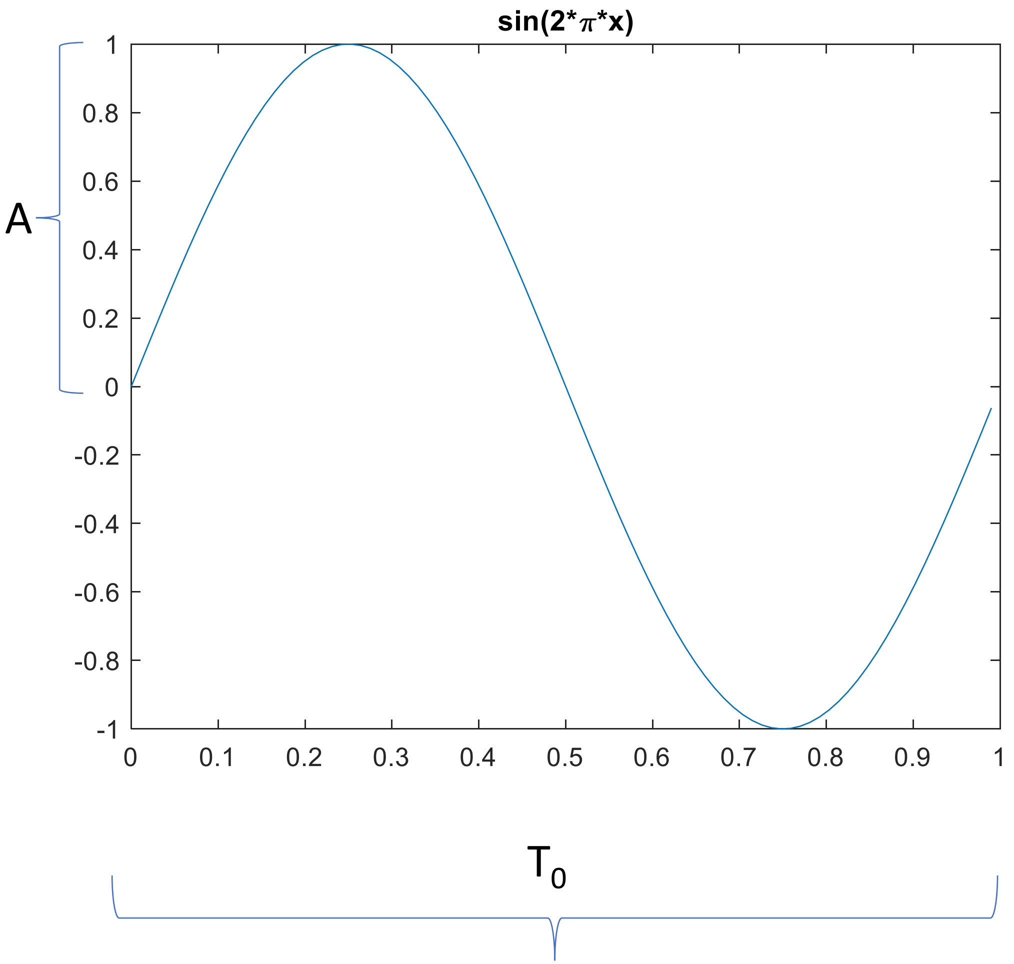
Interpolazione Trigonometrica e Trasformata di Fourier Discreta

- L’idea alla base della analisi di Fourier di un segnale è la seguente:
- Ogni funzione (segnale o immagine) che gode di determinate proprietà può essere espressa come **combinazione lineare di funzioni sinusoidali di frequenza crescente** combinati con **pesi opportuni**.
- Questi pesi **rappresentano i coefficienti di Fourier.**



La funzione $A \; \sin(2\pi\omega \; \mathrm{x})$

ha periodo $T_0 = 1/\ \omega$.

Frequenza f= 1 / $(T_0)= \omega$

Ampiezza A

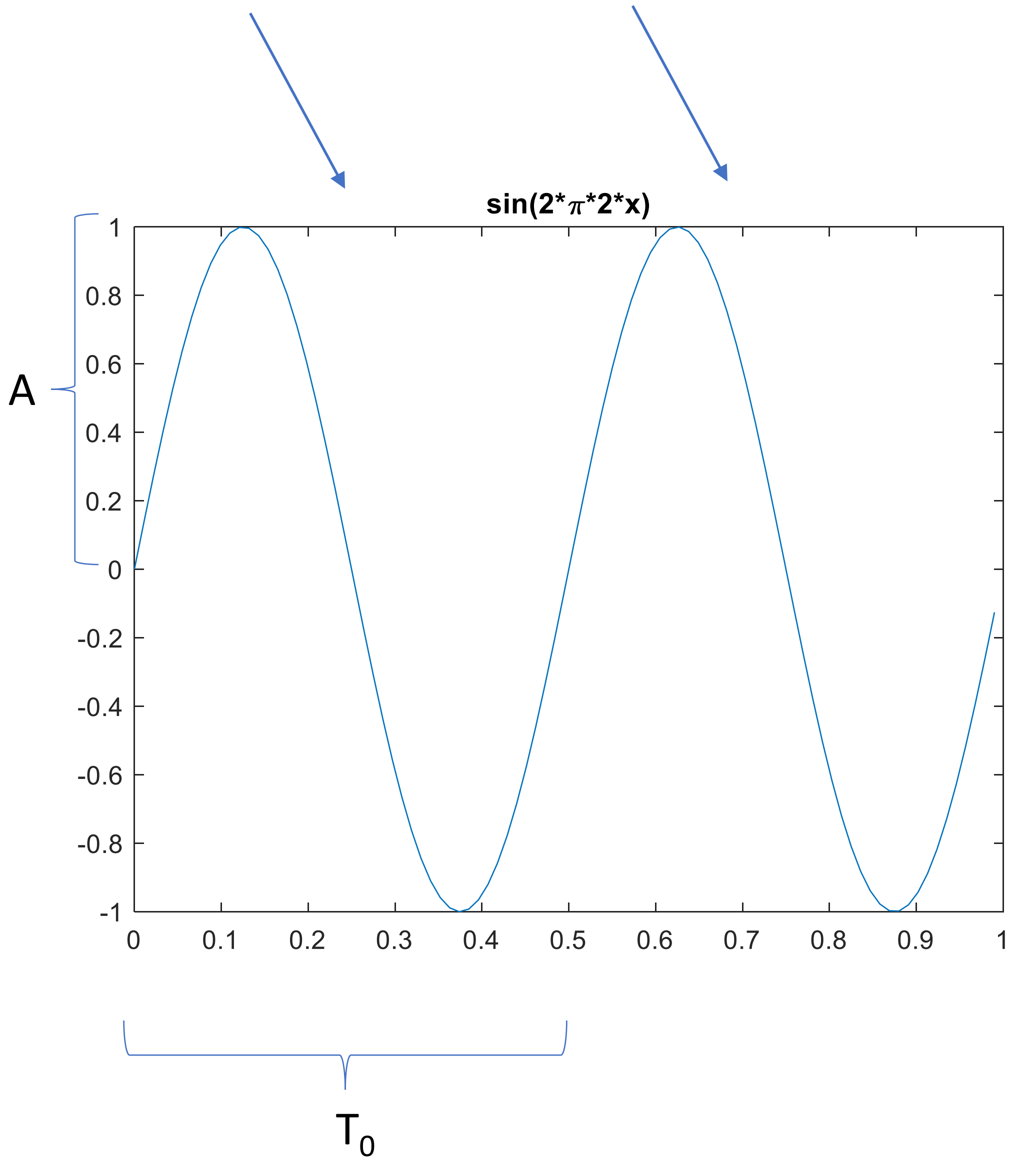
Frequenza f: numero di volte che la funzione seno si ripete nell'intervallo [0,1]

La funzione $A \; sin(2\pi x)$

ha periodo $T_0 = 1/\ \omega=1$.

Frequenza f= 1 / $(T_0)= \omega = 1$

Ampiezza A



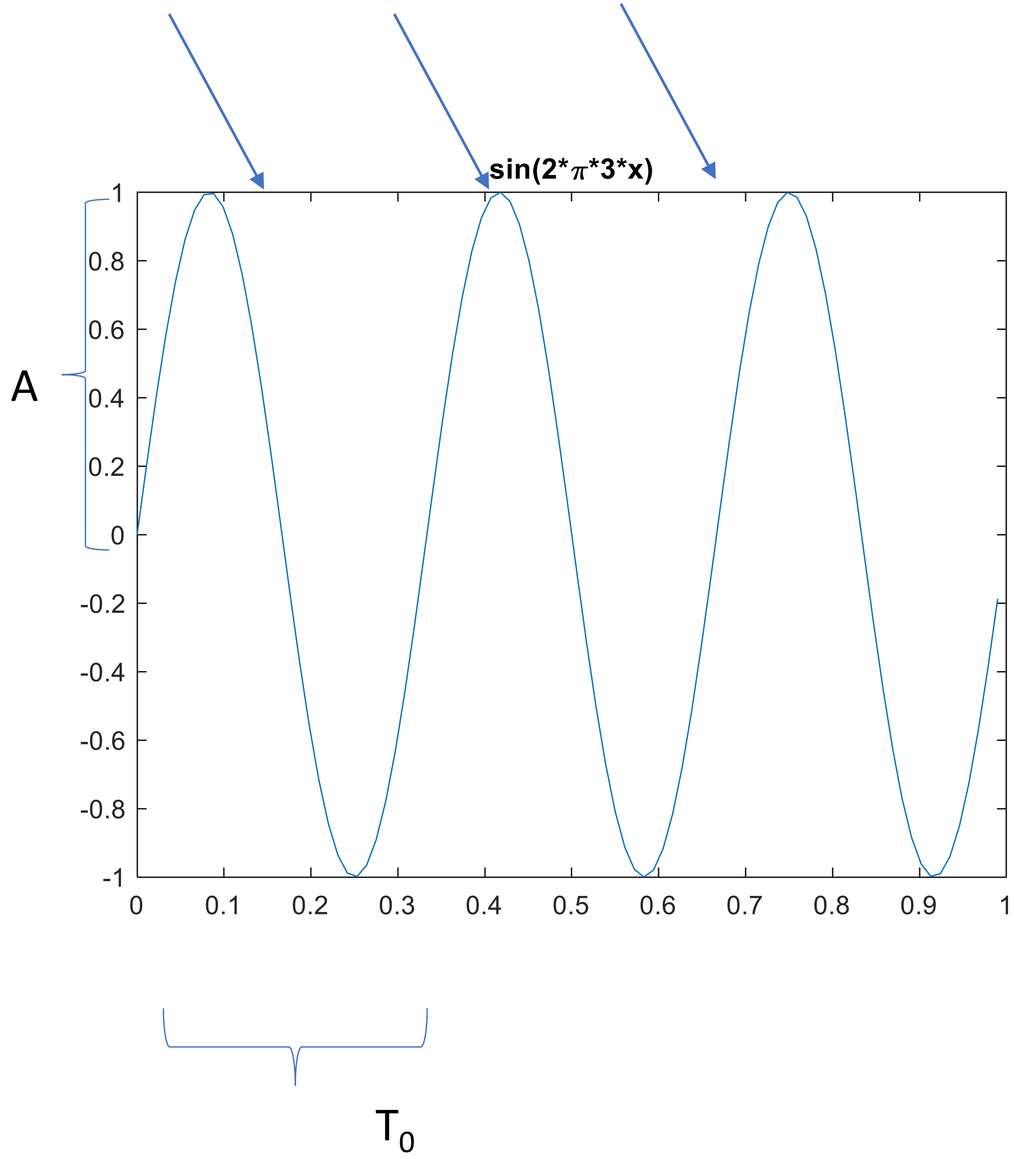
La funzione $\sin(2\,\pi\,\omega\,x)$ $\quad \omega = 2$

ha periodo T_0= 1/2 .

Frequenza f= 1 / (T_0)= 2

Ampiezza A

Frequenza f= 2: si ripete 2 volte nell'intervallo [0,1]



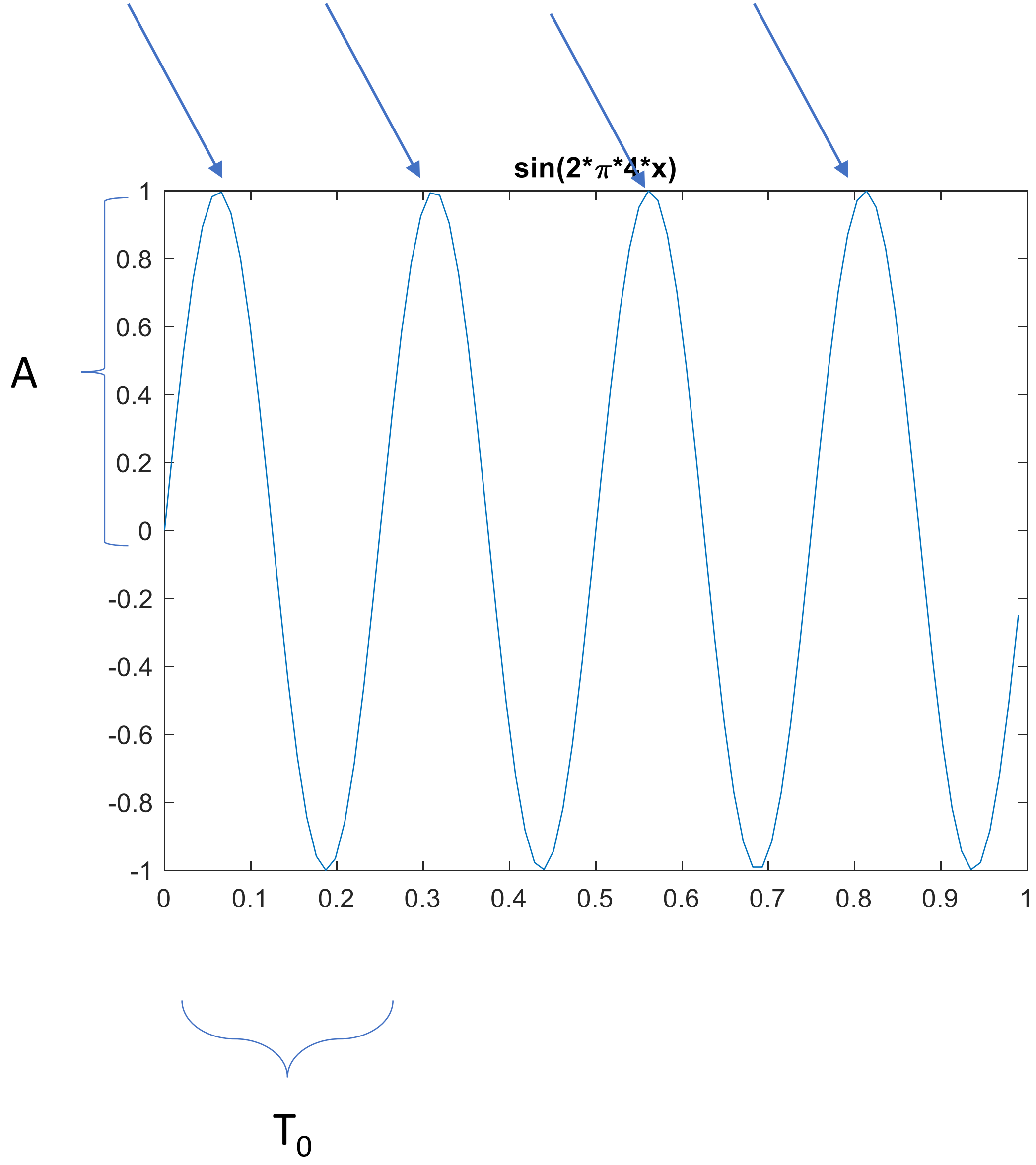
La funzione $\sin(2\,\pi\,3\,x)$ $\omega = 3$

ha periodo T_0= 1/3 .

Frequenza f= 1 / (T_0)= 3

Ampiezza A

Frequenza f= 3: si ripete 3 volte nell'intervallo [0,1]



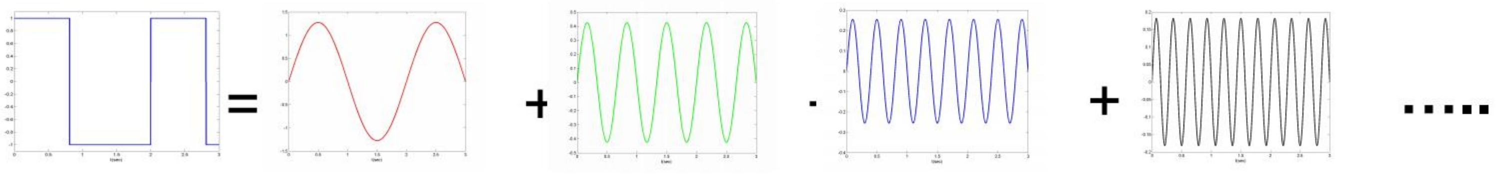
La funzione $\sin(2\,\pi\,4\,x)$ $\quad \omega = 4$

ha periodo T_0= 1/4 .

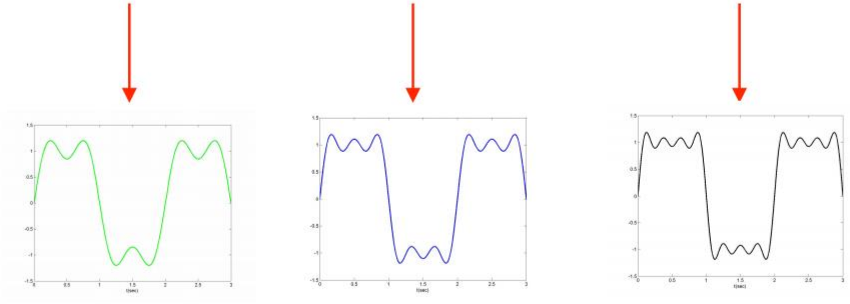
Frequenza f= 1 / (T_0)= 4

Ampiezza A

Frequenza f= 4: si ripete 4 volte nell’intervallo [0,1]



somma di infinite oscillazioni sinusoidali opportunamente pesate



- Per introdurla, partiamo con il considerare il problema dell’interpolazione Trigonometrica.

Vogliamo approssimare una funzione f : [0, 2π] → C periodica, cioè tale che che f(x+2π) = f(x), con un polinomio trigonometrico $\tilde{f}$ che la interpoli negli n+1 nodi equispaziati

$$x_j = \frac{2\pi j}{n+1}, \qquad j = 0, \dots, n,$$

ovvero tale che

$$\tilde{f}\,(x_j) = f\left(x_j\right), \quad j = 0, \dots n$$

L'interpolatore trigonometrico $\tilde{f}$ si ottiene mediante una combinazione lineare di seni e coseni.

Una funzione della forma

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{m} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

è detta polinomio trigonometrico di grado *m*

Poiché, per k=0, cos(0)=1 e sin(0)=0, la formula precedente è equivalente a

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Il polinomio trigonometrico di grado *m* è una combinazione lineare di 2m+1 funzioni base:
$(1, \cos(x), \cos(2x), \dots, \cos(mx), \sin(x), \sin(2x), \dots, \sin(mx))$

Consideriamo il caso in cui *n* è pari, allora **m=n/2**, così avremo n+1 condizioni da imporre per ottenere i 2m+1 coefficienti a_k, k=0,..m e b_k, k=1,..m

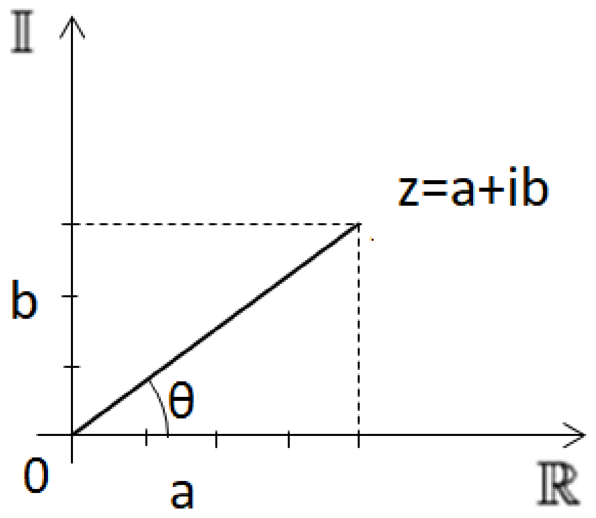
$$\tilde{f}(x_j) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos(kx_j) + b_k \sin(kx_j)) \qquad j = 0, \dots n$$

Riduciamo il problema dell’interpolazione trigonometrica in un problema di interpolazione polinomiale.

Per poter fare ciò

Numeri Complessi

Rappresentazione nel ***piano di Argand-Gauss,*** *z=(a,b).*



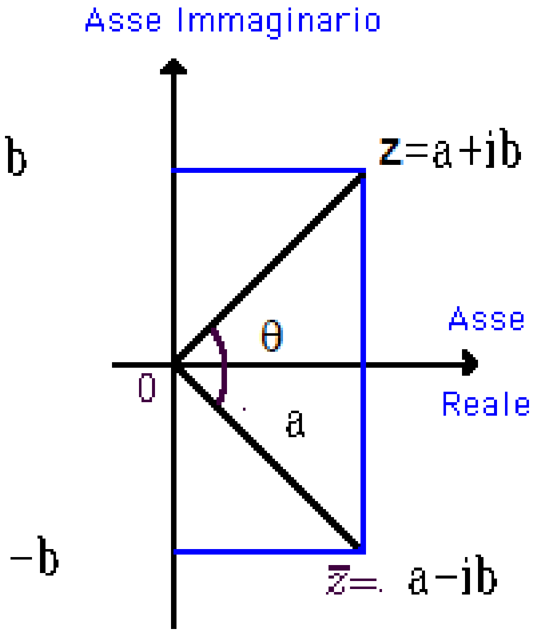
Si definisce **modulo** di un numero complesso z, e si indica con $|z|$, la distanza tra il punti z=(a,b) e l'origine del piano di Gauss

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

Coniugato

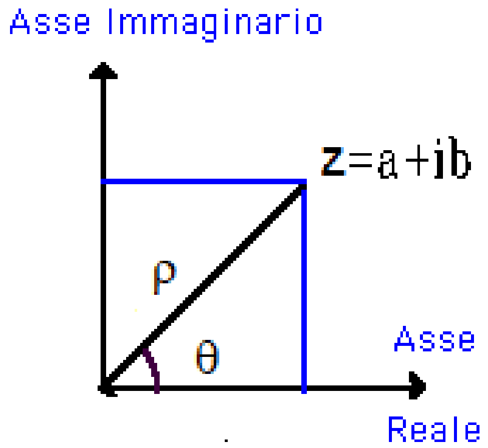
$$z= a + ib;\ \bar{z} = a - ib$$

$\bar{z}$ è in una posizione speculare rispetto all’asse x rispetto al numero z.



Forma trigonometrica

rappresentazione in termini del **modulo** ρ del segmento che congiunge il punto nel piano con l'origine **e dell'angolo** θ che esso forma con l'asse reale, quindi la forma trigonometrica si basa su due elementi: e.



$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$ **modulo**

$$\theta = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right) = \text{atan}\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)$$ **Angolo di fase, o argomento di z**

$$\boldsymbol{z = \rho(\cos(\theta) + i\,sin(\theta))}$$

Potenza:
Formula di **De Moivre** si ha che:

$$(\cos(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{i} \cdot \sin(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{n}} = \cos(\boldsymbol{nx}) + \boldsymbol{i} \cdot \sin(\boldsymbol{nx}),$$

allora il calcolo della potenza si esegue in questo modo:

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{n}} = \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{n}}[\cos(\boldsymbol{n\theta}) + \boldsymbol{i} \cdot \sin(\boldsymbol{n\theta})].$$

Formula di Eulero
La formula di Eulero afferma che, per ogni numero reale *x si ha*:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

Dalla formula di Eulero si ricava **la forma esponenziale o polare di un numero complesso:**

$$z = \rho \, e^{i\theta}$$

La formula di Eulero permette anche di interpretare le funzioni seno e coseno come semplici varianti della funzione esponenziale:

- $e^{ix} = \cos(x) + i sin(x)$

- $e^{-ix} = \cos(x) - i sin(x)$

- $\boldsymbol{\cos(x) = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})}{2}}$
- $\boldsymbol{\sin(x) = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})}{2i}}$
-

Per le formule di De Moivre risulta inoltre:

- $(e^{ix})^k = \cos(kx) + i\, sin(kx)$

- $(e^{-ix})^k = \cos(kx) - i\, sin(kx)$

- $\cos(kx) = \frac{(e^{ikx} + e^{-ikx})}{2}$
- $\sin(kx) = \frac{(e^{ikx} - e^{-ikx})}{2i}$
-

Sostituiamo le espressioni di $\cos(kx)$ e di $\sin(kx)$ appena ricavati, nella formula del polinomio trigonometrico

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(a_k \frac{(e^{ikx} + e^{-ikx})}{2} + b_k \frac{(e^{ikx} - e^{-ikx})}{2i} \right)$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2}(a_k + \frac{1}{i} b_k) e^{ikx} + \frac{1}{2}(a_k - \frac{1}{i} b_k) e^{-ikx} \right)$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2}(a_k + \frac{i}{i^2} b_k) e^{ikx} + \frac{1}{2}(a_k - \frac{i}{i^2} b_k) e^{-ikx} \right)$$

Poiché i^2=-1, si ha

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2}(a_k - i\, b_k) e^{ikx} + \frac{1}{2}(a_k + i\, b_k) e^{-ikx} \right)$$

Ponendo

$c_0 = a_0$

$c_k = \frac{1}{2}(a_k - i\, b_k)$ $\qquad 1 \le k \le m$

$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + i\, b_k)$

La formula

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2}(a_k - i\, b_k) e^{ikx} + \frac{1}{2}(a_k + i\, b_k) e^{-ikx} \right)$$

si può scrivere come:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}$$

Poniamo:

$$z = e^{ix}$$

la formula

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}$$

diventa

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k z^k$$

Costruiamo

$$F(x) = z^m \tilde{f}(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k z^k z^m = \sum_{k=-m}^{m} c_k z^{k+m} = \sum_{k=0}^{2m} c_{k-m} z^k$$

Ponendo $\widetilde{c_k} = c_{k-m}$

Si conclude che

$$F(x) = \sum_{k=0}^{2m} \widetilde{c_k} z^k$$

Il problema di interpolazione trigonometrica

$$\tilde{f}(x_j) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(a_k \cos(kx_j) + b_k \sin(kx_j)\right) = f(x_j) \qquad j = 0, \dots n$$

È equivalente al problema di interpolazione polinomiale

$$F(x_j) = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{c_k} z_j^k \quad = f(x_j) \qquad j = 0, \dots n$$

La matrice del sistema lineare è la matrice di Vandermonde:

$$V = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_0^1 & \cdots & z_0^n \\ z_1^0 & z_1^1 & \vdots & z_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_n^0 & z_n^1 & \cdots & z_n^n \end{bmatrix}$$

Che ha determinante diverso da zero purchè $z_j \neq z_k, i \neq$k. E ciò è vero sotto l'ipotesi che $x_j \neq x_k, i \neq$k

Se i punti x_j, j=0,..n non sono equidistanti, allora si può risolvere il problema calcolando il polinomio interpolatore di Lagrange

Se i punti x_j, j=0,..n sono equidistanti, $x_j = \frac{2\pi j}{n+1}$, j=0,..,n si procede nel seguente modo:

$$F(x_j) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{c_k} z_j^k \quad = f(x_j) \qquad\qquad j = 0, \dots n$$

equivale al sistema lineare

$$V\ \tilde{c}_k = f$$

dove $f = [f(x_0), f(x_1),..., f(x_n)]$

La matrice V è ortogonale nel campo dei numeri complessi, per cui la sua inversa consiste con la sua Trasposta Coniugata V^* .

$V^*\ V \ = (n+1)I$, dove I è la matrice identità di ordine n+1

Premoltiplicando ambo i membri di

$$V\ \tilde{c}_k = f$$

per V*

$$V^*V\ \tilde{c}_k = V^*f$$

$$(n+1)\ \tilde{c}_k = V^*f$$

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{n+1} V^*f$$

Ed essendo $z_j^k = e^{kx_j}$, il suo complesso e coniugato è dato da: $\bar{z}_j^k = e^{-kx_j}$,

e la matrice trasposta e coniugata diventa

$$V^* = \begin{bmatrix} \overline{z_0^0} & \overline{z_1^0} & \cdots & \overline{z_n^0} \\ \overline{z_0^1} & \overline{z_1^1} & \vdots & \overline{z_n^1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{z_0^n} & z_1^n & \cdots & z_n^n \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{-ix_0}, & e^{-ix_1}, & \vdots & e^{-ix_n}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{-inx_0}, & e^{-inx_1}, & \cdots & e^{-inx_n}, \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c} = \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{-ix_0}, & e^{-ix_1}, & \vdots & e^{-ix_n}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{-inx_0}, & e^{-inx_1}, & \cdots & e^{-inx_j}, \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f(x_j) e^{-ikx_j} \quad k = 0, .., n$$

Sostituendo

$$x_j = \frac{2\pi j}{n+1}$$

si ha:

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f(x_j) e^{-i\frac{2\pi kj}{n+1}}$$

I coefficienti $\tilde{c}_k$, k=0,..n sono i **coefficienti di Fourier della sequenza** $f(x_k), k = 0, .., n$

Ricordiamo che dai $\widetilde{c_k}$ possiamo risalire ai coefficienti c_{k-m}

$$c_{k-m} = \widetilde{c_k} \qquad k = 0,..,m$$

E dalle relazioni

$$c_0 = a_0$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - i\, b_k) \qquad 1 \leq k \leq m$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + i\, b_k)$$

possiamo risalire ai coefficienti a_k, k=0,..,m e $b_k, k = 1, \dots, m$ del polinomio trigonometrico interpolante:

$$\boldsymbol{a_0} = c_0$$

$$c_k + c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k - i\, b_k + a_k + i\, b_k)$$

$$\boldsymbol{a_k = c_k + c_{-k}}$$

$$c_{-k} - c_k = \frac{1}{2}(a_k + i\, b_k - a_k + i\, b_k)$$

$$\boldsymbol{b_k = \frac{c_{-k} - c_k}{i} = i(c_k - c_{-k})}$$

$$\boldsymbol{a_0} = c_0$$

$$\boldsymbol{a_k = c_k + c_{-k}} = 2\, Re(\boldsymbol{c_k})$$

$$\boldsymbol{b_k = i(c_k - c_{-k})} \; = -2\, Im(\boldsymbol{c_k})$$

Nel caso in cui *n* è pari,e quindi **m=n/2**, le formule appena $viste\ per\ i\ coefficienti\ a_k$, k=0,..m e b_k, k=1,..m, ci permettono di costruire il polinomio trigonometrico che interpola gli *n+1* punti equdistanti

$$\tilde{f}(x_j) = \; a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(a_k \cos(kx_j) + b_k \sin(kx_j)\right) \qquad\qquad j = 0, \dots n$$

Consideriamo il caso in cui *n* è dispari, ed **m=(n-1) /2**, il polinomio trigonometrico interpolante assumerà la seguente forma:

$$\tilde{f}(x\quad) = a_0 + \sum_{k=1}^{m+1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Imponendo le *n+1* condizioni di interpolazione

$$\tilde{f}(x_j) = a_0 + \sum_{k=1}^{m+1} \left(a_k \cos(kx_j) + b_k \sin(kx_j)\right) \qquad\qquad j = 0, \dots n$$

Avremo che il sistema lineare che ne deriva avrà n+1 equazioni ed 2m+1 incognite con **m=(n-1) /2, quindi** $2\left(\frac{n-1}{2}+1\right)+1 = n+2$ incognite.

Il problema di determinare il polinomio interpolatore $\tilde{f}$ diventa ben posto solo dopo aver ridotto a n + 1 il numero delle incognite.

Una possibile scelta consiste in a_{m+1}=$\boldsymbol{c_{m+1}}$ e b_{m+1}=0

$$\boldsymbol{\tilde{f}(x\quad) = a_0 + \sum_{k=1}^{m+1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))}$$

Trasformata Discreta di Fourier

- Supponiamo di avere N+1 campioni, ottenuti campionando una funzione a passo Δx nei nodi $x_0 + k\Delta x$

$$f_0, f_1, \dots, f_n$$

Facciamo l'ipotesi che questi N+1 dati appartengano ad un periodo di una funzione periodica discreta.

- La Trasformata discreta di Fourier è definita come:

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f_j \; e^{-i\frac{2\pi k j}{n+1}}$$

campionata nei punti $k\Delta u, k = 0, .. N-1,$ dove $\Delta u = \frac{1}{N\Delta x}$

e la trasformata di Fourier inversa che a partire dai coefficienti di Fourier permette di ricostruire la funzione campionata è data da

$$f_j = \sum_{k=0}^{n} c_k \; e^{i\frac{2\pi k j}{n+1}}$$

La Trasformata di Fourier è un ponte tra il dominio del tempo e quello delle frequenze di un fenomeno fisico, ossia è una lente che consente di “vedere” le componenti ondulatorie di un segnale.

L’importanza dell’analisi di Fourier deriva dal fatto che molti fenomeni in natura hanno un carattere ciclico (dalla scala planetaria ai cristalli) e, grazie all’applicazione della serie e della trasformata di Fourier, si possono analizzare e studiare, ottenendo informazioni essenziali sulle loro caratteristiche, non deducibili immediatamente dal modello canonico.

Filtraggio di un segnale (signal processing)

Uno dei problemi applicativi per il quale è fondamentale la DFT è il trattamento dei segnali (acustici, ottici, elettrici,etc.).

Daremo qui un breve cenno di tale problema.
Consideriamo un segnale acustico:
Uno degli obiettivi fondamentali consiste nel ridurre l'influenza di segnali estranei o del rumore (noise) e risalire al segnale originale : filtraggio .
Alcune fonti di segnali estranei o rumori sono:
dispositivo di emissione o ricezione (radar, satellite, telefono, radio,…)
mezzo di propagazione (aria,acqua,…)
interferenze esterne (campo magnetico, elettrico,…)

Un segnale in genere rappresenta un fenomeno evolutivo in funzione del tempo di tipo ondulatorio :
onda = sovrapposizione di più onde elementari(armoniche)

Le armoniche elementari che costituiscono l'onda non si "vedono" nella sua espressione in funzione del tempo, ma si ottengono "scomponendo" l'onda con la trasformata di Fourier,che ne dà l'espressione in funzione di oscillazioni pure(seni e coseni).

In tal modo si può effettuare il filtraggio di un segnale:

individuare nel segnale eventuali armoniche spurie, eliminarle e ricostruire il segnale.

La prima fase del filtraggio consiste nel campionare il segnale (trasformarlo da continuo a discreto).

Dato il segnale continuo f(t) si ottengono i valori campionati fj , j=0,…,N.

Applicando la DFT al vettore così ottenuto si ha il vettore: c_k , k=0,…,N ampiezze delle armoniche elementari .

Ottenuto tale vettore il segnale originario si può esprimere, tramite la IDFT, come combinazione lineare delle armoniche che lo compongono

$$f_j = \sum_{k=0}^{n} c_k \, e^{i\frac{2\pi k j}{n+1}}$$

Il vettore c fornisce quindi le ampiezze delle frequenze che compongono il segnale ed è detto spettro del segnale.
Esempio.

Supponiamo che il segnale ricevuto è il segnale originale f(t)=sin(2π5t)+sin(2 π 10t) a cui si è sovrapposto il ’’rumore2
5sin (2 π 30t).