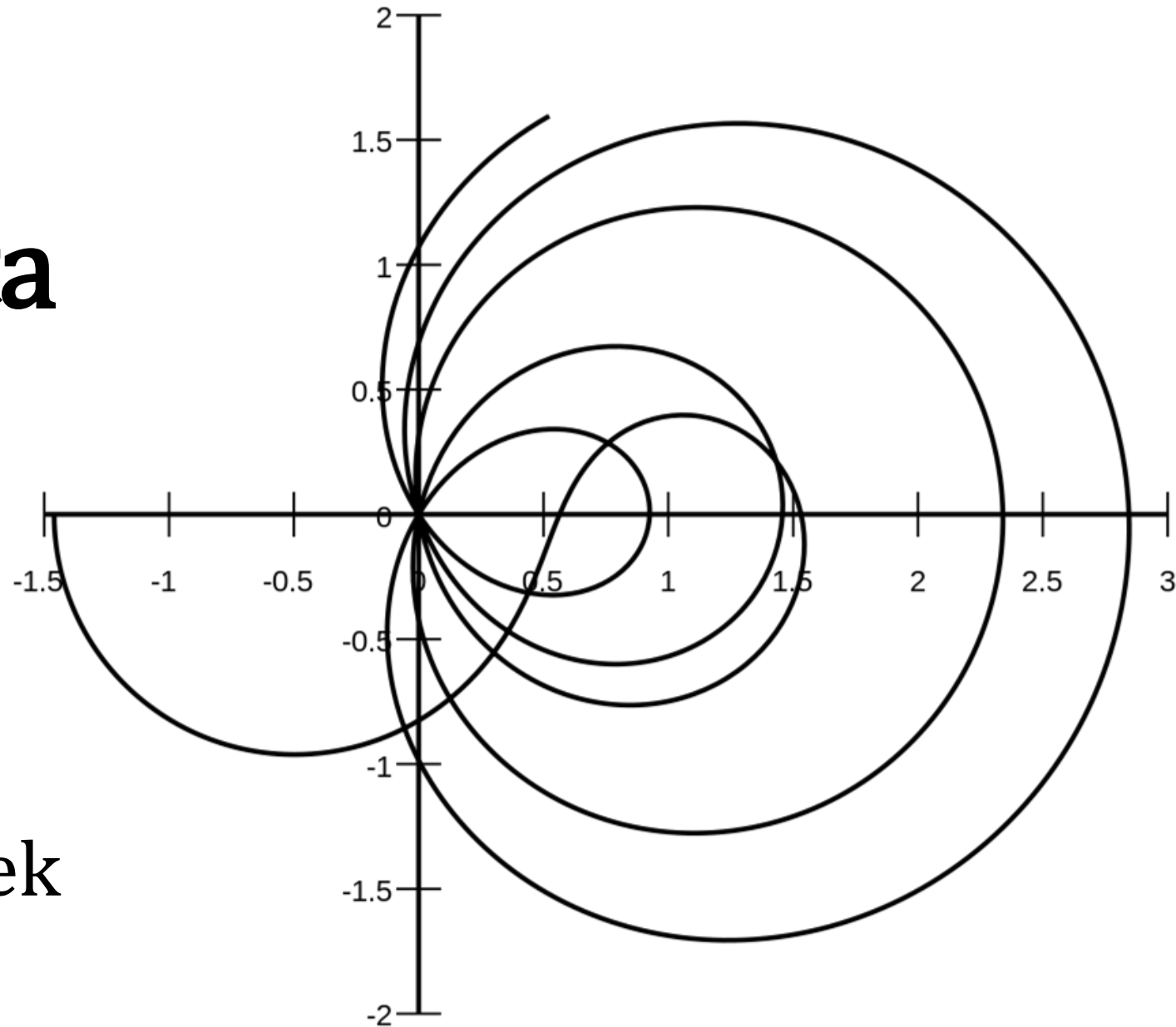


# The Riemann Zeta Function

Tasnia Kader

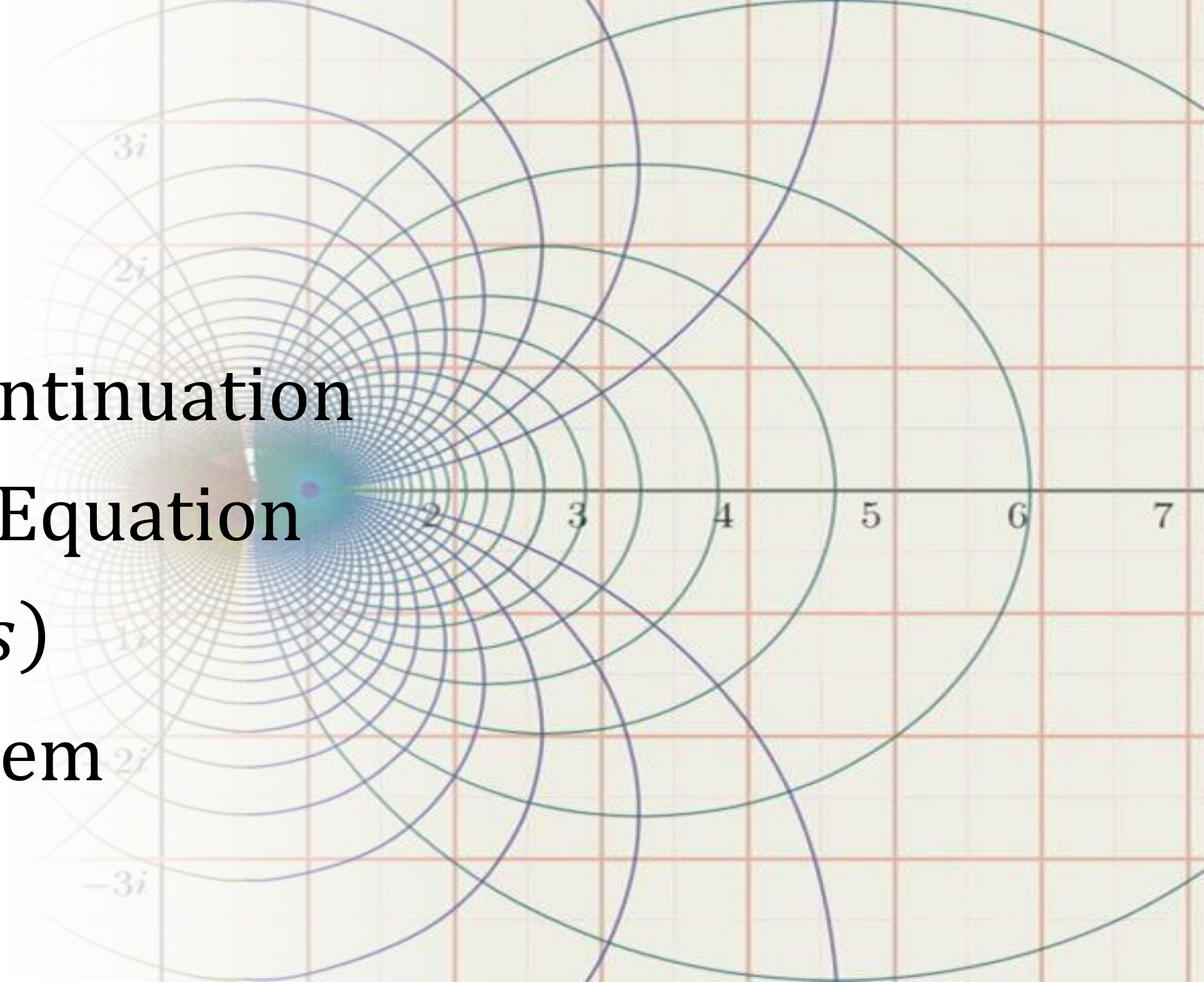
Course: MATH 3138

Professor: Dr. Jeromy Sivek



# Agenda

- Definition
- Analytic Continuation
- Functional Equation
- Zeros of  $\zeta(s)$
- Basel Problem
- $\zeta(-1)$





Bernhard Riemann  
(1826 – 1866)

Riemann 3

Über das Integral der Primzahlen unter einer  
gegebenen Grösse.  
(Bodenm. Monatshefte, 1859, November)

Wenn man für die Ausdehnung, welche man der Re-  
ihe durch die Aufnahme unter der Convergence-  
bedingung hat, Theil werden lassen, glaube ich am besten  
dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der Richtigkeit  
eigentlich keinen halbsicheren Gebrauch machen kann  
für die Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das  
Hilfsmittel, welches Gauss und Dirichlet demselben  
längere Zeit geschenkt haben, einen solchen Hilfsmittel  
vielleicht nicht ganz unwirksam erscheint.

Bei dieser Untersuchung dachte mir als Ausgangs-  
punkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s},$$

wenn für  $p$  alle Primzahlen, für  $n$  alle ganzen Zahlen  
gesetzt werden. Die Function der Complexen Kreistre-  
ichen  $s$ , welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange  
sie convergiren, dargestellt wird, heisst sie ist durch  
 $\zeta(s)$ . Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil  
von  $s$  grösser als 1 ist; es lässt sich aber leicht zeigen,  
dass die Function für  $s=1$  nicht existirt. Durch  
Auswertung der Function

$$\int_0^\infty e^{-sx} x^{s-1} dx = \frac{\Gamma(s)}{s^s}$$

erhält man zunächst

$$\Gamma(s-1) \cdot \zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1}.$$

Resultat man nun die Integral

$$\int_0^\infty \frac{(-x)^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

von  $x$  bis  $+\infty$  positiv man eine Grösse angeben, welche  
weder den Werth 0, aber man an der Endesgränze  
nicht die Function unter dem Integralzeichen im In-  
finiten enthält, es ergibt sich dieses leicht gleich

$$(e^{-\pi i} - e^{\pi i}) \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1},$$

manausgedrückt, dass es der vieldeutigen Function  
 $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$  d. h. Logarithmus von  $-x$  selbst  
bedeutet, dass es für ein negatives  $x$  reell wird. Man

# Definition

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

where  $s = \sigma + ti$

$$\operatorname{Re}(s) > 1$$

# Analytic Continuation

If

$D_1, D_2$ : domains,  $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$

$f_1$ : analytic on  $D_1$ ,  $f_2$ : analytic on  $D_2$

$$f_1 = f_2 \text{ on } D_1 \cap D_2$$

Then,  $f_2$  is called an **analytic continuation** of  $f_1$

Extend  $f_1$  to larger domain:  $f_1 = f_2 \forall z \in D_1 \cup D_2$

# Example of Analytic Continuation

$$f_1(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

Converges for  $D_1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$

$$f_2(z) = \frac{1}{1 - z}$$

Defined for  $D_2 = \{z \in \mathbb{C}: z \neq 1\}$

$$f_1 = f_2 \text{ on } D_1 \cap D_2$$

$f_2$  analytic continuation of  $f_1$

Define  $f_1 = f_2 \forall z \in D_1 \cup D_2$

# Analytic Continuation of $\zeta(s)$

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots$$

$$\zeta(s) = \frac{Z(s)}{1 - 2^{1-s}}$$

analytic continuation of  $\zeta(s)$  to  
 $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 0 \wedge s \neq 1\}$



## Proof

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

$$\zeta(s) = 1 + \left( \frac{2}{2^s} - \frac{1}{2^s} \right) + \frac{1}{3^s} + \left( \frac{2}{4^s} - \frac{1}{4^s} \right) + \dots$$

$$\zeta(s) = \left( 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots \right) + 2 \left( \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \right)$$

$$\zeta(s) = Z(s) + 2 \left( \frac{\zeta(s)}{2^s} \right)$$



## Proof Cont.

$$\zeta(s) = Z(s) + 2 \left( \frac{\zeta(s)}{2^s} \right)$$

$$\zeta(s) = Z(s) + \frac{\zeta(s)}{2^{s-1}}$$

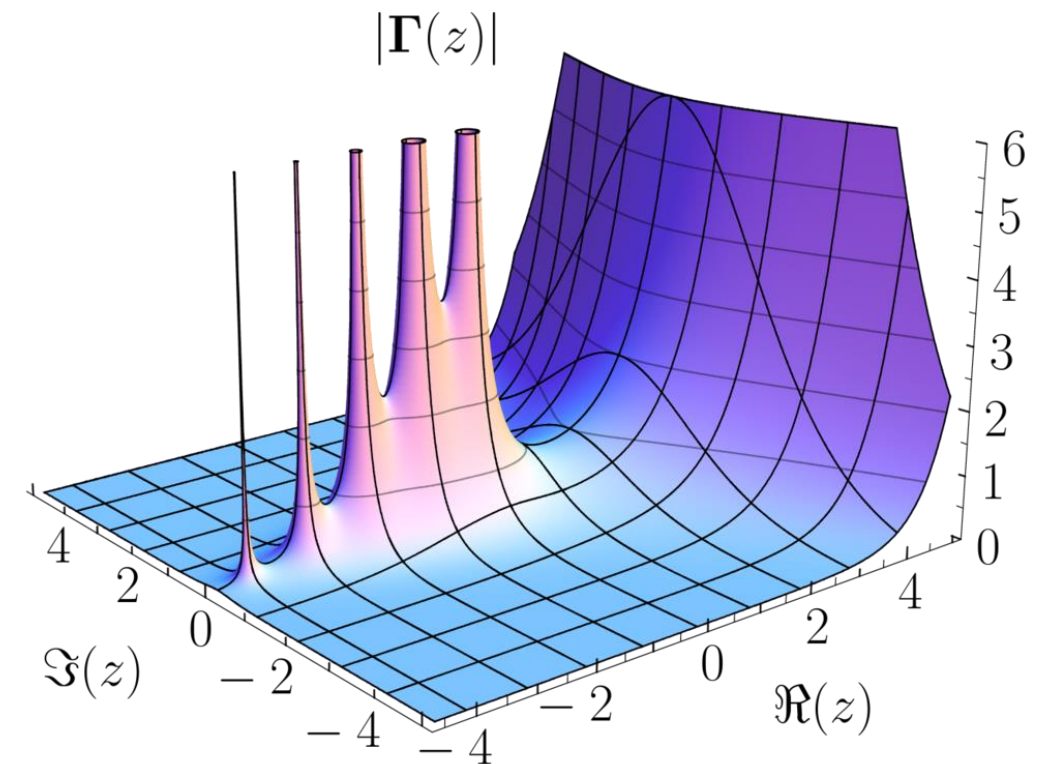
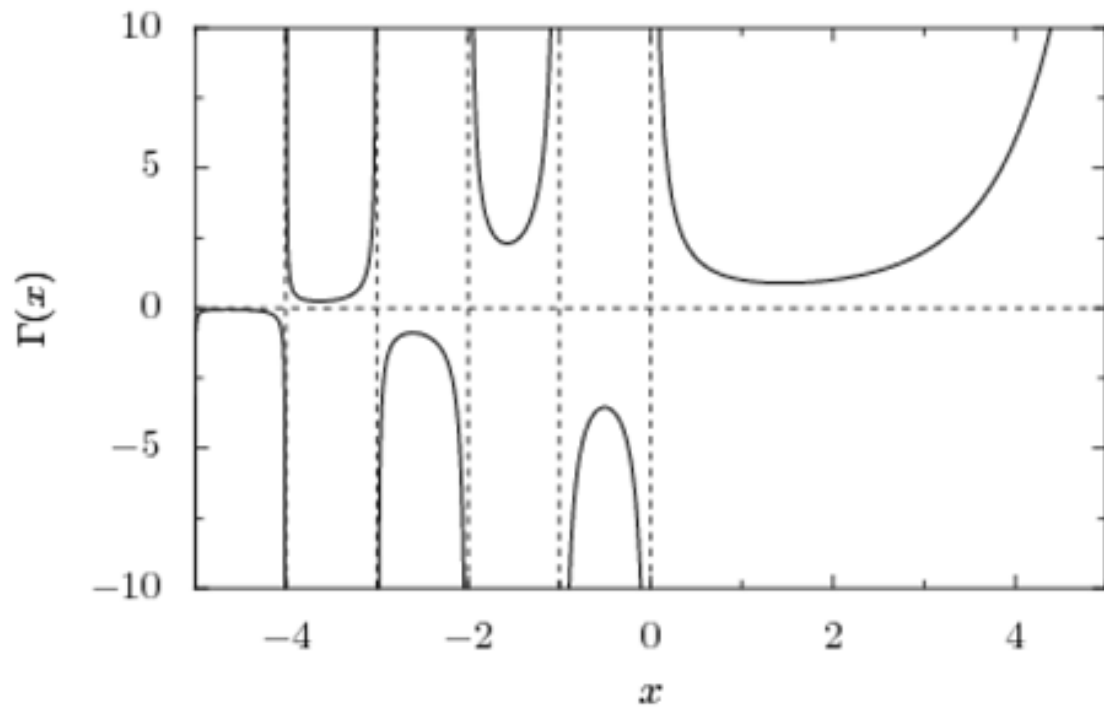
$\vdots$

$$\zeta(s) = \frac{Z(s)}{1 - 2^{1-s}}$$

# Gamma Function $\Gamma$

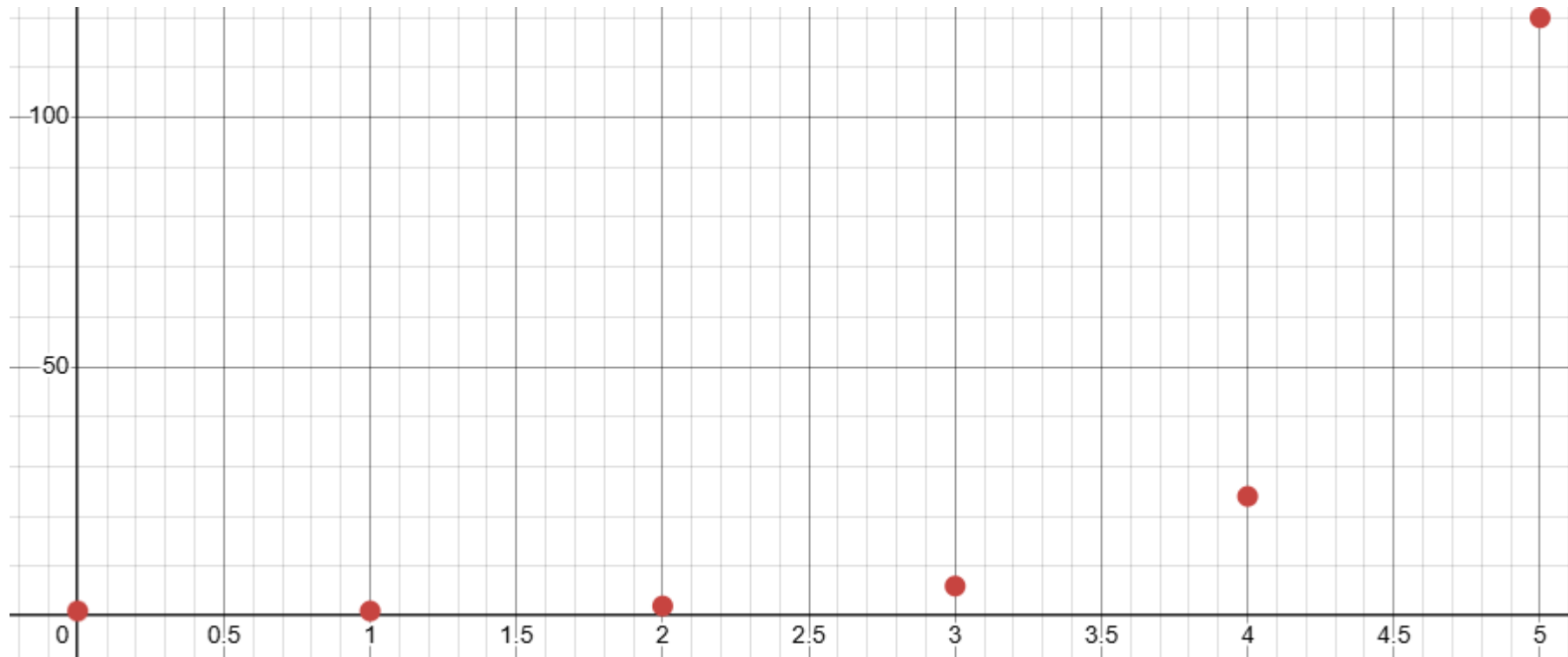
$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

$$\operatorname{Re}(s) > 1$$



# Gamma Function $\Gamma$

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad \text{where } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$



# Functional Equation of $\zeta(s)$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

defined for all complex  $s$ , except  $s = 1$

# Zeros of $\zeta(s)$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

$$\text{Let } s = -2n, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

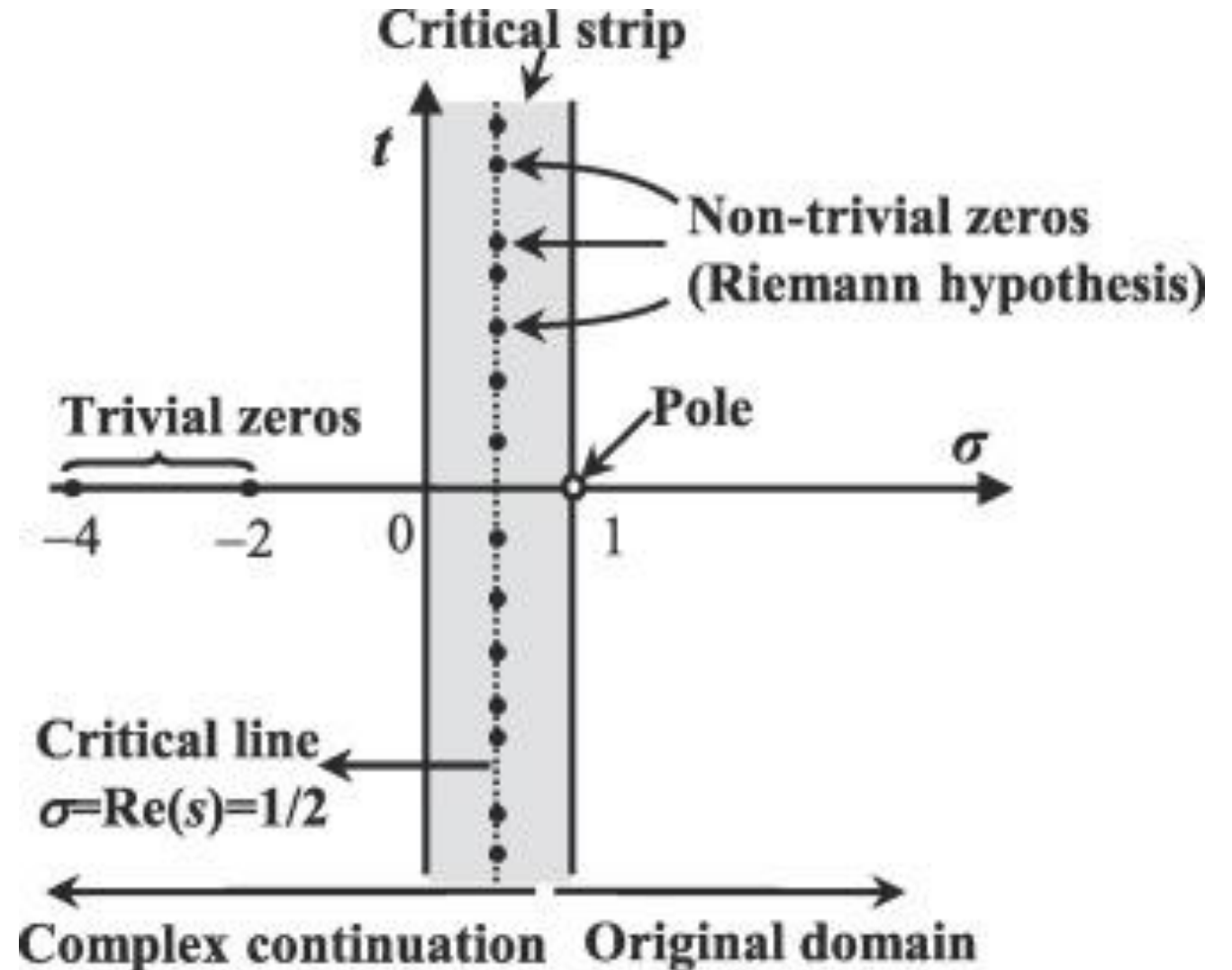
$$\sin\left(\frac{\pi \cdot -2n}{2}\right) = \sin(-\pi n) = 0$$

$$\text{so } \zeta(-2n) = 0$$

$s = -2n$  known as **trivial zeros**

# Riemann Hypothesis

The nontrivial  
zeros of  $\zeta(s)$  have  
real part equal to  $\frac{1}{2}$



# Basel Problem $\zeta(2)$

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$



$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$



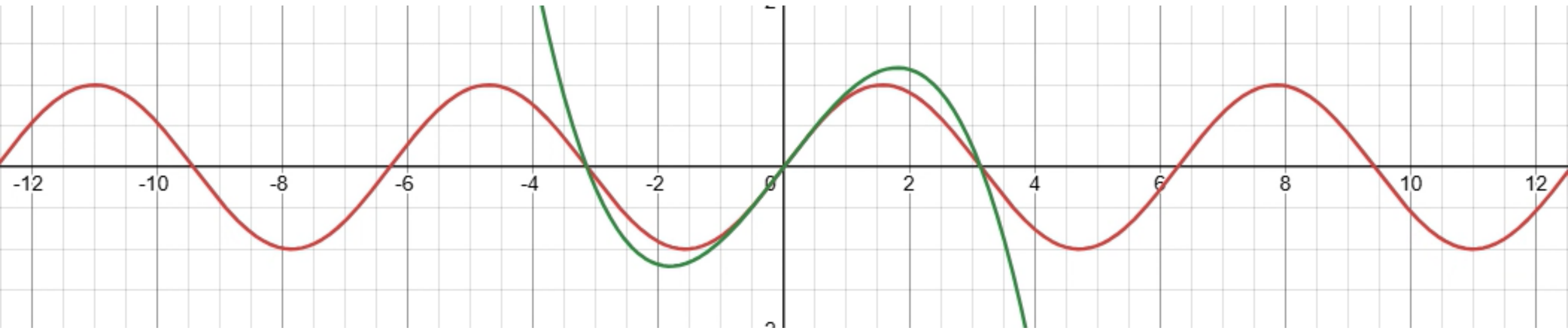
# Weierstrass Factorization Theorem

Any function that is analytic over the entire complex plane can be written as a product involving its zeros

# Weierstrass Factorization Theorem

$\sin(x)$  is analytic over the entire complex plane  
zeros of  $\sin(x)$  occur at  $0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$

$$\sin(x) = x \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \dots$$



## Basel Problem $\zeta(2)$ Cont.

$$\sin(x) = x \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \cdots$$

$$\sin(x) = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdots$$

$$\sin(x) = x \left[ \cdots - \frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x^2}{4\pi^2} - \frac{x^2}{9\pi^2} - \cdots \right]$$

## Basel Problem $\zeta(2)$ Cont.

$$\sin(x) = x \left[ \dots - \frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x^2}{4\pi^2} - \frac{x^2}{9\pi^2} - \dots \right]$$

$$\sin(x) = \dots - \frac{1}{\pi^2} x^3 \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \right) \dots$$

$$\sin(x) = \dots - \frac{1}{\pi^2} x^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \dots$$

# Basel Problem $\zeta(2)$ Cont.

$$\sin(x) = \dots - \frac{1}{\pi^2} x^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \dots$$

$$- \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(-1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots$$

## $\zeta(-1)$ Cont.

$$\zeta(-1) = 2^{-1} \pi^{-1-1} \sin\left(\frac{\pi \cdot -1}{2}\right) \Gamma(1 - (-1)) \zeta(1 - (-1))$$

$$\zeta(-1) = \frac{1}{2\pi^2} \cdot -1 \cdot \Gamma(2) \cdot \zeta(2)$$

$$\zeta(-1) = \frac{1}{2\pi^2} \cdot -1 \cdot 1! \cdot \zeta(2)$$



## $\zeta(-1)$ Cont.

$$\zeta(-1) = \frac{1}{2\pi^2} \cdot -1 \cdot 1! \cdot \zeta(2)$$

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{2\pi^2} \cdot \zeta(2)$$




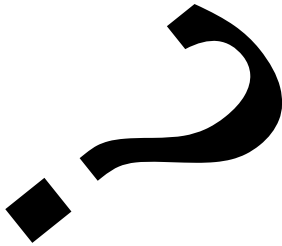

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6}$$

**$\zeta(-1)$  Cont.**

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$$


$$1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$$

# References

<https://math.iisc.ac.in/seminar-slides/2019/2019-12-18-KenOno-1.pdf>

<https://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Moros.pdf>

<https://www.math.ucdavis.edu/~temple/MAT21B/Riemann-Biography.pdf>

[http://sections.maa.org/epadel/awards/studentpaper/winners/2011\\_Yoder.pdf](http://sections.maa.org/epadel/awards/studentpaper/winners/2011_Yoder.pdf)

<https://www.math.cmu.edu/~bwsulliv/basel-problem.pdf>

Thank you!

Any Questions?