



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Εργασία 2 : **On line** εκτίμηση άγνωστων παραμέτρων
Μέθοδος Κλίσης-Μέθοδος **Lyapunov**

Ονοματεπώνυμο: Λιόλιος Αναστάσιος

AEM: 9171

Ημερομηνία: 19 Απριλίου 2022

Email: lioliosaa@ece.auth.gr

Περιεχόμενα

1	Θέμα 1	1
1.1	Θεωρητική Ανάλυση	1
1.2	MATLAB SIMULATION Πρώτο Ερώτημα	3
1.3	MATLAB SIMULATION Δεύτερο Ερώτημα	6
2	Θέμα 2	11
2.1	Θεωρητική Ανάλυση	11
2.2	MATLAB SIMULATION	14
3	Θέμα 3	42
3.1	Θεωρητική Ανάλυση	42
3.2	MATLAB SIMULATION	45

1 Θέμα 1

1.1 Θεωρητική Ανάλυση

Σε αυτό το θέμα ζητείται ο σχεδιασμός ενός εκτιμητή πραγματικού χρόνου των άγνωστων παραμέτρων με βάση τη μέθοδο κλίσης και προσομοιώνεται η λειτουργία του.

Δίνεται το παρακάτω σύστημα:

$$\dot{x} = -\theta_1^* + \theta_2^* u \Rightarrow \dot{x} = -ax + bu, x(0) = 0$$

με x να είναι η κατάσταση του συστήματος και $a = 1.5$, $b = 2$ σταθερές παράμετροι που θέλουμε να εκτιμήσουμε **online**.

Αρχικά, πρέπει να ισχύει $a > 0$ για να εξασφαλιστεί ότι με φραγμένη είσοδο θα έχουμε φραγμένη έξοδο. Στην περίπτωση που $a < 0$ θα είχαμε αστάθεια για φραγμένη είσοδο.

Η μέθοδος κλίσης εφαρμόζεται σε συστήματα που είναι σε γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή. Το σύστημα έχει δοθεί σε μορφή εξισώσεων κατάστασης, επομένως πρέπει να το μετασχηματίσουμε στην κατάλληλη μορφή.

Έστω $a_m > 0$. Προσθέτοντας και αφαιρώντας τον συντελεστή αυτό από την δεξιά πλευρά της εξίσωσης έχουμε:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_m x - a_m x - ax + bu \Rightarrow \dot{x} + a_m x = (a_m - a)x + bu \Rightarrow (s + a_m)x = (a_m - a)x + bu \Rightarrow \\ x &= \frac{a_m - a}{s + a_m}x + \frac{b}{s + a_m}u \Rightarrow x = \begin{bmatrix} a_m - a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s + a_m}x \\ \frac{1}{s + a_m}u \end{bmatrix} \Rightarrow x = \theta^{*T} \Phi\end{aligned}$$

Το σύστημα μετασχηματίστηκε στην κατάλληλη μορφή, επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο κλίσης.

Έστω το σύστημα αναγνώρισης $\hat{x} = \hat{\theta}^T \Phi$ όπου \hat{x} η εκτίμηση της εξόδου x του πραγματικού συστήματος και $\hat{\theta}$ η εκτίμηση του θ^* . Το σφάλμα αναγνώρισης προκύπτει ως εξής:

$$e = x - \hat{x} = \theta^{*T} \Phi - \hat{\theta}^T \Phi = (\theta^{*T} - \hat{\theta}^T) \Phi$$

Η συνάρτηση που θέλουμε να ελαχιστοποιηθεί ορίζεται ως εξής:

$$K(\hat{\theta}) = \frac{e^2}{2} = \frac{(x - \hat{x})^2}{2} = \frac{(x - \hat{\theta}^T \Phi)^2}{2}$$

Η παραπάνω συνάρτηση είναι κυρτή για $t > 0$ και επομένως έχουμε:

$$\nabla K(\hat{\theta}) = 0$$

Άρα:

$$\nabla K(\hat{\theta}) = \frac{2(x - \hat{\theta}^T \Phi)(-\Phi)}{2} \Rightarrow \dots \Rightarrow \nabla K(\hat{\theta}) = (\hat{x} - x)\Phi \Rightarrow \nabla K(\hat{\theta}) = -e\Phi$$

Από μέθοδο κλίσης:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \nabla K(\hat{\theta}) = \gamma e\Phi$$

με $\gamma > 0$ και $\hat{\theta}(0) = \theta_0$. Άρα:

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma e \begin{bmatrix} \frac{1}{s+a_m} x \\ \frac{1}{s+a_m} u \end{bmatrix}$$

Τα δύο στοιχεία του πίνακα ορίζονται ως φ_1, φ_2 . Έχουμε αρχικές μηδενικές συνθήκες $\varphi_1(0) = 0, \varphi_2(0) = 0$ καθώς είναι συναρτήσεις μεταφοράς. Πραγματοποιώντας μετασχηματισμό Fourier προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\frac{1}{s+a_m} x = \varphi_1 \Rightarrow x = s\varphi_1 + a_m \varphi_1 \Rightarrow s\varphi_1 = -a_m \varphi_1 + x \Rightarrow \dot{\varphi}_1 = -a_m \varphi_1 + x, \varphi_1(0) = 0$$

$$\frac{1}{s+a_m} u = \varphi_2 \Rightarrow u = s\varphi_2 + a_m \varphi_2 \Rightarrow s\varphi_2 = -a_m \varphi_2 + u \Rightarrow \dot{\varphi}_2 = -a_m \varphi_2 + u, \varphi_2(0) = 0$$

Άρα οι εξισώσεις που υλοποιούνται είναι:

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma e \varphi_1$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma e \varphi_2$$

Τελικά, το σύστημα που προκύπτει είναι το παρακάτω:

$$\dot{x} = -ax + bu, x(0) = 0$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma e \varphi_1, \hat{\theta}_1(0) = \hat{\theta}_{10}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma e \varphi_2, \hat{\theta}_2(0) = \hat{\theta}_{20}$$

$$\dot{\varphi}_1 = -a_m \varphi_1 + x, \varphi_1(0) = 0$$

$$\dot{\varphi}_2 = -a_m \varphi_2 + u, \varphi_2(0) = 0$$

Η ευστάθεια του πραγματικού συστήματος με βάση την έννοια της φραγμένης εισόδου, φραγμένης εξόδου έχει εξασφαλιστεί αφού $a > 0$.

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση **Lyapunov** $V = \frac{\bar{\theta}^2}{2} \geq 0$ στο σύστημα αναγνώρισης, προκύπτει από τον αναδρομικό νόμο μεταβολής των παραμέτρων ότι για $u, \dot{u} \in L_\infty$ η εκτιμώμενη έξοδος \hat{x} θα συγκλίνει ασυμπτωματικά στην πραγματική έξοδο x , δηλαδή το σφάλμα e τείνει να γίνει μηδενικό. Ότι αναφορά τον ρυθμό μεταβολής των παραμέτρων $\dot{\hat{\theta}}$ εξασφαλίζεται ότι θα μειώνεται με τον χρόνο και θα συγκλίνει ασυμπτωματικά στο μηδέν.

Ωστόσο, από τα παραπάνω δεν εξασφαλίζεται το γεγονός ότι οι εκτιμήσεις θα πλησιάζουν ικανοποιητικά τις τιμές του πραγματικού συστήματος. Επιπλέον, θα πρέπει να ληφθεί υπόψιν για την είσοδο να ικανοποιεί την Συνθήκη Επιμέρους Διέργησης (ΣΕΔ).

1.2 MATLAB SIMULATION Πρώτο Ερώτημα

Στο πρώτο ερώτημα η εκφώνηση ζητάει την προσομοίωση της παραπάνω ανάλυσης για $u = 3$.

Αρχεία κώδικα:

dynamics_func.m: Συνάρτηση που υλοποιεί τις εξισώσεις κατάστασης του συστήματος.

u_func.m: Συνάρτηση που υλοποιεί την $u = 3$ που αναφέρεται παραπάνω.

demo_script_problem1.m: Script που χρησιμοποιεί όλες τις παραπάνω συναρτήσεις για την προσομοίωση του προβλήματος και την παρουσίαση των αποτελεσμάτων του.

Σχετικά με την προσομοίωση θα πρέπει να επιλέξουμε τιμές για το φίλτρο a_m και το κέρδος γ που χρησιμοποιήσαμε στην παραπάνω ανάλυση. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιείται η μέθοδος δοκιμής και επαλήθευσης για τον προσδιορισμό των τιμών. Επιλέγουμε μια διαφορετική τιμή του α για το a_m , καθώς η πιθανότητα είναι πολύ μικρή να επιλεγεί τυχαία το ίδιο και κάνουμε διάφορες δοκιμές για το γ . Οι τιμές στις οποίες καταλήγουμε είναι οι $a_m = 2, \gamma = 30$.

MATLAB FIGURES

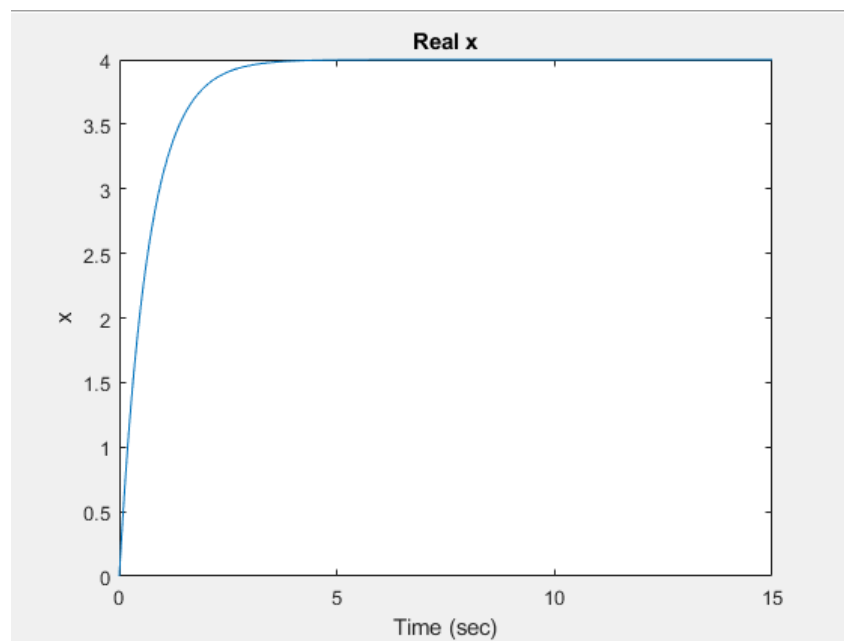


Figure 1.1: Πραγματική έξοδος x

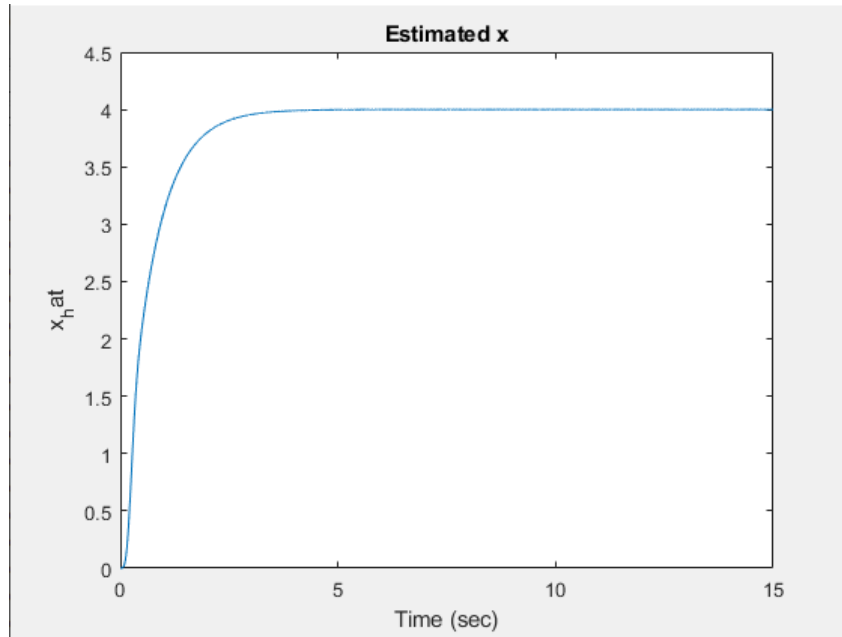


Figure 1.2: Εκτίμηση της εξόδου \hat{x}

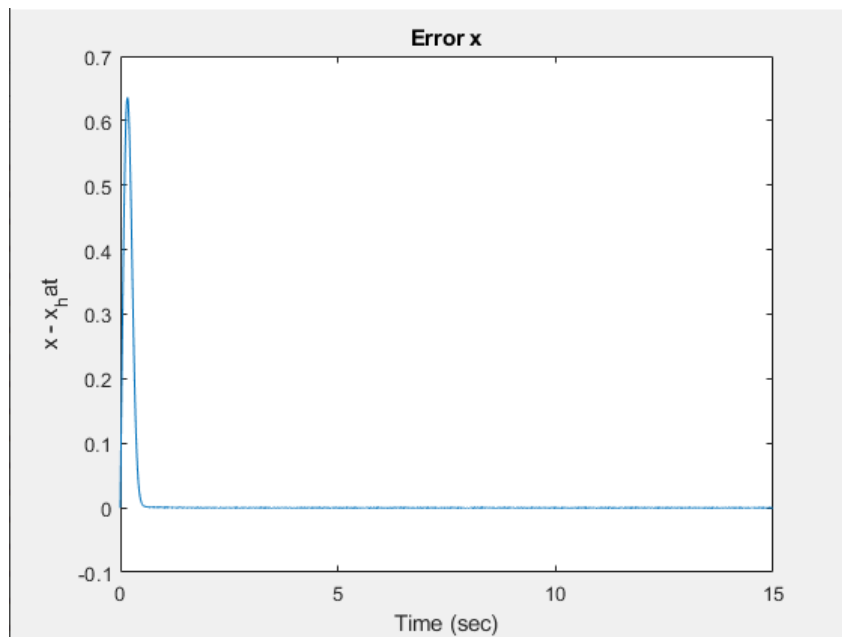


Figure 1.3: Σφάλμα

Παρατηρούμε γενικά για τις τιμές που επιλέχθηκαν ότι το σφάλμα συγκλίνει γρήγορα στο μηδέν και επομένως η εκτίμηση της εξόδου ακολουθεί ικανοποιητικά την πραγματική έξοδο.

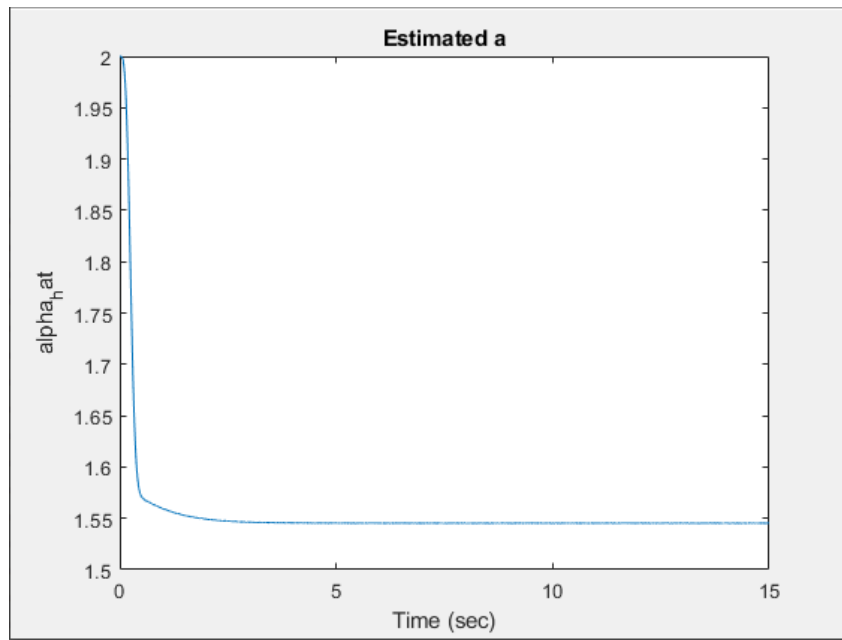


Figure 1.4: Εκτίμηση $\hat{\theta}_1$ της παραμέτρου **a**

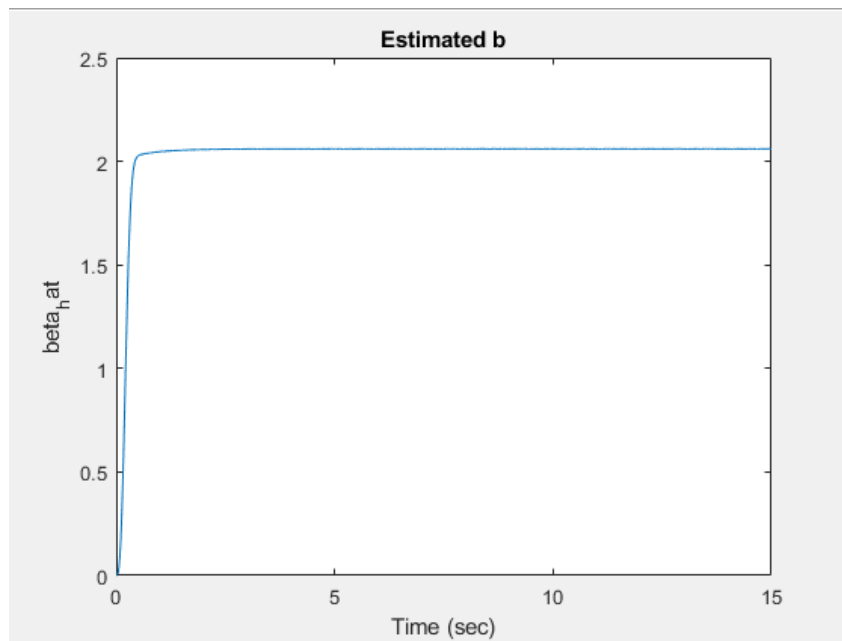


Figure 1.5: Εκτίμηση $\hat{\theta}_2$ της παραμέτρου **b**

Παρατηρείται από τα δύο παραπάνω γραφήματα ότι οι δύο εκτιμήσεις συγκλίνουν γρήγορα στις πραγματικές τιμές, ωστόσο δεν προσεγγίζουν ακριβώς τις πραγματικές τιμές του **a** και **b**, υπάρχει ένα σφάλμα της τάξης του 10^{-2} . Επίσης, στην διάρκεια των δοκιμών παρατήρηθηκε ότι όσο πιο μακριά επιλέγαμε το a_m από την πραγματική τιμή του **a** τόσο αυξανόταν το σφάλμα στις εκτιμήσεις των **a**, **b**. Όσο αναφορά το γ η μεταβολή του επηρέαζε το χρόνο σύγκλισης των τιμών.

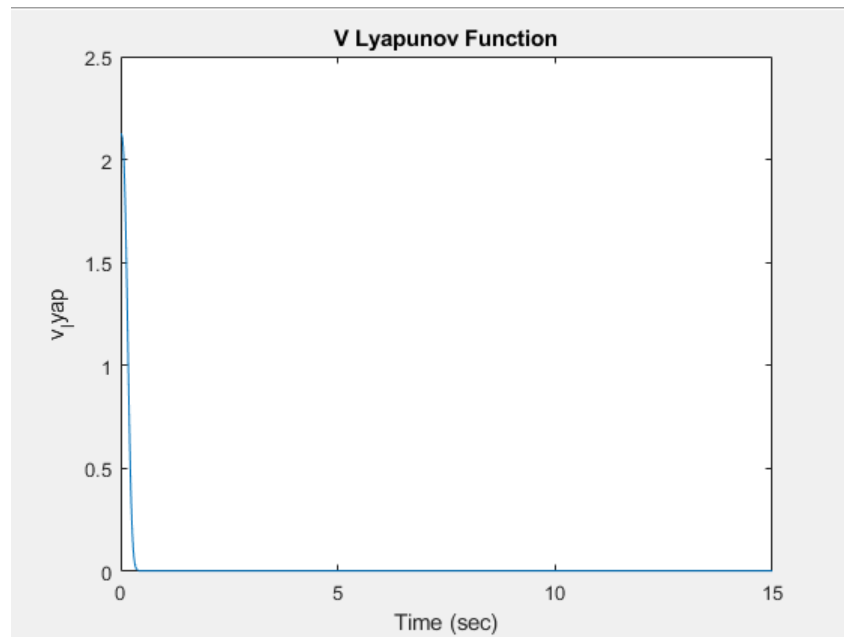


Figure 1.6: Lyapunov Function

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση **Lyapunov** μηδενίζεται και αυτή μετά από χρόνο t καθώς $\hat{\theta}_1 \rightarrow \theta_1^* \Rightarrow \tilde{\theta}_1 \rightarrow 0, \hat{\theta}_2 \rightarrow \theta_2^* \Rightarrow \tilde{\theta}_2 \rightarrow 0$. Επομένως, $e \rightarrow 0$ και άρα $\hat{\theta}(t) \rightarrow \theta^*$. Τέλος, τα σχόλια που έγιναν παραπάνω για τις εκτιμήσεις \mathbf{a}, \mathbf{b} ισχύουν και για τη συνάρτηση **Lyapunov**.

1.3 MATLAB SIMULATION Δεύτερο Ερώτημα

Στο δεύτερο ερώτημα η εκφώνηση ζητάει την προσομοίωση της παραπάνω ανάλυσης για $u = 3\cos(2t)$.

Σχετικά με τα αρχεία κώδικα δεν υπάρχει κάποια διαφορά με το πρώτο ερώτημα, απλά έχουν διαμορφωθεί κατάλληλα για το ερώτημα αυτό.

Οι τιμές στις οποίες καταλήξαμε για αυτό το ερώτημα είναι $a_m = 3, \gamma = 20$.

MATLAB FIGURES

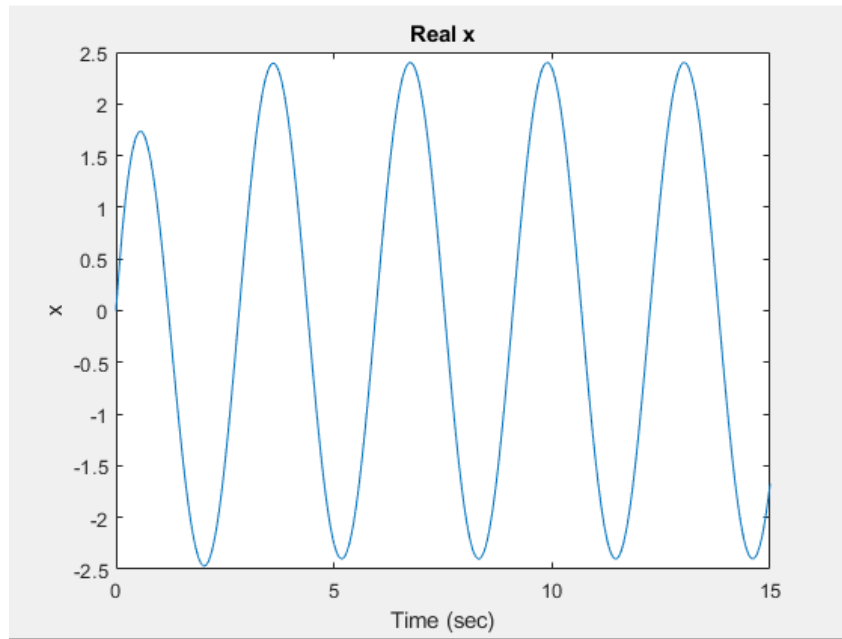


Figure 1.7: Πραγματική έξοδος x

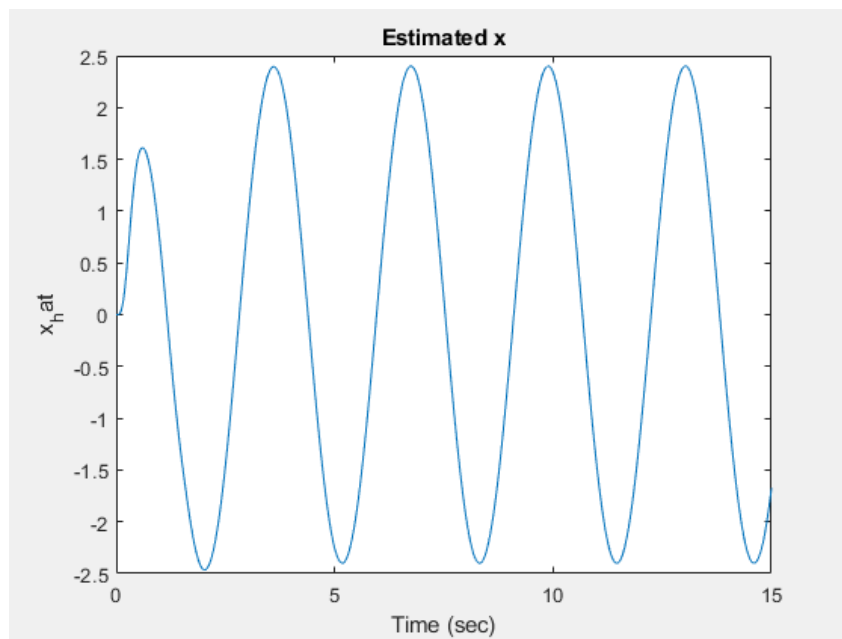


Figure 1.8: Εκτίμηση της εξόδου \hat{x}

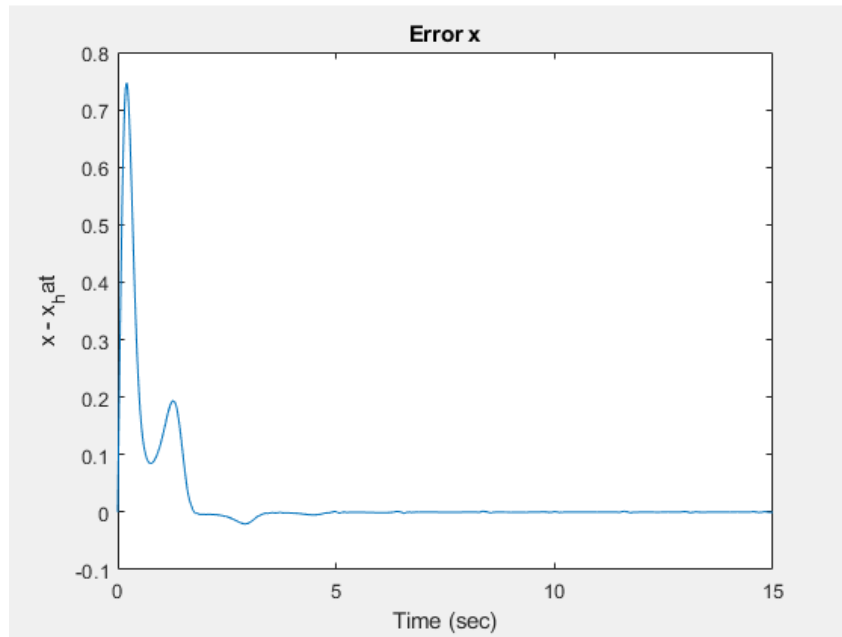


Figure 1.9: Σφάλμα

Παρατηρούμε γενικά για τις τιμές που επιλέχθηκαν ότι το σφάλμα συγκλίνει γρήγορα στο μηδέν και επομένως η εκτίμηση της εξόδου ακολουθεί ικανοποιητικά την πραγματική έξοδο.

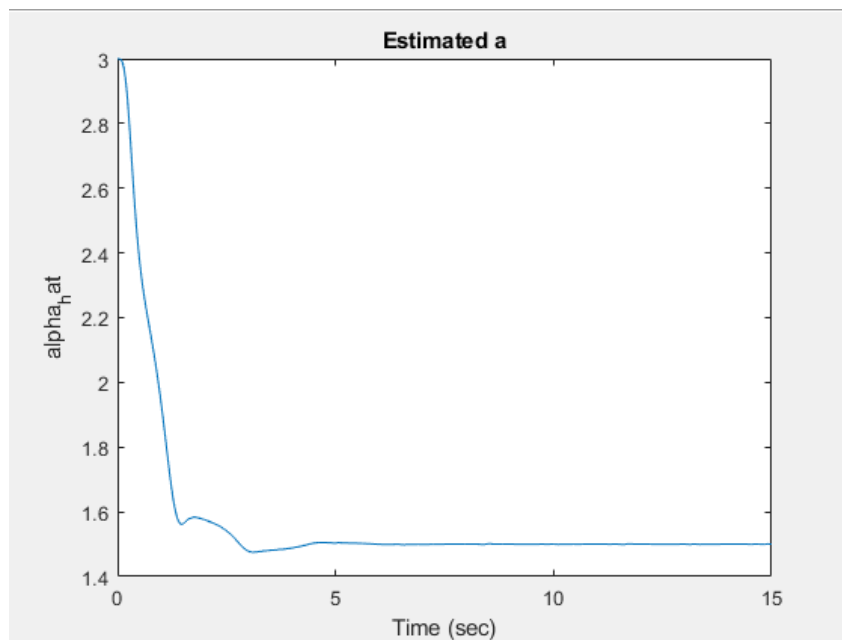


Figure 1.10: Εκτίμηση $\hat{\theta}_1$ της παραμέτρου a

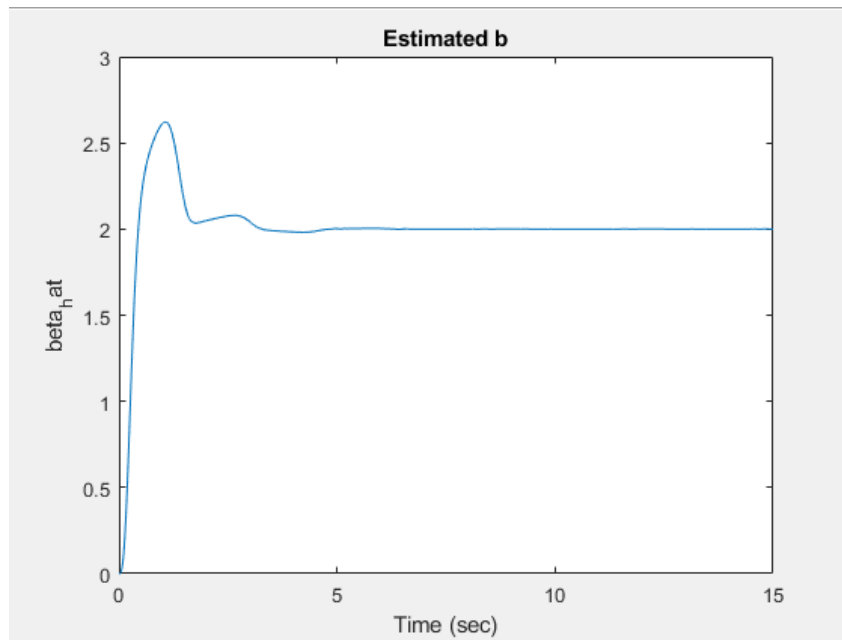


Figure 1.11: Εκτίμηση $\hat{\theta}_2$ της παραμέτρου b

Παρατηρείται από τα δύο παραπάνω γραφήματα ότι οι δύο εκτιμήσεις των a, b συγκλίνουν γρήγορα στις πραγματικές τιμές μετά από κάποιο χρονικό διάστημα.

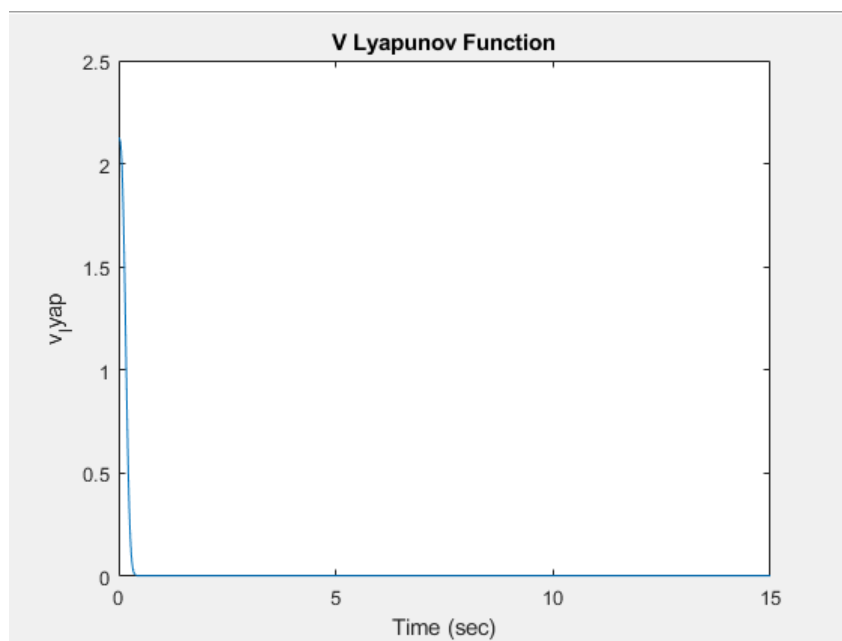


Figure 1.12: Lyapunov Function

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση **Lyapunov** μηδενίζεται και αυτή μετά από χρόνο t καθώς $\hat{\theta}_1 \rightarrow \theta_1^* \Rightarrow \tilde{\theta}_1 \rightarrow 0, \hat{\theta}_2 \rightarrow \theta_2^* \Rightarrow \tilde{\theta}_2 \rightarrow 0$. Επομένως, $e \rightarrow 0$ και άρα $\hat{\theta}(t) \rightarrow \theta^*$.

Σύγκριση των δύο περιπτώσεων:

Παρατηρούμε ότι έχουμε σχετικά καλά αποτελέσματα και στις δύο περιπτώσεις. Μια δι-
αφορά που παρατηρήθηκε είναι το γεγονός ότι αν πάρουμε αρκετά διαφορετικό a_m στην πρώτη
περίπτωση το σφάλμα των εκτιμήσεων αυξάνει και δεν συγκλίνουμε στις πραγματικές τιμές,
ενώ στη δεύτερη περίπτωση συγκλίνουμε στις πραγματικές τιμές έστω και με καθυστέρηση.
Τέλος, όσο αναφορά την τιμή του γ αυτό που παρατηρείται και στις δύο περιπτώσεις είναι ότι
η μεταβολή του αλλάζει τον χρόνο σύγκλισης.

2 Θέμα 2

Σε αυτή την άσκηση μας ζητείται να σχεδιάσουμε έναν εκτιμητή πραγματικού χρόνου των άγνωστων παραμέτρων παράλληλης και μικτής δομής βασισμένο στην μέθοδο **Lyapunov** και η προσομοίωση της λειτουργίας του.

Έστω το σύστημα:

$$\dot{x} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u \Rightarrow \dot{x} = -ax + bu, x(0) = 0$$

2.1 Θεωρητική Ανάλυση

ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΔΟΜΗ

Για το παραπάνω σύστημα χρησιμοποιούμε την δομή του πραγματικού συστήματος χωρίς επιπλέον σφάλματα. Έρα:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u \Rightarrow \dot{\hat{x}} = -\hat{a} \hat{x} + \hat{b} u, \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\theta_1^* = a, \theta_2^* = b, \hat{\theta}_1 = a, \hat{\theta}_2 = b$$

Για το σφάλμα αναγνώρισης ισχύει:

$$e = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

Έρα:

$$\dot{e} = -ax + bu + \hat{a}\hat{x} - \hat{b}u = -ax + \hat{a}\hat{x} - (\hat{b} - b)u$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας τον όρο $a\hat{x}$ έχουμε:

$$\dot{e} = -ax + \hat{a}\hat{x} + a\hat{x} - a\hat{x} - (\hat{b} - b)u = -a(x - \hat{x}) + (\hat{a} - a)\hat{x} - (\hat{b} - b)u$$

$$\dot{e} = -ae + \tilde{a}\hat{x} - \tilde{b}u$$

με τα παραμετρικά σφάλματα $\tilde{a} = \hat{a} - a, \tilde{b} = \hat{b} - b$

Επιλέγεται η υποψήφια συνάρτηση **Lyapunov** ως εξής:

$$V(e, \tilde{a}, \tilde{b}) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{a}^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{b}^2$$

με $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$

Παραγωγίζουμε και έχουμε:

$$\dot{V} = e\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{a}\dot{\tilde{a}} + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{b}\dot{\tilde{b}}$$

Με αντικατάσταση και πράξεις προκύπτει ότι:

$$\dot{V} = -ae^2 + \tilde{a}\hat{x}e - \tilde{b}eu + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{a}\dot{\hat{a}} + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{b}\dot{\hat{b}}$$

Θέλουμε να προκύψει αρνητική η παράγωγος οπότε επιλέγουμε:

$$\dot{\hat{a}} = -\gamma_1 e \hat{x}$$

$$\dot{\hat{b}} = \gamma_2 eu$$

Επομένως, έχουμε $\dot{V} = -ae^2 \leq 0$

Τελικά, το σύστημα που προκύπτει από την παράλληλη δομή είναι το παρακάτω:

$$\dot{x} = -ax + bu, x(0) = 0$$

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{a}\hat{x} + \hat{b}u, \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

$$\dot{\hat{a}} = -\gamma_1 e \hat{x} = -\gamma_1 (x - \hat{x})\hat{x}, \hat{a}(0) = \hat{a}_0$$

$$\dot{\hat{b}} = \gamma_2 eu = \gamma_2 (x - \hat{x})u, \hat{b}(0) = \hat{b}_0$$

Με παρουσία θορύβου το σύστημα γίνεται:

$$\dot{x} = -ax + bu, x(0) = 0$$

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{a}\hat{x} + \hat{b}u, \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

$$\dot{\hat{a}} = -\gamma_1 e \hat{x} = -\gamma_1 (x + \eta - \hat{x})\hat{x}, \hat{a}(0) = \hat{a}_0$$

$$\dot{\hat{b}} = \gamma_2 eu = \gamma_2 (x + \eta - \hat{x})u, \hat{b}(0) = \hat{b}_0$$

Από $\dot{V} = -ae^2 \leq 0$ γνωρίζουμε ότι τα ορίσματα της V είναι φραγμένα $e, \tilde{a}, \tilde{b} \in L_\infty$. Επίσης, ισχύει ότι u φραγμένη $u \in L_\infty$, όπως και x φραγμένο $x \in L_\infty$. Επομένως, $\hat{x}, \hat{a}, \hat{b} \in L_\infty$.

Άρα από τη σχέση $\dot{e} = -ae + \tilde{a}\hat{x} - \tilde{b}u$ και τα παραπάνω προκύπτει ότι και το σφάλμα είναι φραγμένο.

Ολοκληρώνοντας την $\dot{V} = -ae^2$:

$$\int_0^\infty e^2 dt = -\frac{1}{a} \int_0^\infty \dot{V} dt = -\frac{1}{a} [V_\infty - V(0)] \Rightarrow E(T) \in L_2$$

Επίσης, ισχύει ότι $\dot{V} \leq 0$ επομένως, $V \geq 0$ και φθίνουσα συνάρτηση.

Χρησιμοποιώντας το λήμμα Barbalat για το σφάλμα e , καθώς $e \in L_2 \cap L_\infty$ και $e \in L_\infty$ έχουμε ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$. Επίσης, προκύπτει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{a}}(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{b}} = 0$.

Με βάση τον αναδρομικό νόμο μεταβολής των παραμέτρων εξασφαλίζεται ότι για $u \in L_\infty$ η εκτιμώμενη έξοδος \hat{x} θα συγκλίνει ασυμπτωτικά στην πραγματική έξοδο x , άρα για το σφάλμα θα ισχύει ότι $e \rightarrow 0$. Τέλος, για τον ρυθμό μεταβολής των παραμέτρων $\dot{\hat{\theta}}$ εξασφαλίζεται ότι θα μειώνεται με τον χρόνο και θα συγκλίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.

Ωστόσο, από τα παραπάνω δεν εξασφαλίζεται το γεγονός ότι οι εκτιμήσεις θα πλησιάζουν ικανοποιητικά τις τιμές του πραγματικού συστήματος. Επιπλέον, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη για την είσοδο να ικανοποιεί την Συνθήκη Επιμέρους Διέργησης (ΣΕΔ).

ΜΙΚΤΗ ΔΟΜΗ

Έστω το σύστημα:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u + \theta_m(x - \hat{x}) \Rightarrow \dot{\hat{x}} = -\hat{a}x + \hat{b}u + \theta_m(x - \hat{x}), \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \theta_m > 0$$

Το πραγματικό σύστημα είναι : $\dot{x} = -ax + bu$. Προσθέτοντας και αφαιρώντας το θ_m καταλήγουμε στην γραμμική παραμετροποιημένη μορφή, όπως και στην μέθοδο κλίσης. Έστω λοιπόν ότι $\theta_m = a_m$.

Για το σφάλμα ισχύει:

$$e = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

$$\dot{e} = -ax + bu - [-\hat{a}x + \hat{b}u + \theta_m(x - \hat{x})] = \dots = (\hat{a} - a)x - (\hat{b} - b)u - \theta_m e \Rightarrow \dot{e} = \tilde{a}x - \tilde{b}u - \theta_m e$$

με τα παραμετρικά σφάλματα $\tilde{a} = \hat{a} - a, \tilde{b} = \hat{b} - b$

Επιλέγεται η υποψήφια συνάρτηση Lyapunov ως εξής:

$$V(e, \tilde{a}, \tilde{b}) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{a}^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{b}^2$$

με $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$

Παραγωγίζουμε και έχουμε:

$$\dot{V} = e\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{a}\dot{\tilde{a}} + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{b}\dot{\tilde{b}}$$

Με αντικατάσταση και πράξεις προκύπτει ότι:

$$\dot{V} = -\theta_m e^2 + \tilde{a}xe - \tilde{b}eu + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{a}\dot{\tilde{a}} + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{b}\dot{\tilde{b}}$$

Θέλουμε να προκύψει αρνητική η παράγωγος οπότε επιλέγουμε:

$$\dot{\tilde{a}} = -\gamma_1 ex$$

$$\dot{\tilde{b}} = \gamma_2 eu$$

Επομένως, έχουμε $\dot{V} = -\theta_m e^2 \leq 0$

Τελικά, το σύστημα που προκύπτει από την μικτή δομή είναι το παρακάτω:

$$\dot{x} = -ax + bu, x(0) = 0$$

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{a}x + \hat{b}u + \theta_m(x - \hat{x}), \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

$$\dot{\hat{a}} = -\gamma_1 e \hat{x} = -\gamma_1(x - \hat{x})x, \hat{a}(0) = \hat{a}_0$$

$$\dot{\hat{b}} = \gamma_2 e u = \gamma_2(x - \hat{x})u, \hat{b}(0) = \hat{b}_0$$

Με παρουσία θορύβου το σύστημα γίνεται:

$$\dot{x} = -ax + bu, x(0) = 0$$

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{a}(x + \eta) + \hat{b}u + \theta_m(x + \eta - \hat{x}), \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

$$\dot{\hat{a}} = -\gamma_1 e \hat{x} = -\gamma_1(x + \eta - \hat{x})(x + \eta), \hat{a}(0) = \hat{a}_0$$

$$\dot{\hat{b}} = \gamma_2 e u = \gamma_2(x + \eta - \hat{x})u, \hat{b}(0) = \hat{b}_0$$

Με όμοιο τρόπο όπως παραπάνω για την παράλληλη δομή καταλήγουμε στα ίδια και για την μικτή.

2.2 MATLAB SIMULATION

Για την προσομοίωση δημιουργήθηκαν οι παρακάτω συναρτήσεις:

Αρχεία κώδικα:

dynamics_par.m: Συνάρτηση που υλοποιεί τις εξισώσεις κατάστασης του συστήματος για την παράλληλη δομή με ή χωρίς θόρυβο.

dynamics_mix.m: Συνάρτηση που υλοποιεί τις εξισώσεις κατάστασης του συστήματος για την μικτή δομή με ή χωρίς θόρυβο.

u_func.m: Συνάρτηση που υλοποιεί την $u = 3\cos(2t)$ που αναφέρεται στην εκφώνηση.

noise_func.m: Συνάρτηση που υλοποιεί την $\eta(t) = \eta_0 \sin(2\pi f t)$ που αναφέρεται στην εκφώνηση.

demo_script_problem2.m: Script που χρησιμοποιεί όλες τις παραπάνω συναρτήσεις για την προσομοίωση του προβλήματος και την παρουσίαση των αποτελεσμάτων του.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΔΟΜΗ ΧΩΡΙΣ ΘΟΡΥΒΟ

Όπως και στο πρώτο θέμα, για την προσομοίωση πρέπει να επιλέξουμε με την μέθοδο δοκιμής και επαλήθευσης τις τιμές για τα κέρδη γ_1, γ_2 που χρησιμοποιήθηκαν στην θεωρητική ανάλυση. Έστω από τις δοκιμές καταλήγουμε στις τιμές $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 2$ όπου έχουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα.

MATLAB FIGURES

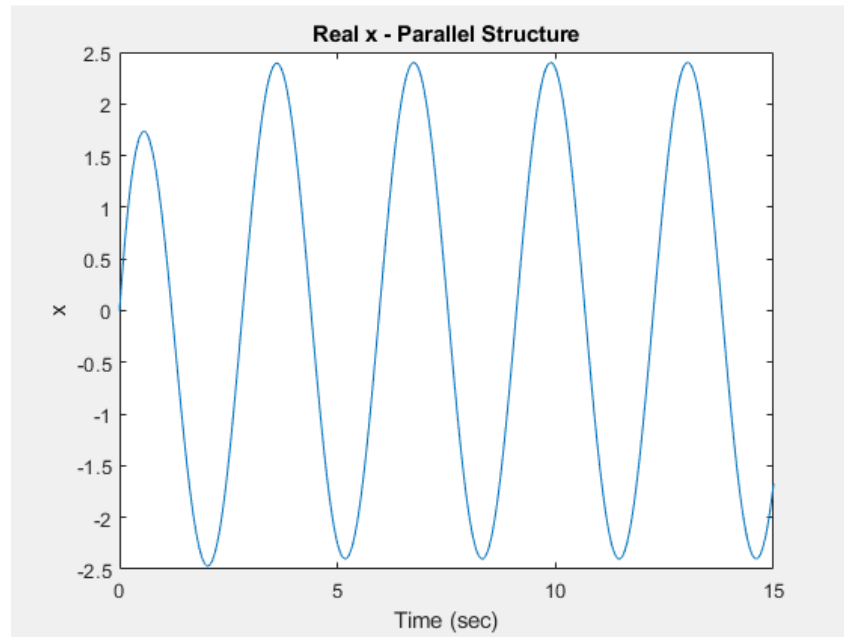


Figure 2.1: Πραγματική έξοδος x - Παράλληλη Δομή χωρίς θόρυβο

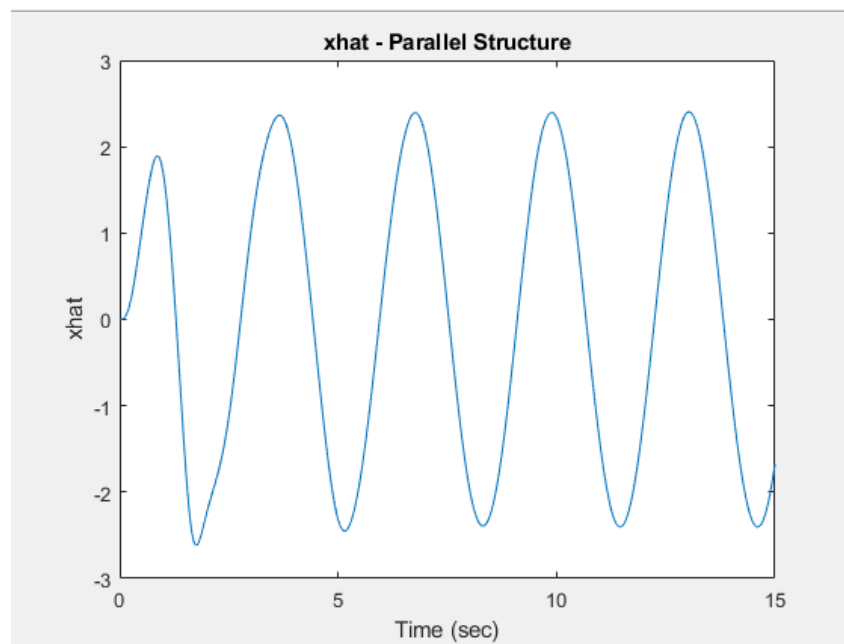


Figure 2.2: Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Παράλληλη Δομή χωρίς θόρυβο

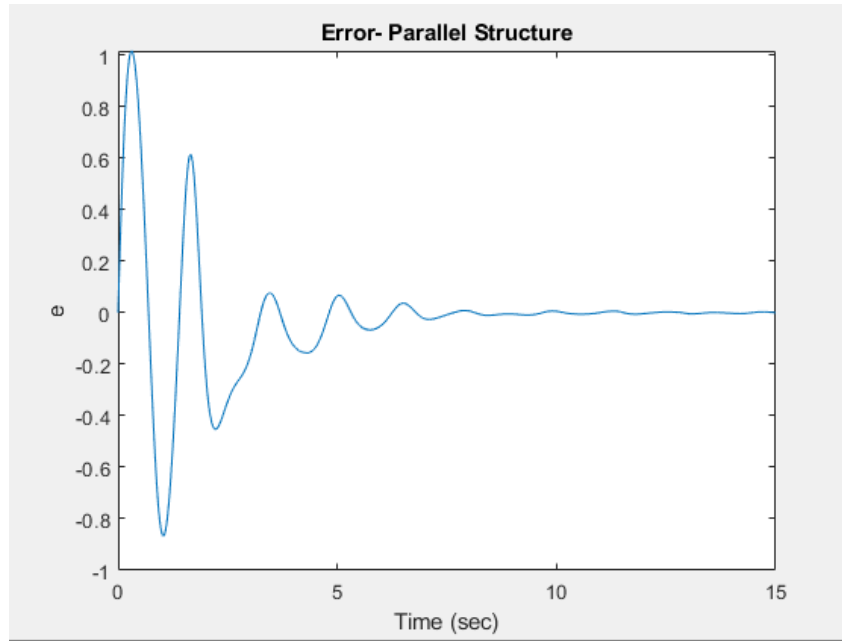


Figure 2.3: Σφάλμα - Παράλληλη Δομή χωρίς θόρυβο

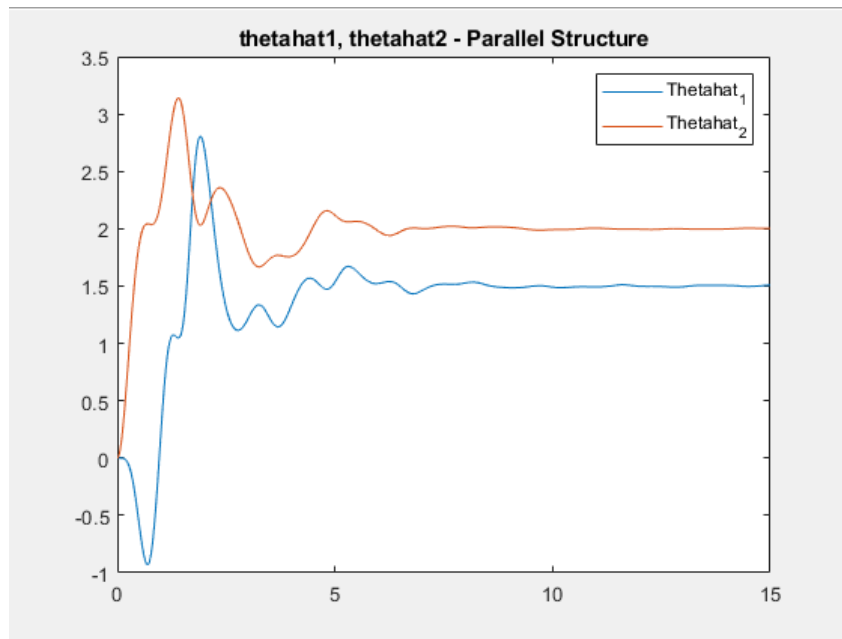


Figure 2.4: Εκτίμηση $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - Παράλληλη Δομή χωρίς θόρυβο

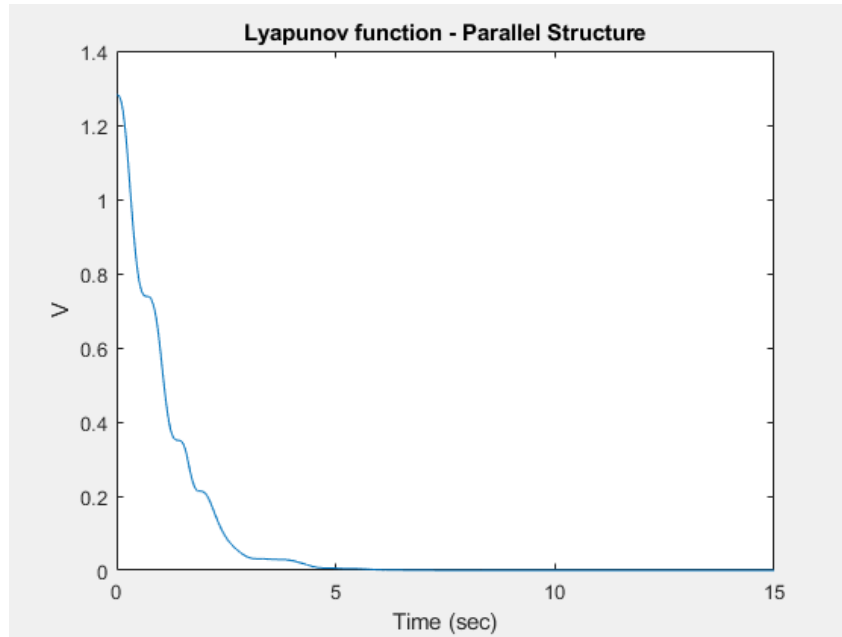


Figure 2.5: Lyapunov Function - Παράλληλη Δομή χωρίς θόρυβο

ΜΙΚΤΗ ΔΟΜΗ ΧΩΡΙΣ ΘΟΡΥΒΟ

Όπως και παραπάνω, για την προσομοίωση πρέπει να επιλέξουμε με την μέθοδο δοκιμής και επαλήθευσης τις τιμές για τα κέρδη $\gamma_1, \gamma_2, \theta_m$ που χρησιμοποιήθηκαν στην θεωρητική ανάλυση. Έστερα από τις δοκιμές καταλήγουμε στις τιμές $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 2, \theta_m = 5$ όπου έχουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα.

MATLAB FIGURES

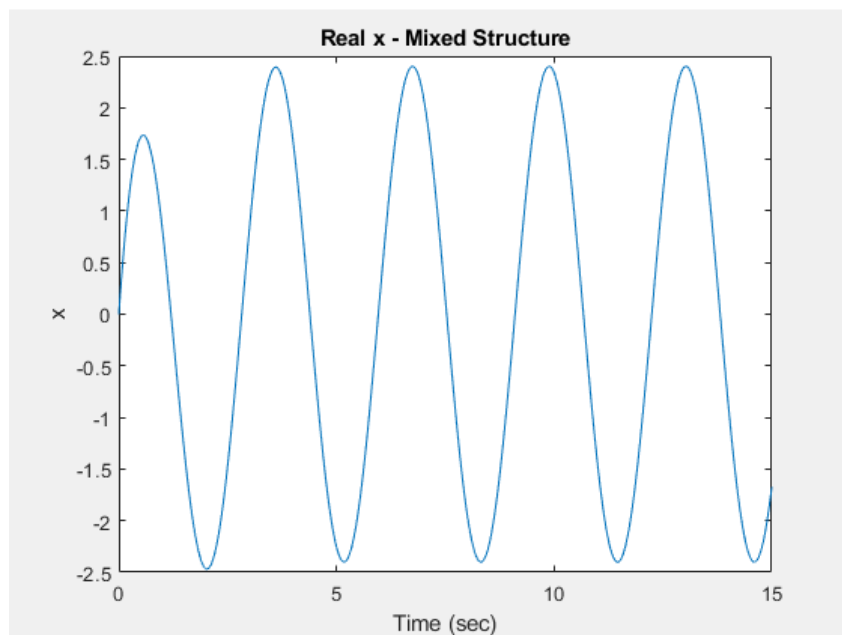


Figure 2.6: Πραγματική έξοδος x - Μικτή Δομή χωρίς θόρυβο

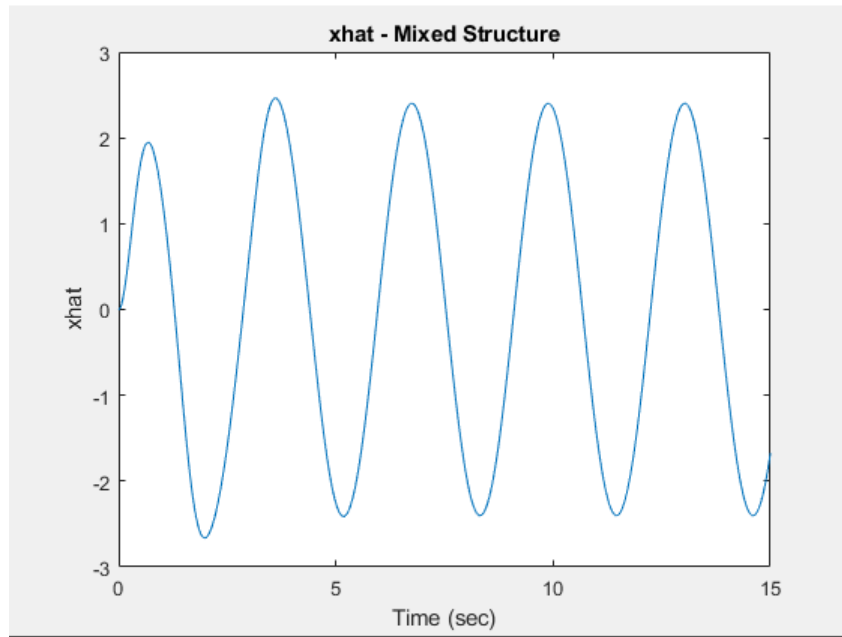


Figure 2.7: Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Μικτή Δομή χωρίς θόρυβο

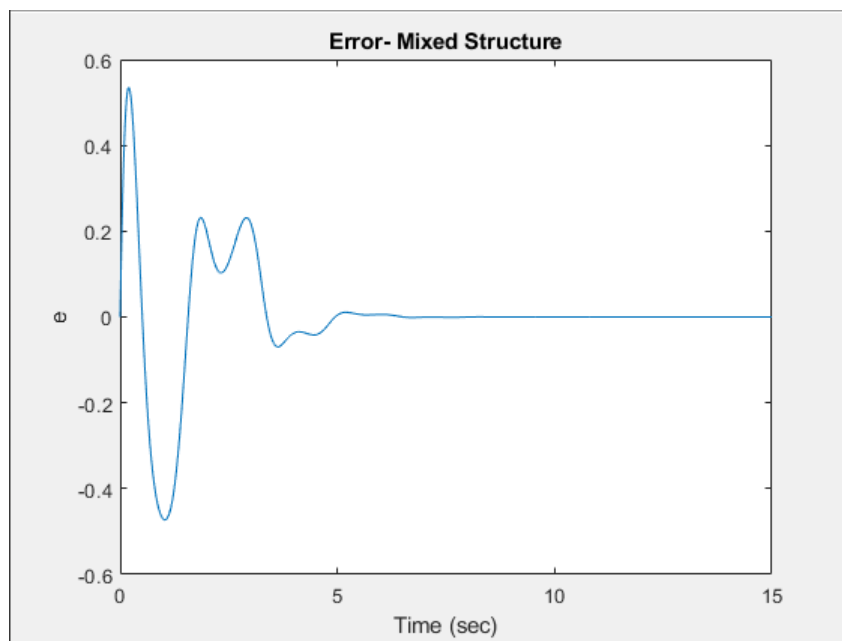


Figure 2.8: Σφάλμα - Μικτή Δομή χωρίς θόρυβο

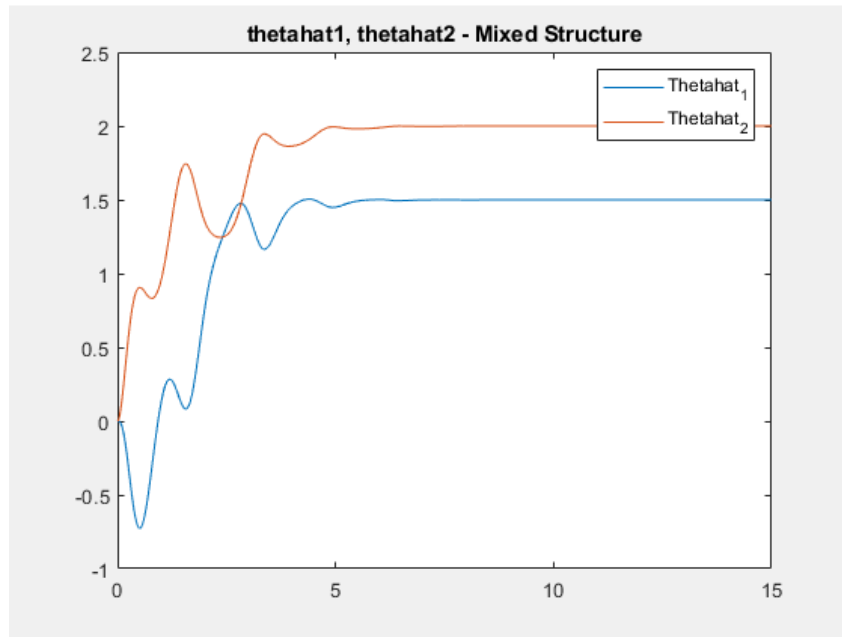


Figure 2.9: Εκτίμηση $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - Μικτή Δομή χωρίς θόρυβο

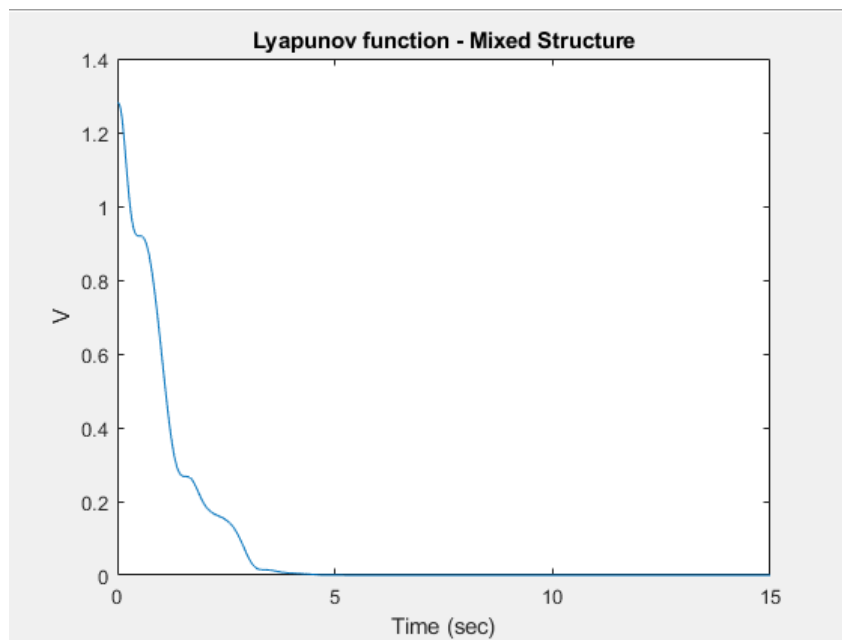


Figure 2.10: Lyapunov Function - Μικτή Δομή χωρίς θόρυβο

Παρατηρείται ότι και οι δύο δομές στην ιδανική περίπτωση χωρίς θόρυβο έχουν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Βλέπουμε ότι κάπου γύρω στα 5 δευτερόλεπτα το σφάλμα μηδενίζει, οι εκτιμήσεις συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές των παραμέτρων και η συνάρτηση **Lyapunov** συγκλίνει στο 0. Αν έπρεπε να διαλέξουμε μία από τις δύο δομές σε αυτή την περίπτωση θα επιλέγαμε την μικτή, καθώς φαίνεται να εμφανίζει καλύτερη συμπεριφορά με τις δεδομένες τιμές.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΔΟΜΗ ΜΕ ΘΟΡΥΒΟ

Για τιμές $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 2, \eta_0 = 0.25, f = 30$ έχουμε:

MATLAB FIGURES

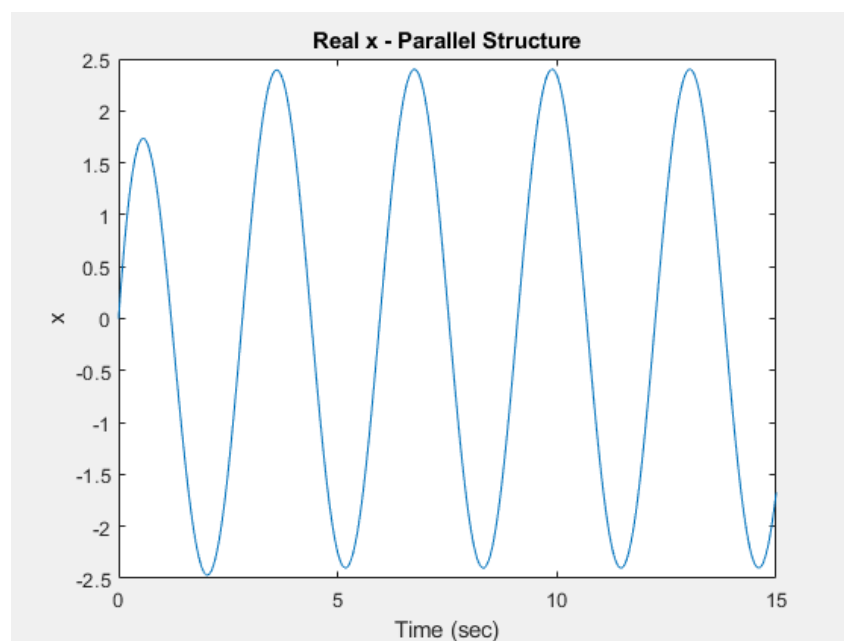


Figure 2.11: Πραγματική έξοδος x - Παράλληλη Δομή με θόρυβο

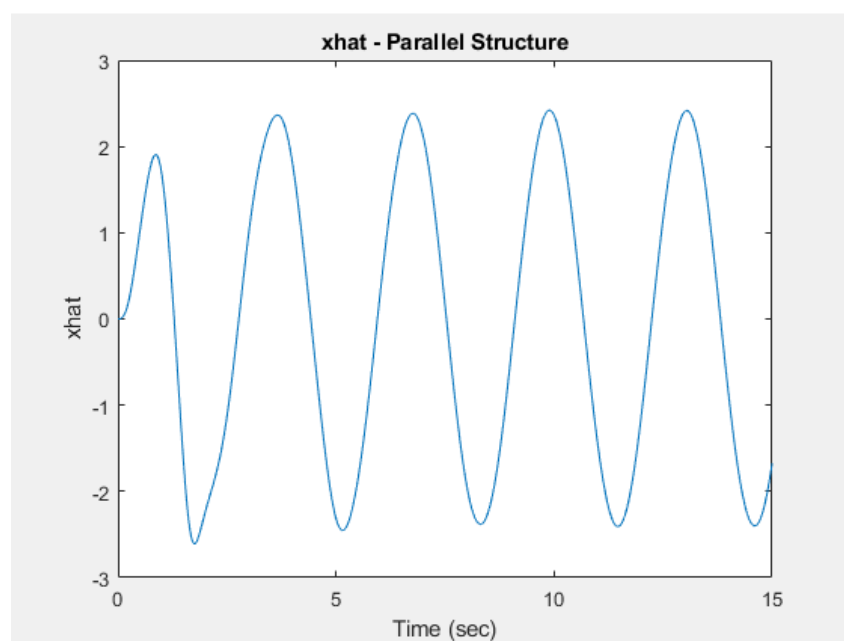


Figure 2.12: Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Παράλληλη Δομή με θόρυβο

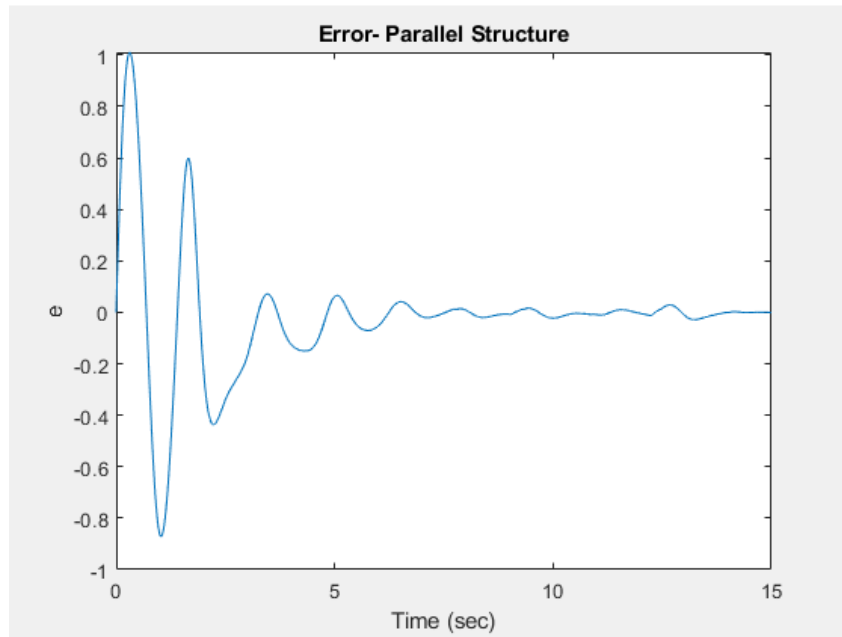


Figure 2.13: Σφάλμα - Παράλληλη Δομή με θόρυβο

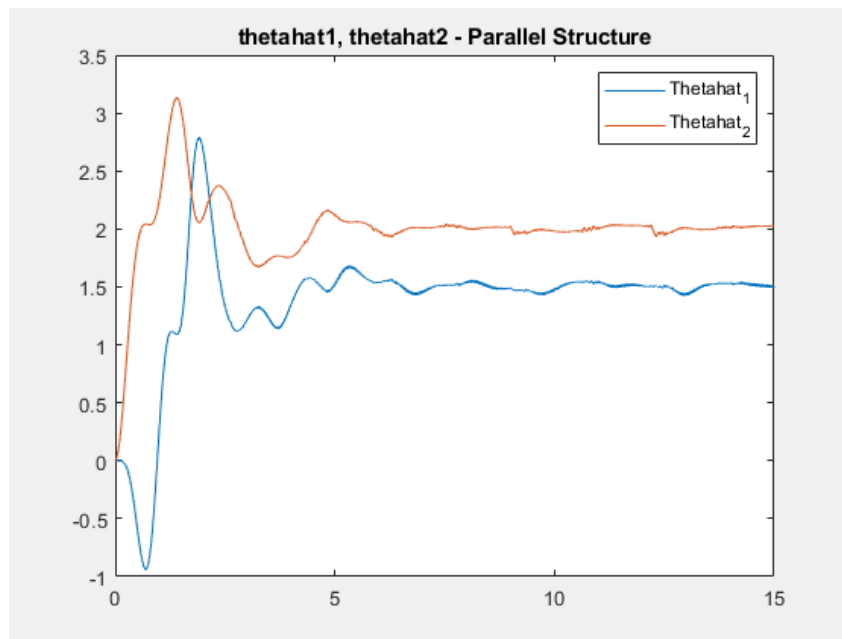


Figure 2.14: Εκτίμηση $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - Παράλληλη Δομή με θόρυβο

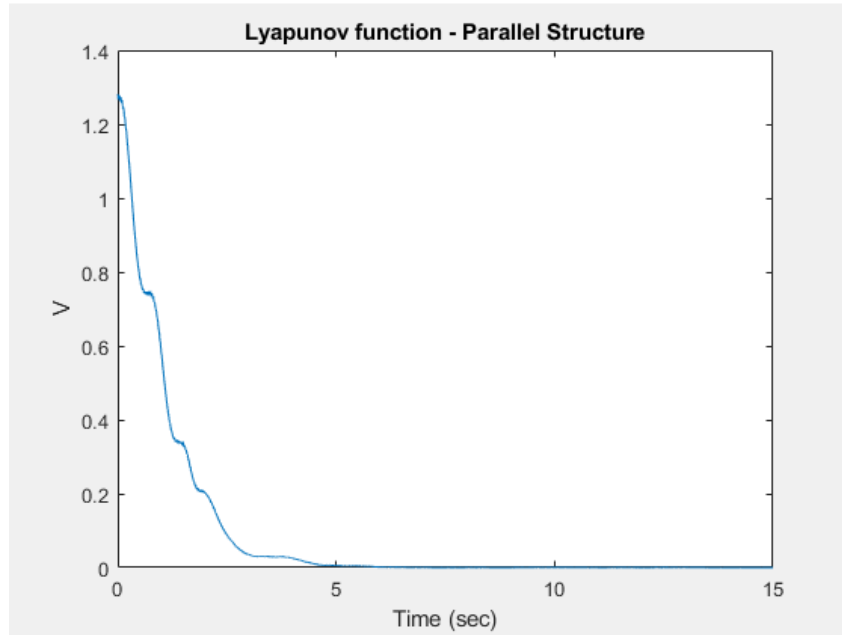


Figure 2.15: Lyapunov Function - Παράλληλη Δομή με θόρυβο

ΜΙΚΤΗ ΔΟΜΗ ΧΩΡΙΣ ΘΟΡΥΒΟ

Για τιμές $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 2, \eta_0 = 0.25, f = 30, \theta_m = 5$ έχουμε:

MATLAB FIGURES

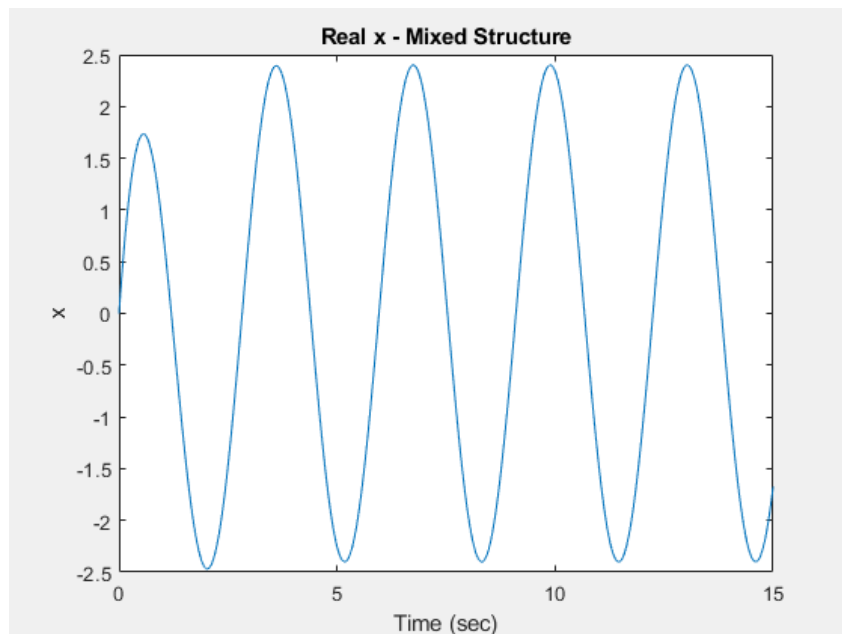


Figure 2.16: Πραγματική έξοδος x - Μικτή Δομή με θόρυβο

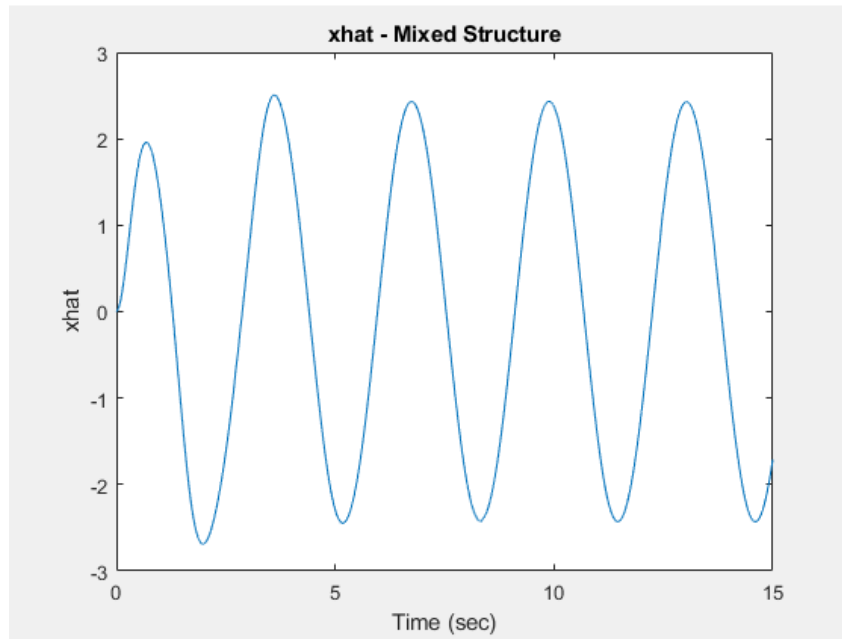


Figure 2.17: Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Μικτή Δομή με θόρυβο

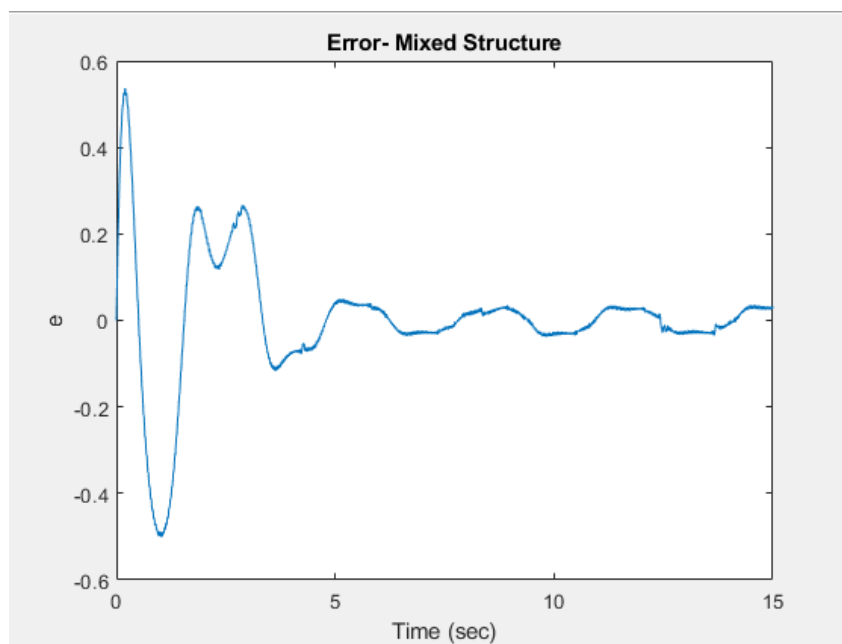


Figure 2.18: Σφάλμα - Μικτή Δομή με θόρυβο

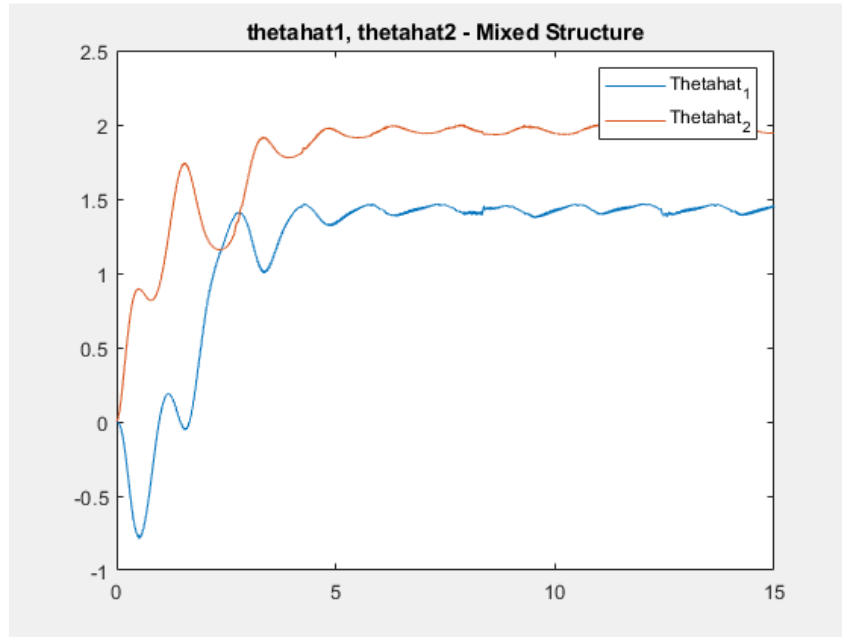


Figure 2.19: Εκτίμηση $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - Μικτή Δομή με θόρυβο

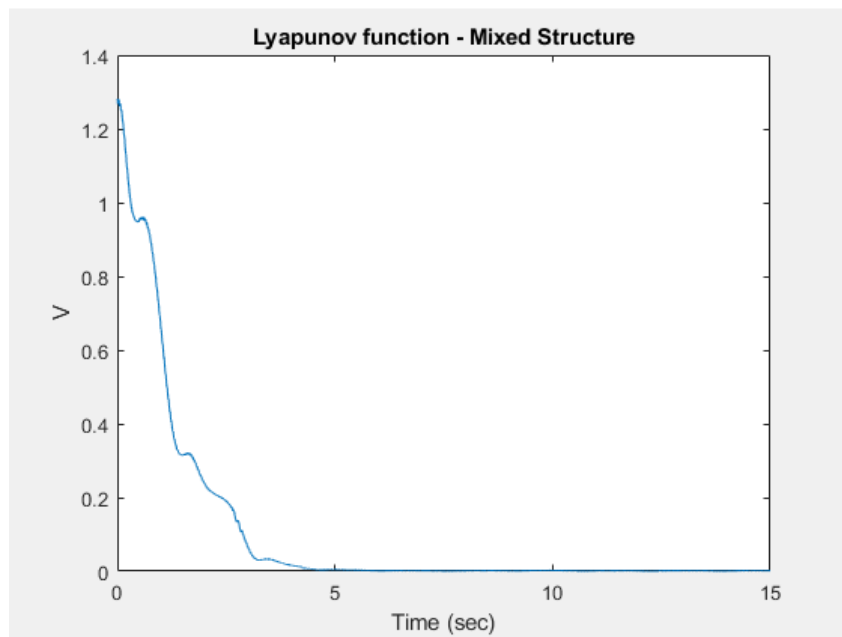


Figure 2.20: Lyapunov Function - Μικτή Δομή με θόρυβο

Παρατηρούμε ότι και στις δύο δομές με την εισαγωγή του θορύβου έχουμε κάποιο σφάλμα στις εκτιμήσεις. Ωστόσο, μπορούμε να πούμε ότι ανταποκρίνονται σχετικά καλά σε αυτό το δεδομένο πλάτος και στη δεδομένη συχνότητα. Τέλος, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η μικτή δομή επηρεάζεται πιο εύκολα με την εισαγωγή του θορύβου από ότι η παράλληλη, κάτι που το περιμένουμε άμα δούμε τις εξισώσεις του συστήματος από τις δύο δομές.

ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΘΟΡΥΒΟΥ ΑΤΞΗΣΗ ΠΛΑΤΟΥΣ ΘΟΡΥΒΟΥ Για να παρατηρήσουμε περαιτέρω την συμπεριφορά των δύο δομών με θόρυβο διπλασιάζουμε το πλάτος του θορύβου.

Για τιμές $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 2, \eta_0 = 0.5, f = 30$ έχουμε για την παράλληλη δομή:

MATLAB FIGURES

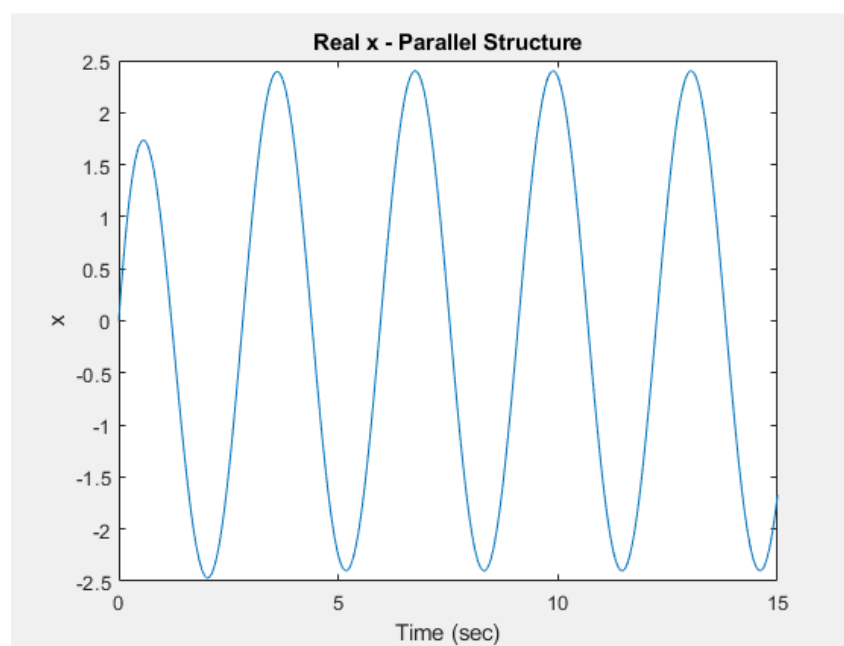


Figure 2.21: Πραγματική έξοδος x - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους

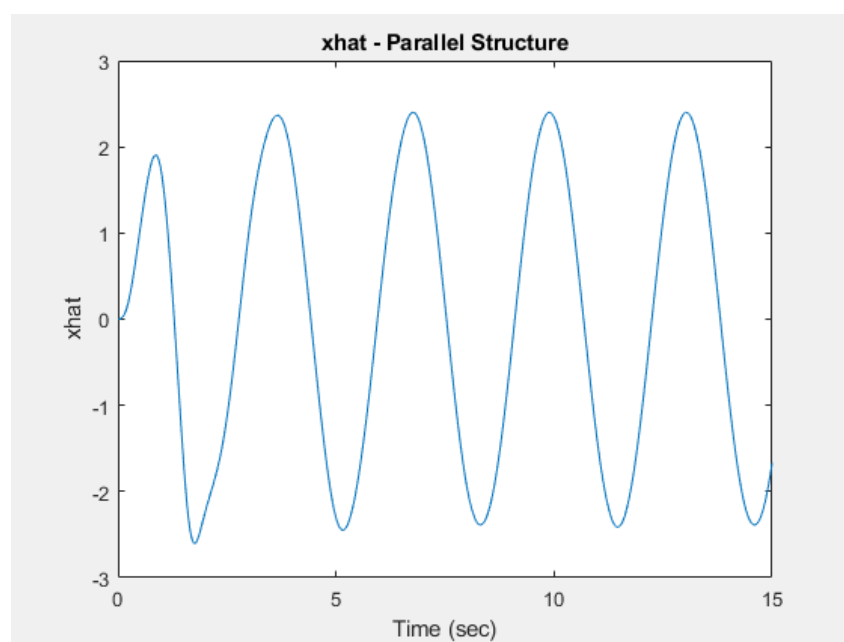


Figure 2.22: Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους

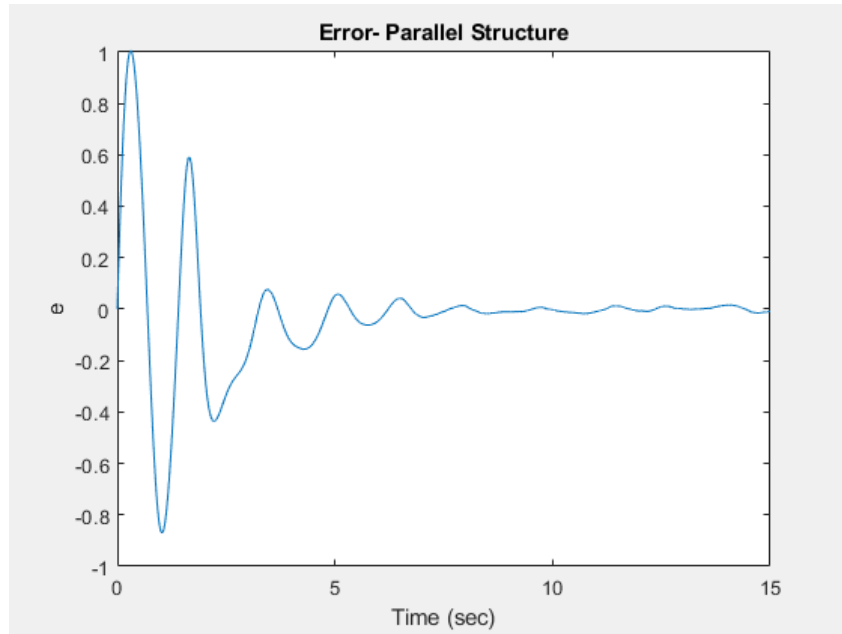


Figure 2.23: Σφάλμα - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους

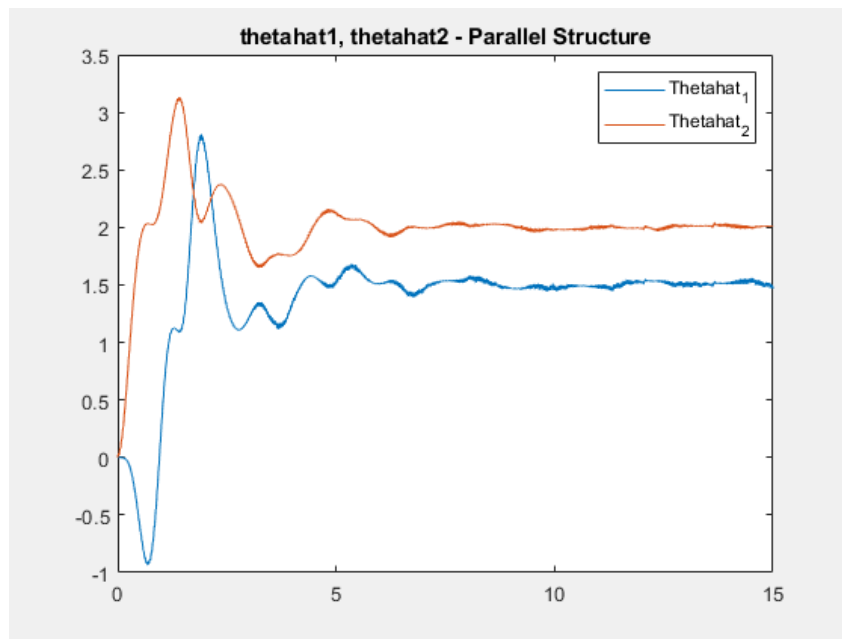


Figure 2.24: Εκτίμηση $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους

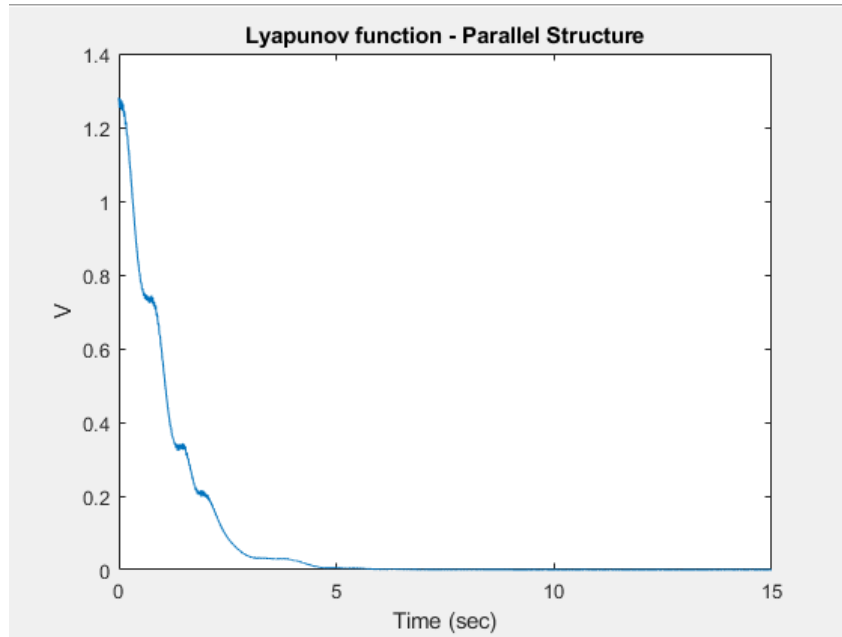


Figure 2.25: Lyapunov Function - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους

Παρατηρούμε από τα διαγράμματα ότι όσο αυξάνεται το πλάτος του θορύβου τόσο αυξάνεται η παραμόρφωση των κυματομορφών. Ωστόσο, στην παράλληλη δομή το σφάλμα είναι σχετικά σταθεροποιημένο και κοντά στο μηδέν παρά τις ταλαντώσεις, η προσέγγιση των παραμέτρων είναι ικανοποιητική και η συνάρτηση **Lyapunov** συγκλίνει στο **0**. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι η παράλληλη δομή είναι σχετικά ανθεκτική στην αύξηση του πλάτους του θορύβου.

Για τιμές $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 2, \eta_0 = 0.5, f = 30, \theta_m = 5$ έχουμε για την μικτή δομή:

MATLAB FIGURES

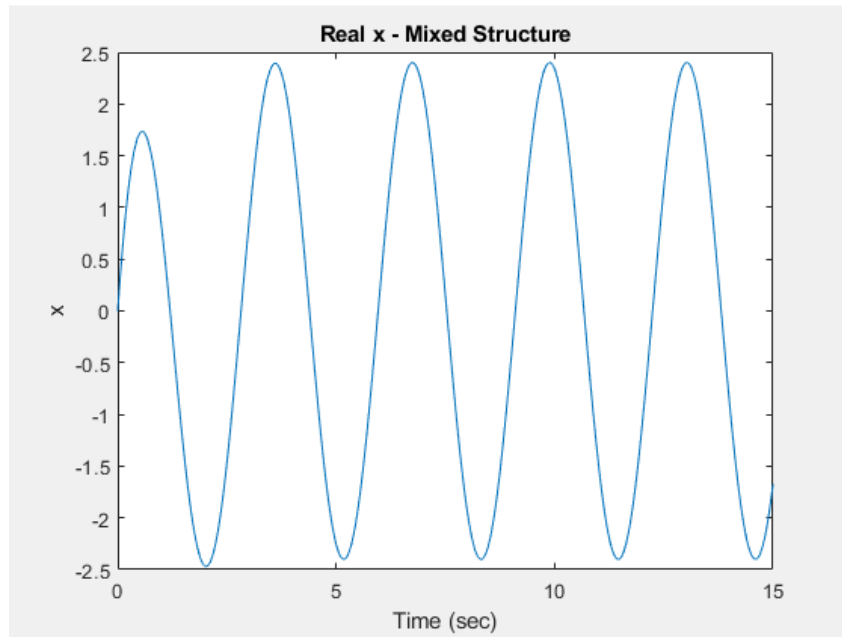


Figure 2.26: Πραγματική έξοδος x - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους

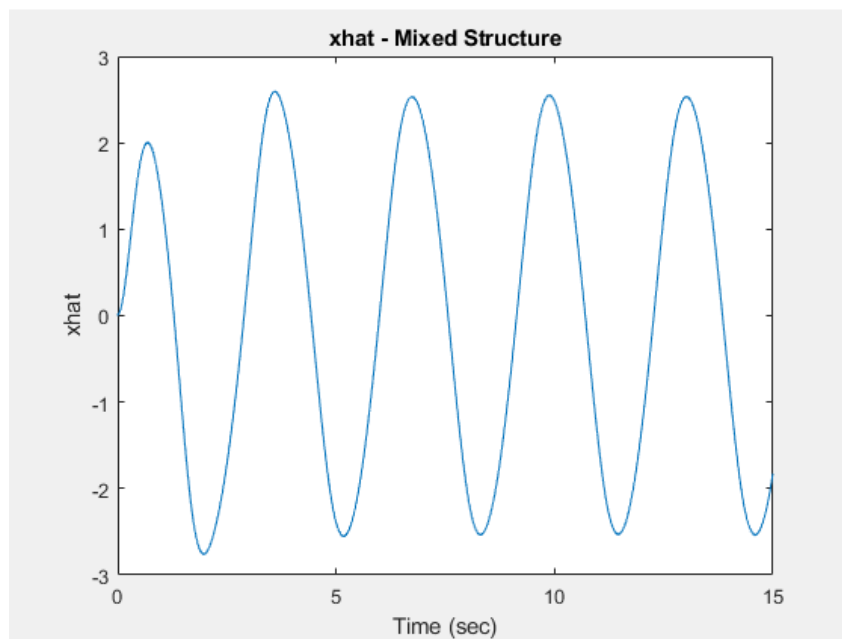


Figure 2.27: Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους

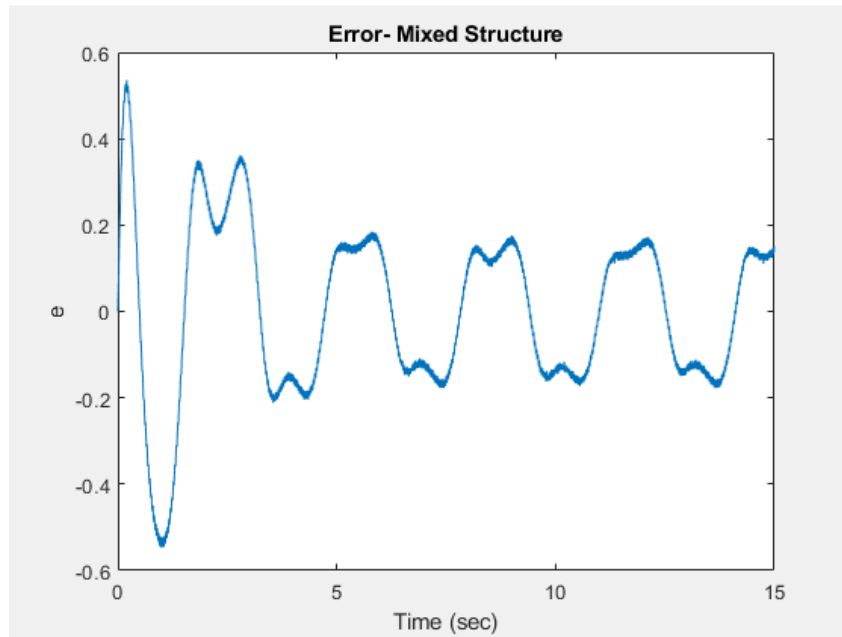


Figure 2.28: Σφάλμα - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους

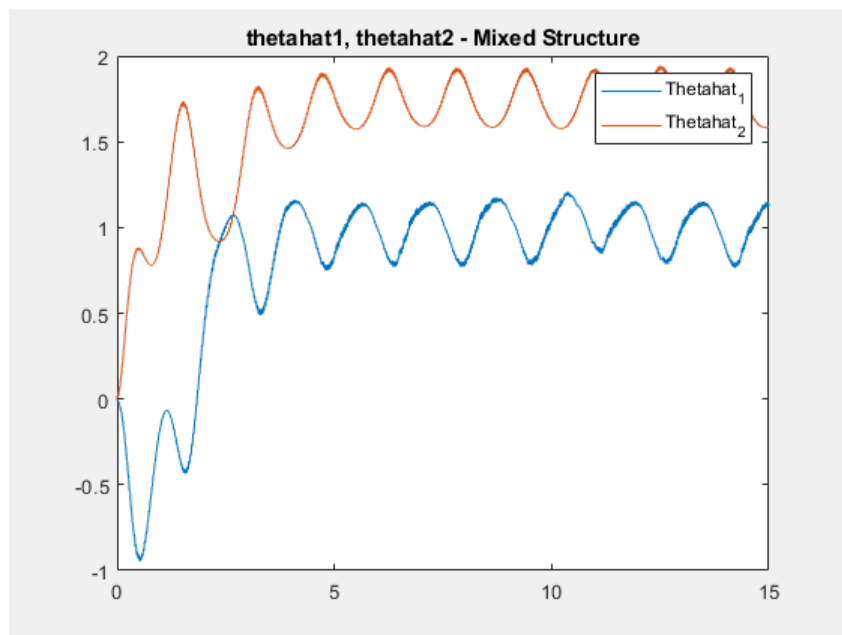


Figure 2.29: Εκτίμηση $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους

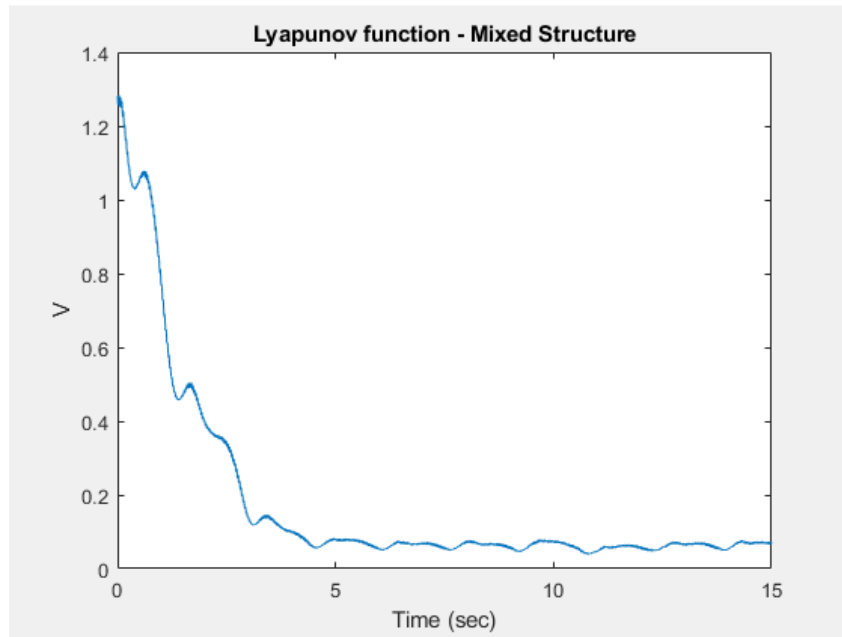


Figure 2.30: Lyapunov Function - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους

Σε αντίθεση με την παράλληλη δομή, επιβεβαιώνεται η παρατήρηση που κάναμε παραπάνω ότι η μικτή δομή είναι πιο ευαίσθητη στο θόρυβο. Έτσι, η παραμόρφωση των κυματομορφών αυξάνεται με την αύξηση του πλάτους του θορύβου. Τέλος, οι εκτιμήσεις των πραγματικών τιμών των παραμέτρων αποκλίνουν σημαντικά από αυτές και βλέπουμε για πρώτη φορά στα διαγράμματα ότι η συνάρτηση **Lyapunov** δεν συγκλίνει στο 0.

ΑΥΞΗΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΘΟΡΥΒΟΥ

Για να παρατηρήσουμε περαιτέρω την συμπεριφορά των δύο δομών με θόρυβο διπλασιάζουμε τη συχνότητα του θορύβου.

Για τιμές $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 2, \eta_0 = 0.25, f = 60$ έχουμε για την παράλληλη δομή:

MATLAB FIGURES

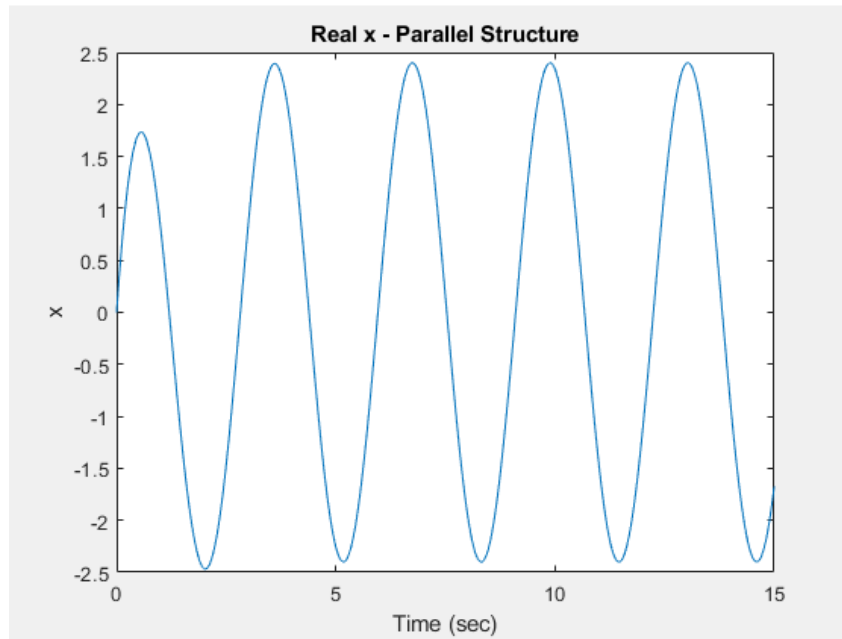


Figure 2.31: Πραγματική έξοδος x - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας

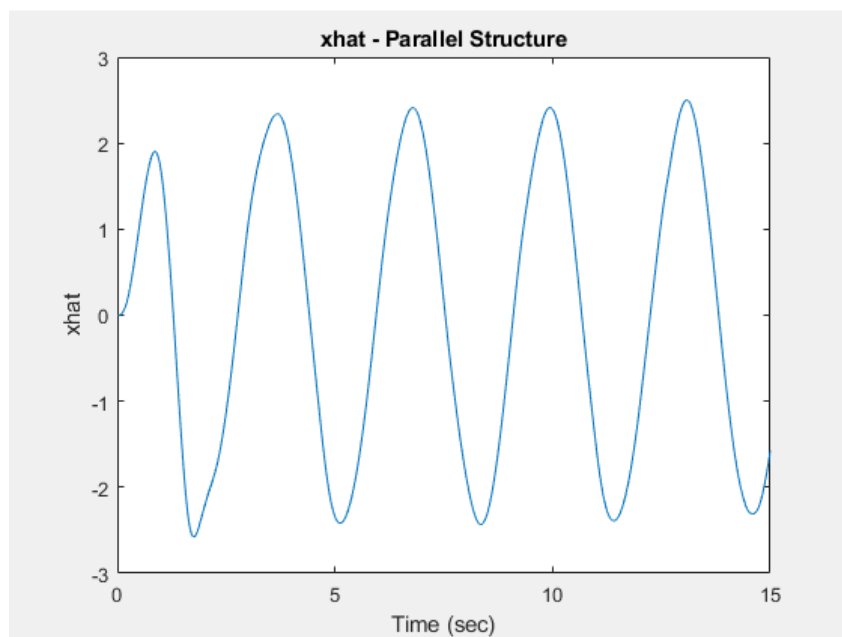


Figure 2.32: Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας

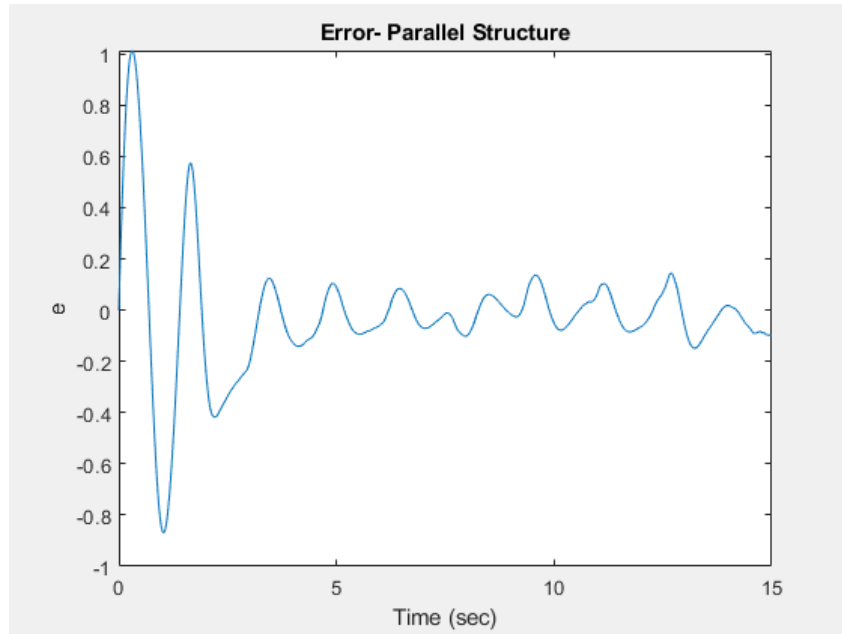


Figure 2.33: Σφάλμα - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας

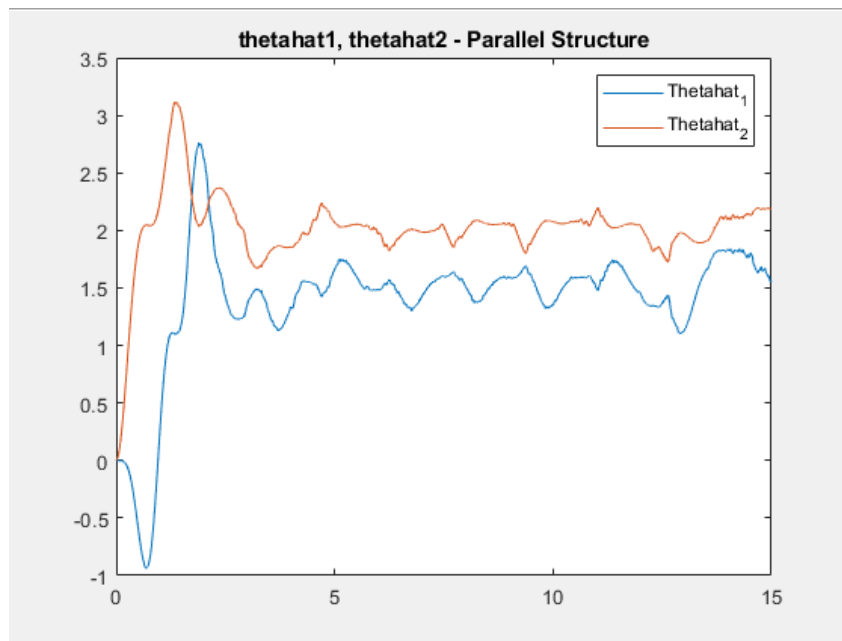


Figure 2.34: Εκτίμηση $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας

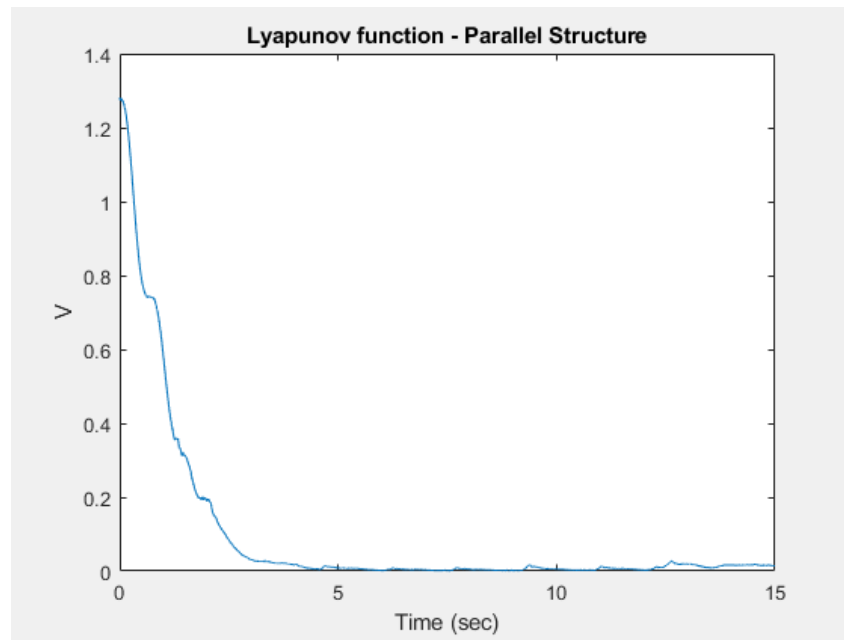


Figure 2.35: Lyapunov Function - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας

Παρατηρούμε ότι αυξάνοντας την συχνότητα αυξάνεται και η παραμόρφωση των κυματομορφών για την παράλληλη δομή πιο πολύ σε σχέση με την αύξηση πλάτους. Οι κυματομορφές δεν είναι όσο ομοιόμορφες ήταν στις προηγούμενες περιπτώσεις. Οι εκτιμήσεις των πραγματικών τιμών των παραμέτρων είναι πολύ πιο ανώμαλες τις προηγούμενες περιπτώσεις. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι η αύξηση της συχνότητας θορύβου έχει την περισσότερη επίδραση στην παράλληλη δομή από όλες τις μεταβολές του θορύβου.

Για τιμές $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 2, \eta_0 = 0.25, f = 60, \theta_m = 5$ έχουμε για την μικτή δομή:

MATLAB FIGURES

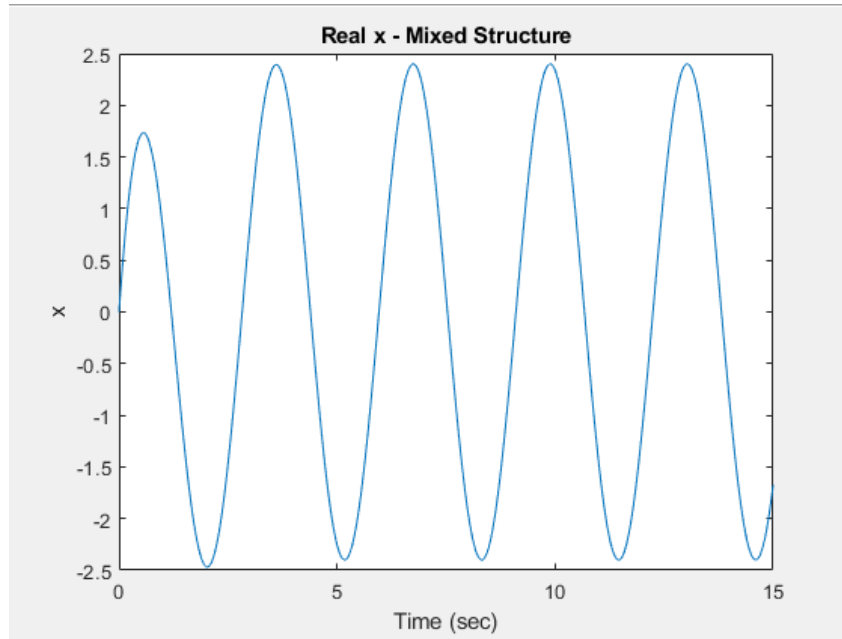


Figure 2.36: Πραγματική έξοδος x - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας

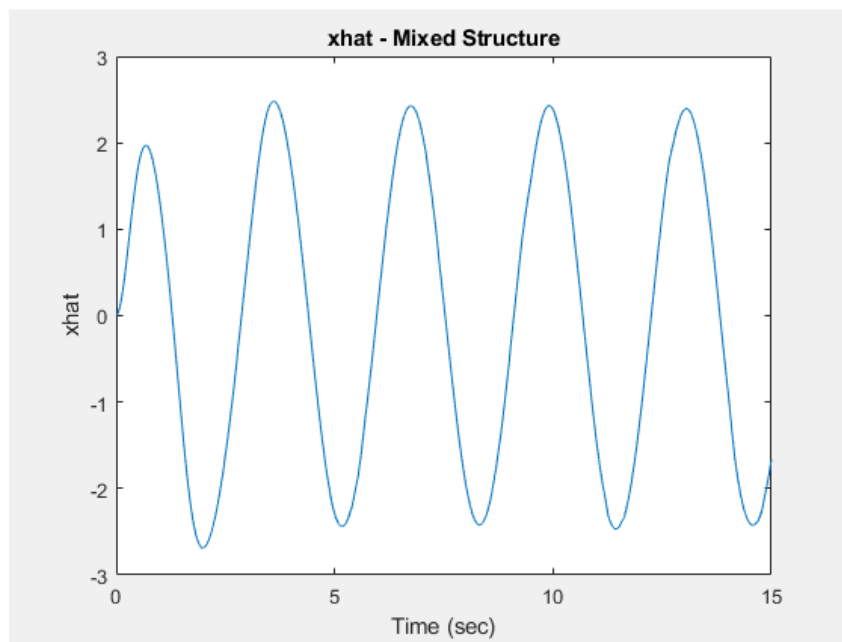


Figure 2.37: Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας

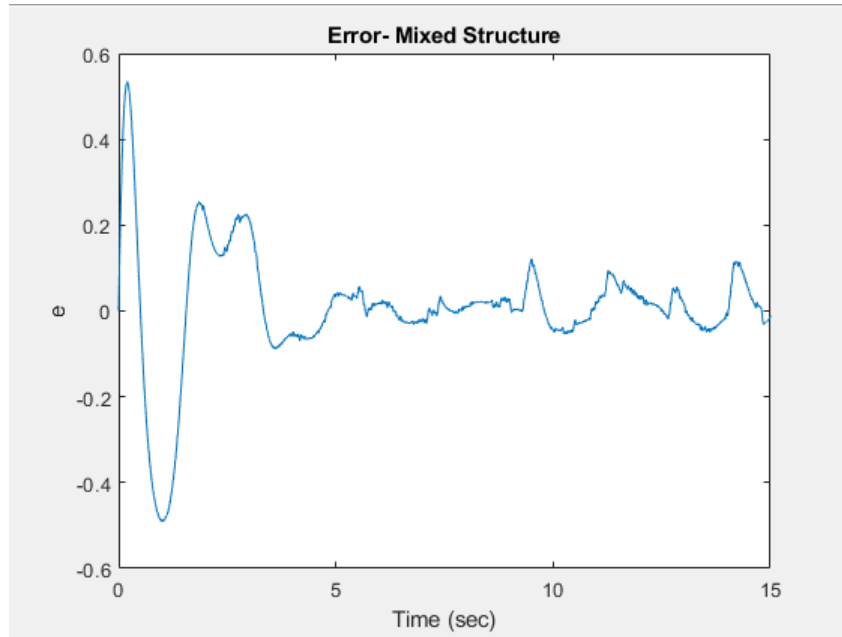


Figure 2.38: Σφάλμα - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας

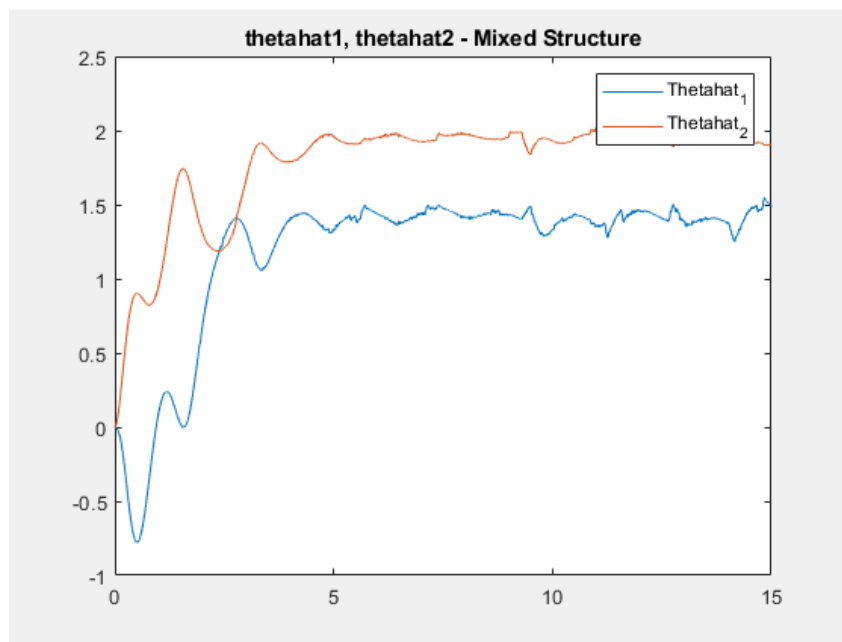


Figure 2.39: Εκτίμηση $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας

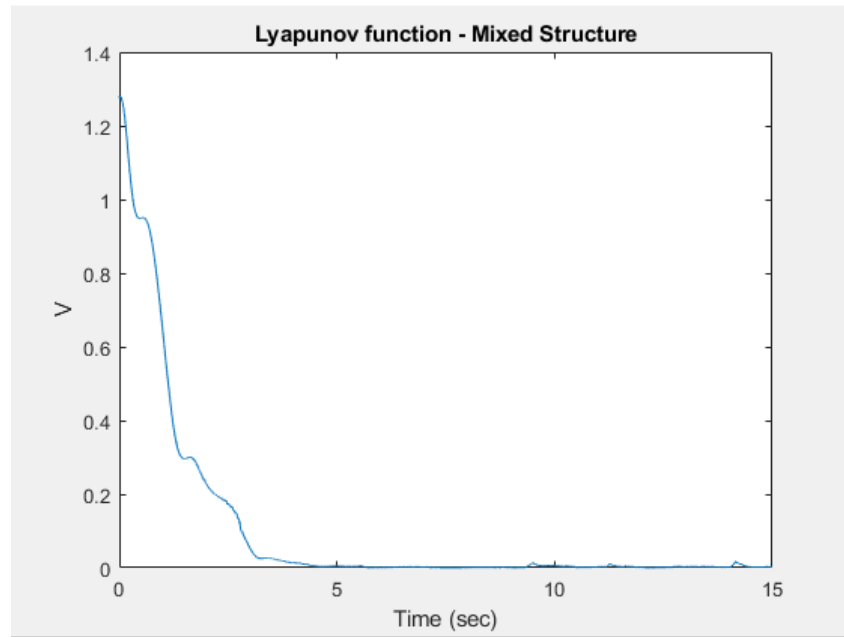


Figure 2.40: Lyapunov Function - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας

Παρατηρούμε ότι η αύξηση της συχνότητας έχει λίγη επίδραση στη μικτή δομή. Επομένως, τα αποτελέσματα είναι περίπου ίδια με αυτά με την αρχική επίδραση θορύβου που δοκιμάσαμε παραπάνω. Ωστόσο, αυτό δεν σημαίνει ότι σε αυτή την περίπτωση η μικτή δομή είναι καλύτερη από την παράλληλη επειδή επηρεάζεται πιο πολύ από την αύξηση της συχνότητας. Τα αποτελέσματα είναι περίπου ίδια αφού όπως αναφέραμε παραπάνω μόνο και μόνο η υπαρξη θορύβου στη μικτή την επηρεάζει πιο εύκολα.

ΜΕΙΩΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΘΟΡΥΒΟΥ

Για να παρατηρήσουμε περαιτέρω την συμπεριφορά των δύο δομών με θόρυβο υποδιπλασιάζουμε τη συχνότητα του θορύβου.

Για τιμές $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 2, \eta_0 = 0.25, f = 15$ έχουμε για την παράλληλη δομή:

MATLAB FIGURES

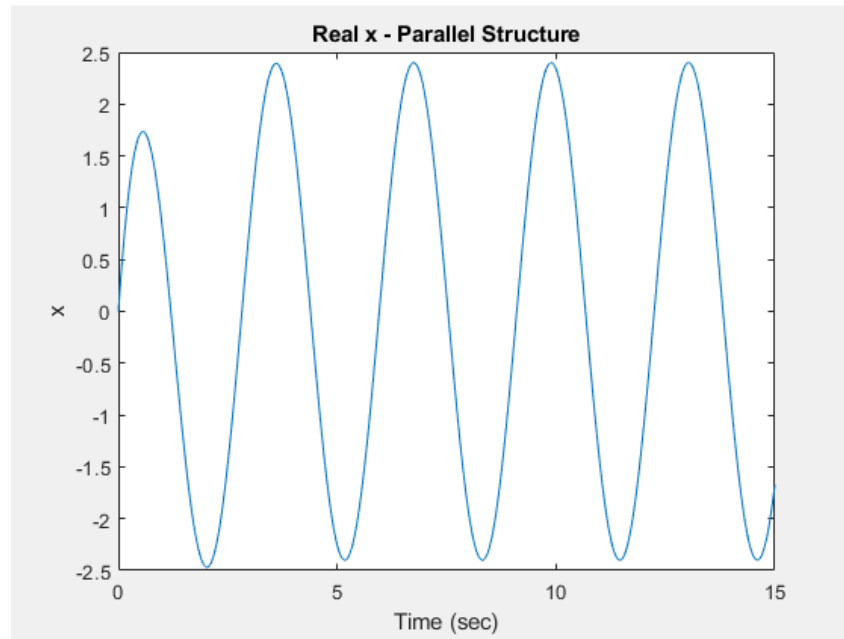


Figure 2.41: Πραγματική έξοδος x - Παράλληλη Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας

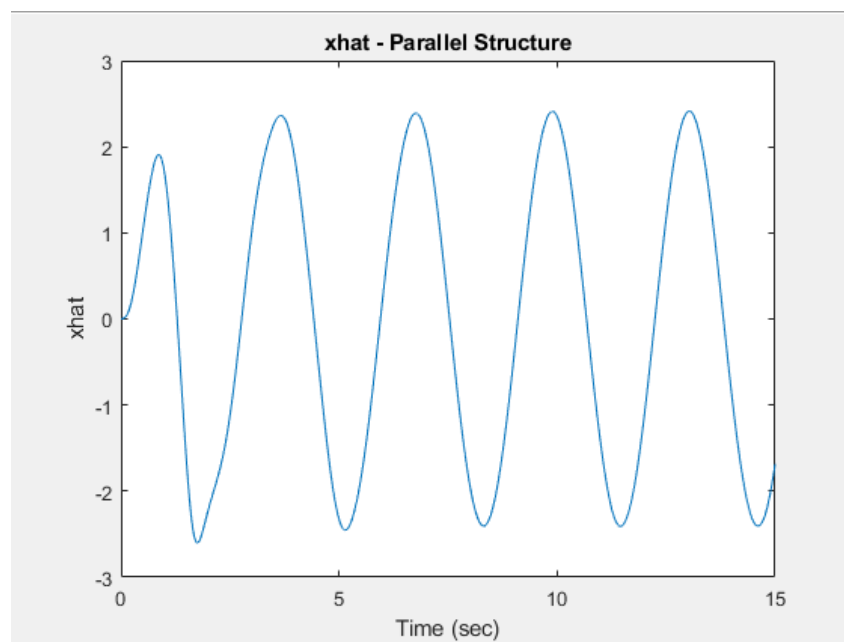


Figure 2.42: Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Παράλληλη Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας

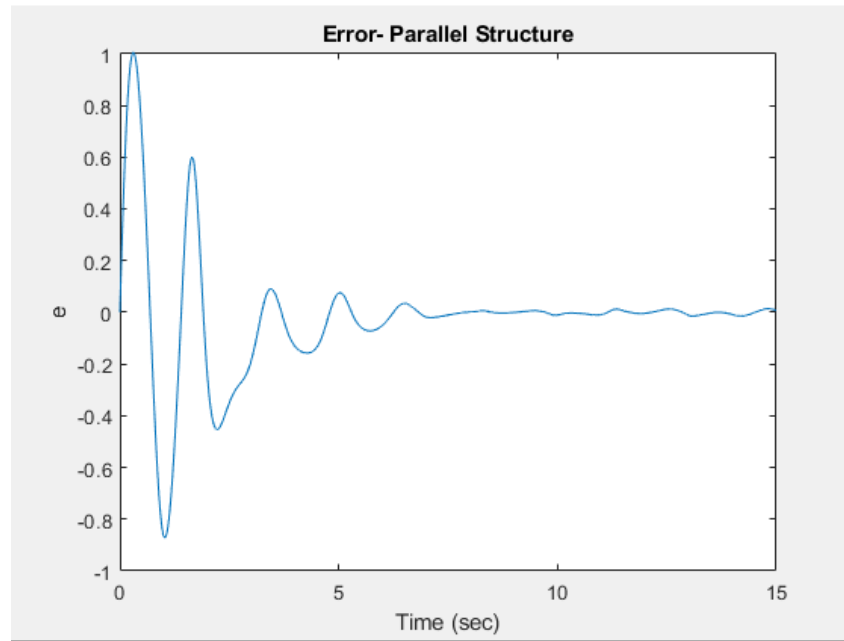


Figure 2.43: Σφάλμα - Παράλληλη Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας

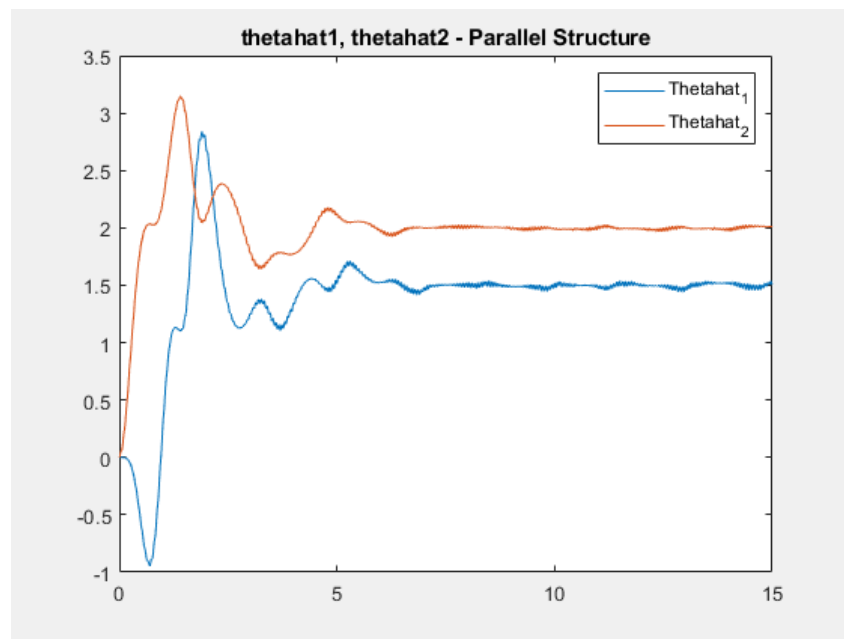


Figure 2.44: Εκτίμηση $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - Παράλληλη Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας

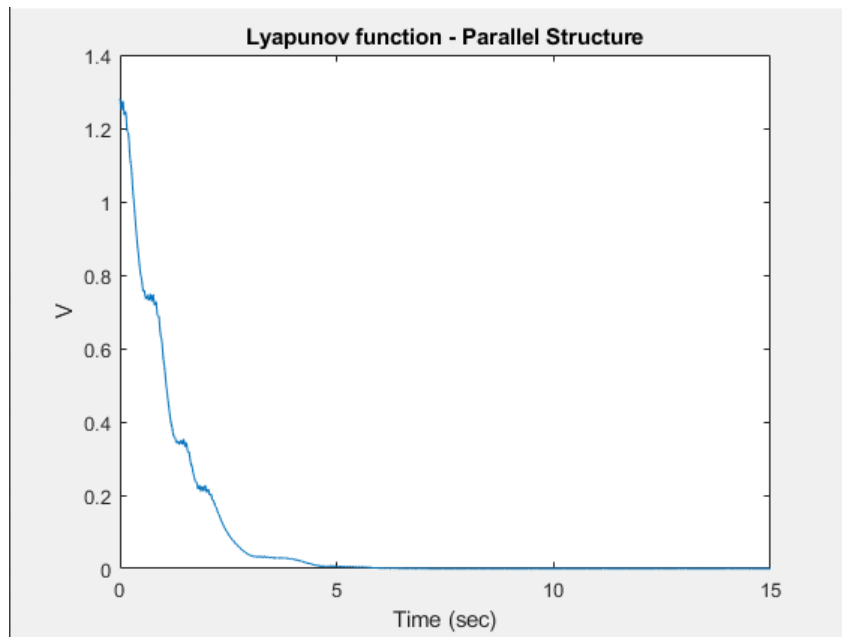


Figure 2.45: Lyapunov Function - Παράλληλη Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας

Για τιμές $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 2, \eta_0 = 0.25, f = 15, \theta_m = 5$ έχουμε για την μικτή δομή:

MATLAB FIGURES

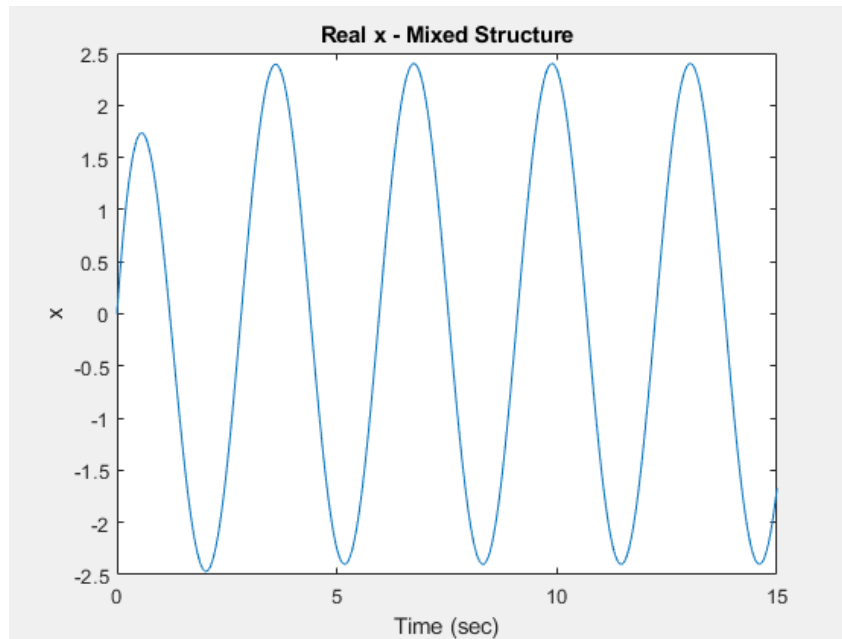


Figure 2.46: Πραγματική έξοδος x - Μικτή Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας

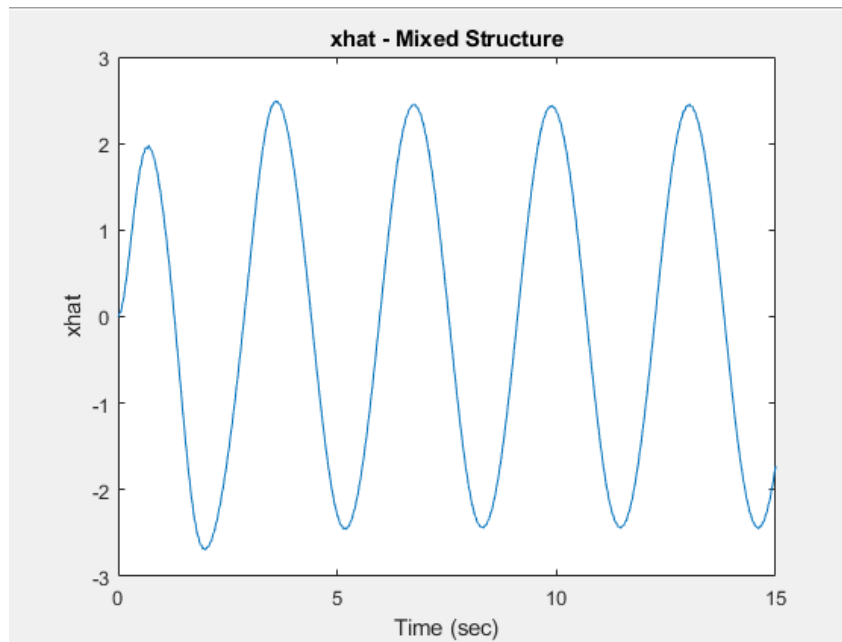


Figure 2.47: Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Μικτή Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας

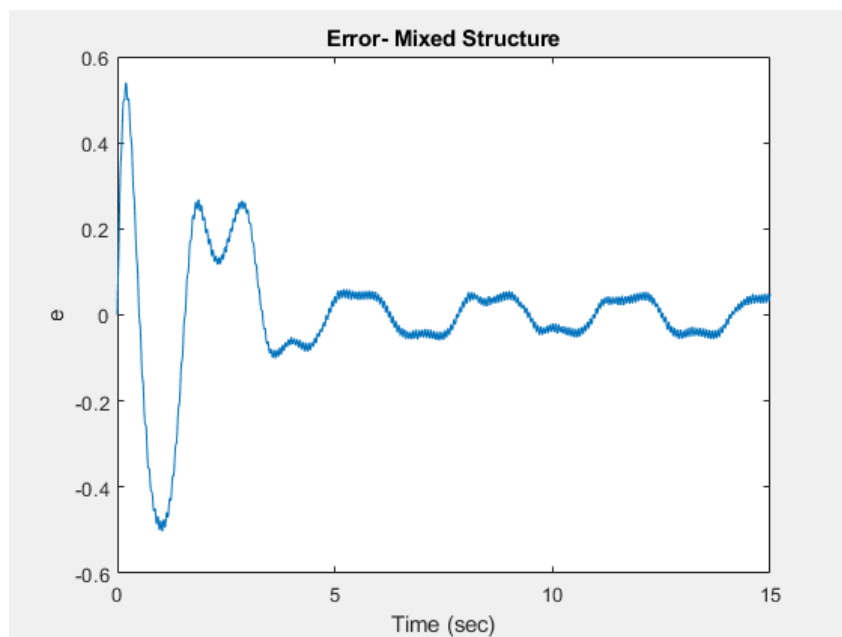


Figure 2.48: Σφάλμα - Μικτή Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας

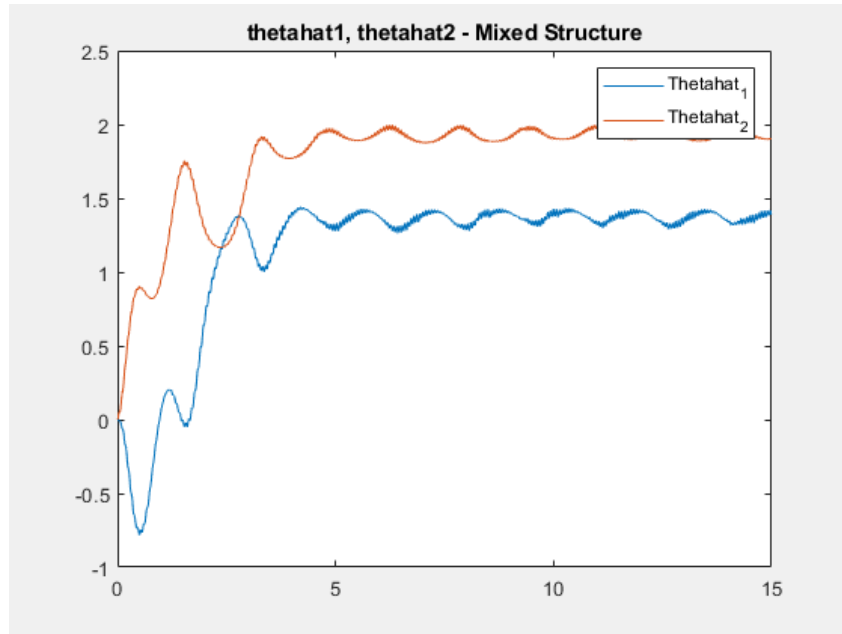


Figure 2.49: Εκτίμηση $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - Μικτή Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας

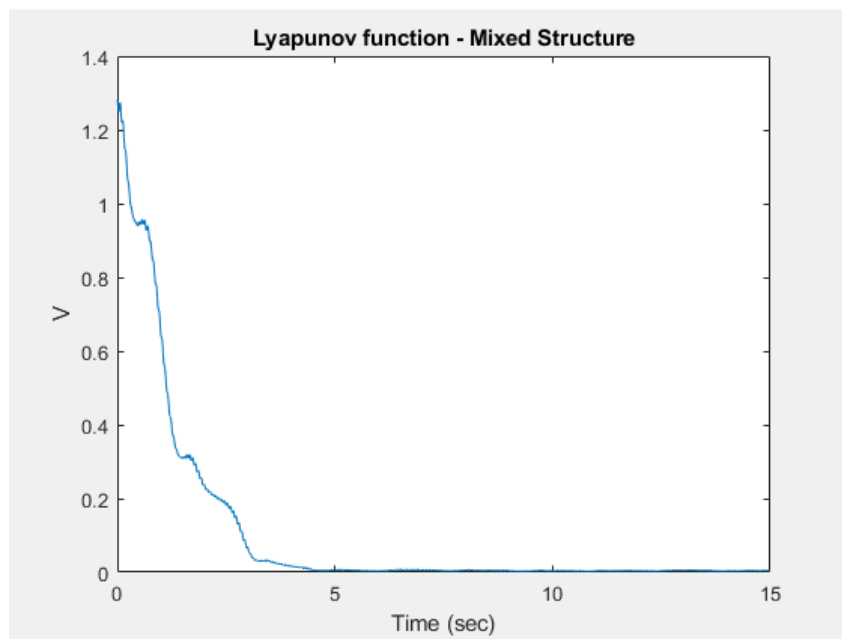


Figure 2.50: Lyapunov Function - Μικτή Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα με τη μείωση της συχνότητας του θορύβου καταλαβαίνει κανείς ότι επιβεβαιώνουν τις παρατηρήσεις και τα συμπεράσματα που κάναμε στα αποτελέσματα της αύξησης συχνότητας θορύβου. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση ισχύουν τα αντίστροφα από αυτά που αναφέρθηκαν παραπάνω στην αύξηση συχνότητας του θορύβου και βλέπουμε ότι υπάρχει μια αναλογία.

3 Θεμα 3

3.1 Θεωρητική Ανάλυση

Σε αυτό το θέμα έχουμε το παρακάτω σύστημα δεύτερης τάξης:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u, x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

με είσοδο του συστήματος $u = 7.5\cos(3t) + 10\cos(2t) \in L_\infty$ και $a_{11} = -0.5, a_{12} = -3, a_{21} = 4, a_{22} = -2, b_1 = 1, b_2 = 1.4$ σταθερές και άγνωστες παράμετροι. Στόχος της άσκησης είναι να σχεδιάσουμε έναν εκτιμητή πραγματικού χρόνου των άγνωστων παραμέτρων παράλληλης δομής με βάση τη μέθοδο **Lyapunov** και να κάνουμε την αντίστοιχη προσομοίωση.

$$\text{Έστω } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.4 \end{bmatrix}$$

Για την εξασφάλιση της φραγμένης εισόδου, φραγμένης εξόδου πρέπει οι ιδιοτιμές του A να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο. Άρα:

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s + 0.5 & 3 \\ -4 & s + 2 \end{vmatrix} = (s + 0.5)(s + 2) + 12 = s^2 + 2.5s + 13$$

Αφού έχουμε εξίσωση δευτέρου βαθμού και ομόσημους συντελεστές του πολυωνύμου έχουμε ότι οι ιδιοτιμές βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο. Επομένως:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Με την παράλληλη δομή έχουμε το παρακάτω σύστημα αναγνώρισης:

$$\hat{\dot{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$

με \hat{x} η εκτίμηση της πραγματικής εξόδου x και \hat{A}, \hat{B} οι εκτιμήσεις των αντίστοιχων πινάκων.

Για το σφάλμα έχουμε:

$$e = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \Rightarrow \dot{e} = Ax + Bu - \hat{A}\hat{x} - \hat{B}u$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας τον όρο $A\hat{x}$ έχουμε:

$$\dot{e} = Ax + Bu - \hat{A}\hat{x} - \hat{B}u + A\hat{x} - A\hat{x} = A(x - \hat{x}) - (\hat{A} - A)\hat{x} - (\hat{B} - B)u$$

Ορίζοντας με αντίστοιχο τρόπο τα παραμετρικά σφάλματα $\tilde{A} = \hat{A} - A, \tilde{B} = \hat{B} - B$ έχουμε:

$$\dot{e} = Ae - \tilde{A}\hat{x} - \tilde{B}u$$

Στη συνέχεια παίρνουμε την παρακάτω υποψήφια συνάρτηση **Lyapunov**:

$$V = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2\gamma_1}tr(\tilde{A}^T \tilde{A}) + \frac{1}{2\gamma_2}tr(\tilde{B}^T \tilde{B})$$

Παραγωγίζοντας και πράξεις προκύπτει:

$$\dot{V} = e^T \dot{e} + \frac{1}{\gamma_1}tr(\tilde{A}^T \dot{\tilde{A}}) + \frac{1}{\gamma_2}tr(\tilde{B}^T \dot{\tilde{B}}) \Rightarrow \dots \Rightarrow \dot{V} = e^T Ae - e^T \tilde{A}\hat{x} - e^T \tilde{B}u + \frac{1}{\gamma_1}tr(\tilde{A}^T \dot{\tilde{A}}) + \frac{1}{\gamma_2}tr(\tilde{B}^T \dot{\tilde{B}})$$

Από τις μαθηματικές ιδιότητες του ίχνους ενός πίνακα έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$e^T \tilde{A}\hat{x} = tr(\tilde{A}\hat{x}e^T)$$

$$e^T \tilde{B}u = tr(\tilde{B}ue^T)$$

$$tr(\tilde{A}^T \dot{\tilde{A}}) = \dots = tr(\tilde{A}\dot{\tilde{A}}^T)$$

$$tr(\tilde{B}^T \dot{\tilde{B}}) = \dots = tr(\tilde{B}\dot{\tilde{B}}^T)$$

$$\text{και άρα } \dot{V} = e^T Ae + tr(\frac{1}{\gamma_1}\tilde{A}\dot{\tilde{A}}^T \frac{1}{\gamma_2}\tilde{B}\dot{\tilde{B}}^T - \tilde{A}\hat{x}e^T - \tilde{B}ue^T).$$

Για $\dot{\tilde{A}} = \gamma_1(\hat{x}e^T)^T, \dot{\tilde{B}} = \gamma_2 eu$ προκύπτει $\dot{V} = e^T Ae < 0$. Όπως και παραπάνω μπορούμε να δείξουμε ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{A} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{B} = 0$. Επίσης θα πρέπει να εξασφαλίσουμε όπως και στα άλλα θέματα την Συνθήκη Επιμέρους Διέγερσης (ΣΕΔ) ώστε οι εκτιμήσεις να προσεγγίζουν καλά τις πραγματικές τιμές.

Συνοψίζοντας, το τελικό σύστημα που προκύπτει είναι:

$$\dot{x} = Ax + Bu \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \Rightarrow$$

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u, \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u$$

$$\dot{x} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} u \Rightarrow$$

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{a}_{11}\hat{x}_1 + \hat{a}_{12}\hat{x}_2 + \hat{b}_1u, \dot{\hat{x}}_2 = \hat{a}_{21}\hat{x}_1 + \hat{a}_{22}\hat{x}_2 + \hat{b}_2u$$

$$\dot{\hat{A}} = \gamma_1(\hat{x}e^T)^T \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix} = \gamma_1 \left(\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x}_1 & x_2 - \hat{x}_2 \end{bmatrix} \right)^T \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\hat{a}_{11} = \gamma_1 \hat{x}_1 (x_1 - \hat{x}_1)$$

$$\hat{a}_{12} = \gamma_1 \hat{x}_2 (x_1 - \hat{x}_1)$$

$$\hat{a}_{21} = \gamma_1 \hat{x}_1 (x_2 - \hat{x}_2)$$

$$\hat{a}_{22} = \gamma_1 \hat{x}_2 (x_2 - \hat{x}_2)$$

$$\dot{\hat{B}} = \gamma_2 e u \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} = \gamma_2 u \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_2 - \hat{x}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\hat{b}_1 = \gamma_2 u (x_1 - \hat{x}_1)$$

$$\hat{b}_2 = \gamma_2 u (x_2 - \hat{x}_2)$$

3.2 MATLAB SIMULATION

Για την προσομοίωση δημιουργήθηκαν οι παρακάτω συναρτήσεις:

Αρχία κώδικα:

lyapunov_method.m: Συνάρτηση που υλοποιεί τη μέθοδο **Lyapunov** που αναλύθηκε παραπάνω.

u_func.m: Συνάρτηση που υλοποιεί την $u = 7.5\cos(3t) + 10\cos(2t)$ που αναφέρεται στην εκφώνηση.

demo_script_problem3.m: Script που χρησιμοποιεί όλες τις παραπάνω συναρτήσεις για την προσομοίωση του προβλήματος και την παρουσίαση των αποτελεσμάτων του.

Όπως και σε όλα τα προβλήματα οι τιμές που καταλήγουμε για τα κέρδη από την μέθοδο δοκιμής και επαλήθευσης είναι $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 2$.

MATLAB FIGURES

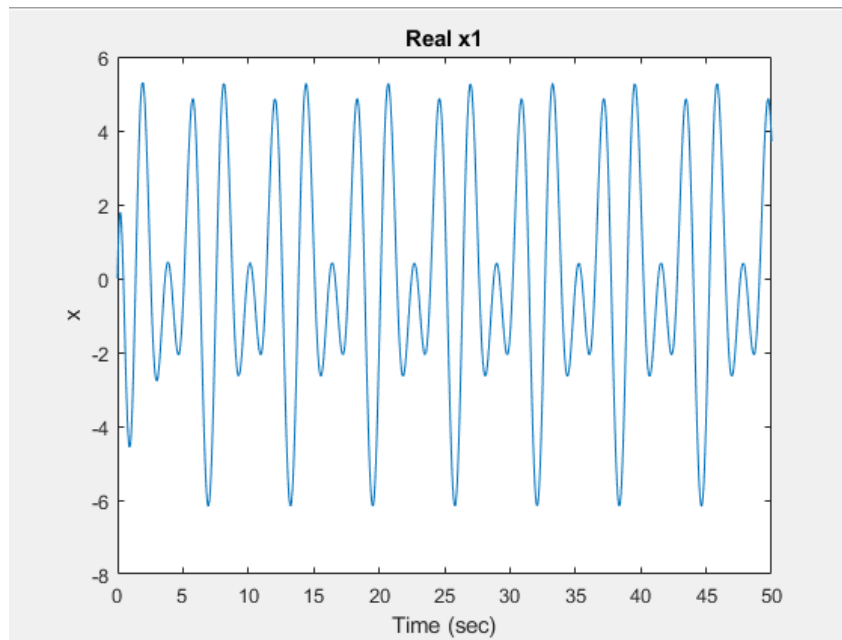


Figure 3.1: Πραγματική έξοδος x_1

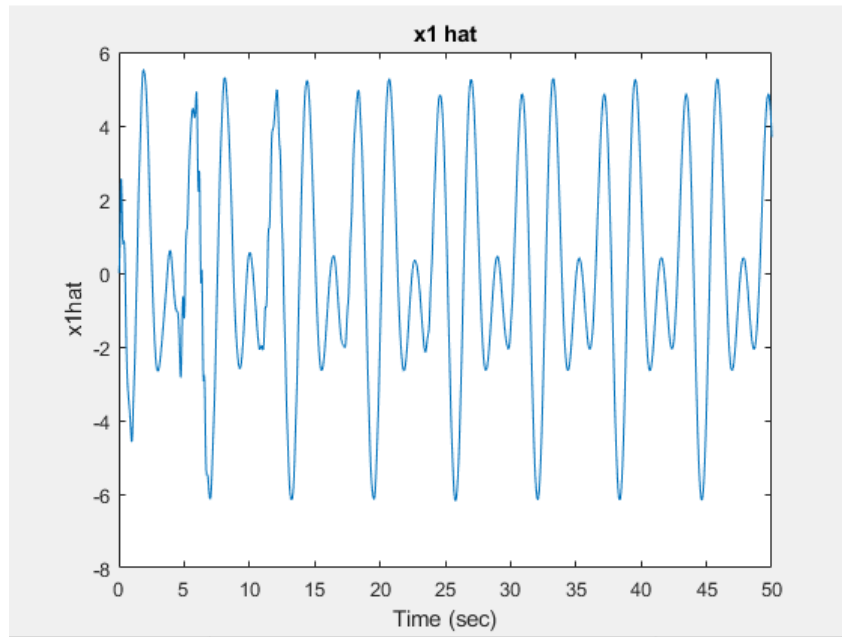


Figure 3.2: Εκτίμηση της εξόδου \hat{x}_1

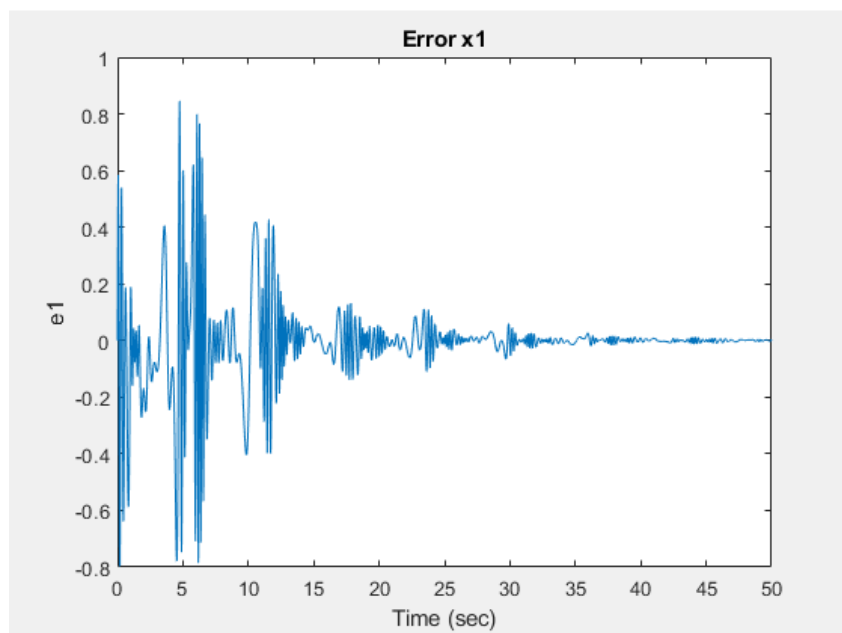


Figure 3.3: Σφάλμα x_1

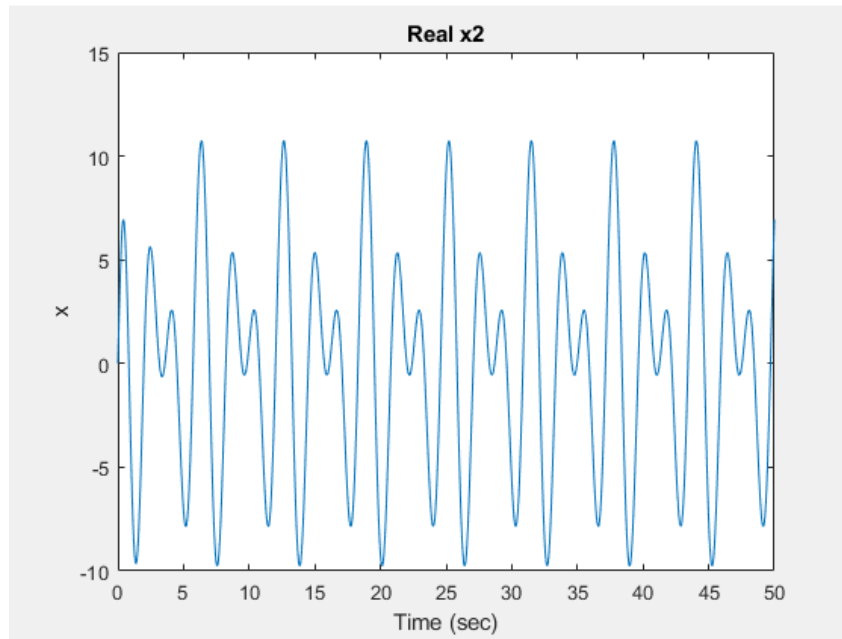


Figure 3.4: Πραγματική έξοδος x_2

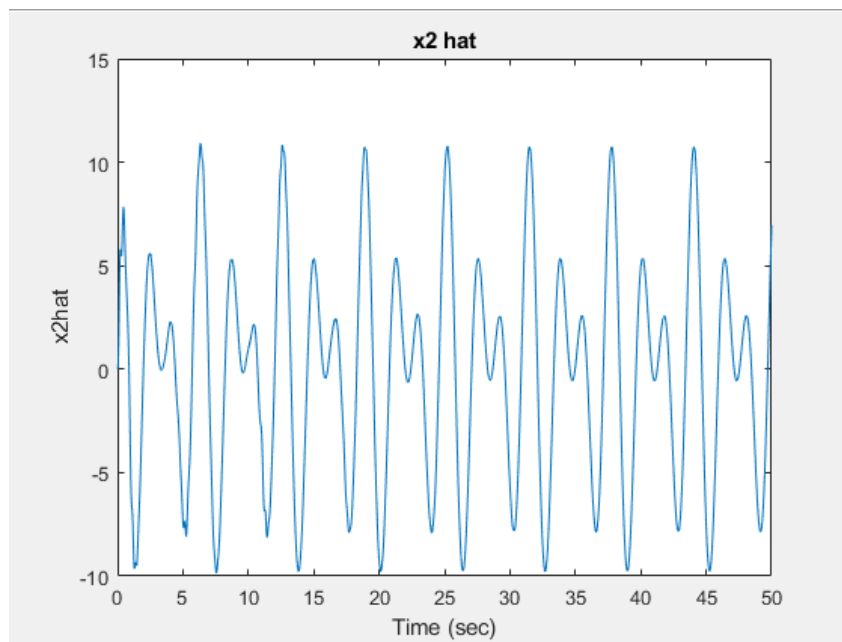


Figure 3.5: Εκτίμηση της εξόδου \hat{x}_2

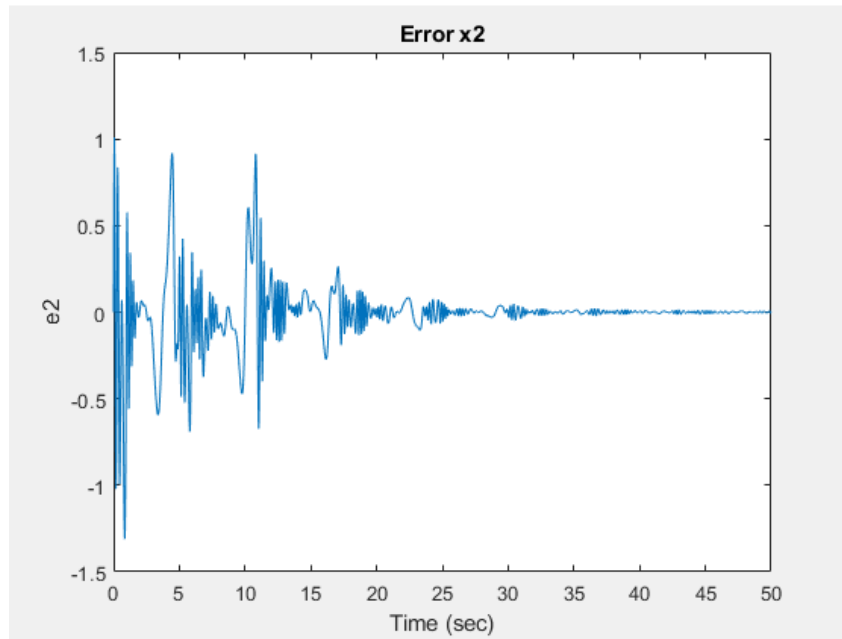


Figure 3.6: Σφάλμα x_2

Παρατηρείται ότι τα σφάλματα στην αρχή έχουν ταλαντώσεις με μεγάλο πλάτος. Ωστόσο γύρω στα 35 - 40 sec τα σφάλματα σταθεροποιούνται γύρω στο μηδέν και στη συνέχεια συγκλίνουν σε αυτό.

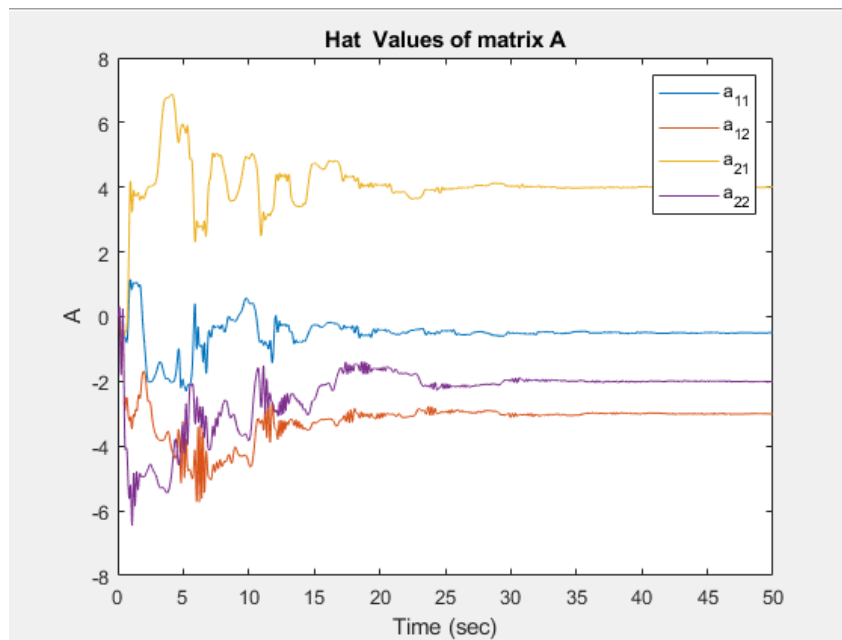


Figure 3.7: Εκτιμήσεις των στοιχείων του A

Κι εδώ παρατηρούμε μια παρόμοια συμπεριφορά όπως στο σφάλμα. Στην αρχή οι εκτιμήσεις αποκλίνουν σημαντικά από τις πραγματικές τιμές των στοιχείων του A , αλλά μετά το πέρας του χρόνου συγκλίνουν ικανοποιητικά.

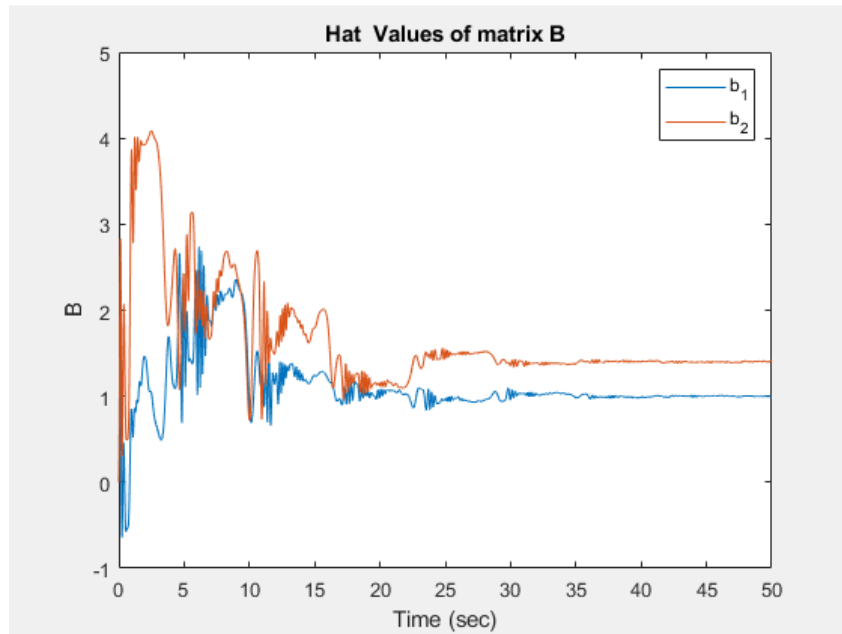


Figure 3.8: Εκτιμήσεις των στοιχείων του B

Τα αποτελέσματα του B ακολουθούν τα ίδια συμπεράσματα με παραπάνω.

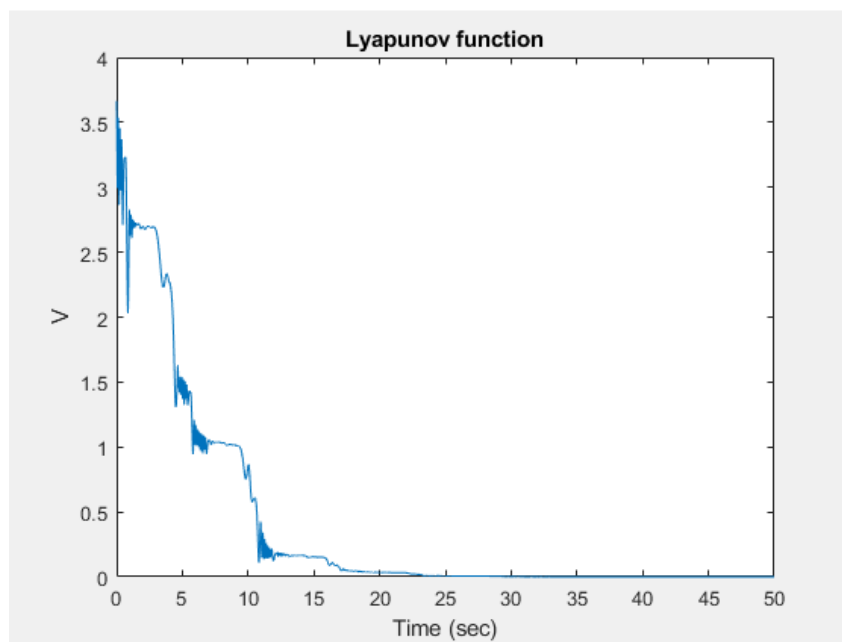


Figure 3.9: Συνάρτηση Lyapunov

Ακολουθεί την ίδια συμπεριφορά με παραπάνω.

List of Figures

1.1	Πραγματική έξοδος x	3
1.2	Εκτίμηση της εξόδου \hat{x}	4
1.3	Σφάλμα	4
1.4	Εκτίμηση $\hat{\theta}_1$ της παραμέτρου a	5
1.5	Εκτίμηση $\hat{\theta}_2$ της παραμέτρου b	5
1.6	Lyapunov Function	6
1.7	Πραγματική έξοδος x	7
1.8	Εκτίμηση της εξόδου \hat{x}	7
1.9	Σφάλμα	8
1.10	Εκτίμηση $\hat{\theta}_1$ της παραμέτρου a	8
1.11	Εκτίμηση $\hat{\theta}_2$ της παραμέτρου b	9
1.12	Lyapunov Function	9
2.1	Πραγματική έξοδος x - Παράλληλη Δομή χωρίς θόρυβο	15
2.2	Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Παράλληλη Δομή χωρίς θόρυβο	15
2.3	Σφάλμα - Παράλληλη Δομή χωρίς θόρυβο	16
2.4	Εκτίμηση $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - Παράλληλη Δομή χωρίς θόρυβο	16
2.5	Lyapunov Function - Παράλληλη Δομή χωρίς θόρυβο	17
2.6	Πραγματική έξοδος x - Μικτή Δομή χωρίς θόρυβο	17
2.7	Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Μικτή Δομή χωρίς θόρυβο	18
2.8	Σφάλμα - Μικτή Δομή χωρίς θόρυβο	18
2.9	Εκτίμηση $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - Μικτή Δομή χωρίς θόρυβο	19
2.10	Lyapunov Function - Μικτή Δομή χωρίς θόρυβο	19
2.11	Πραγματική έξοδος x - Παράλληλη Δομή με θόρυβο	20
2.12	Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Παράλληλη Δομή με θόρυβο	20
2.13	Σφάλμα - Παράλληλη Δομή με θόρυβο	21
2.14	Εκτίμηση $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - Παράλληλη Δομή με θόρυβο	21
2.15	Lyapunov Function - Παράλληλη Δομή με θόρυβο	22
2.16	Πραγματική έξοδος x - Μικτή Δομή με θόρυβο	22
2.17	Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Μικτή Δομή με θόρυβο	23
2.18	Σφάλμα - Μικτή Δομή με θόρυβο	23
2.19	Εκτίμηση $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - Μικτή Δομή με θόρυβο	24
2.20	Lyapunov Function - Μικτή Δομή με θόρυβο	24
2.21	Πραγματική έξοδος x - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους	25
2.22	Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους	25
2.23	Σφάλμα - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους	26
2.24	Εκτίμηση $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους	26
2.25	Lyapunov Function - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους	27
2.26	Πραγματική έξοδος x - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους	28
2.27	Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους	28
2.28	Σφάλμα - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους	29
2.29	Εκτίμηση $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους	29
2.30	Lyapunov Function - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιου πλάτους	30
2.31	Πραγματική έξοδος x - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας	31
2.32	Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας	31
2.33	Σφάλμα - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας	32

2.34 Εκτίμηση $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας	32
2.35 Lyapunov Function - Παράλληλη Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας . .	33
2.36 Πραγματική έξοδος x - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας	34
2.37 Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας	34
2.38 Σφάλμα - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας	35
2.39 Εκτίμηση $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας	35
2.40 Lyapunov Function - Μικτή Δομή με θόρυβο διπλάσιας συχνότητας	36
2.41 Πραγματική έξοδος x - Παράλληλη Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας	37
2.42 Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Παράλληλη Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας	37
2.43 Σφάλμα - Παράλληλη Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας	38
2.44 Εκτίμηση $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - Παράλληλη Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας . . .	38
2.45 Lyapunov Function - Παράλληλη Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας	39
2.46 Πραγματική έξοδος x - Μικτή Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας . .	39
2.47 Εκτίμηση της εξόδου \hat{x} - Μικτή Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας .	40
2.48 Σφάλμα - Μικτή Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας	40
2.49 Εκτίμηση $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - Μικτή Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας	41
2.50 Lyapunov Function - Μικτή Δομή με θόρυβο υποδιπλάσιας συχνότητας . . .	41
3.1 Πραγματική έξοδος x_1	45
3.2 Εκτίμηση της εξόδου \hat{x}_1	46
3.3 Σφάλμα x_1	46
3.4 Πραγματική έξοδος x_2	47
3.5 Εκτίμηση της εξόδου \hat{x}_2	47
3.6 Σφάλμα x_2	48
3.7 Εκτιμήσεις των στοιχείων του A	48
3.8 Εκτιμήσεις των στοιχείων του B	49
3.9 Συνάρτηση Lyapunov	49