

Identificação de sistemas lineares - Trabalho 4

Tassiano Neuhaus

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Departamento de Engenharia Elétrica
Av. Osvaldo Aranha, 103 - Bairro Bom Fim CEP: 90035-190 - Porto Alegre - RS - Brasil

Resumo—Trabalho 4 - Questões

Palavras-chave—Identificação de sistemas lineares, métodos paramétricos.

I. QUESTÃO 1

Questão: verificar de o LSE (estimador de mínimos quadrados) produz estimativas não polarizadas no caso de estrituras do tipo ARX ARMAX e OE.

Genericamente, modelos utilizados para identificação de sistemas podem ser representados pela equação (1).

$$A(z, \theta)Y(t) = \frac{B(z, \theta)}{F(z, \theta)}U(t) + \frac{C(z, \theta)}{D(z, \theta)}e(t) \quad (1)$$

Onde:

$$\begin{aligned} A(z, \theta) &= 1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_{na} Z^{-na} \\ B(z, \theta) &= b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots + b_{nb} Z^{-nb} \\ C(z, \theta) &= 1 + c_1 Z^{-1} + c_2 Z^{-2} + \dots + c_{nc} Z^{-nc} \\ D(z, \theta) &= 1 + d_1 Z^{-1} + d_2 Z^{-2} + \dots + d_{nd} Z^{-nd} \\ F(z, \theta) &= 1 + f_1 Z^{-1} + f_2 Z^{-2} + \dots + f_{nf} Z^{-nf} \end{aligned}$$

Baseado nestas informações existem modelos onde apenas alguns destes polinômios são diferentes de 1. Na Tabela (I) são apresentados alguns destes modelos mais comumente utilizados.

Tabela I

MODELOS COMUMENTE UTILIZADOS PARA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Modelo	Polinômios diferentes de 1
FIR	B
ARX	A B
ARMAX	A B C
ARMA	A C
ARARMAX	A B C D
OE	B F
BJ	B F C D

A. ARX

A partir de (1) tem-se que o modelo ARX fica (2).

$$A(z, \theta)Y(t) = B(z, \theta)U(t) + e(t) \quad (2)$$

A equação (2) pode ser reescrita :

$$Y(t) = b_1 Z^{-1}U(t) + b_2 Z^{-2}U(t) + \dots + b_{nb} Z^{-nb}U(t) - a_1 Z^{-1}Y(t) - b_2 Z^{-2}Y(t) - \dots - a_{na} Z^{-na}Y(t) + e(t)$$

O que pode ser escrito como em (3).

$$Y(t) = \varphi'(t)\theta + e(t) \quad (3)$$

Onde:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{na} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{nb} \end{bmatrix} \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ \vdots \\ y(t-na) \\ u(t-1) \\ \vdots \\ u(t-nb) \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi'(1) \\ \varphi'(2) \\ \vdots \\ \varphi'(N) \end{bmatrix}$$

Pode -se então encontrar a estimativa de θ , ou seja $\hat{\theta}$.

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= (\Phi'\Phi)^{-1}(\Phi'(\Phi\theta_0 + e)) = \theta_0 + (\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'e \\ E\{\hat{\theta}\} &= \theta_0 + (\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'E\{e(t)\} \end{aligned}$$

Mas como $E\{e(t)\} = 0$, pois o ruído possui média zero. A estimativa de $\hat{\theta}$ é o próprio θ .

De forma semelhante pode-se escrever:

$$\begin{aligned} E\{(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)'\} &= E\{((\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'e)((\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'e)'\} \\ &= (\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'E\{e e'\}\Phi(\Phi'\Phi)^{-1} \\ &= E\{(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)'\} = \text{conv}(\hat{\theta}) = \lambda^2(\Phi'\Phi)^{-1} \\ &\text{pois : } E\{e e'\} = \lambda^2 I \end{aligned}$$

Já que a convolução da estimativa $\hat{\theta}$ corresponde ao valor encontrado, o erro de polarização para o sistema ARX é igual a zero.

B. ARMAX

A partir de (1) tem-se que o modelo ARMAX fica (4).

$$A(z)Y(t) = B(z, \theta)U(t) + C(z, \theta)e(t) \quad (4)$$

A equação (4) pode ser reescrita :

$$\begin{aligned} Y(t) &= b_1 Z^{-1}U(t) + b_2 Z^{-2}U(t) + \dots + b_{nb} Z^{-nb}U(t) \\ &- a_1 Z^{-1}Y(t) - b_2 Z^{-2}Y(t) - \dots - a_{na} Z^{-na}Y(t) + e(t) \\ &+ c_1 Z^{-1}e(t) + c_2 Z^{-2}e(t) + \dots + c_{nc} Z^{-nc}e(t) \end{aligned}$$

O que pode ser escrito como em (3). Onde:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{na} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{nb} \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{nc} \end{bmatrix} \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ \vdots \\ y(t-na) \\ u(t-1) \\ \vdots \\ u(t-nb) \\ e(t-1) \\ \vdots \\ e(t-nb) \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi'(1) \\ \varphi'(2) \\ \vdots \\ \varphi'(N) \end{bmatrix}$$

O sistema é apresentado na forma para que seja aplicado o critério dos mínimos quadrados mas existem valores na matriz $\phi(t)$ que não são mensuráveis ($e(t-1)\dots$) o que torna o modelo não aplicável para este método de minimização. Desta forma se o método for aplicado, teremos erro de polarização no resultado obtido.

II. QUESTÃO 2

Questão: Seja o sistema ARX (5):

$$G_o(z) = \frac{2}{z-0.8} \quad H_o(z) = \frac{z}{z-0.8} \quad (5)$$

E com ruído branco com $\lambda^2 = 0.1$.

- Realize uma simulação aplicando na entrada um ruído branco com $\lambda^2 = 1$.
- Plote 100 estimativas de $\hat{\theta}$, a elipse de 95% de confiança e verifique o valor médio obtido e avalie a polarização da estimativa.
- Repita o item anterior com $H(z) = 1$.

A. Item 1 e 2

Para realização desta simulação foi utilizado o script apresentado no Anexo 1.

Utilizando um ruído branco como entrada, com média zero, e $\lambda^2 = 1$, obtém-se os resultados apresentados na Figura (2).

Observa-se que as estimativas em média chegam relativamente próximas ao valor real ($a=2$, $b=0.8$). Desta forma conclui-se que não há erro de polarização. Quando o ruído inserido não possui média zero, há a observação de erro de polarização, como é apresentado na Figura (??).

Neste caso, os valores médios encontrados foram $b=0.8129$ e $a=2.003$ e no caso onde a média é zero, os valores estimados médios foram de $a=1.9999$ e $b=0.8000$.

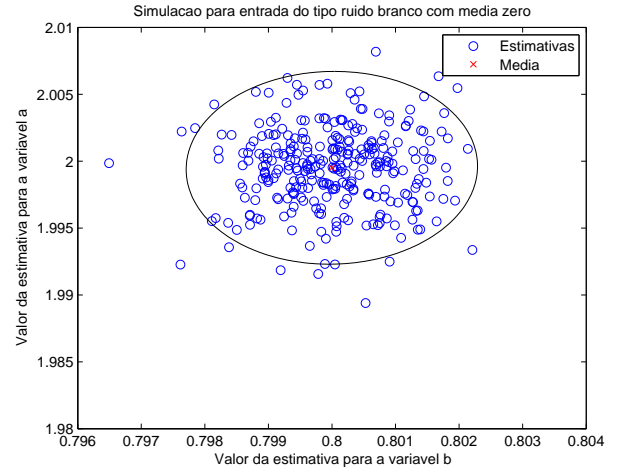


Figura 1. Entrada aleatória aplicada no processo para a identificação do sistema.

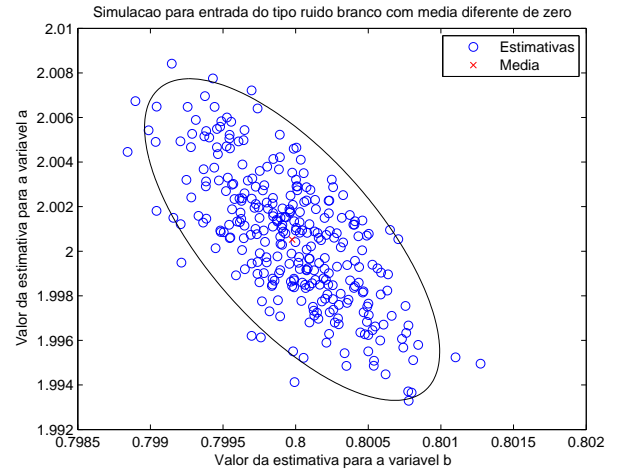


Figura 2. Entrada aleatória aplicada no processo para a identificação do sistema. Média diferente de zero.

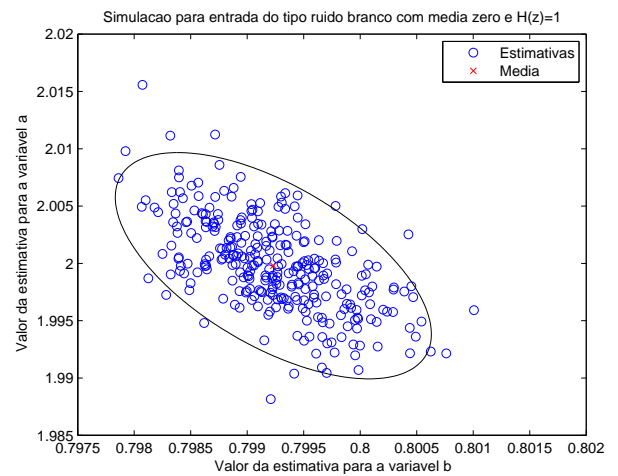


Figura 3. Entrada aleatória aplicada no processo para a identificação do sistema. Ruído sujeito a $H(z) = 1$.

B. Item 3

Na figura (3) observa-se a simulação para o mesmo sistema do item anterior, mas com o ruído branco sujeito a função de transferência $H(z) = 1$. Observa-se que a acuracidade da média dos pontos não é a mesma que quando a função de transferência $H(z)$ é como em (5).

Outro ponto para destacar é que a elipse que para $H(z)$ como apresentado em (5) era próxima à um círculo, neste exercício com $H(z) = 1$ é mais 'achatada', demonstrando que a confiabilidade das estimativas não é mais simétrica para as duas variáveis em questão.

APÊNDICE

1 - Script para estimar parâmetros da função de transferência

```
%=====
% Identificacao de sistemas
% Tassiano Neuhaus
% tassianors@gmail.com
% UFRGS
%=====
close all; clear all;

% Definitions
Ts=10e-3;
Tf=10;
STD=0.1;
tempo = 0:Ts:Tf;
N=size(tempo, 2);

M=300;

% TFs
G=tf([2],[1 -0.8], Ts);
% item 1 e 2
%H=tf([1 0],[1 -0.8], Ts);
% item 3
H=tf([1],[1], Ts);

% Replace the default stream with a stream whose
seed is based on CLOCK, so
% RAND will return different values in different
MATLAB sessions
RandStream.setDefaultStream(
    RandStream('mt19937ar', 'seed',
        sum(100*clock)));

% identification using MMQ
% model y(t)=2*u(t-1)+0.8*y(t-1) +u(t) +0.8*y(t-1)
teta=[0.8; 1; 2];
n=size(teta, 1);
% e entrada u saida do controlador
%phy=[y(t-1); u(t); u(t-1)]

% numero de vezes que sera aplicado o metodo.
a=zeros(M,1);
b=zeros(M,1);
for j=1:M
    % make a random noise with std = 0.1
    ran=rand(N, 1);
    s=std(ran);
    % now ran_s has std=1;
    ran_s=ran/s;
    m=mean(ran_s);
    % make noise be zero mean
    rh=(ran_s-m)*STD;

    % make a random noise with std = 1
    ran=rand(N, 1);
    s=std(ran);
    m=mean(ran);
```

```
% now rr has std=1;
rr=(ran-m)/s;

yr=lsim(G, rr, tempo);
ynoise=lsim(H, rh, tempo);
y=yr+ynoise;
u=rr;

phy=zeros(N, n);
for t=2:N
    phy(t, 1)=y(t-1);
    phy(t, 2)=u(t);
    phy(t, 3)=u(t-1);
end

% make sure, rank(phy) = n :)
teta_r=inv(phy'*phy)*phy'*y;
% to be used in graphic plot
a(j)=teta_r(1);
b(j)=teta_r(3);
end
PN=[a, b];
ma=mean(a);
sa=std(a);
mb=mean(b);
sb=std(b);
plot(a, b, 'bo');
hold;
plot(ma, mb, 'rx');
hold;
title('Simulacao para entrada do tipo ruído branco
com media zero e H(z)=1')
xlabel('Valor da estimativa para a variavel b')
ylabel('Valor da estimativa para a variavel a')
legend('Estimativas', 'Media')

%valor da tabela chi-quadrado para 95% de confianca
chi = 5.991;
ang = linspace(0,2*pi,360)';
[avetor,SCR,avl] = princomp(PN);
Diagonal= diag(sqrt(chi*avl));
ellipse=[cos(ang) sin(ang)] * Diagonal * avetor' +
    repmat(mean(PN), 360, 1);
line(ellipse(:,1), ellipse(:,2), 'linestyle', '-',
    'color', 'k');
```

Listing 1. Descriptive Caption Text