偏微分方程式 第 8 回課題

23TB8303　高橋知也

課題 8-1

1 次元熱伝導方程式 $\frac{\partial\theta(t,x)}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2\theta(t,x)}{\partial x^2}$ の非自明な解を求めよ. ただし, 境界条件は $\theta(t,0) = \theta_0$, $\theta(t,L) = \theta_L$ とし, 初期条件は以下を指定する.

A. 初期条件 $\theta(0,x) = \sin(\frac{3\pi}{L}x)$ である時の解を求めよ.

B. 初期条件 $\theta(0,x) = x(L-x)$ である時の解を求めよ.

1. 公式

上の問題に対し，一般解は

$$\theta(t,x) = \theta_s(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\kappa m_n t}\sin\bigl(\sqrt{m_n}\,x\bigr) \tag{1}$$

で与えられる．ここで

$$\theta_s(x) = \frac{\theta_L - \theta_0}{L}x + \theta_0, \tag{2}$$

$$m_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \tag{3}$$

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L \bigl(f(x) - \theta_s(x)\bigr)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx. \tag{4}$$

また

$$I_f := \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx, \tag{5}$$

$$I_{\theta_s} := \frac{2}{L}\int_0^L \theta_s(x)\,\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx \tag{6}$$

とおくと，(4) より

$$C_n = I_f - I_{\theta_s} \tag{7}$$

である．

以下ではまず I_{θ_s} を一般の n について求める．その後，各初期条件について I_f を計算し，(7) から C_n を得る．

2. I_{θ_s} の計算

(2) を用いると

$$I_{\theta_s} = \frac{2}{L}\int_0^L \left(\theta_0 + \frac{\theta_L - \theta_0}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx.$$

ここで

$$k := \frac{n\pi}{L}, \qquad \alpha := \frac{\theta_L - \theta_0}{L}$$

とおくと

$$I_{\theta_s} = \frac{2}{L}\left(\theta_0 \int_0^L \sin(kx)\,dx + \alpha \int_0^L x\sin(kx)\,dx\right)$$

となる.

■(1) $\int_0^L \sin(kx)\,dx$ の計算

$$\int \sin(kx)\,dx = -\frac{1}{k}\cos(kx)$$

より,

$$\int_0^L \sin(kx)\,dx = \left[-\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_0^L = -\frac{1}{k}\cos(kL) + \frac{1}{k}\cos(0) = \frac{1-\cos(kL)}{k}.$$

$kL = n\pi$ なので

$$\cos(kL) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

となり,

$$\int_0^L \sin(kx)\,dx = \frac{1-(-1)^n}{k}.$$

■(2) $\int_0^L x\sin(kx)\,dx$ の計算　部分積分を用いる.

$$\int_0^L x\sin(kx)\,dx = \left[-\frac{x}{k}\cos(kx)\right]_0^L + \frac{1}{k}\int_0^L \cos(kx)\,dx$$

まず

$$\left[-\frac{x}{k}\cos(kx)\right]_0^L = -\frac{L}{k}\cos(kL) - \left(-\frac{0}{k}\cos(0)\right) = -\frac{L}{k}\cos(kL),$$

次に

$$\int_0^L \cos(kx)\,dx = \left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^L = \frac{1}{k}\sin(kL) - \frac{1}{k}\sin(0) = \frac{1}{k}\sin(kL).$$

したがって

$$\int_0^L x\sin(kx)\,dx = -\frac{L}{k}\cos(kL) + \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}\sin(kL) = -\frac{L}{k}\cos(kL) + \frac{1}{k^2}\sin(kL).$$

$kL = \frac{n\pi}{L}\cdot L = n\pi$ なので

$$\cos(kL) = \cos(n\pi) = (-1)^n, \qquad \sin(kL) = \sin(n\pi) = 0$$

より

$$\int_0^L x\sin(kx)\,dx = -\frac{L}{k}(-1)^n + \frac{1}{k^2}\cdot 0 = -\frac{L}{k}(-1)^n.$$

■(3) I_{θ_s} **のまとめ**　(1),(2) を I_{θ_s} に代入すると

$$I_{\theta_s} = \frac{2}{L}\left[\theta_0 \cdot \frac{1-(-1)^n}{k} + \alpha \cdot \left(-\frac{L}{k}(-1)^n\right)\right]$$
$$= \frac{2}{Lk}\left[\theta_0(1-(-1)^n) - \alpha L(-1)^n\right].$$

$\alpha L = \theta_L - \theta_0$ なので

$$-\alpha L(-1)^n = -(\theta_L - \theta_0)(-1)^n = -\theta_L(-1)^n + \theta_0(-1)^n.$$

したがって

$$I_{\theta_s} = \frac{2}{Lk}\left[\theta_0(1-(-1)^n) - \theta_L(-1)^n + \theta_0(-1)^n\right]$$
$$= \frac{2}{Lk}\left[\theta_0 - \theta_L(-1)^n\right].$$

ここで $Lk = n\pi$ だから

$$I_{\theta_s} = \frac{2}{n\pi}\big(\theta_0 - \theta_L(-1)^n\big). \tag{8}$$

A. 初期条件 $\boldsymbol{\theta(0,x) = \sin(\frac{3\pi}{L}x)}$ の場合

I_f を計算する.

$$I_f = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx.$$

ここで，$n=3$ のとき

$$I_f = \frac{2}{L}\int_0^L \sin^2\left(\frac{3\pi}{L}x\right)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{1-\cos\left(\frac{6\pi}{L}x\right)}{2}\,dx$$
$$= \frac{1}{L}\int_0^L \left(1-\cos\left(\frac{6\pi}{L}x\right)\right)\,dx.$$

ここで積分を分けて

$$I_f = \frac{1}{L}\left(\int_0^L 1\,dx - \int_0^L \cos\left(\frac{6\pi}{L}x\right)\,dx\right).$$

まず

$$\int_0^L 1\,dx = [x]_0^L = L,$$

次に

$$\int_0^L \cos\left(\frac{6\pi}{L}x\right)\,dx = \left[\frac{L}{6\pi}\sin\left(\frac{6\pi}{L}x\right)\right]_0^L = \frac{L}{6\pi}\big(\sin 6\pi - \sin 0\big) = 0.$$

したがって

$$I_f = \frac{1}{L}(L-0) = 1.$$

　$n \neq 3$ のとき

$$I_f = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx.$$

$x = \dfrac{Ly}{\pi}$ とおくと $dx = \dfrac{L}{\pi}dy$ なので

$$I_f = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(3y)\sin(ny)\,dy.$$

三角関数の積の公式

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\bigl(\cos(a-b) - \cos(a+b)\bigr)$$

を用いると

$$\begin{aligned}
I_f &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(3y)\sin(ny)\,dy \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\Bigl(\cos\bigl((3-n)y\bigr) - \cos\bigl((3+n)y\bigr)\Bigr)\,dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Bigl(\cos\bigl((3-n)y\bigr) - \cos\bigl((3+n)y\bigr)\Bigr)\,dy.
\end{aligned}$$

それぞれ積分して

$$I_f = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3-n}\sin\bigl((3-n)y\bigr) - \frac{1}{3+n}\sin\bigl((3+n)y\bigr)\right]_{y=0}^{y=\pi}.$$

$3 \pm n$ は整数だから

$$\sin\bigl((3\pm n)\pi\bigr) = 0, \qquad \sin(0) = 0$$

となる．したがって

$$I_f = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{3-n}\cdot 0 - \frac{1}{3+n}\cdot 0\right) = 0.$$

　よって

$$I_f = \begin{cases} 1 & (n=3) \\ 0 & (n \neq 3) \end{cases} \tag{9}$$

■C_n の計算　(7) と (8), (9) より

$$C_n = I_f - I_{\theta_s} = I_f - \frac{2}{n\pi}\bigl(\theta_0 - \theta_L(-1)^n\bigr). = \begin{cases} 1 - \dfrac{2}{3\pi}\bigl(\theta_0 + \theta_L\bigr) & (n=3) \\ \dfrac{2}{n\pi}\bigl(\theta_L(-1)^n - \theta_0\bigr) & (n \neq 3) \end{cases} \tag{10}$$

　よって，初期条件 $\theta(0,x) = \sin(\frac{3\pi}{L}x)$ の場合の解は

$$\theta(t,x) = \theta_s(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\kappa m_n t}\sin\bigl(\sqrt{m_n}\,x\bigr)$$

$$= \frac{\theta_L - \theta_0}{L}x + \theta_0 + \left[1 - \frac{2}{3\pi}\bigl(\theta_0 + \theta_L\bigr)\right]e^{-\kappa(\frac{3\pi}{L})^2 t}\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)$$

$$+\sum_{\substack{n=1\\n\neq 3}}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\big(\theta_L(-1)^n-\theta_0\big)e^{-\kappa(\frac{n\pi}{L})^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

ここで、$n=1$ と $n=2$ の項を分けて書くと $n\neq 3$ の条件を外せるので、最終的に以下のようになる。

$$\boxed{\begin{aligned}\theta(t,x)=&\frac{\theta_L-\theta_0}{L}\,x+\theta_0\\&-\frac{2}{\pi}(\theta_0+\theta_L)\,e^{-\kappa\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\\&+\frac{1}{\pi}(\theta_L-\theta_0)\,e^{-\kappa\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 t}\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\\&+\left[1-\frac{2}{3\pi}(\theta_0+\theta_L)\right]e^{-\kappa\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 t}\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+3)\pi}\left(\theta_L(-1)^{n+3}-\theta_0\right)e^{-\kappa\left(\frac{(n+3)\pi}{L}\right)^2 t}\sin\left(\frac{(n+3)\pi}{L}x\right).\end{aligned}}$$

B. 初期条件 $\boldsymbol{\theta(0,x) = x(L-x)}$ の場合

I_f を計算する.

$$I_f = \frac{2}{L}\int_0^L x(L-x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx.$$

ここで部分積分を用いる.

$$\begin{aligned}
\int_0^L x(L-x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx &= \left[-x(L-x)\,\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_0^L \\
&\quad + \frac{L}{n\pi}\int_0^L (L-2x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx \\
&= \frac{L}{n\pi}\int_0^L (L-2x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx \\
&= \frac{L}{n\pi}\left(L\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx\right) - \frac{2L}{n\pi}\int_0^L x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx &= \left[\frac{L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_0^L \\
&= \frac{L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{L}L\right) - \frac{L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{L}\cdot 0\right) \\
&= \frac{L}{n\pi}\sin(n\pi) - \frac{L}{n\pi}\sin 0 \\
&= \frac{L}{n\pi}\cdot 0 - \frac{L}{n\pi}\cdot 0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^L x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx &= \left[x\cdot\frac{L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_0^L - \frac{L}{n\pi}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx \\
&= \frac{L}{n\pi}\Big(L\sin\left(\tfrac{n\pi}{L}L\right) - 0\cdot\sin\left(\tfrac{n\pi}{L}\cdot 0\right)\Big) - \frac{L}{n\pi}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx \\
&= \frac{L^2}{n\pi}\sin(n\pi) - \frac{L}{n\pi}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx \\
&= 0 - \frac{L}{n\pi}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx \\
&= -\frac{L}{n\pi}\left[-\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_0^L \\
&= \frac{L^2}{(n\pi)^2}\left(\cos\left(\tfrac{n\pi}{L}L\right) - \cos\left(\tfrac{n\pi}{L}\cdot 0\right)\right) \\
&= \frac{L^2}{(n\pi)^2}\big(\cos(n\pi) - \cos 0\big) \\
&= \frac{L^2}{(n\pi)^2}\big((-1)^n - 1\big).
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\int_0^L x(L-x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx &= \frac{L}{n\pi}\left(L\cdot 0 - 2\cdot\frac{L^2}{(n\pi)^2}\big((-1)^n - 1\big)\right) \\
&= \frac{2L^3}{(n\pi)^3}\big(1 - (-1)^n\big).
\end{aligned}
$$

よって

$$
I_f = \frac{2}{L}\cdot\frac{2L^3}{(n\pi)^3}\big(1-(-1)^n\big) = \frac{4L^2}{(n\pi)^3}\big(1-(-1)^n\big) \tag{11}
$$

■C_n の計算　(7) と (8) , (11) より

$$
\begin{aligned}
C_n &= I_f - I_{\theta_s} \\
&= \frac{4L^2}{(n\pi)^3}\bigl(1-(-1)^n\bigr) - \frac{2}{n\pi}\bigl(\theta_0 - \theta_L(-1)^n\bigr).
\end{aligned}
$$

n の偶奇によって場合分けすると,

$$
C_n = \begin{cases} -\dfrac{2}{n\pi}\bigl(\theta_0 - \theta_L\bigr) & (n: \text{偶数}) \\[2ex] \dfrac{8L^2}{(n\pi)^3} - \dfrac{2}{n\pi}\bigl(\theta_0 + \theta_L\bigr) & (n: \text{奇数}) \end{cases} \tag{12}
$$

よって，初期条件 $\theta(0,x) = x(L-x)$ の場合の解は

$$
\theta(t,x) = \theta_s(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\kappa m_n t} \sin\bigl(\sqrt{m_n}\, x\bigr)
$$

$$
= \frac{\theta_L - \theta_0}{L} x + \theta_0 + \sum_{\substack{n=1 \\ n:\ \text{偶数}}}^{\infty} \left(-\frac{2}{n\pi}\bigl(\theta_0 - \theta_L\bigr)\right) e^{-\kappa(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)
$$

$$
+ \sum_{\substack{n=1 \\ n:\ \text{奇数}}}^{\infty} \left(\frac{8L^2}{(n\pi)^3} - \frac{2}{n\pi}\bigl(\theta_0 + \theta_L\bigr)\right) e^{-\kappa(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).
$$

ここで、偶数を $2n$、奇数を $2n-1$（$n = 1, 2, 3, \ldots$）と置き換えると n が偶数 (奇数) という条件を外せるので、最終的な解は以下のようになる。

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\theta(t,x) = &\frac{\theta_L - \theta_0}{L} x + \theta_0 \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n\pi}(\theta_0 - \theta_L)\right) e^{-\kappa\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{2n\pi}{L} x\right) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8L^2}{\bigl((2n-1)\pi\bigr)^3} - \frac{2}{(2n-1)\pi}(\theta_0 + \theta_L)\right) e^{-\kappa\left(\frac{(2n-1)\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{L} x\right).
\end{aligned}
}
$$