Modelagem e Identificação de sistemas lineares

Tassiano Neuhaus
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Departamento de Engenharia Elétrica
Av. Osvaldo Aranha, 103 - Bairro Bom Fim CEP: 90035-190 - Porto Alegre - RS - Brasil

***Resumo*—**
Neste trabalho será apresentado diversos meios para a identificação de sistemas lineares. Existem dois grupos principais de métodos para esta identificação, sendo um deles conhecido como *identificação não paramétrica* **onde existem infinitos parâmetros para serem estimados e que normalmente é utilizado para identificação de funções gráficas. Outro método é conhecido como** *identificação paramétrica* **onde o número de parâmetros a ser estimado é finito. Este último método será mais abordado neste trabalho, por possuir uma aplicabilidade maior devido a possibilidade de estimar processos em funções matemáticas que descrevem o comportamento do sistema muitas vezes com mais informação que os métodos gráficos.**

Para este trabalho será utilizado um processo de controle de posição angular, controlado por um motor de corrente continua. Serão apresentados diversos métodos de identificação e ao fim será feito um comparativo entre os resultados obtidos.

***Palavras-chave*—Identificação de sistemas lineares, métodos paramétricos.**

I. INTRODUÇÃO

II. MODELAGEM DO SISTEMA

III. MODELAGEM NÃO PARAMÉTRICA

IV. MODELOS PARAMÉTRICOS SIMPLES

V. MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

O método dos mínimos quadrados (MMQ) é um dos mais conhecidos e mais utilizados nas mais diversas áreas da ciência e tecnologia. A origem da ideia básica pode ser encontrada nos trabalhos de Gaus sobre o estudo astronômicos. [1]

A. Sistema com solução única

Considerando-se que o sistema que será observado seja linear e invariante no tempo. Se a função f que descreve o sistema for não linear o sistema poderá em principio ser identificado por modelos não lineares. Com base nestas restrições temos que:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

$$y = X\theta$$

Com $X \in \Re^{nxn}$. Desde que X seja não singular é possível determinar θ:

$$\theta = X^{-1}y \tag{1}$$

B. Sistema sobredeterminado

Para sistemas sobredeterminados onde $N > n$, A variável X da equação (1) fica $X \in \Re^{Nxn}$. Como esta matriz não é quadrada, não é possível de ser invertida. Multiplicando-se a equação (1) por X^T tem-se: [1]

$$X^T y = X^T X\theta$$

De onde vem:

$$\theta = [X^T X]^{-1} X^T y \tag{2}$$

O método dos mínimos quadrados minimiza o critério apresentado em (3).

$$J(\theta) = \frac{1}{2N}\sum_{t=1}^{N}[y(t) - \hat{y}(t,\theta)]^2 \tag{3}$$

Onde $\hat{y}(t,\theta)$ é a predição do sistema e pode ser representado como abaixo:

$$\hat{y}(t,\theta) = \theta^T\phi(t)$$

Desta forma pode se dizer que o sistema real é o próprio sistema estimado mais algum erro de estimativa:

$$y(t) = \hat{y}(t,\theta) + e(t) = \theta^T\phi(t) + e(t)$$

C. Estruturas de modelagem

De forma genérica modelos para descrição de sistemas podem ser representados como em (4).

$$A(q,\theta)Y(t) = \frac{B(q,\theta)}{F(q,\theta)}U(t) + \frac{C(q,\theta)}{D(q,\theta)}e(t) \tag{4}$$

Onde:

$$\begin{aligned} A(q,\theta) &= 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \cdots + a_{na}q^{-na} \\ B(q,\theta) &= b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \cdots + b_{nb}q^{-nb} \\ C(q,\theta) &= 1 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2} + \cdots + c_{nc}q^{-nc} \\ D(q,\theta) &= 1 + d_1q^{-1} + d_2q^{-2} + \cdots + d_{na}q^{-nd} \\ F(q,\theta) &= 1 + f_1q^{-1} + f_2q^{-2} + \cdots + f_{nf}q^{-nf} \end{aligned}$$

Baseado nestas informações existem modelos onde apenas alguns destes polinômios são diferentes de 1. Na Tabela (I) são apresentados alguns destes modelos mais comumente utilizados.

O método dos mínimos quadrados utiliza intrinsecamente o modelo ARX para descrever o modelo do sistema.

Tabela I
MODELOS COMUMENTE UTILIZADOS PARA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Modelo	Polinômios diferentes de 1
FIR	B
ARX	A B
ARMAX	A B C
ARMA	A C
ARARMAX	A B C D
OE	B F
BJ	B F C D

D. Controle de posição angular do motor DC

O sistema descrito na seção (II) quando utilizamos o método dos mínimos quadrados, intrinsecamente utilizamos o modelo ARX (5) para descrever este sistema. A partir de (4) tem-se que o modelo ARX fica (5).

$$A(q,\theta)Y(t) = B(q,\theta)U(t) + e(t) \tag{5}$$

A equação (5) pode ser reescrita :

$$\begin{aligned} Y(t) &= b_1 q^{-1}U(t) + b_2 q^{-2}U(t) + \cdots + b_{nb} q^{-nb}U(t) \\ &-a_1 q^{-1}Y(t) - b_2 q^{-2}Y(t) - \cdots - a_{na} q^{-na}Y(t) + e(t) \end{aligned}$$

O que pode ser escrito como em (6).

$$Y(t) = \varphi'\theta + e(t) \tag{6}$$

Onde:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{na} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{nb} \end{bmatrix} \qquad \varphi(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ \vdots \\ y(t-na) \\ u(t-1) \\ \vdots \\ u(t-nb) \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi'(1) \\ \varphi'(2) \\ \vdots \\ \varphi'(N) \end{bmatrix}$$

Para o sistema de posicionamento do motor DC, a equação (5) fica como em (8).

$$G(q,\theta) = \frac{a}{(q-b)(q-c)} \quad H(q,\theta) = \frac{q}{(q-b)(q-c)} \tag{7}$$

A partir de (8) tem-se que o modelo pode ser descrito como abaixo:

$$\theta = \begin{bmatrix} a & b+c & c \end{bmatrix} \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} r(t-2) \\ y(t-1) \\ y(t-2) \end{bmatrix}$$

Sabe-se de antemão que o valor esperado para a variável c é zero, já que existe um integrador na planta em estudo. No Apêndice (**??**) está o script utilizado para chegar-se aos resultados obtidos para a estimativa do modelo utilizando o método dos mínimos quadrados.

A figura (1) apresenta os resultados obtidos na estimativa dos parâmetros a partir das medidas efetuadas sobre o sistema.

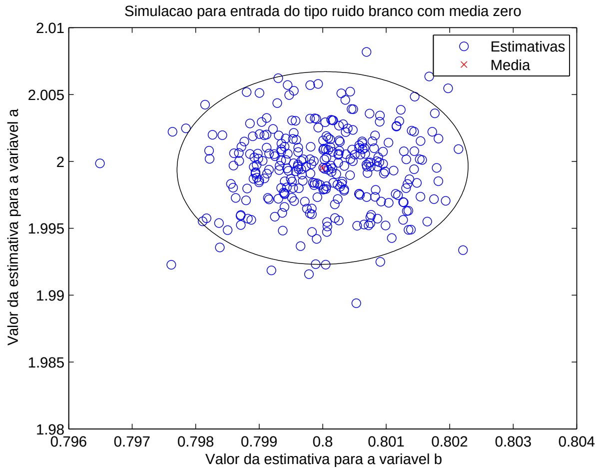

Figura 1. TODO

TODO: colocar os valores médios obtidos para os parametros.

1) Resultados para um modelo incompleto: Nesta secão será apresentado resultados para uma estimativa utilizando um modelo que não consegue descrever o sistema própriamente. Serão utilizados os mesmos dados da estimativa do item anterior.

O modelo utilzado é descrito em (**??**). Observa-se que o integrador não esta presente neste modelo, desta forma tem-se que o modelo das variáveis a serem utilizadas no método dos minimos quadrados fica como em (**??**).

$$G(q,\theta) = \frac{a}{(q-b)} \quad H(q,\theta) = \frac{q}{(q-b)} \tag{8}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} r(t-1) \\ y(t-1) \end{bmatrix}$$

Para este modelo chegou-se aos valores dos parametros a e b apresentados na Figura (2).

VI. MÉTODO DA VARIÁVEL INSTRUMENTAL - IV

Uma alternativa para a minimizacão da polarizacão PPA (propriedades de pequenas amostras) na estimativa do sistema é a polarizacào assintotica. A idéia é relaxar um pouco a definicão PPA e, por um lado, permitir que haja polarizacão para uma amostra pequena, mas por outro lado, verificar se tal polarizacão desaparece à medida que o tamanho do conjunto de observacões cresce. [1]

Para utilizacão deste método, esclhe-se um Instrumento $Z(t)$:

$$Z(t) \in \Re^p \; \forall t \quad E(Z(t)\nu) = 0 \tag{9}$$

$$\hat{y}(t,\theta) = \phi^T(t)\theta$$

$$E[Z(t)(y(t) - \hat{y}(t,\theta)] = 0$$

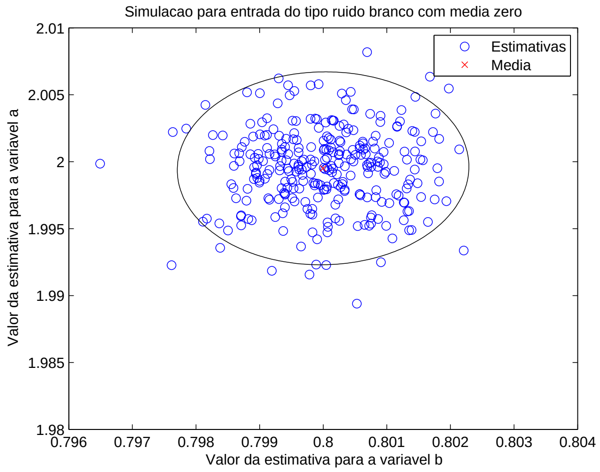

Figura 2. TODO

$$E[Z(t)\phi^T(t)]\theta = E[Z(t)y(t)]$$

De onde vem:

$$\hat{\theta}_N^{iv} = [\sum_{t=1}^{N} Z(t)\phi^T(t)]^{-1}[\sum_{t=1}^{N} Z(t)y(t)] \qquad (10)$$

Após a escolha da estimativa $Z(t)$ que satisfaca (10) o passo seguinte é calcular (11).

$$E[\hat{\theta}_N^{iv} - \theta_0] = 0 \qquad (11)$$

A. *Método aplicado ao controle de posição*

Primeiro passo para aplicar o método das *Variáveis instrumentais* é escolher o instrumento que será utilizado.

$$w(t) = F(q)u(t)$$
$$F(q) = q^{-1}$$
$$w(t) = u(t-1)$$

O que resulta em um instrumento apresentado em (**??**).

$$Z(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ w(t-1) \\ \vdots \\ w(t-p) \end{bmatrix} \qquad (12)$$

VII. Conclusões

Apêndice

1 - Script para Simulação do modelo ARX

```
%====================================
% Identificacao de sistemas
% Tassiano Neuhaus
% tassianors@gmail.com
% UFRGS
%====================================
close all; clear all;

% Definitions
Ts=10e-3;
% frequency used when u(t) is a sinusoidal signal.
freq=pi/20;

Tf=10*2*pi/freq;

STD=0.1;
tempo = 0:Ts:Tf;
N=size(tempo, 2);

M=300;

% TFs
%ARX
G=tf([2],[1 -0.8 0], Ts);
H=tf([1 0],[1 -0.8 0], Ts);

% Replace the default stream with a stream whose
    seed is based on CLOCK, so
% RAND will return different values in different
    MATLAB sessions
RandStream.setDefaultStream(
    RandStream('mt19937ar', 'seed',
    sum(100*clock)));

% identification using MMQ
% model y(t)=a*u(t-2)+(b+c)*y(t-1) +bc*y(t-2)
teta=[2; 0.8; 0];
n=size(teta, 1);
% e entrada u saida do controlador
%phy=[ u(t-2); y(t-1); y(t-2)]

% numero de vezes que sera aplicado o metodo.
a=zeros(M,1);
b=zeros(M,1);
c=zeros(M,1);
for j=1:M
    % make a randon noise with std = 0.1
    ran=rand(N, 1);
    s=std(ran);
    % now ran_s has std=1;
    ran_s=ran/s;
    m=mean(ran_s);
    % make noise be zero mean
    rh=(ran_s-m)*STD;

%     % make a randon noise with std = 1
%     ran=rand(N, 1);
%     s=std(ran);
%     m=mean(ran);
%     % now rr has std=1nusoidal input signal
%     rr=(ran-m)/s;
    %sim
    rr=sin(freq*tempo);
    mean(rr)

    yr=lsim(G, rr, tempo);
    ynoise=lsim(H, rh, tempo);
    y=yr+ynoise;
    u=rr;

    phy=zeros(N, n);
    for t=3:N
        phy(t, 1)=u(t-2);
        phy(t, 2)=y(t-1);
        phy(t, 3)=y(t-2);
    end

    % make sure, rank(phy) = n :)
    teta_r=inv(phy'*phy)*phy'*y;
    % to be used in grafic plot
    a(j)=teta_r(1);
    b(j)=teta_r(2);
    c(j)=teta_r(3);
end
PN=[a, b];
ma=mean(a)
sa=std(a);
```

```
mb=mean(b)
mc=mean(c)

plot(a, b, 'bo');
hold;
plot(ma, mb, 'rx');
hold;
title('Simulacao do sistema para um modelo ARX')
xlabel('Valor da estimativa para a variavel a')
ylabel('Valor da estimativa para a variavel b')
legend('Estimativas', 'Media')

%valor da tabela chi-quadrado para 95% de confianca
chi = 5.991;
ang = linspace(0,2*pi,360)';
[avetor,SCR,avl] = princomp(PN);
Diagonal= diag(sqrt(chi*avl));
elipse=[cos(ang) sin(ang)] * Diagonal * avetor' +
    repmat(mean(PN), 360, 1);
line(elipse(:,1), elipse(:,2), 'linestyle', '-',
    'color', 'k');
```

Listing 1. Descriptive Caption Text

REFERÊNCIAS

[1] L. A. Aguirre, *Introdução à identificação de sistemas, Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*, 2nd ed. Belo Horizonte, Minas Gerais: Editora UFMG, 2004, vol. 1.