Corso di Laurea Triennale in Ingegneria e Scienze Informatiche

---

Metodi Numerici **A.A. 2020-2021**

Esercitazione N. 3
Metodi per il calcolo di zeri di funzione
Codici e sperimentazione numerica

Obiettivo

Sperimentazione numerica relativa ai metodi per il calcolo di zeri di funzione.

Codici

Scrivere le function `bisezione.py`, `falsi.py`, `corde.py`, `newton.py` e `secanti.py` che implementino rispettivamente il metodo di bisezione, di falsa posizione, delle corde, di Newton e delle secanti per il calcolo di zeri di funzione.
Tali function devono assumere come dati in input:

- `fname` nome della fuzione di cui calcolare lo zero (e pure `fpname` nome della funzione derivata prima nel caso di `Newton`);
- x_0 valore di innesco del metodo (e pure x_{-1} nel caso di `secanti`);
- `tolx` tolleranza per il test d'arresto sull'incremento

$$|x_{k+1} - x_k|/|x_{k+1}| < tolx;$$

- `tolf` tolleranza per il test del residuo

$$|f(x_{k+1})| < tolf;$$

- `NMAX` numero massimo di iterazioni.

In output devono essere restituiti l'approssimazione dello zero `x` e il numero di iterazioni effettuate `nit`.
N.B. Nel caso del metodo di bisezione e di falsa posizione si considera per il test di arresto l'ampiezza del sottointervallo confrontata con `tolx`.

Sperimentazione numerica

1. Confrontare i metodi sopra implementati nei casi seguenti:
   - $f(x) = \exp(-x) - (x + 1)$ in $[-1, 2]$ con $x_0 = -0.5$, $x_{-1} = -0.3$, $tolx = 1.e - 12$, $tolf = 1.e - 12$;
   - $f(x) = \log_2(x + 3) - 2$ in $[-1, 2]$ con $x_0 = -0.5$, $x_{-1} = 0.5$, $tolx = 1.e - 12$, $tolf = 1.e - 12$;
   - $f(x) = \sqrt{x} - \frac{x^2}{4}$ in $[1, 3]$ con $x_0 = 1.8$, $x_{-1} = 1.5$, $tolx = 1.e - 12$, $tolf = 1.e - 12$.

Mostrare in un grafico in scala semilogaritmica sulle ordinate (comando semilogy) l'andamento di $e_k = |x_k - \alpha|$, $k = 1, ..., nit$, sapendo che $\alpha = 0, 1, 2^{4/3}$ nei tre casi.
Calcolare infine, a partire dai valori di $\{x_k\}$ con k sufficientemente grande, la stima dell'ordine di convergenza p come

$$p \approx \ln \left| \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x_{k-1}} \right| \Big/ \ln \left| \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}} \right|,$$

e si confronti il valore ottenuto con quello atteso.

2. Considerare il metodo di Newton e delle secanti per approssimare la più piccola radice positiva di $f(x) = \tan(x) - x$ entro una tolleranza pari a $1.e - 8$ (sia per la x che per la f). Precisamente, si determini il punto iniziale x_0 come la j-esima (con $1 \leq j \leq 4$) iterata del metodo di bisezione su $[a, b] = [3/5\pi, 37/25\pi]$, mentre si assuma $x_{-1} = a$ per il metodo delle secanti. Cosa si osserva per le diverse scelte di x_0?

3. Utilizzare il metodo di Newton per determinare le radici dell'equazione $f(x) = atan(x)$ con $x_0 = 1.2$, 1.4 assumendo $tolx = 1.e - 6$ e $tolf = 1.e - 5$. Che cosa si osserva?

4. Utilizzare il metodo di Newton e il metodo di Newton modificato per il calcolo dello zero di molteplicità 2 della funzione $f(x) = x^3 + x^2 - 33x + 63$ con $x_0 = 1$, $tolx = 1.e - 12$ e $tolf = 1.e - 12$. Calcolare infine, a partire dai valori di $\{x_k\}$ ottenuti nei due casi, la stima dell'ordine di convergenza p.

5. Si converta l'equazione $x^2 - 5 = 0$ nel problema di punto fisso

$$x = x - c(x^2 - 5) \equiv g(x).$$

Si scelgano diversi valori di c che assicurino la convergenza di $x_{k+1} = x_k - c(x_k^2 - 5)$ a $\alpha = \sqrt{5}$ e si confrontino i risultati applicando il metodo di iterazione del punto fisso quando $x_0 = 2.5$, $tolx = 1.e - 8$. Si disegnino infine su uno stesso grafico, la retta $y = x$, il grafico della funzione $g(x)$, i punti di coordinate $(x_k, 0)$ per ogni $k \geq 0$, insieme alla poligonale di vertici (x_k, x_k), (x_k, x_{k+1}), $k \geq 0$, così da poter visualizzare sia la convergenza alla soluzione $\alpha = \sqrt{5}$ che il procedimento del metodo.

6. Applicare il metodo di iterazione del punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$ per determinare lo zero dell'equazione $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ quando $x_0 = 1.5$, $tolx = 1.e - 7$ e $nmax = 1000$, proponendo diverse scelte della funzione di iterazione g per garantire:

   (a) convergenza lineare con costante asintotica di convergenza prossima a 0;

   (b) convergenza lineare con costante asintotica di convergenza prossima a 0.5;

   (c) convergenza lineare con costante asintotica di convergenza prossima a 1.