
Esercitazione N. 7

Formule di Quadratura di Newton-Cotes

Obiettivo

sviluppo dei codici relativi alle formule di quadratura di Newton-Cotes nella versione composita, automatica.

Sperimentazione numerica relativa alle formule di quadratura implementate.

Codici

1. Scrivere le function per calcolare una approssimazione di

$$\int_a^b f(x)dx$$

con la formula dei trapezi composita e la formula di Simpson composita assegnando in input la funzione integranda f , gli estremi di integrazione a e b , il numero di sottointervalli N in cui suddividere l'intervallo $[a, b]$.

Trapezi composita:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{H}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f(z_j) + f(b) \right) =: I_T^{(N)}(f)$$

Simpson composita:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{H}{6} \left(f(a) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f(z_j) + 4 \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{z_j + z_{j+1}}{2}\right) + f(b) \right) =: I_S^{(N)}(f)$$

con $H = \frac{b-a}{N}$ e $z_j = a + hj$, $j = 0, \dots, N$. I rispettivi resti sono dati da

$$r_T^N = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f^{(2)}(\xi) \quad \text{e} \quad r_S^N = -\frac{(b-a)^5}{2880N^4} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

2. Scrivere due function che, utilizzando rispettivamente le formule composite dei trapezi e di Simpson (con raddoppio degli intervalli), forniscano una approssimazione di $\int_a^b f(x)dx$ entro una tolleranza tol fissata in input.

Sperimentazione numerica

1. Si approssimi con la formula dei trapezi e la formula di Simpson composite, per valori di $N = 2^k$, $k = 1 : 8$, l'integrale $\int_0^1 f(x)dx$ per le funzioni

(a) $f(x) = x^{10}$,

(b) $f(x) = \log(x + 1)$,

(c) $f(x) = \arcsin(x)$.

Si confrontino i valori ottenuti con l'integrale esatto e si illustri con una tabella e un grafico (in scala semilogaritmica) l'andamento dell'errore relativo.

2. **Quadratura automatica:** Si utilizzino le function relative alle formule di quadratura automatica dei trapezi e di Simpson per fornire una approssimazione dei seguenti integrali con $tol = 1.e - 6$:

(a) $\int_1^2 \log(x) dx$,

(b) $\int_0^1 \sqrt{x} dx$,

(c) $\int_{-1}^1 |x| dx$.

3. Calcolare con la formula dei trapezi e di Simpson composite un'approssimazione dei seguenti integrali

(a) $\int_0^2 \cos(x) dx$,

(b) $\int_{-2\pi}^0 x \exp(x) \cos(x^2) dx$,

(c) $\int_0^{\pi/2} (\sin(x))^\alpha \cos(x) dx$, $\alpha = 13/2, 5/2, 1/2$,

utilizzando valori di tolleranza $tol = 1.e - k$ con $k = 4 : 10$. Rappresentare su tre grafici distinti e su tre tabelle, l'errore relativo (in scala logaritmica), il numero di sottointervalli N utilizzati e il numero di valutazioni della funzione integranda al variare di k .