Esercizio 2

1) Dire per quali valore di α la soluzione dell'equazione $x^2 - 4x + \alpha = 0$ risulta essere un problema mal condizionato.

Le radici sono $x_1 = 2 + \sqrt{4 - \alpha}$ (1) $\qquad x_2 = 2 - \sqrt{4 - \alpha}$ (2)

Mettiamoci nell’ipotesi in cui le radici siano reali e distinte, con discriminante positivo.

Vogliamo studiare per quali valori di α, il problema di calcolare le 2 radici (1) e (2) sia mal condizionato;

ciò equivale a valutare il malcondizionamento del problema di valutare due funzioni:

$$f_1(\alpha) = 2 + \sqrt{4-\alpha} \text{ ed } f_2(\alpha) = 2 - \sqrt{4-\alpha}$$

Partiamo con studiare il condizionamento di $\boldsymbol{f_2(\alpha) = 2 - \sqrt{4 - \alpha}}$.

A tale scopo valutiamo l'indice di condizionamento

$$K_2 = \frac{|f_2{}'(\alpha)| \ \ |\alpha|}{|f_2\,(\alpha)|}$$

$f_2(\alpha) = 2 - \sqrt{4-\alpha}$. Si ha che $f_2'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{4-\alpha}}$

$$K_2 = \frac{|f_2'(\alpha)| \quad |\alpha|}{|f_2(\alpha)|} \qquad K_2(\alpha) = \frac{\left|\frac{1}{2\sqrt{4-\alpha}}\right| \quad |\alpha|}{\left|2-\sqrt{4-\alpha}\right|}$$

Osservando la formula dell'indice di condizionamento si nota che, affinchè esso cresca in maniera illimitata , deve accadere che $2-\sqrt{4-\alpha}$ tenda a zero.

Per $|\alpha|$ più piccolo dello spacing in $[2^2, 2^3]$, cioè

$s = 2^{2+1-53} = 8.88178419e-016$, si ha che $4-\alpha$ viene approssimato a 4

e conseguentemente $2-\sqrt{4-\alpha}$ approssimato a zero.

Il problema di valutare $f_2(\alpha) = 2-\sqrt{4-\alpha}$ risulta malcondizionato per $|\alpha|$ più piccolo dello spacing in $[2^2, 2^3]$.

Studiamo adesso il condizionamento di $\boldsymbol{f_1(\alpha) = 2 + \sqrt{4 - \alpha}}$.

A tale scopo valutiamo l'indice di condizionamento

$$K_1 = \frac{|f_1'(\alpha)| \quad |\alpha|}{|f_1\,(\alpha)|}$$

$\boldsymbol{f_1(\alpha) = 2 + \sqrt{4 - \alpha}}$**.** Si ha che $f_1'(\alpha) = -\frac{1}{2\sqrt{4-\alpha}}$

$$K_1 = \frac{|f_1{}'(\alpha)| \quad |\alpha|}{|f_1\ (\alpha)|} \qquad\qquad K_1(\alpha) = \frac{\left|-\frac{1}{2\sqrt{4-\alpha}}\right| \quad |\alpha|}{\left|2+\sqrt{4-\alpha}\right|}$$

Osservando la formula dell'indice di condizionamento si nota che il denominatore non si annulla mai.

In questo caso, infatti, anche se per $|\alpha|$ più piccolo dello spacing in $[2^2, 2^3]$, cioè $s = 2^{2+1-53} = 8.88178419..e - 016$, si ha che $4 - \alpha$ viene approssimato a 4, il denominatore $2 + \sqrt{4 - \alpha}$ approssimato a 4.

Il problema di valutare $\boldsymbol{f_1(\alpha) = 2 + \sqrt{4 - \alpha}}$ risulta ben condizionato per qualunque valore di $\boldsymbol{\alpha}$.