

Identificação de sistemas lineares - Trabalho 5

Tassiano Neuhaus

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Departamento de Engenharia Elétrica
Av. Osvaldo Aranha, 103 - Bairro Bom Fim CEP: 90035-190 - Porto Alegre - RS - Brasil

Resumo—Trabalho 5, identificar um modelo ARX e também um modelo para $S \in M$.

Palavras-chave—Identificação de sistemas lineares, métodos paramétricos.

I. INTRODUÇÃO

Neste trabalho será apresentado um modelo ARX para um sistema que não pode ser completamente representado por este modelo. Em seguida será utilizado um modelo mais completo e será feito um comparativo qualitativo das estimativas obtidas para o modelo utilizando cada um dos métodos.

II. QUESTÃO 1

Questão: verificar de o LSE (estimador de mínimos quadrados) produz estimativas não polarizadas no caso de estrituras do tipo ARX ARMAX e OE.

Genericamente, modelos utilizados para identificação de sistemas podem ser representados pela equação (1).

$$A(z, \theta)Y(t) = \frac{B(z, \theta)}{F(z, \theta)}U(t) + \frac{C(z, \theta)}{D(z, \theta)}e(t) \quad (1)$$

Onde:

$$\begin{aligned} A(z, \theta) &= 1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_{na} Z^{-na} \\ B(z, \theta) &= b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots + b_{nb} Z^{-nb} \\ C(z, \theta) &= 1 + c_1 Z^{-1} + c_2 Z^{-2} + \dots + c_{nc} Z^{-nc} \\ D(z, \theta) &= 1 + d_1 Z^{-1} + d_2 Z^{-2} + \dots + d_{nd} Z^{-nd} \\ F(z, \theta) &= 1 + f_1 Z^{-1} + f_2 Z^{-2} + \dots + f_{nf} Z^{-nf} \end{aligned}$$

Baseado nestas informações existem modelos onde apenas alguns destes polinômios são diferentes de 1. Na Tabela (I) são apresentados alguns destes modelos mais comumente utilizados.

Tabela I
MODELOS COMUMENTE UTILIZADOS PARA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Modelo	Polinômios diferentes de 1
FIR	B
ARX	A B
ARMAX	A B C
ARMA	A C
ARARMAX	A B C D
OE	B F
BJ	B F C D

A. ARX

A partir de (1) tem-se que o modelo ARX fica (2).

$$A(z, \theta)Y(t) = B(z, \theta)U(t) + e(t) \quad (2)$$

A equação (2) pode ser reescrita :

$$Y(t) = b_1 Z^{-1}U(t) + b_2 Z^{-2}U(t) + \dots + b_{nb} Z^{-nb}U(t) - a_1 Z^{-1}Y(t) - b_2 Z^{-2}Y(t) - \dots - a_{na} Z^{-na}Y(t) + e(t)$$

O que pode ser escrito como em (3).

$$Y(t) = \varphi' \theta + e(t) \quad (3)$$

Onde:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{na} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{nb} \end{bmatrix} \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ \vdots \\ y(t-na) \\ u(t-1) \\ \vdots \\ u(t-nb) \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi'(1) \\ \varphi'(2) \\ \vdots \\ \varphi'(N) \end{bmatrix}$$

Pode -se então encontrar a estimativa de θ , ou seja $\hat{\theta}$.

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= (\Phi' \Phi)^{-1} (\Phi' (\Phi \theta_0 + e)) = \theta_0 + (\Phi' \Phi)^{-1} \Phi' e \\ E\{\hat{\theta}\} &= \theta_0 + (\Phi' \Phi)^{-1} \Phi' E\{e(t)\} \end{aligned}$$

Mas como $E\{e(t)\} = 0$, pois o ruído possui média zero. A estimativa de $\hat{\theta}$ é o próprio θ .

De forma semelhante pode-se escrever:

$$\begin{aligned} E\{(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)'\} &= E\{((\Phi' \Phi)^{-1} \Phi' e)((\Phi' \Phi)^{-1} \Phi' e)'\} \\ &= (\Phi' \Phi)^{-1} \Phi' E\{e e'\} \Phi (\Phi' \Phi)^{-1} \\ &= E\{(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)'\} = \text{conv}(\hat{\theta}) = \lambda^2 (\Phi' \Phi)^{-1} \\ &\text{pois : } E\{e e'\} = \lambda^2 I \end{aligned}$$

Já que a convolução da estimativa $\hat{\theta}$ corresponde ao valor encontrado, o erro de polarização para o sistema ARX é igual a zero.

B. ARMAX

A partir de (1) tem-se que o modelo ARMAX fica (4).

$$A(z)Y(t) = B(z, \theta)U(t) + C(z, \theta)e(t) \quad (4)$$

A equação (4) pode ser reescrita :

$$Y(t) = b_1 Z^{-1}U(t) + b_2 Z^{-2}U(t) + \dots + b_{nb} Z^{-nb}U(t) - a_1 Z^{-1}Y(t) - b_2 Z^{-2}Y(t) - \dots - a_{na} Z^{-na}Y(t) + e(t) + c_1 Z^{-1}e(t) + c_2 Z^{-2}e(t) + \dots + c_{nc} Z^{-nc}e(t)$$

O que pode ser escrito como em (3). Onde:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{na} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{nb} \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{nc} \end{bmatrix} \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ \vdots \\ y(t-na) \\ u(t-1) \\ \vdots \\ u(t-nb) \\ e(t-1) \\ \vdots \\ e(t-nb) \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi'(1) \\ \varphi'(2) \\ \vdots \\ \varphi'(N) \end{bmatrix}$$

O sistema é apresentado na forma para que seja aplicado o critério dos mínimos quadrados mas existem valores na matriz $\phi(t)$ que não são mensuráveis ($e(t-1) \dots$) o que torna o modelo não aplicável para este método de minimização. Desta forma se o método for aplicado, teremos erro de polarização no resultado obtido.

III. QUESTÃO 2

Questão: Seja o sistema ARX (5):

$$G_o(z) = \frac{2}{z-0.8} \quad H_o(z) = \frac{z}{z-0.8} \quad (5)$$

E com ruído branco com $\lambda^2 = 0.1$.

- Realize uma simulação aplicando na entrada um ruído branco com $\lambda^2 = 1$.
- Plote 100 estimativas de $\hat{\theta}$, a elipse de 95% de confiança e verifique o valor médio obtido e avalie a polarização da estimativa.
- Repita o item anterior com $H(z) = 1$.

A. Item 1 e 2

Para realização desta simulação foi utilizado o script apresentado no Anexo 1.

Utilizando um ruído branco como entrada, com média zero, e $\lambda^2 = 1$, obtém-se os resultados apresentados na Figura (2).

Observa-se que as estimativas em média chegam relativamente próximas ao valor real ($a=2$, $b=0.8$). Desta forma conclui-se que não há erro de polarização. Quando o ruído

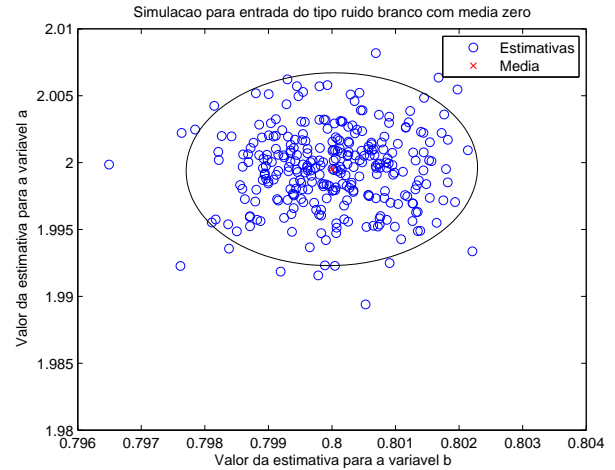


Figura 1. Entrada aleatória aplicada no processo para a identificação do sistema.

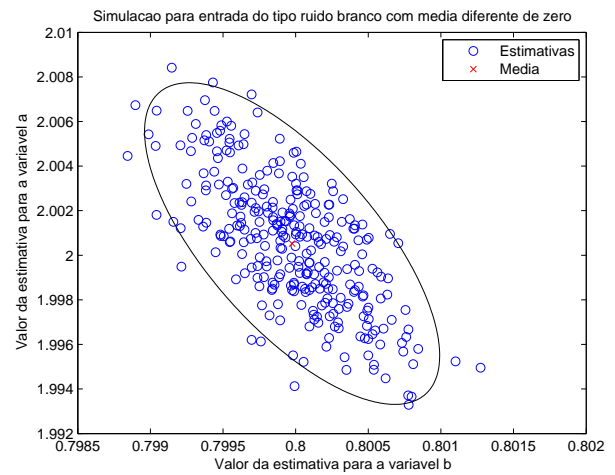


Figura 2. Entrada aleatória aplicada no processo para a identificação do sistema. Média diferente de zero.

inserido não possui média zero, há a observação de erro de polarização, como é apresentado na Figura (??).

Neste caso, os valores médios encontrados foram $b=0.8129$ e $a=2.003$ e no caso onde a média é zero, os valores estimados médios foram de $a=1.9999$ e $b=0.8000$.

B. Item 3

Na figura (3) observa-se a simulação para o mesmo sistema do item anterior, mas com o ruído branco sujeito a função de transferência $H(z) = 1$. Observa-se que a acuracidade da média dos pontos não é a mesma que quando a função de transferência $H(z)$ é como em (5).

Outro ponto para destacar é que a elipse que para $H(z)$ como apresentado em (5) era próxima a um círculo, neste exercício com $H(z) = 1$ é mais 'achatada', demonstrando que a confiabilidade das estimativas não é mais simétrica para as duas variáveis em questão.

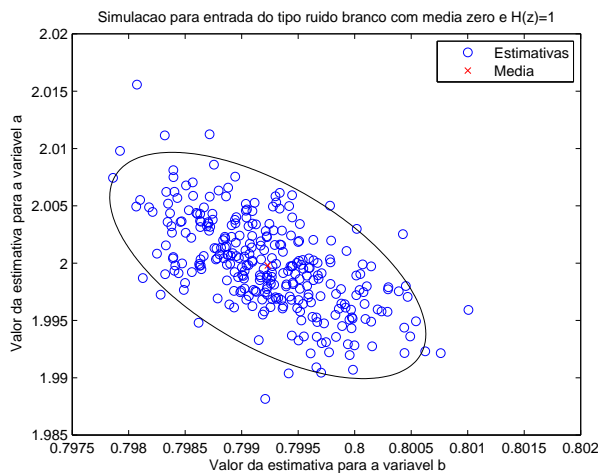


Figura 3. Entrada aleatória aplicada no processo para a identificação do sistema. Ruído sujeito a $H(z) = 1$.

IV. CONCLUSÕES

heheheheh jlhadkjkh;j hrlkjhe l;ohkwe rphfsl;khdf gl; isuhg-
flusdfnh lgsdfkjhg;

APÊNDICE

1 - Script para Simulação do modelo ARX

```
%=====
% Identificacao de sistemas
% Tassiano Neuhaus
% tassianors@gmail.com
% UFRGS
%=====
close all; clear all;

% Definitions
Ts=10e-3;
Tf=10;
STD=0.1;
tempo = 0:Ts:Tf;
N=size(tempo, 2);

M=300;

% TFs
G=tf([2],[1 -0.8], Ts);
% item 1 e 2
H=tf([1 0.9],[1 -0.5], Ts);
% item 3
%H=tf([1],[1], Ts);

% Replace the default stream with a stream whose
seed is based on CLOCK, so
% RAND will return different values in different
MATLAB sessions
RandStream.setDefaultStream(
    RandStream('mt19937ar', 'seed',
        sum(100*clock)));

% identification using MMQ
% model y(t)=2*u(t-1)+0.8*y(t-1) +u(t) +0.8*y(t-1)
teta=[0.8; 1; 2];
n=size(teta, 1);
% e entrada u saida do controlador
%phy=[y(t-1); u(t); u(t-1)]

% numero de vezes que sera aplicado o metodo.
a=zeros(M,1);
b=zeros(M,1);
```

```
for j=1:M
    % make a random noise with std = 0.1
    ran=rand(N, 1);
    s=std(ran);
    % now ran_s has std=1;
    ran_s=ran/s;
    m=mean(ran_s);
    % make noise be zero mean
    rh=(ran_s-m)*STD;

    % make a random noise with std = 1
    ran=rand(N, 1);
    s=std(ran);
    m=mean(ran);
    % now rr has std=1;
    rr=(ran-m)/s;

    yr=lsim(G, rr, tempo);
    ynoise=lsim(H, rh, tempo);
    y=yr+ynoise;
    u=rr;

    phy=zeros(N, n);
    for t=2:N
        phy(t, 1)=y(t-1);
        phy(t, 2)=u(t);
        phy(t, 3)=u(t-1);
    end

    % make sure, rank(phy) = n : )
    teta_r=inv(phy'*phy)*phy'*y;
    % to be used in grafic plot
    a(j)=teta_r(1);
    b(j)=teta_r(3);
end
PN=[a, b];
ma=mean(a);
sa=std(a);
mb=mean(b);
sb=std(b);
plot(a, b, 'bo');
hold;
plot(ma, mb, 'rx');
hold;
title('Simulacao para entrada do tipo ruido branco
com media zero e H(z)=1')
xlabel('Valor da estimativa para a variavel b')
ylabel('Valor da estimativa para a variavel a')
legend('Estimativas', 'Media')

%valor da tabela chi-quadrado para 95% de confianca
chi = 5.991;
ang = linspace(0,2*pi,360)';
[avetor,SCR,avl] = princomp(PN);
Diagonal= diag(sqrt(chi*avl));
ellipse=[cos(ang) sin(ang)] * Diagonal * avetor' +
    repmat(mean(PN), 360, 1);
line(ellipse(:,1), ellipse(:,2), 'linestyle', '-',
    'color', 'k');
```

Listing 1. Descriptive Caption Text