ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών **&** Μηχανικών Υπολογιστών

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

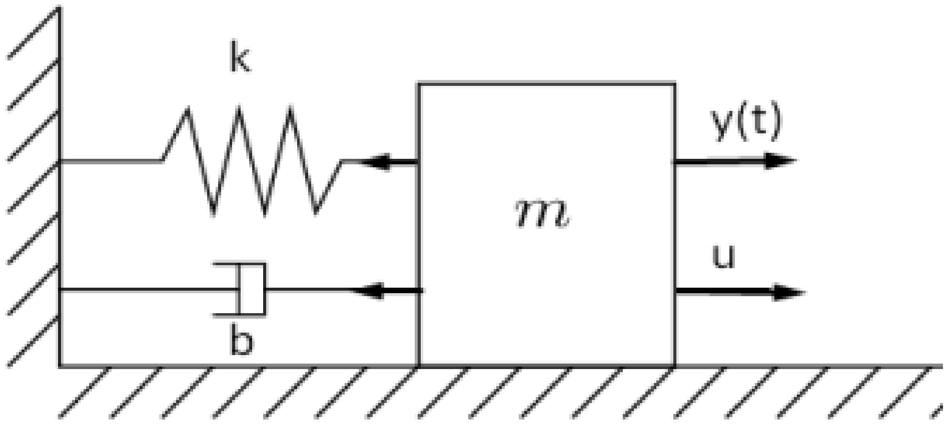
Εργασία 1 :Γραμμική Παραμετροποίηση, Εκτίμηση Άγνωστων Παραμέτρων, Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων

Ονοματεπώνυμο: Λιόλιος Αναστάσιος
ΑΕΜ: 9171
Ημερομηνία: 7 Απριλίου 2022
Email: lioliosaa@ece.auth.gr

Περιεχόμενα

1 Θέμα 1

Δίνεται το σύστημα μάζας - ελατηρίου - αποσβεστήρα που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



m: μάζα σώματος
b: σταθερά απόσβεσης
k: σταθερά ελατηρίου
u: εξωτερική δύναμη
y(t): μετατόπιση

1.1 Πρώτο Ερώτημα

Η μεταβλητή **y** εκφράζει την χρονική μετατόπιση του σώματος **m** . Η χρονική της παράγωγος $\dot{y}$ εκφράζει την ταχύτητα του σώματος και η χρονική παράγωγος αυτής, $\ddot{y}$ εκφράζει την επιτάχυνση .

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα προκύπτει το παρακάτω μοντέλο που περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος:

$$m\ddot{y} = -b\dot{y} - ky + u$$

$$\ddot{y} = -\frac{b}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}y + \frac{1}{m}u \tag{1.1}$$

Στη συνέχεια, συγκεντρώνουμε το όλες τις παραμέτρους σε ένα διάνυσμα θ^* και τα σήματα εισόδου –εξόδου στο σε ένα διάνυσμα Δ

$$\theta^* = \begin{bmatrix}\theta_1^* & \theta_2^*\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}a_1 & a_2 & b_0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{b}{m} & \frac{k}{m} & \frac{1}{m}\end{bmatrix}^T$$

$$\Delta = \begin{bmatrix}-y & -\dot{y} & u\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\Delta_1(s)^T y & \Delta_0(s)^T u\end{bmatrix}$$

Επομένως, καταλήγουμε

$$\ddot{y} = \theta^{*T}\Delta \tag{1.2}$$

Ωστόσο, τα μοναδικά σήματα που μπορούμε να μετρήσουμε είναι μόνο η είσοδος **u** και η έξοδος **y** ενώ επίσης η χρήση παραγώγισης είναι απαγορευτική. Άρα δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ούτε το $\ddot{y}$ ούτε το Δ.

Για να λύσουμε το πρόβλημα, φιλτράρουμε και τα δύο μέρη της εξίσωσης (1.2) με ένα ευσταθές φίλτρο 2ης τάξης $\frac{1}{\Lambda(s)}$. Έστω ότι $\Lambda(s) = (s+1)^2 = s^2+2s+1$ όπου το φίλτρο είναι ευσταθές έχοντας όλες τις ιδιοτιμές του στο αριστερό ημιεπίπεδο. Προκύπτει , επομένως, το διάνυσμα $\lambda = \begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}^T$

Να σημειωθεί ότι για την επάρκεια του φίλτρου θα πρέπει να το δοκιμάσουμε και αν δεν απορρίπτει συχνότητες που περιέχουν την πληροφορία τότε είναι επαρκές. Σε διαφορετική περίπτωση θα πρέπει να κάνουμε κάποια άλλη επιλογή. Εφαρμόζοντας το παραπάνω φίλτρο στην (1.2) προκύπτει:

$$z = \theta^{*T}\zeta = \theta_1^{*T}\zeta_1 + \theta_2^{*T}\zeta_2 \tag{1.3}$$

με $z = \frac{1}{\Lambda(s)}\ddot{y} = \frac{s^2}{\Lambda(s)}y$ και $\zeta = \begin{bmatrix}\zeta_1 & \zeta_2\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-\frac{\Delta_1(s)^T}{\Lambda(s)}y & \frac{\Delta_1(s)^T}{\Lambda(s)}u\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix}s & 1\end{bmatrix}}{(s+1)^2}y & \frac{\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}}{(s+1)^2}u\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-\frac{s}{(s+1)^2}y & -\frac{1}{(s+1)^2}y & \frac{1}{(s+1)^2}u\end{bmatrix}$.

Βλέπει κανείς ότι $\Lambda(s) = s^2 + \lambda^T\Delta_1(s)$. Άρα:

$$z = \frac{s^2}{\Lambda(s)}y = \frac{\Lambda(s) - \lambda^T\Delta_1(s)}{\Lambda(s)}y = y - \frac{\lambda^T\Delta_1(s)}{\Lambda(s)}y$$

$$y = z + \frac{\lambda^T\Delta_1(s)}{\Lambda(s)}y \tag{1.4}$$

Από (1.3), (1.4) συνεπάγεται ότι:

$$y = \theta_1^{*T}\zeta_1 + \theta_2^{*T}\zeta_2 - \lambda^T\zeta_1$$

$$y = \theta_\lambda^{*T}\zeta$$

με $\theta_\lambda^{*T} = \begin{bmatrix}\theta_1^{*T} & -\lambda^T\theta_2^{*T}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1-2 & a_2-1 & b_0\end{bmatrix}$.

Επομένως, έχουμε την επιθυμητή μορφή $y = \theta_\lambda^{*T}\zeta$ για το σύστημα μας όπου το ζ πρόκειται για ένα σήμα που παράγεται από μετρήσεις εισόδου εξόδου και αυτό σημαίνει ότι το σύστημα είναι υλοποιήσιμο. Όσο αναφορά τα φίλτρα είναι και αυτά υλοποιήσιμα αφού ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος από αυτόν του αριθμητή.

1.2 Δεύτερο Ερώτημα

Από το πρώτο ερώτημα έχουμε καταφέρει να μετατρέψουμε το σύστημα σε γραμμικά παραμετροποιημένο, άρα αυτό σημαίνει ότι μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των ελάχιστων τετραγώνων για να υπολογίσουμε το θ_0 για να βρούμε το ελάχιστο σφάλμα.

Αρχικά, εφαρμόζεται ο Μετασχηματισμός **Laplace** στο ζ:

$$\varphi_1(t) = LT^{-1}[-\frac{s}{(s+1)^2}y](t)$$
$$\varphi_2(t) = LT^{-1}[-\frac{1}{(s+1)^2}y](t)$$
$$\varphi_3(t) = LT^{-1}[\frac{1}{(s+1)^2}y](t)$$

Στη συνέχεια ορίζεται ο πίνακας Φ ο οποίος έχει N μετρήσεις των παραπάνω στοιχείων

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \varphi_3(2) \\ & \vdots & \\ \varphi_1(N) & \varphi_2(N) & \varphi_3(N) \end{bmatrix}$$

και το διάνυσμα Υ για N μετρήσεις εξόδου

$$Y = \begin{bmatrix} Y(1) & Y(2) & \dots & Y(N) \end{bmatrix}$$

Επομένως, το σφάλμα πρόβλεψης προκύπτει ως εξής $e = Y - \Phi\Theta$ και η συνάρτηση που είναι για ελαχιστοποίηση είναι $V_N = \frac{|Y-\Phi\Theta|^2}{2}$

Για το ζητούμενο θ_0 ισχύει ότι:

$$\theta_0 = argmin_\theta \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{|e^2|}{2}$$

Αποδεικνύεται ότι η V_N είναι κυρτή ως προς ϑ για κάθε t. Επομένως, αυτό σημαίνει ότι αν πάρουμε $\frac{dV_N}{d\theta} = 0$ θα βρούμε το μοναδικό ελάχιστο θ_0.

$$\frac{dV_N}{d\theta} = 0 => (\Upsilon - \Phi\theta_0)^T(-\Phi) = 0 => -\Upsilon^T\Phi + \theta_0^T\Phi^T\Phi = \Upsilon^T\Phi$$

Αν το $\Phi^T\Phi$ είναι αντιστρέψιμο, το σύστημα θα έχει μοναδική λύση:

$$\theta_0^T = \Upsilon^T\Phi(\Phi^T\Phi)^{-1} => \theta_0^T = \begin{bmatrix} Y(1) & Y(2) & \dots & Y(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \varphi_3(2) \\ & \vdots & \\ \varphi_1(N) & \varphi_2(N) & \varphi_3(N) \end{bmatrix}$$

$$(\begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_1(2) & \dots & \varphi_1(N) \\ \varphi_2(1) & \varphi_2(2) & \dots & \varphi_2(N) \\ \varphi_3(1) & \varphi_3(2) & \dots & \varphi_3(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \varphi_3(2) \\ & \vdots & \\ \varphi_1(N) & \varphi_2(N) & \varphi_3(N) \end{bmatrix})^{-1}$$

Οι διαστάσεις του θ_0^T θα είναι (1 X 3).

1.3 Τρίτο Ερώτημα

Με βάση τα ζητούμενα του ερωτήματος η προσομοίωση έγινε με τα ακόλουθα δεδομένα $m = 10kg$, $b = 0.3kg/s$, $k = 1.5kg/s^2$ και $u = 10sin(3t) + 5N$. Χρησιμοποιήθηκαν δείγματα ανά $0.1s$ για $10s$ θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες για τις καταστάσεις του συστήματος. Παρακάτω γίνεται μια σύντομη αναφορά στα αρχεία του κώδικα και στη συνέχεια σχολιάζονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης.

Αρχεία κώδικα:

dynamics_func.m: Συνάρτηση που υλοποιεί τις εξισώσεις κατάστασης του συστήματος
u_func.m: Συνάρτηση που υλοποιεί την $u = 10sin(3t) + 5N$ που αναφέρεται παραπάνω
least_square_method.m: Συνάρτηση που υλοποιεί την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων που δείξαμε στα προηγούμενα ερωτήματα
demo_script_problem1.m: Script που χρησμοποιεί όλες τις παραπάνω συναρτήσεις για την προσομοίση του προβλήματος και την παρουσίαση των αποτελεσμάτων του.

Αποτελέσματα Προσομοίωσης:

Το διάνυσμα θ_0^T που προκύπτει από την υλοποίηση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων είναι:

$$\theta_0^T = \begin{bmatrix} -1.9698 & -0.8500 & 0.1002 \end{bmatrix}$$

Επίσης προκύπτουν τα εξής:

$$k = 1.4982$$

$$m = 9.985$$

$$b = 0.3016$$

Καταλαβαίνει κανείς ότι τα αποτελέσματα της προσομοίωσης είναι αρκετά παρόμοια, σχεδόν ίσα με τα αρχικά πραγματικά δεδομένα.

MATLAB FIGURES

Παρακάτω παρουσιάζονται τρία γραφήματα για την πραγματική έξοδο του συστήματος, για την εκτίμηση της εξόδου του μοντέλου καθώς και για το σφάλμα όπως ορίστηκε παραπάνω.

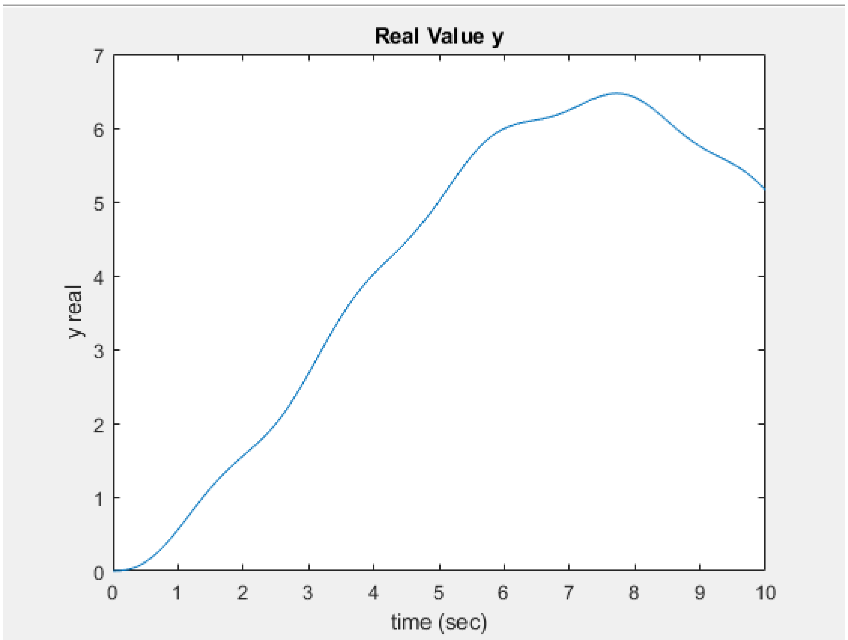


Figure 1.1: Πραγματική Έξοδος του Συστήματος

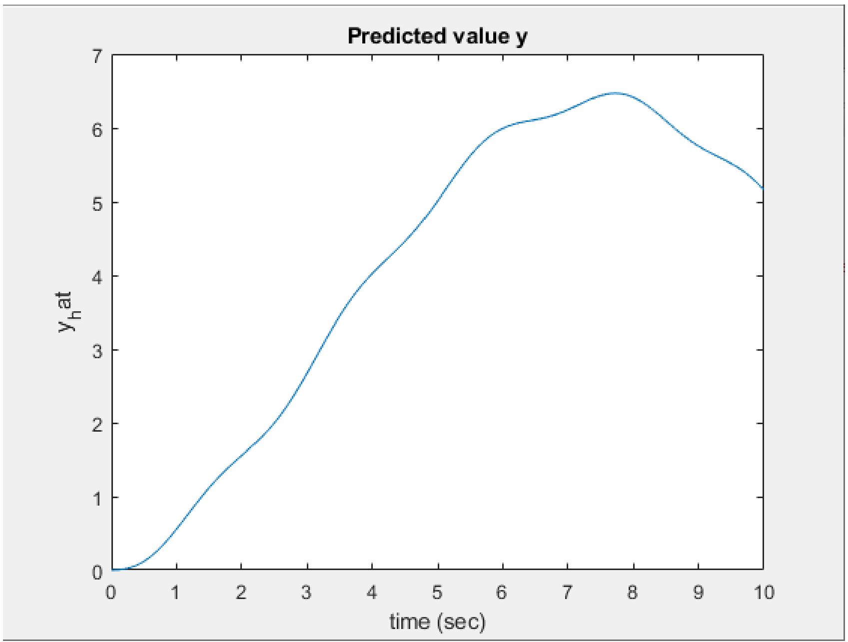


Figure 1.2: Εκτίμηση της Εξόδου του Μοντέλου

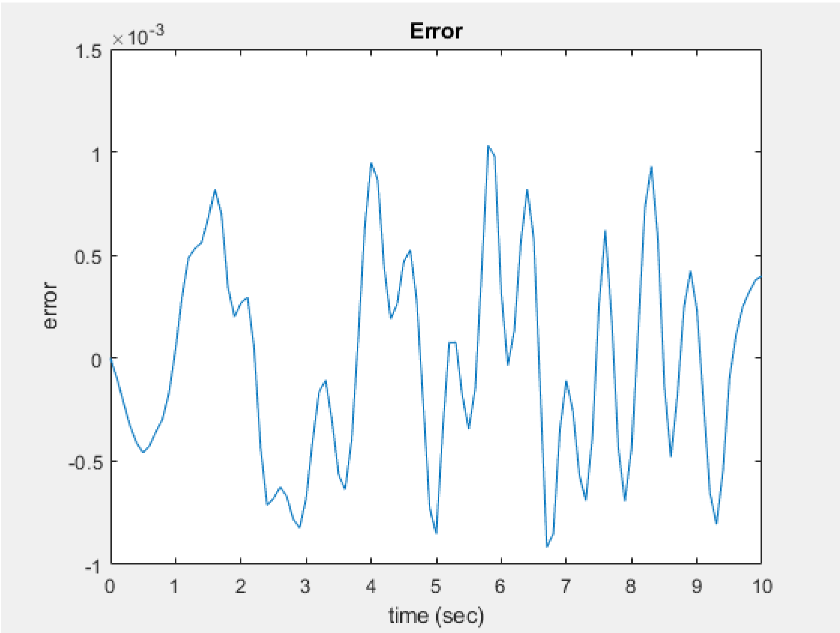


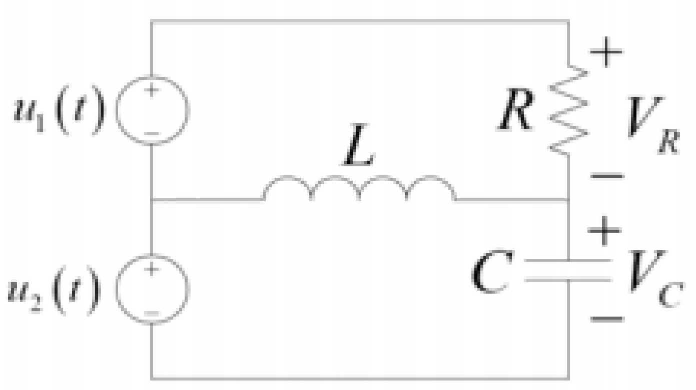
Figure 1.3: Σφάλμα

Από τα παραπάνω διαγράμματα βλέπουμε ότι η εκτίμηση της εξόδου από το μοντέλο είναι πολύ κοντά. Αυτό επιβεβαιώνεται και από το σφάλμα το οποίο είναι της τάξης του 10^{-3}.

Επομένως, εφόσον η απόκριση των πραγματικών τιμών από τις εκτιμήσεις είναι μικρή και το σφάλμα μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο συμπεραίνουμε ότι το θ_0 προσεγγίζει ικανοποιητικά το θ^*

2 Θέμα 2

Δίνεται το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος:



Όπου $u_1(t) = 3sin(2t)V$ και $u_2(t) = 2V$. Επιπλέον, μπορούμε να μετρήσουμε μόνο τις τάσεις V_R, V_C στα άκρα της αντίστασης και του πυκνωτή αντίστοιχα.

2.1 Πρώτο Ερώτημα

Είσοδοι κυκλώματος : u_1, u_2

Έξοδοι κυκλώματος: $y_1 = V_C$, $y_2 = V_R$

Από την μέθοδο των βρόχων ορίζονται δεξιόστροφα τα ρεύματα βρόγχων i_1, i_2 και από το παραπάνω κύκλωμα προκύπτουν τα εξής:

$$i_1 = \frac{V_R}{R} \tag{2.1}$$

$$i_2 = C\frac{dV_C}{dt} => i_2 = C\dot{V}_C \tag{2.2}$$

Εξίσωση του πάνω βρόγχου:

$$u_1 = V_R + V_L = V_R + \frac{d(i_1 - i_2)}{dt}L \tag{2.3}$$

Εξίσωση του κάτω βρόγχου:

$$u_2 = V_L + V_C = \frac{d(i_2 - i_1)}{dt}L + V_C \tag{2.4}$$

Αθροίζοντας τις σχέσεις (2.3), (2.4) κατά μέλη έχουμε:

$$u_1 + u_2 = V_R + V_C => V_R = u_1 + u_2 - V_C \tag{2.5}$$

Από (2.3) έχουμε:

$$u_1 = V_R + \frac{d(i_1 - i_2)}{dt}L = V_R + \frac{d}{dt}[\frac{V_R}{R} - C\frac{dV_C}{dt}]L = V_R + \frac{L}{R}\frac{dV_R}{dt} - CL\frac{d^2V_C}{dt^2} =$$

$$u_1 + u_2 - V_C + \frac{L}{R}\frac{d}{dt}[u_1 + u_2 - V_C] - CL\ddot{V}_C =>$$

$$u_1 = u_1 + u_2 - V_C + \frac{L}{R}\dot{u_1} + \frac{L}{R}\dot{u_2} - \frac{L}{R}\dot{V}_C - CL\ddot{V}_C =>$$

$$CL\ddot{V}_C + \frac{L}{R}\dot{V}_C + V_C = \frac{L}{R}\dot{u_1} + \frac{L}{R}\dot{u_2} + u_2 =>$$

$$\ddot{V}_C + \frac{1}{RC}\dot{V}_C + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{RC}\dot{u_1} + \frac{1}{RC}\dot{u_2} + \frac{1}{LC}u_2 => \tag{2.6}$$

$$\ddot{V}_C = -\frac{1}{RC}\dot{V}_C - \frac{1}{LC}V_C\frac{1}{RC}\dot{u_1} + \frac{1}{RC}\dot{u_2} + \frac{1}{LC}u_2 \tag{2.7}$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό **Laplace** με μηδενικές αρχικές συνθήκες στη σχέση **(2.6)** έχουμε:

$$V_C(s) = \frac{\frac{1}{RC}s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}U_1(s) + \frac{\frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}U_2(s) \tag{2.8}$$

Ομοίως εφαρμόζοντας μετασχηματισμό **Laplace** στην **(2.5)** προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$V_R(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}U_1(s) + \frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}U_2(s) \tag{2.9}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τις δύο παραπάνω σχέσεις για να υπολογίσουμε τον πίνακα μεταφοράς $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$:

$$\begin{bmatrix} V_C(s) \\ V_R(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{RC}s}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}} & \frac{\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}} \\ \frac{s^2+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}} & \frac{s^2}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{RC}s}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}} & \frac{\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}} \\ \frac{s^2+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}} & \frac{s^2}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}} \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας μεταφοράς έχει άγνωστα στοιχεία και θα τα εκτιμήσουμε με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Αρχικά, φέρνουμε το σύστημα στην μορφή $\ddot{y}_1 = {\theta^*}^T\Delta$.

Από την σχέση **(2.7)** προκύπτουν τα διανύσματα θ^* και Δ όπως παρακάτω:

$$\theta^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix}^T$$

$$\theta_1^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix}^T$$

$$\theta_2^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\theta_3^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix}^T$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} -\dot{V}_C & -V_C & \dot{u}_1 & u_1 & \dot{u}_2 & u_2 \end{bmatrix}$$

Ωστόσο, τα μοναδικά σήματα που μπορούμε να μετρήσουμε είναι μόνο οι είσοδοι u_1, u_2, ενώ επίσης η χρήση παραγώγισης είναι απαγορευτική. Άρα δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ούτε το $\ddot{y}$ ούτε το Δ.

Για αυτό το λόγο θα χρησιμοποιήσουμε πάλι φίλτρο το οποίο θα πρέπει να είναι ευσταθές, ώστε να μην χάνεται η βασική πληροφορία. Έτσι, θα χρησιμοποιήσουμε ένα φίλτρο $2^{ης}$ τάξης, $\frac{1}{\Lambda(s)}$. Έστω ότι $\Lambda(s) = (s+\rho)^2$ με $\lambda = \begin{bmatrix} 2\rho & \rho^2 \end{bmatrix}$. Για να επιλέξουμε το ρ χρειάζεται να κάνουμε δοκιμές για να βρούμε το κατάλληλο. Εξηγείται παρακάτω ο τρόπος πως βρέθηκε.

Φιλτράροντας τα δύο μέλη της σχέσης που σταματήσαμε βρίσκουμε το γραμμικά παραμετροποιημένο μοντέλο $\ddot{y}_1 = {\theta_\lambda}^T \zeta$ με θ_λ και ζ τα παρακάτω:

$$\theta_\lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} - 2\rho & \frac{1}{LC} - \rho^2 & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix}^T$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{s}{(s+\rho)^2} y_1 & -\frac{1}{(s+\rho)^2} y_1 & \frac{s}{(s+\rho)^2} u_1 & \frac{1}{(s+\rho)^2} u_1 & \frac{s}{(s+\rho)^2} u_2 & \frac{1}{(s+\rho)^2} u_2 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι τα φίλτρα είναι υλοποιήσιμα αφού ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος από αυτόν του αριθμητή. Επίσης, το σύστημα πλέον είναι γραμμικά παραμετροποιημένο, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε ΜΤ **Laplace** ώστε να υπολογίσουμε το θ_0 με το ελάχιστο σφάλμα.

Μετασχηματίζουμε με αντίστροφο **Laplace** το διάνυσμα ζ:

$$\varphi_1(t) = LT^{-1}[-\frac{s}{(s+\rho)^2} y_1]$$

$$\varphi_2(t) = LT^{-1}[-\frac{1}{(s+\rho)^2} y_1]$$

$$\varphi_3(t) = LT^{-1}[-\frac{1}{(s+\rho)^2} u_1]$$

$$\varphi_4(t) = LT^{-1}[-\frac{1}{(s+\rho)^2} u_1]$$

$$\varphi_5(t) = LT^{-1}[-\frac{1}{(s+\rho)^2} u_2]$$

$$\varphi_6(t) = LT^{-1}[-\frac{1}{(s+\rho)^2} u_2]$$

Ορίζουμε παρόμοια όπως και στο πρώτο θέμα τα διανύσματα Φ και Y_1 με N μετρήσεις εξόδου:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1) & \varphi_4(1) & \varphi_5(1) & \varphi_6(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \varphi_3(2) & \varphi_4(2) & \varphi_5(2) & \varphi_6(2) \\ & \vdots & & & \vdots & \\ \varphi_1(N) & \varphi_2(N) & \varphi_3(N) & \varphi_4(N) & \varphi_5(N) & \varphi_6(N) \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} Y(1) & Y(2) & \dots & Y(N) \end{bmatrix}$$

Για το σφάλμα έχουμε $e = Y_1 - \Phi\Theta$ και η συνάρτηση που είναι για ελαχιστοποίηση είναι $V_N = \frac{|Y_1 - \Phi\Theta|^2}{2}$

Για το ζητούμενο θ_0 ισχύει ότι:

$$\theta_0 = argmin_\theta \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \frac{|e^2|}{2}$$

Αποδεικνύεται ότι η V_N είναι κυρτή ως προς ϑ για κάθε t. Επομένως, αυτό σημαίνει ότι αν πάρουμε $\frac{dV_N}{d\theta} = 0$ θα βρούμε το μοναδικό ελάχιστο θ_0.

$$\frac{dV_N}{d\theta} = 0 => (\Upsilon_1 - \Phi\theta_0)^T(-\Phi) = 0 => -\Upsilon_1^T\Phi + \theta_0^T\Phi^T\Phi = \Upsilon_1^T\Phi$$

Αν το $\Phi^T\Phi$ είναι αντιστρέψιμο, το σύστημα θα έχει μοναδική λύση:

$$\theta_0^T = \Upsilon_1^T\Phi(\Phi^T\Phi)^{-1} =>$$

$$\theta_0^T = \begin{bmatrix} Y(1) & Y(2) & \dots & Y(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1) & \varphi_4(1) & \varphi_5(1) & \varphi_6(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \varphi_3(2) & \varphi_4(2) & \varphi_5(2) & \varphi_6(2) \\ & \vdots & & & \vdots & \\ \varphi_1(N) & \varphi_2(N) & \varphi_3(N) & \varphi_4(N) & \varphi_5(N) & \varphi_6(N) \end{bmatrix}$$

$$(\begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_1(2) & \dots & \varphi_1(N) \\ \varphi_2(1) & \varphi_2(2) & \dots & \varphi_2(N) \\ \varphi_3(1) & \varphi_3(2) & \dots & \varphi_3(N) \\ \varphi_4(1) & \varphi_4(2) & \dots & \varphi_4(N) \\ \varphi_5(1) & \varphi_5(2) & \dots & \varphi_5(N) \\ \varphi_6(1) & \varphi_6(2) & \dots & \varphi_3(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1) & \varphi_4(1) & \varphi_5(1) & \varphi_6(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \varphi_3(2) & \varphi_4(2) & \varphi_5(2) & \varphi_6(2) \\ & \vdots & & & \vdots & \\ \varphi_1(N) & \varphi_2(N) & \varphi_3(N) & \varphi_4(N) & \varphi_5(N) & \varphi_6(N) \end{bmatrix})^{-1}$$

Οι διαστάσεις του θ_0^T θα είναι (1 X 6).

MATLAB SIMULATION

Παρακάτω γίνεται μια σύντομη αναφορά στα αρχεία του κώδικα και στη συνέχεια σχολιάζονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης.

Αρχεία κώδικα:

get_real_v_signals.m: Συνάρτηση που υλοποιεί τις τις πραγματικές τιμές των τάσεων V_R,V_L με την βοήθεια του αρχείου που δίνεται στην εκφώνηση (V.p)
u1_func.m: Συνάρτηση που υλοποιεί την $u = 3sin(2t)V$ που αναφέρεται παραπάνω
u2_func.m: Συνάρτηση που υλοποιεί την $u = 2V$ που αναφέρεται παραπάνω
least_square_method.m: Συνάρτηση που υλοποιεί την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων όπως και στο πρώτο θέμα
demo_script_problem2.m: Script που χρησιμοποιεί όλες τις παραπάνω συναρτήσεις για την προσομοίση του προβλήματος και την παρουσίαση των αποτελεσμάτων του.

ΕΠΙΛΟΓΗ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ

Δεν γνωρίζουμε το χρόνο που πρέπει να χρησιμοποιηθεί ώστε η συχνότητα δειγματοληψίας να είναι η κατάλληλη για να αποφύγουμε την απώλεια πληροφορίας. Χρησιμοποιούμε το κριτήριο Nyquist και επομένως έχουμε:

$$f_s > 2f_T => T_s < \frac{1}{2f_T}$$

με f_T την συχνότητα ταλάντωσης.

Αν θεωρήσουμε ότι οι τιμές των στοιχείων του κυκλώματος είναι των τάξεων mH, μF και kΩ, προκύπτει η ακόλουθη σχέση για την συχνότητα ταλάντωσης από το κύκλωμα σειράς L, C που αποτελεί ο κάτω βρόγχος:

$$j\omega L = \frac{1}{j\omega C} => \omega^2 = \frac{1}{LC} => f_T = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10^{-6}10^{-3}}} = 5033Hz$$

Άρα:

$$T_s < \frac{1}{2f_T} => T_s < \frac{1}{2*5033} => T_s < 0.0001sec$$

Επομένως, προκύπτει ότι η περίοδος δειγματοληψίας θα είναι το πολύ 0.0001 sec. Ύστερα από πολλές δοκιμές καταλήγουμε στο παρακάτω φίλτρο:

$$\Lambda(s) = (s+100)^2 => \lambda = \begin{bmatrix} 200 & 10000 \end{bmatrix}$$

Άρα:

$$\theta_\lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} - 200 & \frac{1}{LC} - 10000 & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix}^T$$

Από την προσομοίωση έχουμε :

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} -190.015 & 9.99e^{+06} & 10.0004 & 1.59e^{-05} & -0.075 & 1e^{+07} \end{bmatrix}^T$$

Παρατηρούμε ότι η αρνητική τιμή οφείλεται στις πράξεις που έγιναν με τους συντελεστές του φίλτρου. Ο κοινός όρος $\frac{1}{RC}$ δεν είναι αρκετά κοντά στα δύο στοιχεία, ενώ ο μηδενικός όρος προσεγγίζεται πολύ καλά.

MATLAB FIGURES

Παρακάτω παρουσιάζονται έξι γραφήματα για τις πραγματικές εξόδους του συστήματος, για τις εκτιμήσεις των εξόδων του μοντέλου καθώς και για τα σφάλματα τα οποία ορίζονται όπως παραπάνω.

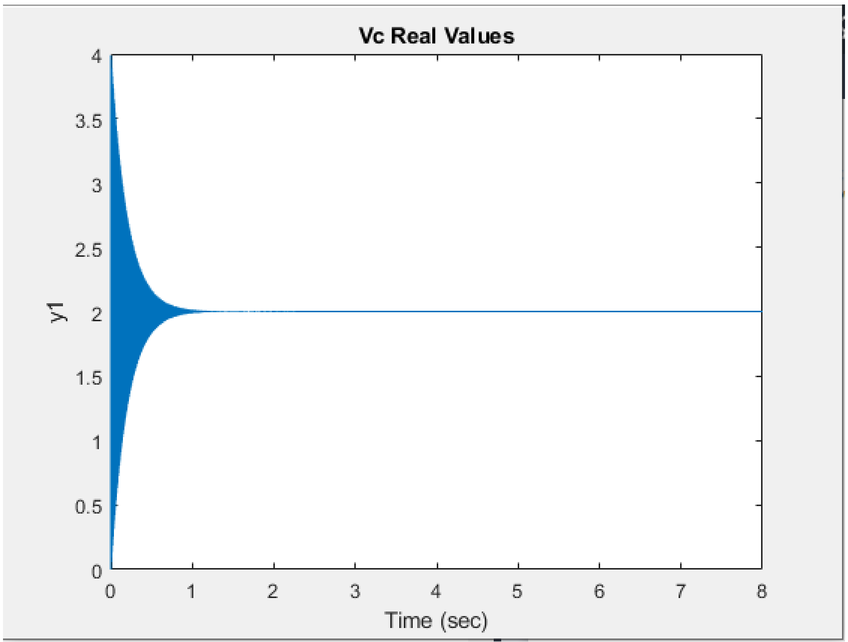


Figure 2.1: Πραγματική Έξοδος V_C του Συστήματος

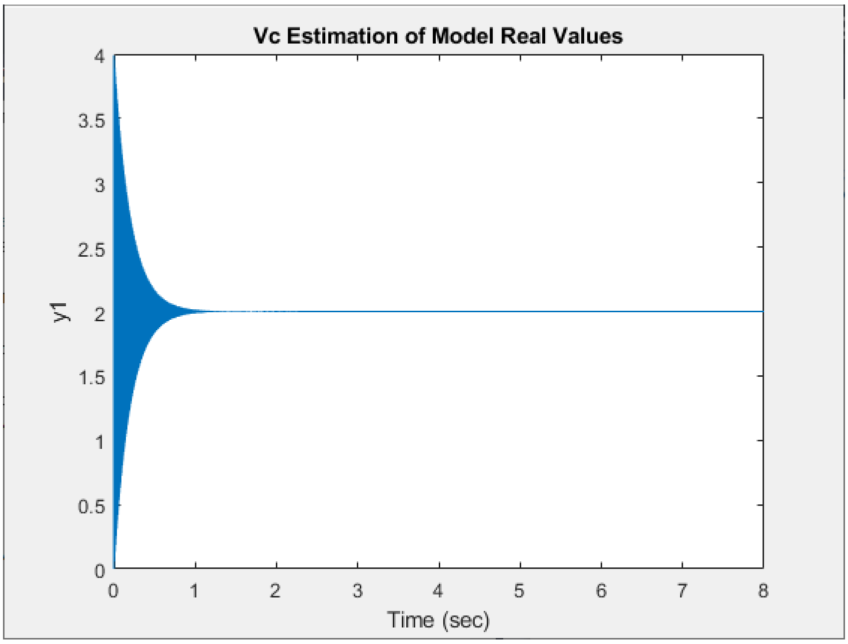


Figure 2.2: Εκτίμηση της Εξόδου V_C του Μοντέλου

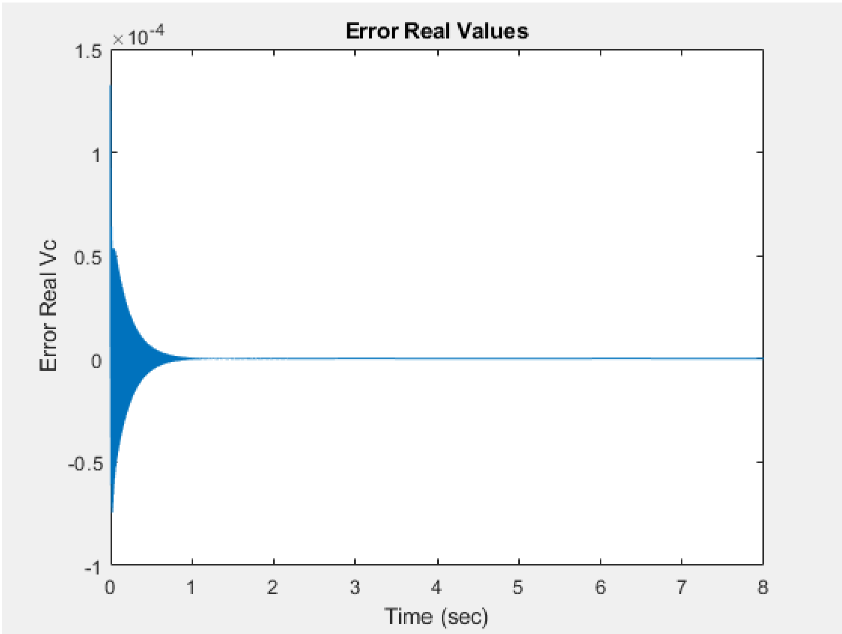


Figure 2.3: Σφάλμα V_C

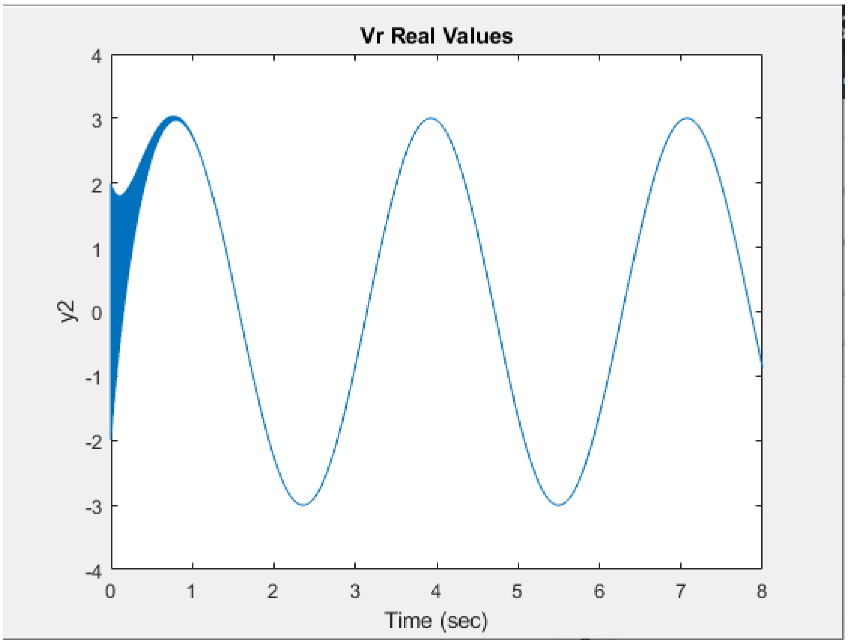


Figure 2.4: Πραγματική Έξοδος V_R του Συστήματος

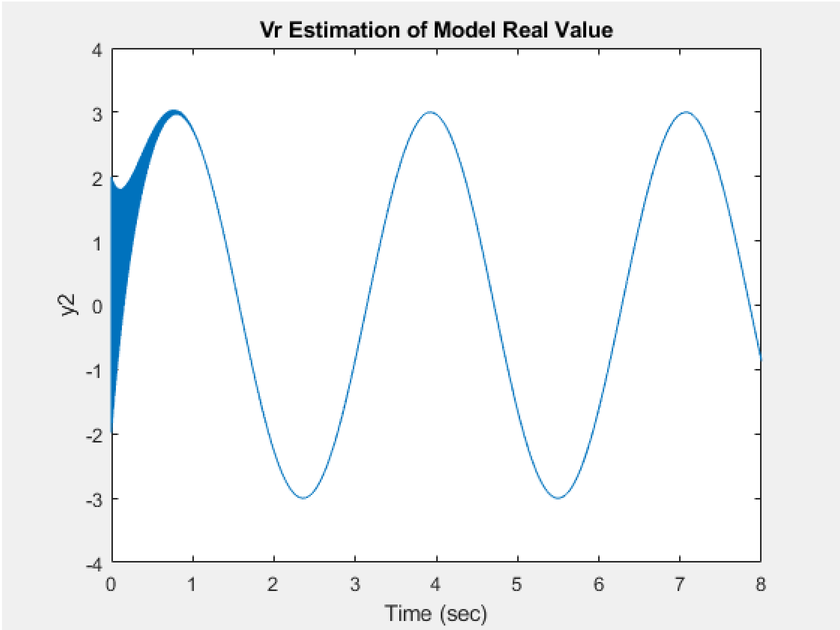


Figure 2.5: Εκτίμηση της Εξόδου V_R του Μοντέλου

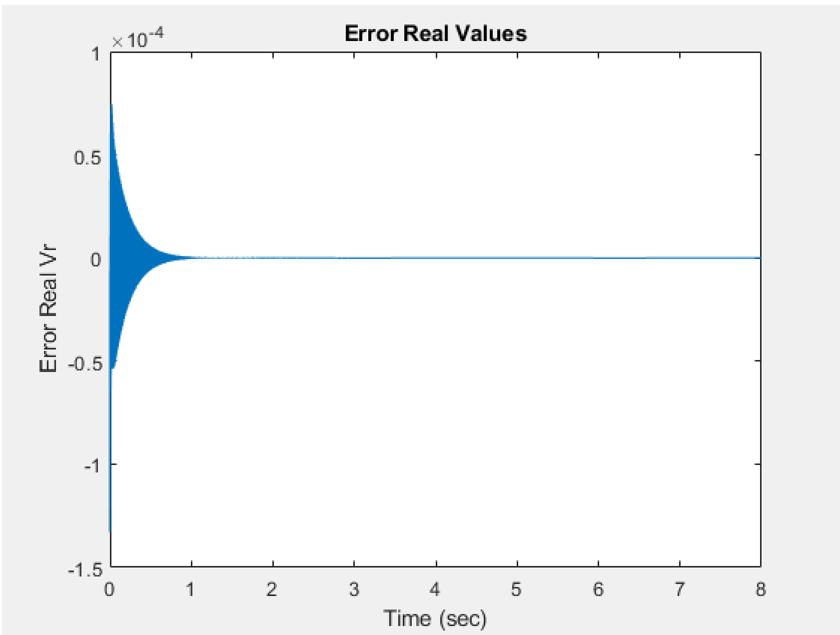


Figure 2.6: Σφάλμα V_R

Παρατηρούμε ότι η μορφή των δύο εισόδων - εξόδων εξαρτάται από τη μορφή των τάσεων οπότε βλέπουμε γραμμική τη V_C και ημιτονοειδή τη V_R. Οι εκτιμήσεις των εξόδων του μοντέλου ακολουθούν ικανοποιητικά τις πραγματικές εξόδους, πράγμα που το επιβεβαιώνουν και τα δύο σφάλματα που είναι της τάξης του 10^{-4}

Άρα έχουμε βρει ένα κατάλληλο θ_0 και το μοντέλο ικανοποιεί το σφάλμα εκτίμησης. Εξισώνοντας τους συντελεστές του θ_λ προκύπτει:

$$\frac{1}{RC} = 10, \frac{1}{LC} = 1 * 10^7$$

Άρα ο πίνακας μεταφοράς θα είναι:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{RC}s}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}} & \frac{\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}} \\ \frac{s^2+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}} & \frac{s^2}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10s}{s^2+10s+1*10^7} & \frac{10s+1*10^7}{s^2+10s+1*10^7} \\ \frac{s^2+1*10^7}{s^2+10s+1*10^7} & \frac{s^2}{s^2+10s+1*10^7} \end{bmatrix}$$

2.2 Δεύτερο Ερώτημα

MATLAB Προσομοίωση

Για αυτή την ερώτηση δημιουργήθηκε ένα επιπλέον αρχείο κώδικα, το **get_error_v_signals.m**, ενώ στο βασικό **script** έχουν συμπεριληφθεί και τα αποτελέσματα του ερωτήματος αυτού.

$$\theta_\lambda = \left[\frac{1}{RC} - 200 \quad \frac{1}{LC} - 10000 \quad \frac{1}{RC} \quad 0 \quad \frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC}\right]^T$$

Από την προσομοίωση έχουμε :

$$\theta_{0error} = \left[-7.04 \quad -809.22 \quad 3.4664 \quad -7.8399 \quad 212.978 \quad 1.2926e^{+04}\right]^T$$

Οι εκτιμήσεις δεν προσεγγίζουν τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων αφού παρατηρούμε ότι ο μηδενικός όρος δεν προσεγγίζεται ικανοποιητικά και τα δύο στοιχεία που αντιστοιχούν στον κοινό όρο $\frac{1}{RC}$ δεν έχουν αρκετά κοντινές τιμές .

MATLAB FIGURES

Παρακάτω παρουσιάζονται έξι γραφήματα για τις πραγματικές εξόδους του συστήματος, για τις εκτιμήσεις των εξόδων του μοντέλου καθώς και για τα σφάλματα τα οποία ορίζονται όπως παραπάνω όταν έχουμε λανθασμένες τυχαίες τιμές.

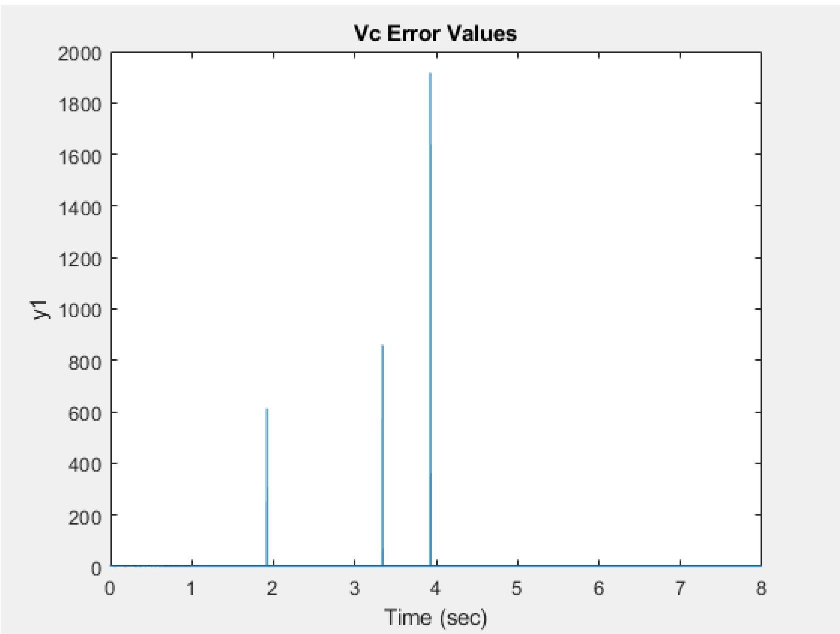


Figure 2.7: Εσφαλμένη Έξοδος V_C του Συστήματος

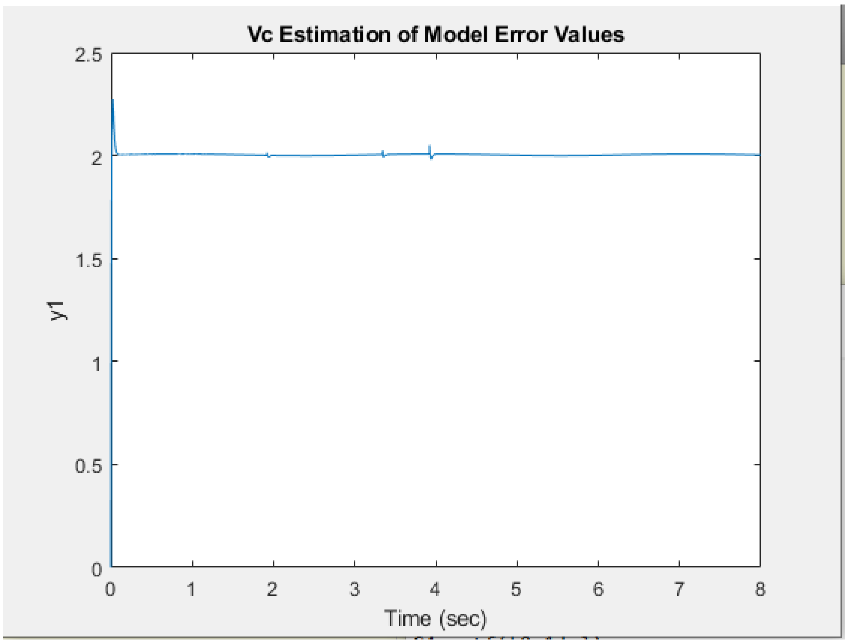


Figure 2.8: Εκτίμηση της Εσφαλμένης Εξόδου V_C του Μοντέλου

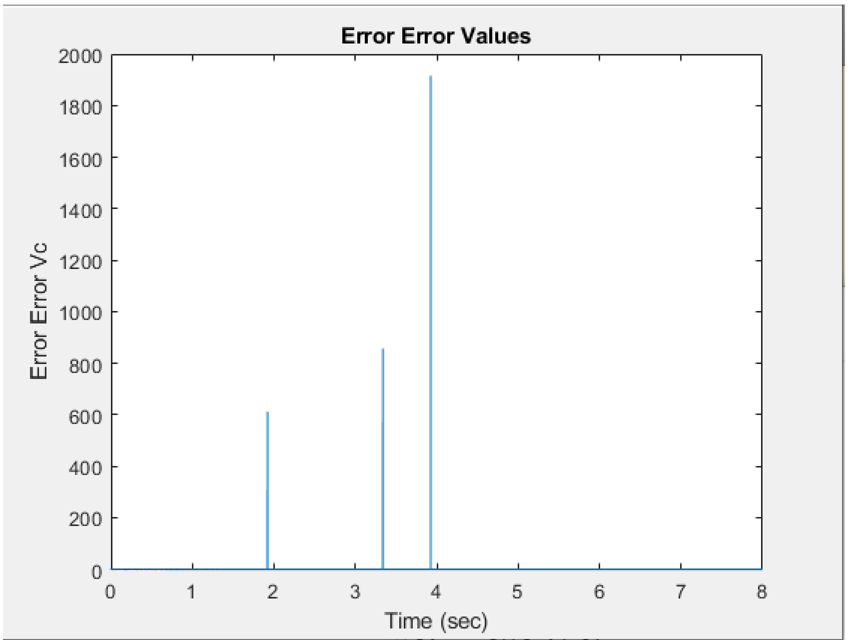


Figure 2.9: Σφάλμα V_C

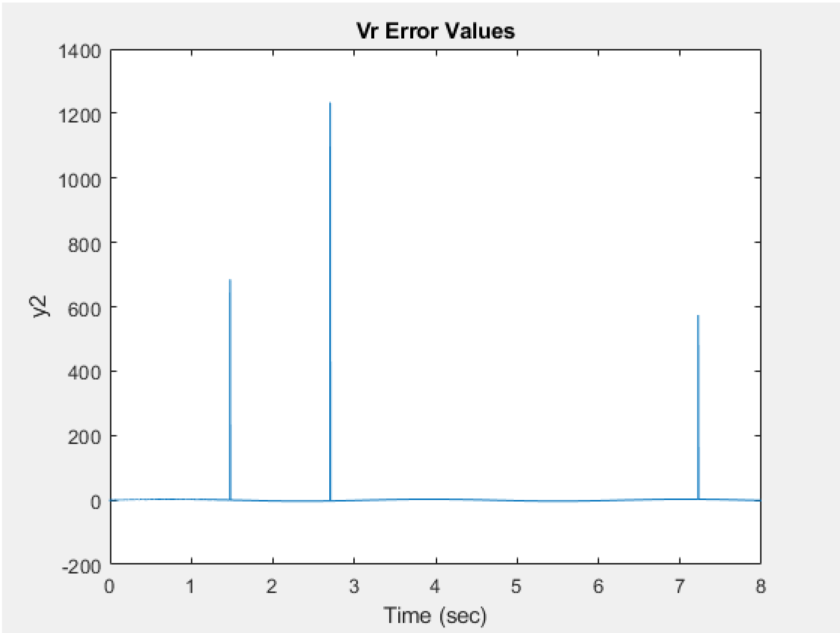


Figure 2.10: Εσφαλμένη Έξοδος V_R του Συστήματος

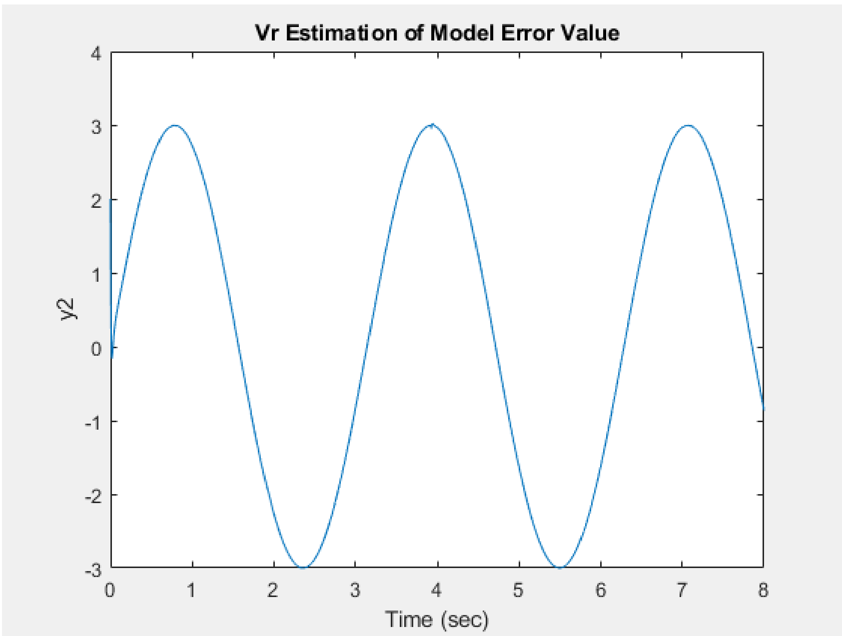


Figure 2.11: Εκτίμηση της Εσφαλμένης Εξόδου V_R του Μοντέλου

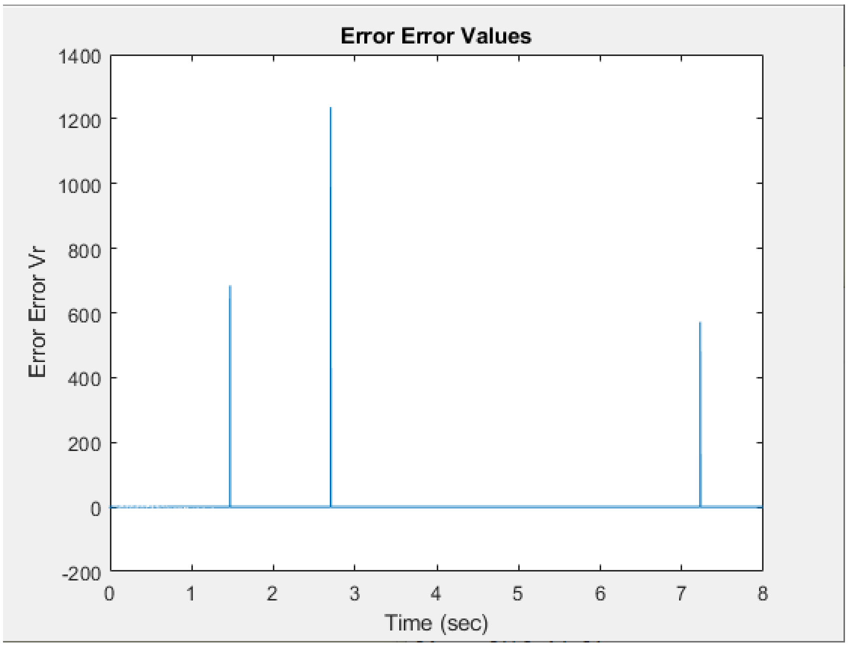


Figure 2.12: Σφάλμα V_R

Από τα διαγράμματα συμπεραίνουμε ότι η μορφή των **2** εξόδων- τάσεων διατηρείται με εξαίρεση τις τρεις τυχαίες χρονικές στιγμές. Η έξοδος V_C μοντέλου πριν αποτελούσε μια ευθεία γραμμή κοντά στο **2** , αποκλίνει πλέον λίγο. Στις τρεις τυχαίες χρονικές στιγμές αποκλίνει κατά πολύ . Η έξοδος V_R διατηρεί την ημιτονοειδή μορφή της .Το σφάλμα και στις δύο περιπτώσεις μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο , με εξαίρεση τις τρεις τυχαίες χρονικές στιγμές , στις οποίες είναι πολύ υψηλό λόγο της τάξης μεγέθους των τυχαίων τιμών.

List of Figures