Discrete Mathematics Homework from Handout 2

高橋 知也 / 23TB8303

Homework 7

■Homework 7. Prove Theorem 4. (Hint: Notice that any event is a disjoint union of simple events. Consider the contribution of each simple event on each side of the equation and use the fact $0 = (1-1)^t = \sum_{i=0}^{t}(-1)^i\binom{t}{i}$, which is an easy corollary of the binomial theorem.)

解答．Theorem 4（包除原理）は，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ とイベント $E_0, E_1, \ldots, E_{n-1} \in \mathcal{F}$ に対して

$$\Pr\Bigl(\bigcup_{i=0}^{n-1} E_i\Bigr) = \sum_{i} \Pr(E_i) - \sum_{i<j} \Pr(E_i \cap E_j) + \sum_{i<j<k} \Pr(E_i \cap E_j \cap E_k) - \cdots$$

$$+(-1)^{\ell+1} \sum_{i_1<\cdots<i_\ell} \Pr\bigl(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_\ell}\bigr) + \cdots$$

が成り立つ，という主張である．以下ではヒントに従って証明する．

まず，Ω の元 $\omega \in \Omega$ を 1 点だけ含む集合 $\{\omega\}$ を「単純事象（simple event）」と呼ぶ．任意のイベント $E \in \mathcal{F}$ は

$$E \;=\; \bigcup_{\omega \in E} \{\omega\}$$

と表せ，右辺の和集合は互いに素（disjoint）である．したがって，確率測度の加法性より

$$\Pr(E) = \sum_{\omega \in E} \Pr(\{\omega\})$$

が成り立つ．ゆえに，示したい等式は「Ω の各元 ω について，左辺と右辺における $\Pr(\{\omega\})$ の係数が一致する」ことを示せば十分である．

そこで，ある $\omega \in \Omega$ を固定する．この ω を含むイベントの個数を

$$t = \bigl|\{\, i \mid 0 \le i \le n-1,\ \omega \in E_i \,\}\bigr|$$

とおく．（$t = 0$ の場合，ω はどの E_i にも属さない場合である．）

もし $t=0$ ならば，ω はどの E_i にも属さないので $\omega \notin \bigcup_i E_i$ である．したがって左辺の $\Pr(\{\omega\})$ の係数は 0 となる．

つぎに $t \geq 1$ の場合を考える．このとき ω は少なくとも 1 つの E_i に属するので $\omega \in \bigcup_i E_i$ であり，左辺の係数は 1 である．

右辺については，ω を含む E_i が t 個あるので，それらから k 個選んだ交わりには必ず ω が含まれる．そのような交わりの個数は $\binom{t}{k}$ 個である．ゆえに右辺での $\Pr(\{\omega\})$ の係数は

$$\sum_{k=1}^{t}(-1)^{k+1}\binom{t}{k}$$

となる．

二項定理の結果

$$0=(1-1)^t=\sum_{k=0}^{t}(-1)^k\binom{t}{k}$$

を用いると

$$\sum_{k=1}^{t}(-1)^{k+1}\binom{t}{k}=1$$

となる．これは左辺の係数と一致する．

以上より Theorem 4 が従う。 $\square$

Homework 8

■Homework 8.　Give an example of pairwise independent events which are not mutually independent.

解答．次のような確率空間を考える．標本空間を

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$$

とし，一様分布

$$\Pr(\{1\}) = \Pr(\{2\}) = \Pr(\{3\}) = \Pr(\{4\}) = \frac{1}{4}$$

を入れる．このとき

$$A = \{1, 2\}, \qquad B = \{1, 3\}, \qquad C = \{1, 4\}$$

とおく．

まず各事象の確率は

$$\Pr(A) = \Pr(B) = \Pr(C) = \frac{1}{2}$$

である．また 2 つずつの共通部分は

$$A \cap B = \{1\}, \quad A \cap C = \{1\}, \quad B \cap C = \{1\}$$

なので

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A \cap C) = \Pr(B \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

したがって，A, B, C はどの 2 つをとっても

$$\Pr(\text{積}) = \Pr(\text{片方}) \Pr(\text{もう片方})$$

が成り立ち，pairwise independent である．

一方，3 つすべての共通部分は

$$A \cap B \cap C = \{1\}$$

であるから

$$\Pr(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$$

である．しかし

$$\Pr(A) \Pr(B) \Pr(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

となり，

$$\Pr(A \cap B \cap C) \neq \Pr(A) \Pr(B) \Pr(C)$$

が成り立つ．したがって A, B, C は互いに独立（mutually independent）ではない．

以上により，A, B, C は pairwise independent だが mutually independent ではない事象の具体例になっている．　□

Homework 9

■Homework 9. Let $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ be a probability space and $E \in \mathcal{F}$ an event such that $\Pr(E) > 0$. For any $F \in \mathcal{F}$, define $\Pr_E$ to be the conditional probability

$$\Pr_E(F) = \Pr(F \mid E)$$

of F given E. Define $\mathcal{F}_E = \{F \in \mathcal{F} \mid F \subseteq E\}$. Show that $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr_E)$ and $(E, \mathcal{F}_E, \Pr_E)$ are both probability spaces if the domain of $\Pr_E$ is chosen appropriately in each case.

解答. まず，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ と $E \in \mathcal{F}$ で $\Pr(E) > 0$ を固定する．このとき任意の $F \in \mathcal{F}$ に対し条件付き確率

$$\Pr_E(F) = \Pr(F \mid E) := \frac{\Pr(F \cap E)}{\Pr(E)}$$

を定義する．

(1) $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr_E)$ **が確率空間になること．**

ここでは，$\Pr_E$ の定義域を元の $\Pr$ と同じく $\mathcal{F}$ とする．すなわち

$$\Pr_E : \mathcal{F} \to [0,1], \qquad F \mapsto \frac{\Pr(F \cap E)}{\Pr(E)}$$

とみなす．このとき，以下の 3 条件を確かめればよい．

(i) 非負性：任意の $F \in \mathcal{F}$ について

$$\Pr_E(F) = \frac{\Pr(F \cap E)}{\Pr(E)} \geq 0$$

が成り立つ．分子・分母ともに非負（$\Pr$ は確率測度，かつ $\Pr(E) > 0$）であるからである．

(ii) 全体集合の確率：$\Omega \in \mathcal{F}$ に対して

$$\Pr_E(\Omega) = \Pr(\Omega \mid E) = \frac{\Pr(\Omega \cap E)}{\Pr(E)} = \frac{\Pr(E)}{\Pr(E)} = 1$$

が成り立つ．

(iii) 可算加法性：$(F_i)_{i \geq 1}$ を $\mathcal{F}$ 上の互いに素な（$i \neq j$ なら $F_i \cap F_j = \varnothing$）列とする．このとき，$F_i \cap E$ も互いに素であり

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (F_i \cap E) = \Bigl(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\Bigr) \cap E$$

が成り立つ．したがって元の測度 Pr の可算加法性より

$$\Pr_E\Bigl(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\Bigr) = \frac{\Pr\bigl((\bigcup_i F_i)\cap E\bigr)}{\Pr(E)} = \frac{\Pr\bigl(\bigcup_i (F_i\cap E)\bigr)}{\Pr(E)} = \frac{\sum_i \Pr(F_i\cap E)}{\Pr(E)} = \sum_i \frac{\Pr(F_i\cap E)}{\Pr(E)} = \sum_i \Pr_E(F_i)$$

が従う．

以上より，$(\Omega, \mathcal{F}, \Pr_E)$ は確率空間である．

(2) $(E, \mathcal{F}_E, \Pr_E)$ **が確率空間になること．**

つぎに

$$\mathcal{F}_E = \{F \in \mathcal{F} \mid F \subseteq E\}$$

を考える．これは E を全体集合とみなしたときの σ-代数である．ここでは $\Pr_E$ の定義域を $\mathcal{F}_E$ に制限した

$$\Pr_E : \mathcal{F}_E \to [0,1], \qquad F \mapsto \frac{\Pr(F)}{\Pr(E)}$$

を確率測度として考える（$F \subseteq E$ なので $F \cap E = F$ であることを用いた）．

このときも，同様に 3 つの性質を確かめる：

(i) 非負性：任意の $F \in \mathcal{F}_E$ について $\Pr(F) \geq 0$ かつ $\Pr(E) > 0$ より

$$\Pr_E(F) = \frac{\Pr(F)}{\Pr(E)} \geq 0.$$

(ii) 全体集合の確率：ここでの全体集合は E であり，$E \in \mathcal{F}_E$ である．よって

$$\Pr_E(E) = \frac{\Pr(E)}{\Pr(E)} = 1$$

が成り立つ．

(iii) 可算加法性：$(F_i)_{i\geq 1}$ を $\mathcal{F}_E$ の互いに素な列とする．すると $\bigcup_i F_i$ も E の部分集合であり $\mathcal{F}_E$ に属する．元の測度 Pr の可算加法性より

$$\Pr_E\Bigl(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\Bigr) = \frac{\Pr(\bigcup_i F_i)}{\Pr(E)} = \frac{\sum_i \Pr(F_i)}{\Pr(E)} = \sum_i \frac{\Pr(F_i)}{\Pr(E)} = \sum_i \Pr_E(F_i)$$

が従う．

以上から，$(E, \mathcal{F}_E, \Pr_E)$ も確率空間になっている．

したがって，$\Pr_E$ の定義域をそれぞれ

$$(1)\ \mathcal{F}, \qquad (2)\ \mathcal{F}_E$$

と選べば，$(\Omega, \mathcal{F}, \Pr_E)$ および $(E, \mathcal{F}_E, \Pr_E)$ はどちらも確率空間となることが示された．　□

Homework 10

■**Homework 10.** Suppose that there is a coin which is either fair or biased with equal probability. If it is biased, then it comes up heads with probability $\frac{4}{5}$ and tails with probability $\frac{1}{5}$. Describe the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ that models flipping this coin by explicitly giving its sample space Ω, σ-algebra $\mathcal{F}$, and probability measure Pr. Describe also the probability space that is naturally induced by the conditional probabilities given the coin is fair. You may use Ω or something smaller as its sample space.

解答．コインは「公平 (fair)」か「偏っている (biased)」かの 2 通りがあり，そのどちらであるかは確率 $\frac{1}{2}$ ずつとする．さらに，偏っている場合には

$$\Pr(\text{heads} \mid \text{biased}) = \frac{4}{5}, \qquad \Pr(\text{tails} \mid \text{biased}) = \frac{1}{5}$$

であると仮定する．公平な場合には

$$\Pr(\text{heads} \mid \text{fair}) = \Pr(\text{tails} \mid \text{fair}) = \frac{1}{2}$$

である．

(1) 元の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ の構成

まず，コインの「状態」と「裏表の結果」をまとめて 1 つの結果とみなす．状態を

$$F = \text{“coin is fair”}, \qquad B = \text{“coin is biased”}$$

と書くと，標本空間 Ω を

$$\Omega = \{(F, H), (F, T), (B, H), (B, T)\}$$

と定めることができる．ここで H は表 (heads)，T は裏 (tails) を表す．

σ-代数 $\mathcal{F}$ は有限集合のべき集合をとればよいので

$$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$$

とする．

確率測度 Pr は，各元の確率を

$$\Pr(\{(F, H)\}) = \Pr(\text{fair}) \Pr(\text{heads} \mid \text{fair}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\Pr(\{(F, T)\}) = \Pr(\text{fair}) \Pr(\text{tails} \mid \text{fair}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\Pr(\{(B, H)\}) = \Pr(\text{biased}) \Pr(\text{heads} \mid \text{biased}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5},$$

$$\Pr(\{(B,T)\}) = \Pr(\text{biased})\Pr(\text{tails} \mid \text{biased}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

と定める．この 4 つの値の和が

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{10} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

となることから，全確率が 1 になっていることも確認できる．

一般の事象 $A \in \mathcal{F}$ に対しては，加法性により

$$\Pr(A) = \sum_{\omega\in A}\Pr(\{\omega\})$$

で定義すればよい．これで $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ は確率空間の公理を満たす．

(2) コインが公平だと分かっている条件付き確率から誘導される確率空間

つぎに，「コインが公平である」という情報が与えられている場合を考える．これは元の空間での事象

$$E = \{(F,H),(F,T)\} \subset \Omega$$

が起きたと条件づけていることに対応する．このときの条件付き確率測度 $\Pr_E$ を

$$\Pr_E(A) = \Pr(A \mid E) = \frac{\Pr(A\cap E)}{\Pr(E)}$$

と定める．

(i) 元の標本空間 Ω をそのまま使う場合は，

$$(\Omega, \mathcal{F}, \Pr_E)$$

が Homework 9 で扱ったのと同様に確率空間になる．

(ii) より自然なのは，「公平なコインを 1 回投げる」という状況だけを取り出し，標本空間を

$$\Omega_F = \{H,T\}, \qquad \mathcal{F}_F = 2^{\Omega_F}$$

とし，確率測度を

$$\Pr_F(H) = \Pr(\text{heads} \mid \text{fair}) = \frac{1}{2}, \qquad \Pr_F(T) = \Pr(\text{tails} \mid \text{fair}) = \frac{1}{2}$$

で与えることである．これは，「コインが公平である」という条件付き確率から自然に得られる確率空間であり，ふつう我々が「公平なコインを 1 回投げる」と言うときのモデルになっている．

したがって，元のモデル $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ と，条件付き確率（コインが公平であるという情報のもとでの確率）から誘導される確率空間 $(\Omega_F, \mathcal{F}_F, \Pr_F)$ の両方を，問題文の指示どおり明示することができた． □

Homework 11

■Homework 11. In the example given after Theorem 8 as a simple application of Bayes ’ law, we did not mathematically define our probability spaces. Explicitly give the probability spaces we implicitly assumed in which $\Pr(E_3)$, $\Pr(E_2 \mid A)$, and $\Pr(A \mid E_1)$ are valid probabilities, that is, the original probability space and the ones induced by the conditional probabilities given A as well as those given E_1.

解答. 定理 8 の後の例では，次の状況を考えていた．コインが 3 枚あり，そのうち 2 枚は公平で，残り 1 枚は表が出る確率 4/5 の偏ったコインである．どのコインが偏っているかは事前には分からず，どれが偏っているかは一様に確からしいと仮定する．$i = 1, 2, 3$ について，E_i を「i 番目のコインが偏っている」という事象とすると，

$$\Pr(E_1) = \Pr(E_2) = \Pr(E_3) = \frac{1}{3}$$

である．また，3 枚のコインを 1 回ずつ独立に投げ，その結果が「1 枚目が裏，2 枚目が裏，3 枚目が表」である事象を A と書いていた．

この状況を形式的な確率空間として書き下す.

(1) 元の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$

コインの「どれが偏っているか」と「各コインの表裏の結果」をまとめて 1 点とする．状態を

$$i \in \{1, 2, 3\}$$

で「i 番目のコインが偏っている」と表し，各コインの結果を

$$x_1, x_2, x_3 \in \{H, T\}$$

（H は表，T は裏）と書く．このとき標本空間を

$$\Omega = \{(i, x_1, x_2, x_3) \mid i \in \{1, 2, 3\},\ x_1, x_2, x_3 \in \{H, T\}\}$$

と定める．σ-代数は有限集合なので

$$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$$

とすればよい.

確率測度 Pr は，事前分布 $\Pr(E_i) = 1/3$ と条件付き確率

$$\Pr(\text{表} \mid \text{偏ったコイン}) = \frac{4}{5}, \quad \Pr(\text{裏} \mid \text{偏ったコイン}) = \frac{1}{5},$$

$$\Pr(\text{表} \mid \text{公平なコイン}) = \Pr(\text{裏} \mid \text{公平なコイン}) = \frac{1}{2}$$

から

$$\Pr(\{(i,x_1,x_2,x_3)\}) = \Pr(E_i)\prod_{j=1}^{3} p_{i,j}(x_j)$$

で定める．ここで $p_{i,j}(H)$ は $j=i$ なら 4/5，$j \neq i$ なら 1/2，$p_{i,j}(T)$ は $j=i$ なら 1/5，$j \neq i$ なら 1/2 とする．

このとき，例で使われていた事象は

$$E_k = \{(i,x_1,x_2,x_3)\in\Omega \mid i=k\} \quad (k=1,2,3),$$

$$A = \{(i,x_1,x_2,x_3)\in\Omega \mid x_1=T,\ x_2=T,\ x_3=H\}$$

と書ける．特に $\Pr(E_3)=1/3$ はこの元の確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ における通常の確率である．

(2) 事象 A による条件付き確率から誘導される確率空間

つぎに，「結果が A であった」という条件のもとでの確率を考える．Homework 9 と同様に，

$$\Pr_A(F) := \Pr(F \mid A) = \frac{\Pr(F\cap A)}{\Pr(A)} \qquad (F\in\mathcal{F})$$

と定めると，$(\Omega,\mathcal{F},\Pr_A)$ は確率空間になる．この確率空間において

$$\Pr(E_2 \mid A) = \Pr_A(E_2)$$

と解釈していることになる．（必要なら $(A,\mathcal{F}_A,\Pr_A)$ という制限された空間を考えてもよいが，ここでは Ω のままでもよい．）

(3) 事象 E_1 による条件付き確率から誘導される確率空間

同様に，「1 枚目のコインが偏っている」（すなわち E_1 が起きている）という条件のもとでの確率を

$$\Pr_{E_1}(F) := \Pr(F \mid E_1) = \frac{\Pr(F\cap E_1)}{\Pr(E_1)} \qquad (F\in\mathcal{F})$$

と定める．すると $(\Omega,\mathcal{F},\Pr_{E_1})$ も確率空間になり，この空間において

$$\Pr(A \mid E_1) = \Pr_{E_1}(A)$$

として理解している．（ここでも $(E_1,\mathcal{F}_{E_1},\Pr_{E_1})$ に制限した空間をとってもよい．）

以上により，例の中で暗黙に使っていた

$$\Pr(E_3), \quad \Pr(E_2 \mid A), \quad \Pr(A \mid E_1)$$

がそれぞれ意味を持つ 3 つの確率空間，すなわち元の $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ と，事象 A による条件付き確率から誘導される $(\Omega,\mathcal{F},\Pr_A)$，事象 E_1 による条件付き確率から誘導される $(\Omega,\mathcal{F},\Pr_{E_1})$ を明示的に与えることができた． $\square$

Homework 12

■Homework 12. Prove Theorem 9. (Hint: This is almost trivial by induction.)

Theorem 9 (Chain rule). Let $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ be a probability space and $E_0, E_1, \ldots, E_{n-1} \in \mathcal{F}$ be events. Assume that

$$\Pr\Big(\bigcap_{i=0}^{k} E_i\Big) > 0 \quad \text{for each } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Then

$$\Pr\Big(\bigcap_{i=0}^{n-1} E_i\Big) = \Pr(E_0) \prod_{k=1}^{n-1} \Pr\Big(E_k \;\Big|\; \bigcap_{j=0}^{k-1} E_j\Big).$$

解答. まず $n = 1$ の場合を確認する。このとき左辺は

$$\Pr\Big(\bigcap_{i=0}^{0} E_i\Big) = \Pr(E_0)$$

であり，右辺も

$$\Pr(E_0) \prod_{k=1}^{0} (\cdots) = \Pr(E_0)$$

となる（空の積は 1 とみなす）ので，$n = 1$ の場合は成り立つ。

次に $n \geq 2$ とし，$n-1$ 個の事象 $E_0, \ldots, E_{n-2}$ について

$$\Pr\Big(\bigcap_{i=0}^{n-2} E_i\Big) = \Pr(E_0) \prod_{k=1}^{n-2} \Pr\Big(E_k \;\Big|\; \bigcap_{j=0}^{k-1} E_j\Big) \tag{$*$}$$

が成り立つと仮定する（帰納法の仮定)。

n 個の事象 $E_0, \ldots, E_{n-1}$ についての式を示す。条件付き確率の定義から

$$\Pr\Big(E_{n-1} \;\Big|\; \bigcap_{j=0}^{n-2} E_j\Big) = \frac{\Pr\big(\bigcap_{i=0}^{n-1} E_i\big)}{\Pr\big(\bigcap_{i=0}^{n-2} E_i\big)}$$

である。仮定より $\Pr(\bigcap_{i=0}^{n-2} E_i) > 0$ なので，これを変形して

$$\Pr\Big(\bigcap_{i=0}^{n-1} E_i\Big) = \Pr\Big(E_{n-1} \;\Big|\; \bigcap_{j=0}^{n-2} E_j\Big) \Pr\Big(\bigcap_{i=0}^{n-2} E_i\Big)$$

を得る。

ここで右側の $\Pr(\bigcap_{i=0}^{n-2} E_i)$ に帰納法の仮定 $(*)$ を代入すると，

$$\begin{aligned}\Pr\Big(\bigcap_{i=0}^{n-1} E_i\Big) &= \Pr\Big(E_{n-1} \;\Big|\; \bigcap_{j=0}^{n-2} E_j\Big) \Pr(E_0) \prod_{k=1}^{n-2} \Pr\Big(E_k \;\Big|\; \bigcap_{j=0}^{k-1} E_j\Big) \\ &= \Pr(E_0) \prod_{k=1}^{n-1} \Pr\Big(E_k \;\Big|\; \bigcap_{j=0}^{k-1} E_j\Big).\end{aligned}$$

これで n 個の事象についても式が成り立つことが分かる。

以上より，$n = 1$ の場合に成り立ち，$n-1$ 個の場合に成り立つとき n 個の場合にも成り立つことを示したので，数学的帰納法により任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$\Pr\Big(\bigcap_{i=0}^{n-1} E_i\Big) = \Pr(E_0) \prod_{k=1}^{n-1} \Pr\Big(E_k \;\Big|\; \bigcap_{j=0}^{k-1} E_j\Big)$$

が成り立つ。これが Theorem 9 の主張である。 $\square$

Homework 13

■Homework 13. Let X be a $(\Psi, \mathcal{E})$-valued random variable on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$. Define $\Pr_X : \mathcal{E} \to [0,1]$ by $\Pr_X(E) = \Pr(X^{-1}(E))$ for any $E \in \mathcal{E}$. Prove that $(\Psi, \mathcal{E}, \Pr_X)$ is a probability space.

解答. $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ を確率空間とし，$X\colon \Omega \to \Psi$ を写像とする。仮定より，任意の $E \in \mathcal{E}$ について逆像

$$X^{-1}(E) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in E\}$$

が $\mathcal{F}$ に属しているとする。このとき

$$\Pr_X(E) := \Pr\bigl(X^{-1}(E)\bigr) \qquad (E \in \mathcal{E})$$

と定めると，$(\Psi, \mathcal{E}, \Pr_X)$ が確率空間になることを示す。つまり，$\Pr_X$ が $\mathcal{E}$ 上の確率測度になっていることを確かめればよい。

(1) **非負性**

任意の $E \in \mathcal{E}$ に対し，$X^{-1}(E) \in \mathcal{F}$ かつ $\Pr$ は確率測度なので

$$\Pr_X(E) = \Pr\bigl(X^{-1}(E)\bigr) \geq 0$$

が成り立つ。

(2) **全体集合の確率が 1 であること**

Ψ の逆像は

$$X^{-1}(\Psi) = \Omega$$

であるから，

$$\Pr_X(\Psi) = \Pr\bigl(X^{-1}(\Psi)\bigr) = \Pr(\Omega) = 1$$

となる。

(3) **可算加法性**

$(E_i)_{i \geq 1}$ を $\mathcal{E}$ の互いに素な（$i \neq j$ なら $E_i \cap E_j = \varnothing$）列とする。このとき逆像の基本的性質より

$$X^{-1}\Bigl(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Bigr) = \bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(E_i)$$

が成り立つ。また，もし $i \neq j$ で

$$X^{-1}(E_i) \cap X^{-1}(E_j) \neq \varnothing$$

だとすると，ある ω が存在して $\omega \in X^{-1}(E_i) \cap X^{-1}(E_j)$ となるが，これは $X(\omega) \in E_i$ かつ $X(\omega) \in E_j$ を意味し，E_i と E_j が互いに素であることに反する。したがって $X^{-1}(E_i)$ 同士も互いに素である。

よって，Pr の可算加法性より

$$
\begin{aligned}
\Pr_X\Bigl(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Bigr) &= \Pr\Bigl(X^{-1}\Bigl(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Bigr)\Bigr) \\
&= \Pr\Bigl(\bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(E_i)\Bigr) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \Pr\bigl(X^{-1}(E_i)\bigr) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \Pr_X(E_i).
\end{aligned}
$$

(1)〜(3) から，Pr_X は $\mathcal{E}$ 上の確率測度である。したがって $(\Psi, \mathcal{E}, \mathrm{Pr}_X)$ は確率空間になっている。 □

Homework 14

■Homework 14. Give a random variable X whose expectation is not well-defined, that is, $E(X)$ does not exist. (Hint: This does not mean that the expectation is infinite. Recall that for $E(X)$ to exist, $E(X^+)$ and/or $E(X^-)$ should con- verge.)

解答. 整数を使った簡単な例を考える。

まず標本空間と確率のつけ方を次のように決める：

$$\Omega = \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \qquad \mathcal{F} = 2^{\Omega}.$$

各 $n \in \Omega$ に対して

$$\Pr(\{n\}) = \frac{C}{n^2}$$

とおく。ただし $C > 0$ は

$$\sum_{n\in\Omega} \Pr(\{n\}) = 1$$

となるようにとった定数である（$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ が有限であることから，そのような C が取れることは知られている）。このとき $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ は確率空間になっている。

この確率空間の上で写像 $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ を

$$X(n) = n \qquad (n \in \Omega)$$

と定める。つまり，「n が出たら値として n をとる」確率変数である。

X の期待値を形式的に

$$E(X) = \sum_{n\in\Omega} X(n) \Pr(\{n\}) = \sum_{n\in\Omega} n \Pr(\{n\})$$

と書くと，正の整数と負の整数に分けて

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \Pr(\{n\}) + \sum_{n=-\infty}^{-1} n \Pr(\{n\})$$

となる。

まず正の部分を計算する：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \Pr(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{C}{n^2} = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

ここで $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ は調和級数であり，無限大に発散するので，この和は $+\infty$ になる。

次に負の部分を計算する。$n = -m$ と書き直すと

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{-1} n \ \Pr(\{n\}) &= \sum_{m=1}^{\infty} (-m) \ \Pr(\{-m\}) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-m) \cdot \frac{C}{m^2} \\ &= -C \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = -\infty\end{aligned}$$

となる。

したがって，X の「正の部分に対応する和」は $+\infty$,「負の部分に対応する和」は $-\infty$ になってしまう。形式的には

$$E(X) = \bigl(+\infty\bigr) + \bigl(-\infty\bigr)$$

という形になり，値を 1 つに決めることができない。

期待値が「存在する」と言うためには，正の側と負の側の和がそれぞれきちんと収束している必要がある。この例では，一方は $+\infty$，もう一方は $-\infty$ に発散しているので，$E(X)$ は定まらず，「期待値が存在しない」確率変数の具体例になっている。 $\square$

Homework 15

■Homework 15. Prove Theorem 15.

Theorem 15. Let $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ be a set of events in a discrete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$. For $E \in \mathcal{E}$, define X_E to be the indicator random variable for E, and define

$$X = \sum_{E \in \mathcal{E}} X_E.$$

If

$$E(X) < 1,$$

then

$$\Pr(X = 0) > 0,$$

that is, there is a nonzero probability that none of the events in $\mathcal{E}$ occurs.

解答. 各 $E \in \mathcal{E}$ について，指示関数 X_E は

$$X_E(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in E \text{ のとき}), \\ 0 & (\omega \notin E \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定められている。したがって

$$X(\omega) = \sum_{E \in \mathcal{E}} X_E(\omega)$$

は,「$\mathcal{E}$ の中で実際に起こったイベントの個数」を表している。特に, $X(\omega)$ はいつも $0, 1, 2, \ldots$ のいずれかの値をとる（0 以上の整数値をとる）確率変数である。

この性質を用いて期待値 $E(X)$ を調べる。X がとりうる値を $0, 1, 2, \ldots$ と書くと，期待値は

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \Pr(X = k)$$

と書ける。ここで，各 $k \geq 1$ に対して $k \geq 1$ であることから

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \Pr(X = k) \ \geq \ \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot \Pr(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(X = k).$$

右辺の和は

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Pr(X = k) = 1 - \Pr(X = 0)$$

なので，まとめると

$$E(X) \ \geq \ 1 - \Pr(X = 0)$$

が得られる。

ここで仮定 $E(X) < 1$ を使うと,

$$1 - \Pr(X = 0) \ \le \ E(X) \ < \ 1$$

であるから,

$$1 - \Pr(X = 0) < 1 \quad \Longrightarrow \quad \Pr(X = 0) > 0$$

となる。

これは,「$\mathcal{E}$ のどのイベントも起こらない」($X = 0$)という場合の確率が正であることを意味する。したがって定理の主張が示された。 $\square$

Homework 16

■Homework 16. Let $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ be a discrete probability space and $E \in \mathcal{F}$ such that $\Pr(E) > 0$. Show that for any discrete random variable X with a finite expectation, it holds that

$$E(X \mid E) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr(\{\omega\} \mid E) = \frac{1}{\Pr(E)} \sum_{\omega \in E} X(\omega) \Pr(\{\omega\}).$$

解答. 離散確率変数 X の条件付き期待値の定義より，

$$E(X \mid E) = \sum_{x} x \Pr(X = x \mid E)$$

である（ここで和は X が取りうる値 x 全体にわたってとる）。

まず，$\Pr(X = x \mid E)$ を標本空間 Ω の元で書き直す。事象 $\{X = x\}$ は

$$\{X = x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$$

なので，条件付き確率の定義から

$$\Pr(X = x \mid E) = \frac{\Pr(\{X = x\} \cap E)}{\Pr(E)} = \frac{1}{\Pr(E)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} \Pr(\{\omega\} \cap E)$$

と書ける。これを $E(X \mid E)$ に代入すると

$$\begin{aligned} E(X \mid E) &= \sum_{x} x \Pr(X = x \mid E) \\ &= \sum_{x} x \cdot \frac{1}{\Pr(E)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} \Pr(\{\omega\} \cap E) \\ &= \frac{1}{\Pr(E)} \sum_{x} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} x \Pr(\{\omega\} \cap E). \end{aligned}$$

ここで，X の期待値が有限であると仮定しているので，和の順序を入れ替えてもよい：

$$E(X \mid E) = \frac{1}{\Pr(E)} \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{\substack{x \\ X(\omega) = x}} x \Pr(\{\omega\} \cap E).$$

この内側の和

$$\sum_{\substack{x \\ X(\omega) = x}} x \Pr(\{\omega\} \cap E)$$

において，ω を固定すると $\Pr(\{\omega\} \cap E)$ は x に依存しない定数なので，外に出すことができる：

$$E(X \mid E) = \frac{1}{\Pr(E)} \sum_{\omega \in \Omega} \Pr(\{\omega\} \cap E) \sum_{\substack{x \\ X(\omega)=x}} x.$$

固定した ω に対しては，$X(\omega)$ に等しい x がただ 1 つだけ存在し，そのとき $x = X(\omega)$ であるから

$$\sum_{\substack{x \\ X(\omega)=x}} x = X(\omega)$$

となる。したがって

$$E(X \mid E) = \frac{1}{\Pr(E)} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr(\{\omega\} \cap E)$$

を得る。

さらに，$\{\omega\} \cap E$ は $\omega \in E$ のとき $\{\omega\}$，$\omega \notin E$ のとき空集合であり，空集合の確率は 0 なので，

$$\Pr(\{\omega\} \cap E) = \begin{cases} \Pr(\{\omega\}) & (\omega \in E), \\ 0 & (\omega \notin E) \end{cases}$$

となる。よって

$$E(X \mid E) = \frac{1}{\Pr(E)} \sum_{\omega \in E} X(\omega) \Pr(\{\omega\}),$$

これで右端の式が示された。

最後に，条件付き確率の定義

$$\Pr(\{\omega\} \mid E) = \frac{\Pr(\{\omega\} \cap E)}{\Pr(E)}$$

を用いると，

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr(\{\omega\} \mid E) &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \frac{\Pr(\{\omega\} \cap E)}{\Pr(E)} \\ &= \frac{1}{\Pr(E)} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr(\{\omega\} \cap E) \\ &= \frac{1}{\Pr(E)} \sum_{\omega \in E} X(\omega) \Pr(\{\omega\}), \end{aligned}$$

これはすでに求めた $E(X \mid E)$ の式と一致する。

したがって

$$E(X \mid E) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr(\{\omega\} \mid E) = \frac{1}{\Pr(E)} \sum_{\omega \in E} X(\omega) \Pr(\{\omega\})$$

が成り立つ。 □

Homework 17

■Homework 17. Prove Theorem 20.

Theorem 20 (Linearity of conditional expectation). For any finite set of discrete random variables $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ with finite expectations on a discrete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ and for any event $E \in \mathcal{F}$ with $\Pr(E) > 0$, it holds that

$$E\Big(\sum_{i=0}^{n-1} c_i X_i \;\Big|\; E\Big) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \, E(X_i \mid E),$$

where $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ are arbitrary constants.

解答. $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ を離散確率空間とし，$E \in \mathcal{F}$ は $\Pr(E) > 0$ を満たす事象とする。$X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ は有限期待値をもつ離散確率変数とし，$c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ を定数とする。

まず，新しい確率変数

$$Y = \sum_{i=0}^{n-1} c_i X_i$$

を定める。各 X_i の期待値が有限であり，c_i も有限な定数なので，Y の期待値 $E(Y)$ も有限である（有限個の和なので問題はない)。

Homework 16 で示した離散の場合の条件付き期待値の表示

$$E(Y \mid E) = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \Pr(\{\omega\} \mid E)$$

を用いると，

$$\begin{aligned}
E\Big(\sum_{i=0}^{n-1} c_i X_i \;\Big|\; E\Big) &= E(Y \mid E) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \Pr(\{\omega\} \mid E) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} \Big(\sum_{i=0}^{n-1} c_i X_i(\omega)\Big) \Pr(\{\omega\} \mid E).
\end{aligned}$$

ここで ω に関する和の中身を分配法則で展開すると，

$$E\Big(\sum_{i=0}^{n-1} c_i X_i \;\Big|\; E\Big) = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{i=0}^{n-1} c_i X_i(\omega) \Pr(\{\omega\} \mid E).$$

添字 i は有限個（$0, \ldots, n-1$）しかないので，和の順序を入れ替えることができる：

$$E\Big(\sum_{i=0}^{n-1} c_i X_i \;\Big|\; E\Big) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \sum_{\omega \in \Omega} X_i(\omega) \Pr(\{\omega\} \mid E).$$

ここで c_i は ω に依存しない定数なので，内側の和の外に出している。

さらに，内側の和

$$\sum_{\omega\in\Omega} X_i(\omega)\ \Pr(\{\omega\} \mid E)$$

は，まさに条件付き期待値 $E(X_i \mid E)$ の定義そのものである。したがって

$$E\Big(\sum_{i=0}^{n-1} c_i X_i \ \Big|\ E\Big) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\, E(X_i \mid E)$$

が従う。

これで Theorem 20 の主張が示された。 □