Algoritmo 1

Ipotesi: a e b $\in$ F (rappresentabili esattamente)

fl(fl(a+b)*fl(a-b))= $|\varepsilon_i| \leq u$, i=1,2,3

$$\mathrm{fl}(\mathrm{fl}(\mathrm{a}+\mathrm{b}) * \mathrm{fl}(\mathrm{a}-\mathrm{b})) = (\mathrm{a}+\mathrm{b})(1+\varepsilon_1)(\mathrm{a}-\mathrm{b})(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) =$$

$$= (\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) = (\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2)(1+\varepsilon_2+\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) =$$

$$= (\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2)(1+\varepsilon_2+\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_2+\varepsilon_3\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)$$

$$\approx (\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2)(1+\varepsilon_2+\varepsilon_1+\varepsilon_3)$$

$$E_{alg} = \frac{\left|\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\mathrm{a}+\mathrm{b}) * \mathrm{fl}(\mathrm{a}-\mathrm{b})\right) - (\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2)\right|}{|\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2|}$$

$$E_{alg} = \frac{|(\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2)(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - (\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2)|}{|\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2|}$$

$$E_{alg} = \frac{|\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2 + \varepsilon_1(\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2) + \varepsilon_2(\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2) + \varepsilon_3(\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2) - (\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2)|}{|\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2|}$$

$$E_{alg} \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3| \leq 3\mathrm{u}$$

$$I_{alg}{}^{1} = 3$$

Algoritmo 2

fl(fl(a^2)-fl(b^2))=

$$|\varepsilon_i| \leq u, \text{ i=1,2,3}$$

$$\mathrm{fl}\big(\mathrm{fl}(\mathrm{a}^2) - \mathrm{fl}(\mathrm{b}^2)\big) = (\mathrm{a}^2(1+\varepsilon_1) - \mathrm{b}^2(1+\varepsilon_2))(1+\varepsilon_3) =$$

$$= \mathrm{a}^2(1+\varepsilon_1) - \mathrm{b}^2(1+\varepsilon_2) + \mathrm{a}^2(1+\varepsilon_1)\varepsilon_3 - \mathrm{b}^2(1+\varepsilon_2)\varepsilon_3 =$$

$$= \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2 + \mathrm{a}^2\varepsilon_1 - \mathrm{b}^2\varepsilon_2 + \mathrm{a}^2\varepsilon_3 + \mathrm{a}^2\varepsilon_1\varepsilon_3 - b^2\varepsilon_3 - b^2\varepsilon_2\varepsilon_3$$

$$\approx \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2 + \mathrm{a}^2\varepsilon_1 - \mathrm{b}^2\varepsilon_2 + (\mathrm{a}^2 - b^2)\varepsilon_3$$

$$E_{alg} = \frac{\left|\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\mathrm{a}^2) - \mathrm{fl}(\mathrm{b}^2)\right) - (\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2)\right|}{|\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2|}$$

$$E_{alg} = \frac{|\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2 + \mathrm{a}^2\varepsilon_1 - \mathrm{b}^2\varepsilon_2 + (\mathrm{a}^2 - b^2)\varepsilon_3 - (\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2)|}{|\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2|}$$

$$E_{alg} \leq |\varepsilon_1| \left|\frac{a^2}{a^2 - b^2}\right| + |\varepsilon_2| \left|\frac{b^2}{a^2 - b^2}\right| + |\varepsilon_3|$$

$$I_{alg}{}^2 = 1 + \left|\frac{a^2}{a^2 - b^2}\right| + \left|\frac{b^2}{a^2 - b^2}\right|$$

Per quali valori di a e b ${I_{alg}}^1 < {I_{alg}}^2$

$$3 < 1 + \left|\frac{a^2}{a^2 - b^2}\right| + \left|\frac{b^2}{a^2 - b^2}\right|$$

Distinguiamo 2 casi :

- **a>b per cui $\boldsymbol{a^2 - b^2 > 0}$ e $\boldsymbol{|a^2 - b^2| = a^2 - b^2}$**

$$3 < 1 + \frac{a^2}{a^2 - b^2} + \frac{b^2}{a^2 - b^2}$$

$$2(a^2 - b^2) < a^2 + b^2$$

$$a^2 < 3b^2 \rightarrow \frac{a^2}{b^2} < 3$$

- **b>a per cui** $\boldsymbol{a^2 - b^2 < 0}$ **e** $\boldsymbol{|a^2 - b^2| = -(a^2 - b^2)}$

$$3 < 1 + \frac{a^2}{-(a^2 - b^2)} + \frac{b^2}{-(a^2 - b^2)}$$

$$2(-a^2 + b^2) < a^2 + b^2$$

$$b^2 < 3a^2 \;\rightarrow\; \frac{a^2}{b^2} > \frac{1}{3}$$

Affinchè l'algoritmo 1 sia più stabile dell'algoritmo 2 i valori di a e b devono essere tali che $\frac{1}{3} < \frac{a^2}{b^2} < 3$