwraca unormowany wektor normalny* $\bar{n}$ *do płaszczyzny wyznaczonej przez niewspóliniowe punkty* $A, B, C \in \mathbb{R}^3$. *Zakładamy, że* $\bar{n}$ *ma zgodną orientację z* $(A, B, C)$.

***Zadanie 15*** *Dla zadanych nizerowych punktów* $A, B \in \mathbb{R}^2$ *wyznacz macierz obrotu* $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *względem początku układu wsółrzędnych, która przeprowadza punkt* $A$ *na punkt* $B$.

***Zadanie 16*** *Czy dla zadanych punktów* $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ *można wyznaczyć izometrię* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *taką, że*

1. $f(a) = B$,
2. *prosta wyznaczona przez punkty* $A, B$ *przechodzi na prostą przechodzącą przez punkty* $C$ *i* $D$,
3. *istnieje macierz* $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *i wektor* $v \in \mathbb{R}^2$ *taka, że dla dowolnego* $x \in \mathbb{R}^2$ $f(x) = M \cdot x + v$, *(wektory* $x, y$ *zapisujemy kolumnowo).*

*Jeśli odpowiedź jest twierdząca, to wyznacz* $M$ *i* $v$.

***Zadanie 17*** *Napisz funkcję która sprawdza, czy część wspólna dwóch trójkątów wyznaczonych przez wierzchołki* $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ *oraz* $C, D, E \in \mathbb{R}^3$ *jest odcinkiem o dodatniej długości.*

cdn.