Modelagem e Identificação de sistemas lineares

Tassiano Neuhaus
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Departamento de Engenharia Elétrica
Av. Osvaldo Aranha, 103 - Bairro Bom Fim CEP: 90035-190 - Porto Alegre - RS - Brasil

***Resumo*—**

Neste trabalho será apresentado diversos meios para a identificação de sistemas lineares. Existem dois grupos principais de métodos para esta identificação, sendo um deles conhecido como *identificação não paramétrica* **onde existem infinitos parâmetros para serem estimados e que normalmente é utilizado para identificação de funções gráficas. Outro método é conhecido como** *identificação paramétrica* **onde o número de parâmetros a ser estimado é finito. Este último método será mais abordado neste trabalho, por possuir uma aplicabilidade maior devido a possibilidade de estimar processos em funções matemáticas que descrevem o comportamento do sistema muitas vezes com mais informação que os métodos gráficos.**

Para este trabalho será utilizado um processo de controle de posição angular, controlado por um motor de corrente continua. Serão apresentados diversos métodos de identificação e ao fim será feito um comparativo entre os resultados obtidos.

***Palavras-chave*—Identificação de sistemas lineares, métodos paramétricos.**

I. Introdução

Neste trabalho será apresentado um sistema de para controle de posição angular, manipulado por um motor de corrente continua (DC). O objetivo principal, é estimar os valores das variáveis existentes no modelo escolhido para representar este sistema.

Inicialmente será explicado o processo de escolha do modelo que representa a dinâmica deste sistema (Seção (II)). Será explicitado quais considerações sobre o sistema foram feitas para se obter o modelo que será utilizado nas seções seguintes, para determinar os parâmetros.

Em seguida, será utilizado o método dos Mínimos quadrados (MQ), para estimar o sistema, considerando-se para isso que o ruido sobre o sistema sofre influência dos mesmos polos que estão na planta, ou seja, que o modelo para o sistema se comporta como um modelo ARX. Nesta mesma seção (V) será apresentado os resultados para o mesmo sistema, baseado nos mesmos dados, mas para um modelo que não representa o sistema físico, ou que não consegue representa-lo.

Na seção (VI) será apresentado o método das variáveis instrumentais, para estimar os valores do parâmetro para o modelo. Da mesma forma que para o método dos MQ, será utilizado um modelo que não representa o sistema real, e este método será aplicado para determinar a qualidade dos resultados obtidos.

Ao fim, será apresentado uma breve discussão sobre os resultados obtidos em ambos os métodos utilizados, e as considerações finais.

II. Modelagem do sistema

O objetivo da modelagem de um sistema é encontrar um modelo (função com parâmetros livres) que consiga representar o sistema físico de forma completa. A partir do conhecimento do sistema físico, fazem-se considerações sobre o sistema, para simplifica-lo a fim de tornar o modelo matemático o mais simples possível, mas que ainda represente o sistema real, com a margem de preciosidade definida, pela quantidade e qualidade das simplificações aplicadas para chegar-se ao modelo matemático do sistema.

A. Sistema Físico

O sistema físico em estudo neste trabalho, é um sistema para controle de posição, onde o atuador é um motor de corrente continua (DC). Desta forma a entrada do sistema é a tensão aplicada sobre os terminais do motor em Volts [V], e a saída é a posição angular do motor em radianos [rad].

Na Figura (1) pode ser vista a representação elétrica e mecânica do motor em questão.

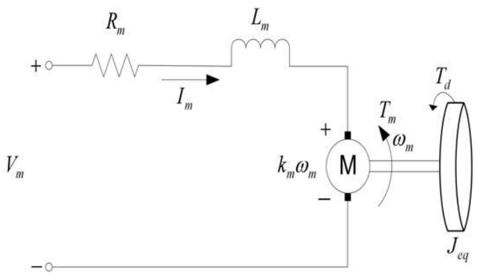

Figura 1. Representação elétrica e mecânica do motor

As variáveis consideradas para a modelagem são as apresentadas abaixo:

- ω = Velocidade do motor.
- *v = Tensão aplicada na armadura.*
- *ia = corrente de armadura.*
- *L = Indutância da armadura.*
- *e = Forca contra eletromotriz =* $K_2\omega$
- *R = Resistência do enrolamento da armadura.*
- *T = Torque aplicado =* $K_i ia$
- *J = Momento de inercia da carga.*
- *f = Atrito viscoso no eixo.*

Tem-se desta forma as duas equações que descrevem o sistema para a parte elétrica (1) e mecânica (2).

$$V - R \cdot Ia - L\frac{\mathrm{d}Ia}{\mathrm{d}x} - e = 0 \tag{1}$$

$$J\dot{\omega} = T - f\omega \tag{2}$$

A partir destas equacões diferenciais pode-se chegar ao sistema de equações de estado descrito em (3).

$$\begin{bmatrix} \dot{Ia} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -K_2/L & 0 \\ K_i/J & -f/J & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V \tag{3}$$

Com este sistema de equações de estado, é possível obter-se as fumões de transferências, que descrevem o sistema, para uma entrada e uma saída. Na equação (4) apresenta-se a função de transferência do motor, que relaciona a posição com a tensão de entrada do motor.

$$G(s) = \frac{k1/JL}{s(s + f/L)(s + R/L) + s\ k1k2/JL} \tag{4}$$

Devido a dinâmica do sistema mecânico ser muito menor que a dinâmica do sistema elétrico, pode-se desconsiderar a influencia do polo elétrico do sistema, ficando a função de transferência como a seguir:

$$G(s) = \frac{\frac{k1}{JL}}{s(s + \frac{fL+k1k2}{JL})}$$

A equação anterior (4) representa o comportamento da posição angular do motor baseado na entrada de tensão aplicada sobre seus terminais. Esta Função de transferência descreve este comportamento em um mundo de tempo continuo, nosso sistema é digital e com isso precisamos de uma representação discreta para esta mesma função (5).

$$G(q) = \frac{\frac{k1}{JL}}{q(q + \frac{fL+k1k2}{JL})} \tag{5}$$

Desta forma chega-se a uma modelagem do sistema que relaciona a posição em função da tensão aplicada sobre o motor. Para tanto foi considerado que a dinamica da parte mecânica do sistema é muito mais predominante que a dinâmica da parte elétrica, podendo esta ser desconsiderada para que o sistema se torne um pouco mais simples.

III. Modelagem não paramétrica

IV. Modelos paramétricos simples

V. Método dos mínimos quadrados

O método dos mínimos quadrados (MMQ) é um dos mais conhecidos e mais utilizados nas mais diversas áreas da ciência e tecnologia. A origem da ideia básica pode ser encontrada nos trabalhos de Gaus sobre o estudo astronômicos. [1]

A. Sistema com solução única

Considerando-se que o sistema que será observado seja linear e invariante no tempo. Se a função f que descreve o sistema for não linear o sistema poderá em principio ser identificado por modelos não lineares. Com base nestas restrições temos que:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

$$y = X\theta$$

Com $X \in \Re^{nxn}$. Desde que X seja não singular é possível determinar θ:

$$\theta = X^{-1}y \tag{6}$$

B. Sistema sobredeterminado

Para sistemas sobredeterminados onde $N > n$, A variável X da equação (6) fica $X \in \Re^{Nxn}$. Como esta matriz não é quadrada, não é possível de ser invertida. Multiplicando-se a equação (6) por X^T tem-se: [1]

$$X^T y = X^T X\theta$$

De onde vem:

$$\theta = [X^T X]^{-1} X^T y \tag{7}$$

O método dos mínimos quadrados minimiza o critério apresentado em (8).

$$J(\theta) = \frac{1}{2N} \sum_{t=1}^{N} [y(t) - \hat{y}(t, \theta)]^2 \tag{8}$$

Onde $\hat{y}(t, \theta)$ é a predição do sistema e pode ser representado como abaixo:

$$\hat{y}(t, \theta) = \theta^T \phi(t)$$

Desta forma pode se dizer que o sistema real é o próprio sistema estimado mais algum erro de estimativa:

$$y(t) = \hat{y}(t, \theta) + e(t) = \theta^T \phi(t) + e(t)$$

C. Estruturas de modelagem

De forma genérica modelos para descrição de sistemas podem ser representados como em (9).

$$A(q, \theta)Y(t) = \frac{B(q, \theta)}{F(q, \theta)} U(t) + \frac{C(q, \theta)}{D(q, \theta)} e(t) \tag{9}$$

Onde:

$$\begin{aligned} A(q, \theta) &= 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \cdots + a_{na} q^{-na} \\ B(q, \theta) &= b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \cdots + b_{nb} q^{-nb} \\ C(q, \theta) &= 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \cdots + c_{nc} q^{-nc} \\ D(q, \theta) &= 1 + d_1 q^{-1} + d_2 q^{-2} + \cdots + d_{na} q^{-nd} \\ F(q, \theta) &= 1 + f_1 q^{-1} + f_2 q^{-2} + \cdots + f_{nf} q^{-nf} \end{aligned}$$

Baseado nestas informações existem modelos onde apenas alguns destes polinômios são diferentes de 1. Na Tabela

Tabela I

MODELOS COMUMENTE UTILIZADOS PARA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Modelo	Polinômios diferentes de 1
FIR	B
ARX	A B
ARMAX	A B C
ARMA	A C
ARARMAX	A B C D
OE	B F
BJ	B F C D

(I) são apresentados alguns destes modelos mais comumente utilizados.

O método dos mínimos quadrados utiliza intrinsecamente o modelo ARX para descrever o modelo do sistema.

D. Controle de posição angular do motor DC

O sistema descrito na seção (II) quando utilizamos o método dos mínimos quadrados, intrinsecamente utilizamos o modelo ARX (10) para descrever este sistema. A partir de (9) tem-se que o modelo ARX fica (10).

$$A(q,\theta)Y(t) = B(q,\theta)U(t) + e(t) \tag{10}$$

A equação (10) pode ser reescrita :

$$\begin{aligned} Y(t) &= b_1 q^{-1}U(t) + b_2 q^{-2}U(t) + \cdots + b_{nb} q^{-nb}U(t) \\ &-a_1 q^{-1}Y(t) - b_2 q^{-2}Y(t) - \cdots - a_{na} q^{-na}Y(t) + e(t) \end{aligned}$$

O que pode ser escrito como em (11).

$$Y(t) = \varphi'\theta + e(t) \tag{11}$$

Onde:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{na} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{nb} \end{bmatrix} \qquad \varphi(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ \vdots \\ y(t-na) \\ u(t-1) \\ \vdots \\ u(t-nb) \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi'(1) \\ \varphi'(2) \\ \vdots \\ \varphi'(N) \end{bmatrix}$$

Para o sistema de posicionamento do motor DC, a equação (10) fica como em (12).

$$G(q,\theta) = \frac{a}{(q-b)(q-c)} \quad H(q,\theta) = \frac{q^2}{(q-b)(q-c)} \tag{12}$$

A partir de (12) tem-se que o modelo pode ser descrito como abaixo:

$$\theta = \begin{bmatrix} a & b+c & c \end{bmatrix} \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} r(t-2) \\ y(t-1) \\ y(t-2) \end{bmatrix}$$

Sabe-se de antemão que o valor esperado para a variável c é zero, já que existe um integrador na planta em estudo. No Apêndice (A) está o script utilizado para chegar-se aos resultados obtidos para a estimativa do modelo utilizando o método dos mínimos quadrados.

A figura (2) apresenta os resultados obtidos na estimativa dos parâmetros a partir das medidas efetuadas sobre o sistema.

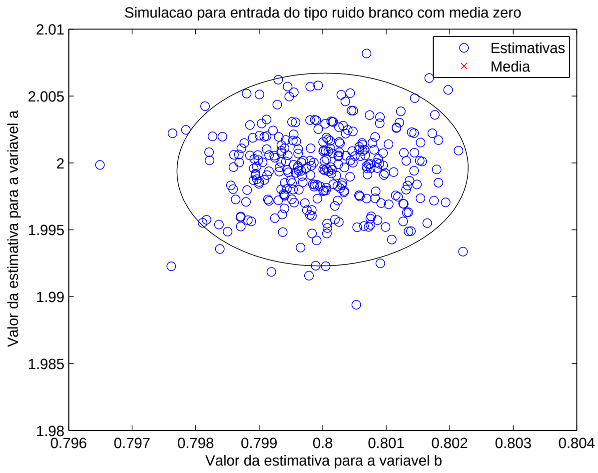

Figura 2. TODO

TODO: colocar os valores médios obtidos para os parâmetros.

1) Resultados para um modelo incompleto: Nesta seção será apresentado resultados para uma estimativa utilizando um modelo que não consegue descrever o sistema propriamente. Serão utilizados os mesmos dados da estimativa do item anterior.

O modelo utilizado é descrito em (13). Observa-se que o integrador não esta presente neste modelo, desta forma tem-se que o modelo das variáveis a serem utilizadas no método dos mínimos quadrados fica como em (14).

$$G(q,\theta) = \frac{a}{(q-b)} \quad H(q,\theta) = \frac{q}{(q-b)} \tag{13}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} r(t-1) \\ y(t-1) \end{bmatrix} \tag{14}$$

Para este modelo chegou-se aos valores dos parâmetros a e b apresentados na Figura (3).

VI. MÉTODO DA VARIÁVEL INSTRUMENTAL - IV

Uma alternativa para a minimização da polarização PPA (propriedades de pequenas amostras) na estimativa do sistema é a polarização assintótica. A ideia é relaxar um pouco a definição PPA e, por um lado, permitir que haja polarização para uma amostra pequena, mas por outro lado, verificar se tal polarização desaparece à medida que o tamanho do conjunto de observações cresce. [1]

Para utilizacão deste método, escolhe-se um Instrumento $Z(t)$:

$$Z(t) \in \Re^p \; \forall t \quad E(Z(t)\nu) = 0 \tag{15}$$

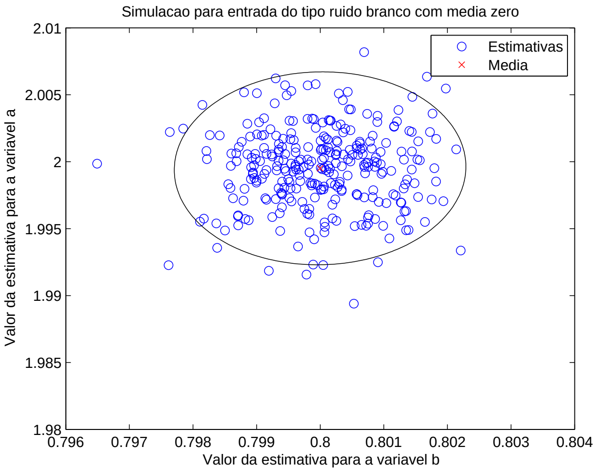

Figura 3. TODO

$$\hat{y}(t,\theta) = \phi^T(t)\theta$$

$$E[Z(t)(y(t) - \hat{y}(t,\theta)] = 0$$

$$E[Z(t)\phi^T(t)]\theta = E[Z(t)y(t)]$$

De onde vem:

$$\hat{\theta}_N^{iv} = [\sum_{t=1}^{N} Z(t)\phi^T(t)]^{-1}[\sum_{t=1}^{N} Z(t)y(t)] \tag{16}$$

Após a escolha da estimativa $Z(t)$ que satisfaça (16) o passo seguinte é calcular (17).

$$E[\hat{\theta}_N^{iv} - \theta_0] = 0 \tag{17}$$

A. Método aplicado ao controle de posição

Primeiro passo para aplicar o método das *Variáveis instrumentais* é escolher o instrumento que será utilizado.

$$w(t) = F(q)u(t)$$
$$F(q) = q^{-1}$$
$$w(t) = u(t-1)$$

O que resulta em um instrumento apresentado em (18).

$$Z(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ w(t-1) \\ \vdots \\ w(t-p) \end{bmatrix} \tag{18}$$

VII. Conclusões

Apêndice

1 - Script para Simulação do MQ para o modelo ARX

```
%====================================
% Identificacao de sistemas
% Tassiano Neuhaus
% tassianors@gmail.com
% UFRGS
%====================================
close all; clear all;

% Definitions
Ts=10e-3;
% frequency used when u(t) is a sinusoidal signal.
freq=pi/20;

Tf=10*2*pi/freq;

STD=0.1;
tempo = 0:Ts:Tf;
N=size(tempo, 2);

M=300;
Grafico2
% TFs
%ARX
G=tf([2],[1 -0.8 0], Ts);
H=tf([1 0 0],[1 -0.8 0], Ts);
po
% Replace the default stream with a stream whose
    seed is based on CLOCK, so
% RAND will return different values in different
    MATLAB sessions
RandStream.setDefaultStream(
    RandStream('mt19937ar', 'seed',
    sum(100*clock)));

% identification using MMQ
% model y(t)=a*u(t-2)+(b+c)*y(t-1) +bc*y(t-2)
teta=[2; 0.8; 0];
n=size(teta, 1);
% e entrada u saida do controlador
%phy=[ u(t-2); y(t-1); y(t-2)]

% numero de vezes que sera aplicado o metodo.
a=zeros(M,1);
b=zeros(M,1);
c=zeros(M,1);
for j=1:M
    % make a randon noise with std = 0.1
    ran=rand(N, 1);
    s=std(ran);
    % now ran_s has std=1;
    ran_s=ran/s;
    m=mean(ran_s);
    % make noise be zero mean
    rh=(ran_s-m)*STD;

    % make a random noise with std = 1
    ran=rand(N, 1);
    s=std(ran);
    m=mean(ran);
    % now rr has std=1nusoidal input signal
    rr=(ran-m)/s;
    %sim
%       rr=sin(freq*tempo);
%       mean(rr);

    yr=lsim(G, rr, tempo);
    ynoise=lsim(H, rh, tempo);
    y=yr+ynoise;
    u=rr;

    phy=zeros(N, n);
    for t=3:N
```

```
        phy(t, 1)=u(t-2);
        phy(t, 2)=y(t-1);
        phy(t, 3)=y(t-2);
    end

    % make sure, rank(phy) = n :)
    teta_r=inv(phy'*phy)*phy'*y;
    % to be used in grafic plot
    a(j)=teta_r(1);
    b(j)=teta_r(2);
    c(j)=teta_r(3);
end
PN=[a, b];
ma=mean(a)
sa=std(a);
mb=mean(b)
mc=mean(c)

plot(a, b, 'bo');
hold;
plot(ma, mb, 'rx');
hold;
title('Simulacao do sistema para um modelo ARX')
xlabel('Valor da estimativa para a variavel a')
ylabel('Valor da estimativa para a variavel b')
legend('Estimativas', 'Media')

%valor da tabela chi-quadrado para 95% de confianca
chi = 5.991;
ang = linspace(0,2*pi,360)';
[avetor,SCR,avl] = princomp(PN);
Diagonal= diag(sqrt(chi*avl));
elipse=[cos(ang) sin(ang)] * Diagonal * avetor' +
    repmat(mean(PN), 360, 1);
line(elipse(:,1), elipse(:,2), 'linestyle', '-',
    'color', 'k');
```

Listing 1. Método dos mínimos quadrados

2 - Script para Simulação do método das variáveis instrumentais

```
%==================================
% Identificacao de sistemas
% Tassiano Neuhaus
% tassianors@gmail.com
% UFRGS
%==================================
close all; clear all;

% Definitions
Ts=10e-3;
% frequency used when u(t) is a sinusoidal signal.
freq=pi/20;

Tf=10*2*pi/freq;

STD=0.1;
tempo = 0:Ts:Tf;
N=size(tempo, 2);

M=100;

% TFs
%ARX
G=tf([2],[1 -0.8 0], Ts);
H=tf([1 0 0],[1 -0.8 0], Ts);

% Replace the default stream with a stream whose
    seed is based on CLOCK, so
% RAND will return different values in different
    MATLAB sessions
RandStream.setDefaultStream(
    RandStream('mt19937ar', 'seed',
    sum(100*clock)));

% identification using MMQ
% model y(t)=a*u(t-2)+(b+c)*y(t-1) +bc*y(t-2)
teta=[2; 0.8; 0];
n=size(teta, 1);
% e entrada u saida do controlador
%phy=[ u(t-2); y(t-1); y(t-2)]

% numero de vezes que sera aplicado o metodo.
a=zeros(M,1);
b=zeros(M,1);
c=zeros(M,1);
for j=1:M
    % make a randon noise with std = 0.1
    ran=rand(N, 1);
    s=std(ran);
    % now ran_s has std=1;
    ran_s=ran/s;
    m=mean(ran_s);
    % make noise be zero mean
    rh=(ran_s-m)*STD;

    % make a randon noise with std = 1
    ran=rand(N, 1);
    s=std(ran);
    m=mean(ran);
    % now rr has std=1nusoidal input signal
    rr=(ran-m)/s;
    %sim
%       rr=sin(freq*tempo);
    mean(rr)

    yr=lsim(G, rr, tempo);
    ynoise=lsim(H, rh, tempo);
    y=yr+ynoise;
    u=rr;

    phy=zeros(N, n);
    z=zeros(N, n);
    for t=3:N
        phy(t, 1)=u(t-2);
        phy(t, 2)=y(t-1);
        phy(t, 3)=y(t-2);
    end
    for t=4:N
        % auxiliary instrument z
        z(t, 3)=u(t-1);
        z(t, 2)=u(t-2);
        z(t, 1)=u(t-3);
    end

    % make sure, rank(phy) = n :)
    teta_r=inv(z'*phy)*z'*y;%inv(phy'*phy)*phy'*y;

    % to be used in grafic plot
    a(j)=teta_r(1);
    b(j)=teta_r(2);
    c(j)=teta_r(3);
end
PN=[a, b];
ma=mean(a)
mb=mean(b)
mc=mean(c)

plot(a, b, 'bo');
hold;
plot(ma, mb, 'rx');
hold;
title('Simulacao do sistema para o metodo das
    variavies instrumentais')
xlabel('Valor da estimativa para a variavel a')
ylabel('Valor da estimativa para a variavel b')
legend('Estimativas', 'Media')

%valor da tabela chi-quadrado para 95% de confianca
chi = 5.991;
ang = linspace(0,2*pi,360)';
[avetor,SCR,avl] = princomp(PN);
Diagonal= diag(sqrt(chi*avl));
```

```
elipse=[cos(ang) sin(ang)] * Diagonal * avetor' +
    repmat(mean(PN), 360, 1);
line(elipse(:,1), elipse(:,2), 'linestyle', '-',
    'color', 'k');
```

Listing 2. Método das variáveis instrumentais

REFERÊNCIAS

[1] L. A. Aguirre, *Introdução à identificação de sistemas, Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*, 2nd ed. Belo Horizonte, Minas Gerais: Editora UFMG, 2004, vol. 1.