Discrete Mathematics Homework from Handout 2

高橋 知也 / 23TB8303

Homework 7

■Homework 7. Prove Theorem 4. (Hint: Notice that any event is a disjoint union of simple events. Consider the contribution of each simple event on each side of the equation and use the fact $0 = (1-1)^t = \sum_{i=0}^{t}(-1)^i\binom{t}{i}$, which is an easy corollary of the binomial theorem.)

解答．Theorem 4（包除原理）は，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ とイベント $E_0, E_1, \ldots, E_{n-1} \in \mathcal{F}$ に対して

$$\Pr\Big(\bigcup_{i=0}^{n-1} E_i\Big) = \sum_i \Pr(E_i) - \sum_{i<j}\Pr(E_i \cap E_j) + \sum_{i<j<k}\Pr(E_i \cap E_j \cap E_k) - \cdots$$
$$+(-1)^{\ell+1}\sum_{i_1<\cdots<i_\ell}\Pr\big(E_{i_1}\cap\cdots\cap E_{i_\ell}\big) + \cdots$$

が成り立つ，という主張である．以下ではヒントに従って証明する．

まず，Ω の元 $\omega \in \Omega$ を 1 点だけ含む集合 $\{\omega\}$ を「単純事象（simple event)」と呼ぶ．任意のイベント $E \in \mathcal{F}$ は

$$E \;=\; \bigcup_{\omega\in E}\{\omega\}$$

と表せ，右辺の和集合は互いに素（disjoint）である．したがって，確率測度の加法性より

$$\Pr(E) = \sum_{\omega\in E}\Pr(\{\omega\})$$

が成り立つ．ゆえに，示したい等式は「Ω の各元 ω について，左辺と右辺における $\Pr(\{\omega\})$ の係数が一致する」ことを示せば十分である．

そこで，ある $\omega \in \Omega$ を固定する．この ω を含むイベントの個数を

$$t = \big|\{\, i \mid 0 \le i \le n-1,\ \omega \in E_i \,\}\big|$$

とおく．($t = 0$ の場合，ω はどの E_i にも属さない場合である．)

もし $t=0$ ならば，ω はどの E_i にも属さないので $\omega \notin \bigcup_i E_i$ である．したがって左辺の $\Pr(\{\omega\})$ の係数は 0 となる．

つぎに $t \geq 1$ の場合を考える．このとき ω は少なくとも 1 つの E_i に属するので $\omega \in \bigcup_i E_i$ であり，左辺の係数は 1 である．

右辺については，ω を含む E_i が t 個あるので，それらから k 個選んだ交わりには必ず ω が含まれる．そのような交わりの個数は $\binom{t}{k}$ 個である．ゆえに右辺での $\Pr(\{\omega\})$ の係数は

$$\sum_{k=1}^{t} (-1)^{k+1} \binom{t}{k}$$

となる．

二項定理の結果

$$0 = (1-1)^t = \sum_{k=0}^{t} (-1)^k \binom{t}{k}$$

を用いると

$$\sum_{k=1}^{t} (-1)^{k+1} \binom{t}{k} = 1$$

となる．これは左辺の係数と一致する．

以上より Theorem 4 が従う。 □

Homework 8

■Homework 8.　Give an example of pairwise independent events which are not mutually independent.

解答．次のような確率空間を考える．標本空間を

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$$

とし，一様分布

$$\Pr(\{1\}) = \Pr(\{2\}) = \Pr(\{3\}) = \Pr(\{4\}) = \frac{1}{4}$$

を入れる．このとき

$$A = \{1, 2\}, \qquad B = \{1, 3\}, \qquad C = \{1, 4\}$$

とおく．

まず各事象の確率は

$$\Pr(A) = \Pr(B) = \Pr(C) = \frac{1}{2}$$

である．また 2 つずつの共通部分は

$$A \cap B = \{1\}, \quad A \cap C = \{1\}, \quad B \cap C = \{1\}$$

なので

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A \cap C) = \Pr(B \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

したがって，A, B, C はどの 2 つをとっても

$$\Pr(\text{積}) = \Pr(\text{片方}) \Pr(\text{もう片方})$$

が成り立ち，pairwise independent である．

一方，3 つすべての共通部分は

$$A \cap B \cap C = \{1\}$$

であるから

$$\Pr(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$$

である．しかし

$$\Pr(A) \Pr(B) \Pr(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

となり，

$$\Pr(A \cap B \cap C) \neq \Pr(A) \Pr(B) \Pr(C)$$

が成り立つ．したがって A, B, C は互いに独立（mutually independent）ではない．

以上により，A, B, C は pairwise independent だが mutually independent ではない事象の具体例になっている．　□

Homework 9

■Homework 9. Let $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ be a probability space and $E \in \mathcal{F}$ an event such that $\Pr(E) > 0$. For any $F \in \mathcal{F}$, define $\Pr_E$ to be the conditional probability

$$\Pr_E(F) = \Pr(F \mid E)$$

of F given E. Define $\mathcal{F}_E = \{F \in \mathcal{F} \mid F \subseteq E\}$. Show that $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr_E)$ and $(E, \mathcal{F}_E, \Pr_E)$ are both probability spaces if the domain of $\Pr_E$ is chosen appropriately in each case.

解答．まず，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ と $E \in \mathcal{F}$ で $\Pr(E) > 0$ を固定する．このとき任意の $F \in \mathcal{F}$ に対し条件付き確率

$$\Pr_E(F) = \Pr(F \mid E) := \frac{\Pr(F \cap E)}{\Pr(E)}$$

を定義する．

(1) $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr_E)$ **が確率空間になること．**

ここでは，$\Pr_E$ の定義域を元の $\Pr$ と同じく $\mathcal{F}$ とする．すなわち

$$\Pr_E : \mathcal{F} \to [0,1], \qquad F \mapsto \frac{\Pr(F \cap E)}{\Pr(E)}$$

とみなす．このとき，以下の 3 条件を確かめればよい．

(i) 非負性：任意の $F \in \mathcal{F}$ について

$$\Pr_E(F) = \frac{\Pr(F \cap E)}{\Pr(E)} \geq 0$$

が成り立つ．分子・分母ともに非負（$\Pr$ は確率測度，かつ $\Pr(E) > 0$）であるからである．

(ii) 全体集合の確率：$\Omega \in \mathcal{F}$ に対して

$$\Pr_E(\Omega) = \Pr(\Omega \mid E) = \frac{\Pr(\Omega \cap E)}{\Pr(E)} = \frac{\Pr(E)}{\Pr(E)} = 1$$

が成り立つ．

(iii) 可算加法性：$(F_i)_{i \geq 1}$ を $\mathcal{F}$ 上の互いに素な（$i \neq j$ なら $F_i \cap F_j = \varnothing$）列とする．このとき，$F_i \cap E$ も互いに素であり

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (F_i \cap E) = \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \Big) \cap E$$

が成り立つ．したがって元の測度 Pr の可算加法性より

$$
\begin{aligned}
\Pr_E\Bigl(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\Bigr) &= \frac{\Pr\bigl((\bigcup_i F_i) \cap E\bigr)}{\Pr(E)} \\
&= \frac{\Pr\bigl(\bigcup_i (F_i \cap E)\bigr)}{\Pr(E)} \\
&= \frac{\sum_i \Pr(F_i \cap E)}{\Pr(E)} \\
&= \sum_i \frac{\Pr(F_i \cap E)}{\Pr(E)} \\
&= \sum_i \Pr_E(F_i)
\end{aligned}
$$

が従う．

以上より，$(\Omega, \mathcal{F}, \Pr_E)$ は確率空間である．

(2) $(E, \mathcal{F}_E, \Pr_E)$ **が確率空間になること．**

つぎに

$$
\mathcal{F}_E = \{F \in \mathcal{F} \mid F \subseteq E\}
$$

を考える．これは E を全体集合とみなしたときの σ-代数である．ここでは $\Pr_E$ の定義域を $\mathcal{F}_E$ に制限した

$$
\Pr_E : \mathcal{F}_E \to [0,1], \qquad F \mapsto \frac{\Pr(F)}{\Pr(E)}
$$

を確率測度として考える（$F \subseteq E$ なので $F \cap E = F$ であることを用いた）．

このときも，同様に 3 つの性質を確かめる：

(i) 非負性：任意の $F \in \mathcal{F}_E$ について $\Pr(F) \geq 0$ かつ $\Pr(E) > 0$ より

$$
\Pr_E(F) = \frac{\Pr(F)}{\Pr(E)} \geq 0.
$$

(ii) 全体集合の確率：ここでの全体集合は E であり，$E \in \mathcal{F}_E$ である．よって

$$
\Pr_E(E) = \frac{\Pr(E)}{\Pr(E)} = 1
$$

が成り立つ．

(iii) 可算加法性：$(F_i)_{i \geq 1}$ を $\mathcal{F}_E$ の互いに素な列とする．すると $\bigcup_i F_i$ も E の部分集合であり $\mathcal{F}_E$ に属する．元の測度 Pr の可算加法性より

$$
\Pr_E\Bigl(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\Bigr) = \frac{\Pr(\bigcup_i F_i)}{\Pr(E)} = \frac{\sum_i \Pr(F_i)}{\Pr(E)} = \sum_i \frac{\Pr(F_i)}{\Pr(E)} = \sum_i \Pr_E(F_i)
$$

が従う．

以上から，$(E, \mathcal{F}_E, \mathrm{Pr}_E)$ も確率空間になっている．

したがって，Pr_E の定義域をそれぞれ

$$(1)\ \mathcal{F}, \qquad (2)\ \mathcal{F}_E$$

と選べば，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{Pr}_E)$ および $(E, \mathcal{F}_E, \mathrm{Pr}_E)$ はどちらも確率空間となることが示された． $\square$