Applicare il metodo di iterazione del punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$

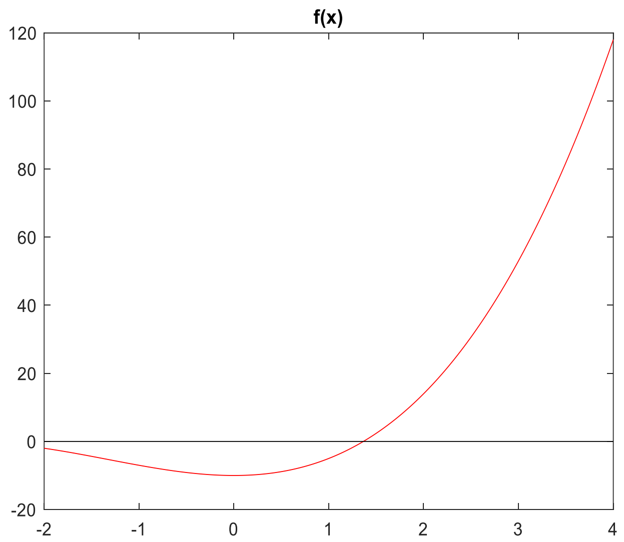
per determinare lo zero dell'equazione $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

quando $x_0 = 1.5$, tolx=1e-7 ed nmax=1000, proponendo diverse scelta della funzione di iterazione g per garantire:

- **Convergenza lineare con costante asintotica di convergenza prossima a 0.**
- **Convergenza lineare con costante asintotica di convergenza prossima a 0.5.**
- **Convergenza lineare con costante asintotica di convergenza prossima a 1.**

Utilizziamo il teorema di esistenza degli zeri di una funzione continua:

individuiamo un intervallo in cui la funzione assuma agli estremi valori discordi.



f(0)=-10;

f(2)=14

Nell'intervallo I=[0,2] la funzione assume agli estremi valori discordi. Inoltre in questo intervallo la funzione è monotona crescente, ciò si deduce dal segno della derivata prima $f'(x) = 3x^2 + 8x$

$$f'(x) = 3x^2 + 8x > 0$$

$x(3x \quad + 8) > 0$ per $x > 0$ ed $x > -\frac{8}{3}$

Quindi nell’intervallo [1,2] la funzione è monotona crescente, assume valori discordi agli estremi e quindi esiste un unico punto in cui si annulla, α =1.3652.

Ricaviamo una funzione x=g(x) a partire da f(x)

Non è unica e ce ne sono diverse, e si ricavano raccogliendo diversamente x dall’equazione f(x)=0

1) $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ -> $4x^2 = 10 - x^3 \rightarrow$

$$\rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3} \quad \rightarrow \quad g_1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$$

Sommando x ad entrambi i termini di f(x)=0

2) $x^3 + 4x^2 - 10 + x = x \quad \rightarrow \; x(x^2 + 4x \quad + 1) = 10 + x \quad \rightarrow$

$$x = \frac{10+x}{(x^2+4x \quad +1)} \rightarrow \qquad g_2(x) = \frac{10+x}{(x^2+4x \quad +1)}$$

3) $x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2(x+4) = 10 \quad \rightarrow$

$$x = \sqrt{\frac{10}{x+4}} \quad \rightarrow \quad g_3(x) = \sqrt{\frac{10}{x+4}}$$

4) Dividiamo entrambi i membri di f(x)=0 per $x \neq 0$

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 10}{x} = 0 \;\rightarrow\; x^2 + 4x - \frac{10}{x} = 0 \;\rightarrow\; x = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$$

$$\rightarrow g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$$

La funzione di iterazione g non è unica e può essere costruita nei modi più diversi, ma non tutti daranno luogo a strumenti efficienti.

Bisogna studiare sotto quali condizioni la successione delle iterate appartenga sempre al dominio di f e sia convergente ad α .

TEOREMA DI CONVERGENZA LOCALE (di Ostrowski)

Sia α un punto fisso di $g \in C^1[\alpha-\rho,\alpha+\rho]$, $\rho > 0$. Se

$$|g'(x)| < 1, \quad \forall x \in [\alpha-\rho,\alpha+\rho]$$

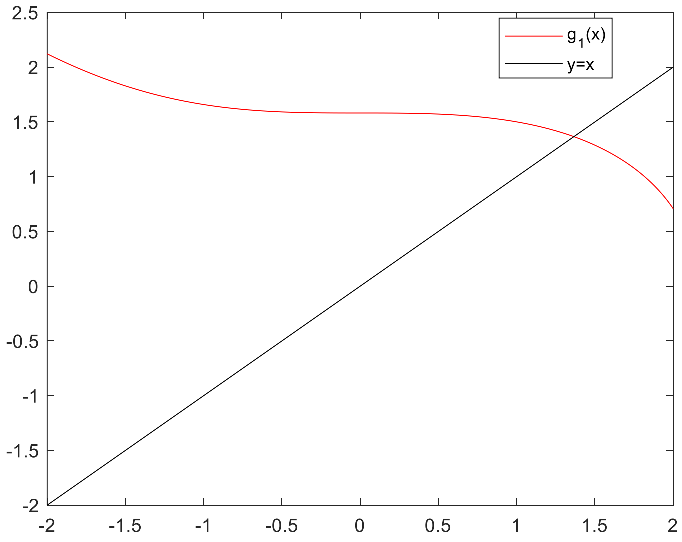
allora $\forall x_0 \in [\alpha-\rho,\alpha+\rho]$ la successione delle iterate $\{x_i\}_{i\geq 1}$ generata da g è tale che

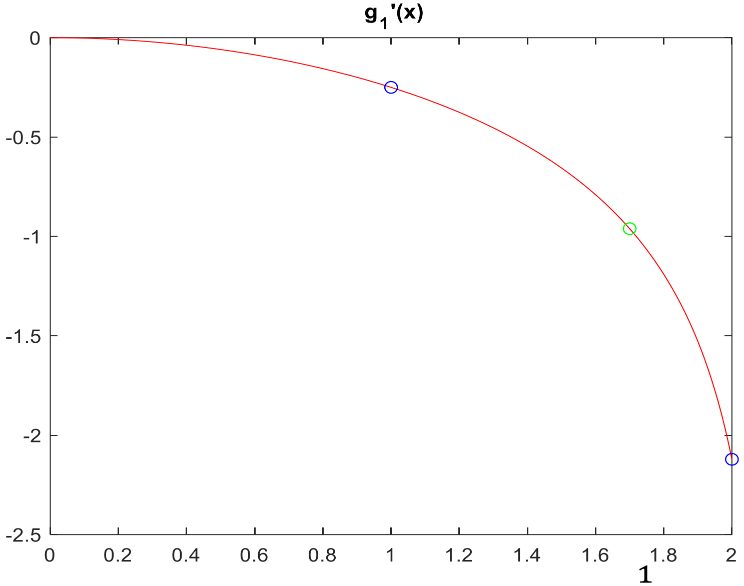
1. $x_i \in [\alpha-\rho,\alpha+\rho]\ \forall i \geq 1$,
2. $\lim_{i\to+\infty} x_i = \alpha$ unico punto fisso di g.

Studiamo quindi $g'_1(x), g'_2(x), g'_3(x), g'_4(x)$ e vediamo se soddisfano le ipotesi del teorema di convergenza locale.

$$g_1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$$

$$g'_1(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{10 - x^3}}(-3x^2) = \frac{-3x^2}{4\sqrt{10 - x^3}}$$





$$g'_1(x) < 0 \quad \text{per } x < 10^{\frac{1}{3}}$$

$g'_1(x) < 0$ per $x < 10^{\frac{1}{3}} \approx 2.1544$

Si verifica che $-1 < g'_1(x) < 0$ in (0,1.71].

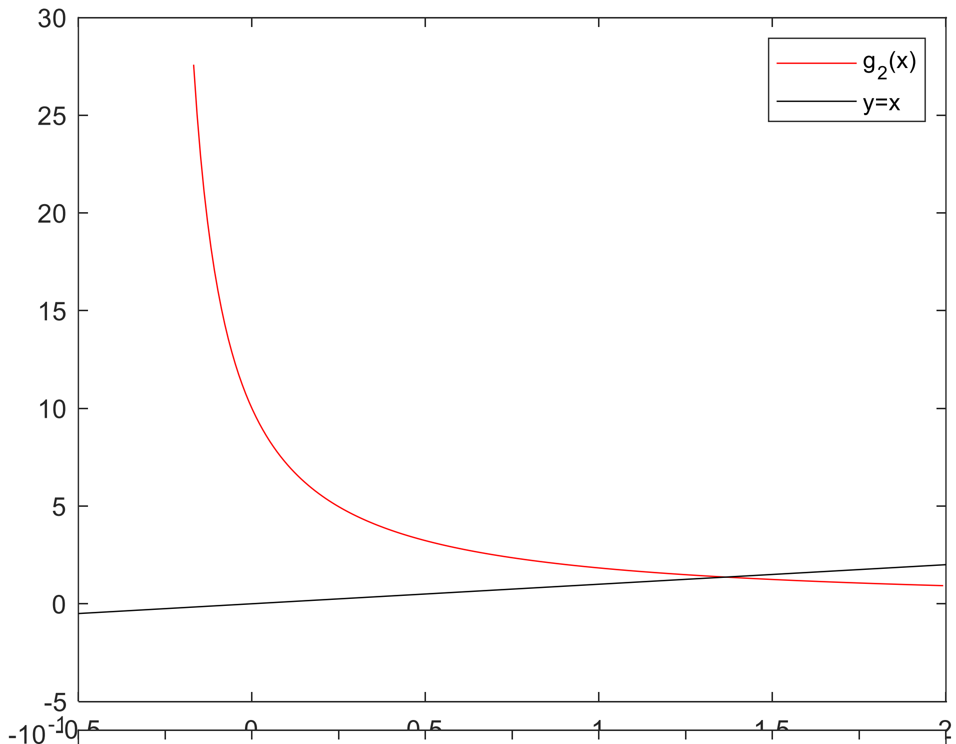
$|g'_1(x)| \neq 0 \; in \; (0{,}1.71]$ quindi il metodo iterativo generato da $g_1(x)$ ha convergenza lineare.

La costante asintotica di convergenza è data $|g'_1(\alpha)|$

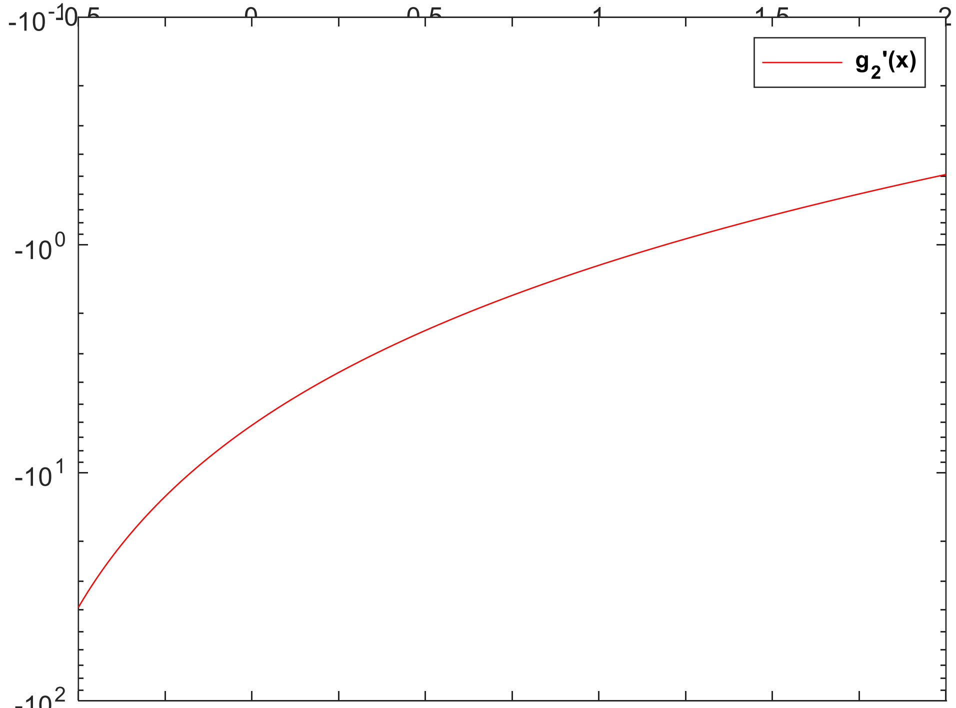
$$g_2(x) = \frac{10 + x}{(x^2+4x \quad + 1)}$$

Campo di esistenza

$$x \neq -2 - \sqrt{3} \approx -3.73$$
$$x \neq -2 + \sqrt{3} \approx -0.26$$



$$g'_2(x) = \frac{-x^2 - 20x - 39}{(x^2 + 4x + 1)^2}$$



Si verifica che $-1 < g'_2(x) < 0$ in [1.3,2], il metodo converge.

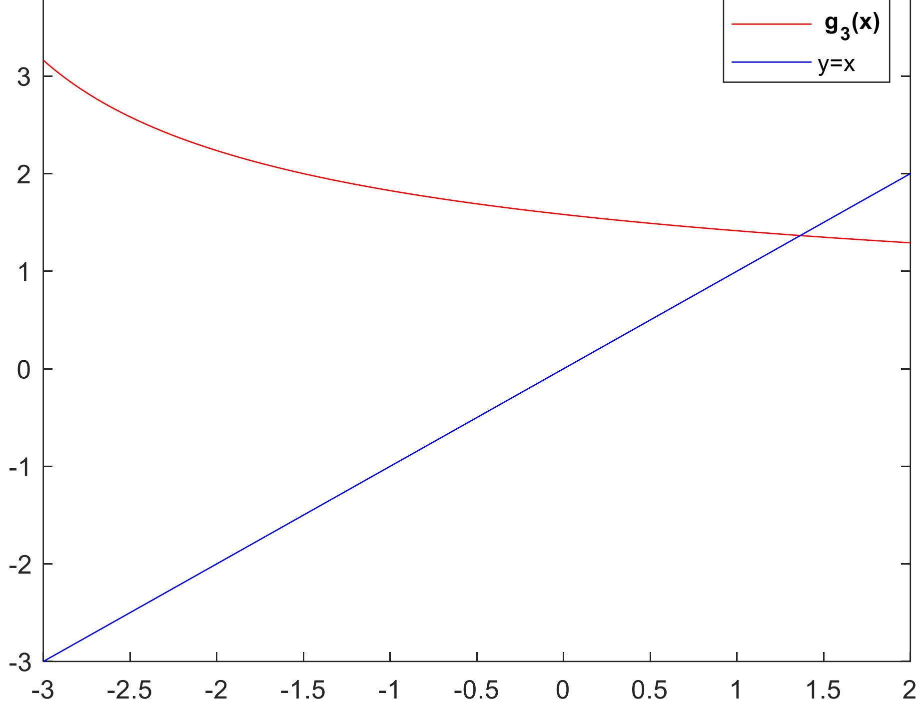
$|g'_2(x)| \neq 0 \; in \; [1.3,2]$ quindi il metodo iterativo generato da $g_2(x)$ ha convergenza lineare.

La costante asintotica di convergenza è data $|g'_2(\alpha)|$

Campo di esistenza:

$$g_3(x) = \sqrt{\frac{10}{x+4}}$$

$x > -4$

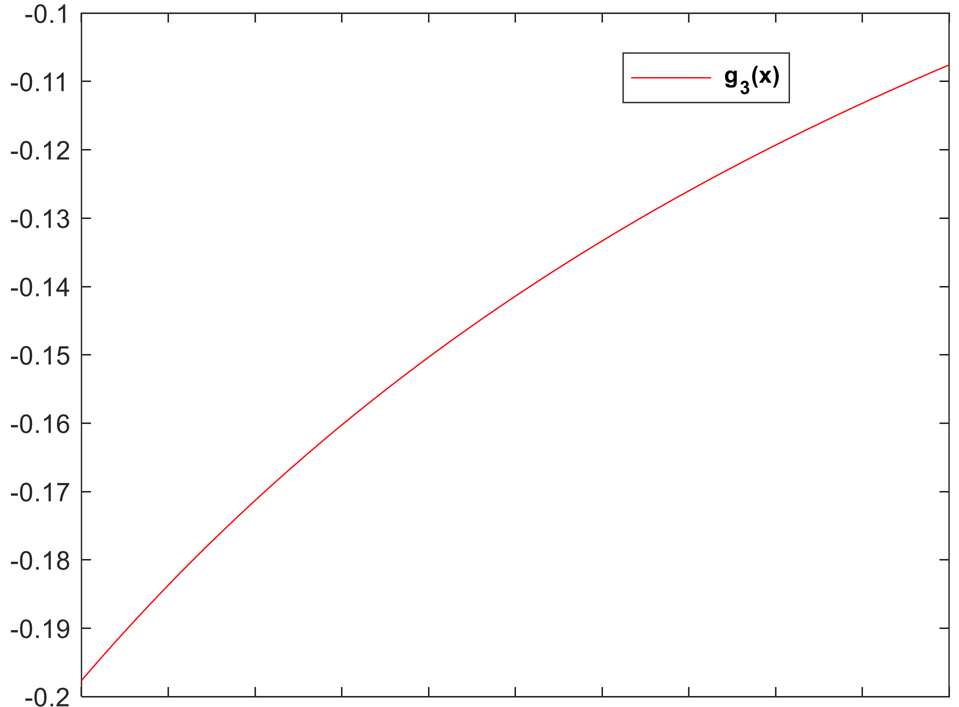


Calcolo la derivata prima

$$g'_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{10}{x+4}}}\left(\frac{-10}{(x+4)^2}\right) = -\frac{\sqrt{10}}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x+4}}}\frac{1}{(x+4)^2}$$

Campo di esistenza:

$x > -4$



Segno $g'_3(x) < 0$ sul suo campo di esistenza e quindi anche in I=[0,2]

Si verifica che $-1 < g'_3(x) < 0$ in I, il metodo converge.

$|g'_3(x)| \neq 0 \; in \; I$ quindi il metodo iterativo generato da $g_3(x)$ ha convergenza lineare.

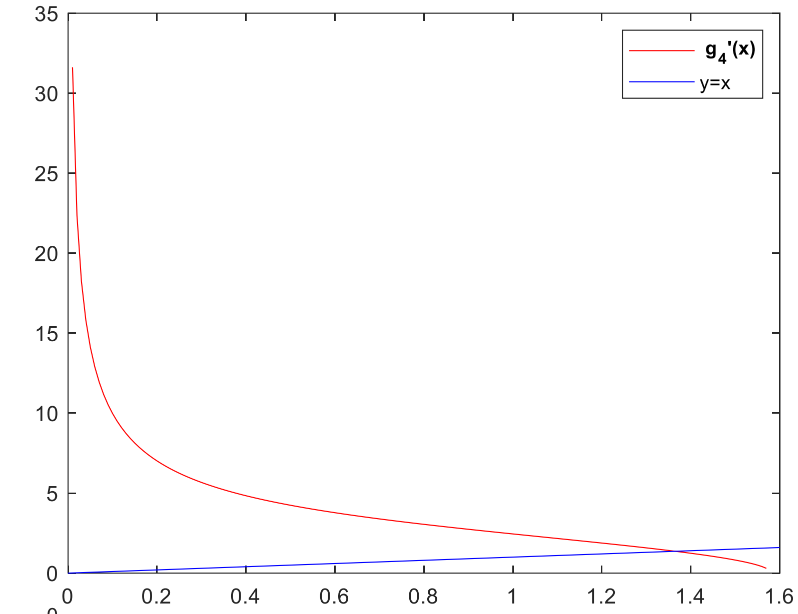
La costante asintotica di convergenza è data $|g'_3(\alpha)|$

$$g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$$

$$Campo\ di\ esistenza\ di\ g_4(x) \quad \left(-\infty, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$$

La visualizziamo in $\left(0, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

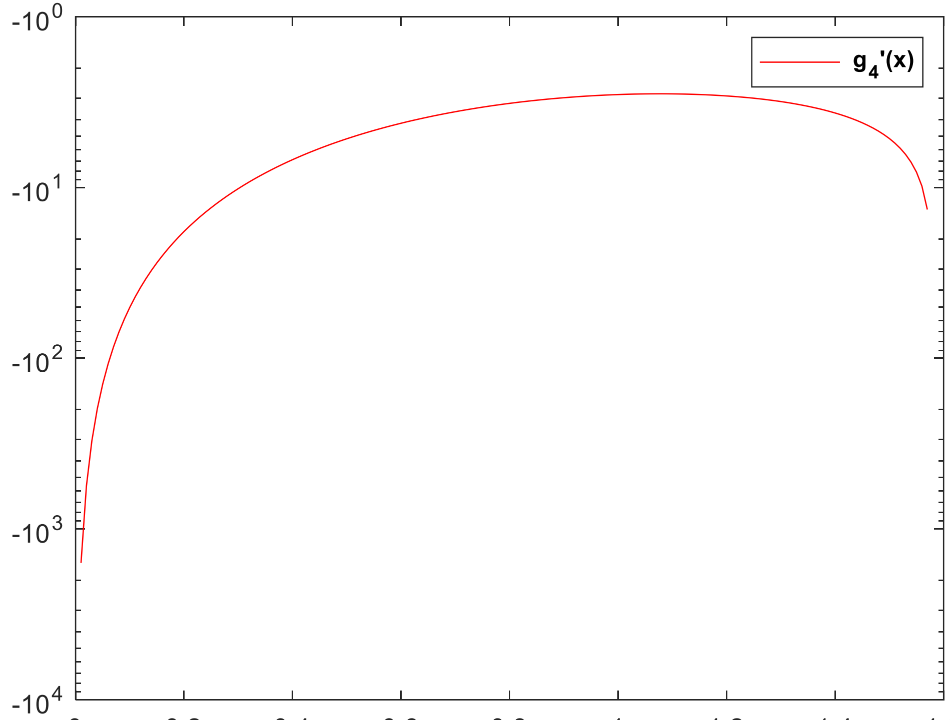
Calcoliamo la derivata prima di $g_4(x)$



$$g'_4(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{10}{x} - 4x}}\left(-\frac{10}{x^2} - 4\right)$$

$$Campo\ di\ esistenza\ di\ g_4(x) \quad \left(-\infty, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$$

Si osserva facilmente che $g'_4(x) < 0$ sul suo dominio ed anche su I.



g_4(x) non soddisfa le ipotesi del teorema, il metodo non converge.

N.B. A parità di ordine di convergenza, è più veloce il metodo di iterazione funzionale, con coefficiente di convergenza asintotica più bassa.