Corso di Laurea Triennale in Ingegneria e Scienze Informatiche

---

Metodi Numerici **A.A. 2020-2021**

Esercitazione N. 2
Aritmetica Floating point, Condizionamento, Stabilità

---

1. Si consideri il sistema di numeri macchina $F(10, 2, -3, 3)$. Calcolare il punto medio del segmento $[a, b] = [0.96e-1, \ 0.99e-1]$ secondo le formule $(a+b)/2$ e $a + (b-a)/2$. Commentare i risultati.

2. Dire per quali valori di α la soluzione dell'equazione $x^2 - 4x + \alpha = 0$ risulta essere un problema mal condizionato.

3. Mostrare, con degli esempi, che la risoluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + 5y = 10 \\ 3.01x + 5.01y = 1 \end{cases}$$

al variare (per esempio) del coefficiente di x nella seconda equazione risulta essere un problema mal condizionato. Cosa si può dire del sistema

$$\begin{cases} 5x + 10y = 15 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \quad ?$$

4. Assegnato il sistema lineare $Ax = b$, con

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 63 & 662.2 \\ 63 & 662.2 & 6967.8 \\ 662.2 & 6967.8 & 73393.5664 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 2.33 \\ 1.7 \end{bmatrix}$$

   - trovare il vettore soluzione x (usando il metodo solve del modulo linalg di Scipy);
   - perturbare la matrice dei coefficienti della quantità

$$\delta A = 0.01 * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   quindi calcolare l'errore relativo sulla soluzione e confrontarlo con la perturbazione relativa sui dati di ingresso. Cosa si osserva?

5. Assegnato il sistema lineare $Ax = b$, con A matrice di Hilbert di ordine 4 e $b = [1, 1, 1, 1]^T$,

   - trovare il vettore soluzione x ((usando il metodo solve del modulo linalg di Scipy););

- perturbare il vettore dei termini noti della quantità

$$\delta b = 0.01 \; * \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

quindi calcolare l'errore relativo sulla soluzione e confrontarlo con la perturbazione relativa sui dati di ingresso. Cosa si osserva?

6. Determinare l'intervallo I dei valori di a, b per cui l'algoritmo

$$fl(fl(a+b) \; * \; fl(a-b))$$

risulta numericamente più stabile dell'algoritmo

$$fl(fl(a^2) - fl(b^2)).$$

Implementare uno script Python che, presa in input una coppia di valori a e b contenuti nell'intervallo I sopra determinato, confronti i due errori relativi.

7. Calcolare l'approssimazione di $\exp(x)$ mediante lo sviluppo in serie di Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ opportunamente troncato, confrontandolo con il valore fornito dalla funzione di libreria `exp` mediante calcolo dell'errore relativo. Più precisamente si implementi il seguente algoritmo di calcolo

$$\begin{array}{l} Exp_n = Exp_{n-1} + \frac{x^n}{n!} \quad \text{per} \quad n \geq 1 \\ Exp_0 = 1 \end{array}$$

fintanto che il nuovo valore differisce dal precedente. Si consiglia di calcolare il nuovo termine $x^n/n!$ facendo uso del termine precedente $x^{n-1}/(n-1)!$.
Verificare inoltre che, per valori negativi di x, è preferibile considerare l'espressione equivalente

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}},$$

dove e^{-x} viene approssimata con il metodo sopra indicato.

8. Calcolare l'approssimazione della derivata prima di $f(x) = \sin(x)$ in $x = 1$ mediante il rapporto incrementale $(f(x+h) - f(x))/h$ per valori decrescenti di h, confrontandolo con il valore fornito dalla funzione di libreria per $f'(x)$ mediante calcolo dell'errore relativo.