

# Métodos paramétricos de identificação de sistemas - Trabalho 3

Tassiano Neuhaus

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Departamento de Engenharia Elétrica  
Av. Osvaldo Aranha, 103 - Bairro Bom Fim CEP: 90035-190 - Porto Alegre - RS - Brasil

**Resumo**—Este trabalho tem o objetivo de demonstrar três diferentes métodos para estimativa do valor da resistência de um resistor, baseado nas diversas medidas efetuadas sobre o mesmo, sendo que estas medidas estão sujeitas a incertezas de diversas fontes.

Será apresentado um algoritmo para identificação de parâmetros para sistemas baseados no critério de minimização dos mínimos quadrados. Será feito comparativos do método para diferentes sinais de entrada e diferentes amplitudes de perturbações sobre o sinal.

**Palavras-chave**—Identificação de sistemas lineares, métodos paramétricos.

## I. INTRODUÇÃO

Este trabalho se propõe a apresentar três tipos de estimadores para sistemas. Para isso será utilizando um resistor, e serão feitas medidas de tensão e corrente sobre o mesmo, repetidas vezes para encontrar-se o valor estimado do mesmo, com uma confiabilidade maior do que apenas medindo a tensão e a corrente uma vez sobre o sistema.

Na segunda parte do trabalho será apresentado o método dos mínimos quadrados para regressão linear para a identificação de sistemas. Para isso será aplicado diferentes formas de onda na entrada do processo e coletada suas respectivas saídas, levando-se em consideração que o sistema tem a influencia de ruído na saída do mesmo.

Ambos os problemas são bem simples, mas o intuito é demonstrar o conceito para as diferentes formas de identificação de sistemas e como que o ruído influencia sobre isso. Desta forma podemos mensurar qual método é mais adequado para cada situação.

## II. IDENTIFICAÇÃO

O sistema em estudo é composto por uma fonte de tensão alimentado um resistor. O propósito deste trabalho é apresentar três diferentes métodos para identificação da resistência do resistor do sistema.

Para identificação do sistema foram feitos dois conjuntos de medidas de tensão e corrente sobre o resistor que são apresentados na Tabela (I).

O primeiro método utilizado é representado na equação (1).

$$\hat{R}_1 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{y(t)}{u(t)} \quad (1)$$

Obtém-se desta forma uma resistência estimada de 1535.3Ω. Na Figura (1) apresenta-se os valores estimados da resistência

Tabela I  
MEDIDAS SOBRE O SISTEMA

Medida t	V1	V2 y(t)[V]	V3	I1 u(t)[mA]	I2	I3
1	1.45	1.28	1.28	0.94	0.81	0.82
2	2.58	2.14	1.71	1.6	1.2	1.1
3	3.08	2.71	2.21	2.02	1.68	1.25
4	3.54	3.51	3.02	2.3	2.28	1.94
5	4.01	4.49	3.64	2.63	2.81	2.22
6	4.57	5.05	4.12	3.01	3.27	2.68
7	5.21	6.05	4.82	3.42	3.9	3.12
8	6.21	6.72	5.25	4.09	4.22	3.42
9	7.09	7.45	6.11	4.51	4.81	4
10	7.71	8.13	6.88	4.91	5.3	4.55
11	8.36	8.9	7.6	5.49	5.78	5.05
12	9.06	9.73	8.32	6	6.38	5.32
13	10	10.17	9.51	6.6	6.71	6.1
14	10.46	10.51	10.13	6.9	6.94	6.54
15	4.8	7	10.52	3.16	4.55	6.8

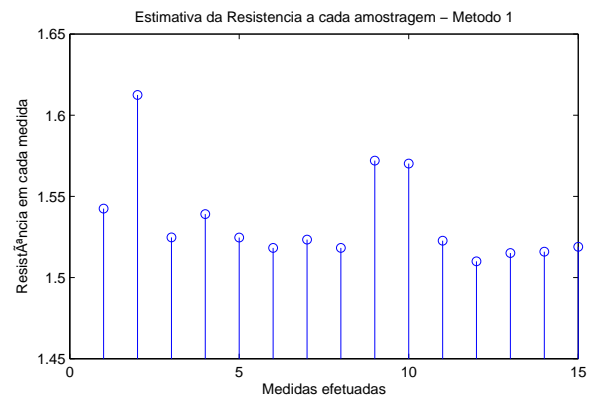


Figura 1. Gráfico da estimativa da resistência em cada instante para o conjunto de dados da primeira amostragem.

a cada medida. Este método produziu o valor médio descrito anteriormente e o desvio padrão de 28.5Ω.

Para o segundo conjunto de dados a resistência estimada foi de 1567.9Ω com um desvio padrão de 66.7Ω. Na Figura (2) apresenta-se os valores estimados da resistência a cada medida.

Alterando-se o método para a estimativa da resistência para a apresentada em (2), Obtém-se uma resistência de 1530.6Ω.

$$\hat{R}_2 = \frac{1}{N} \frac{\sum_{t=1}^N y(t)}{\sum_{t=1}^N u(t)} \quad (2)$$

Para o terceiro método (3), também conhecido como método

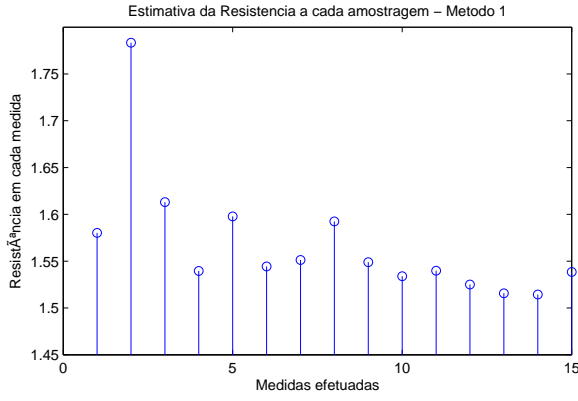


Figura 2. Gráfico da estimativa da resistência em cada instante para o conjunto de dados da segunda amostragem.

dos mínimos quadrados, chegou-se aos valores de resistência de  $1527.7\Omega$  e  $1538.0\Omega$  nos conjuntos de dados, 1 e 2 respectivamente.

$$\hat{R}_3 = \frac{1}{N} \frac{\sum_{t=1}^N y^2(t)}{\sum_{t=1}^N u(t)y(t)} \quad (3)$$

Observa-se que o valor estimado para a resistência utilizando o método dos mínimos quadrados obtém valores para a resistência dos conjuntos de dados 1 e 2 mais próximos que quando utilizamos o método 1.

#### A. Comparação dos resultados obtidos

Na Tabela (II) apresenta-se os valores de resistência obtidos utilizando os 3 métodos e os dois conjuntos de dados.

Tabela II COMPARATIVO DOS RESULTADOS OBTIDOS			
Dados	Método 1	Método 2	Método 3
Conjunto 1	1535.3	1530.6	1527.7
Conjunto 2	1567.9	1547.5	1538.0
Conjunto 3	1564.0	1550.2	1545.7
Média	1555.7	1542.7	1537.2
Desv Padrão	17.8	10.6	9.0

A partir da Tabela (II) é possível observar que dentro dos três métodos, o que apresentou um valor para a resistência com o menor desvio padrão entre as amostras coletadas foi o método 3 (mínimos quadrados).

### III. MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS

Nesta Seção será apresentado um exemplo de identificação de sistema utilizando o processo de mínimos quadrados. Será para tanto escolhido uma *Função de transferência*(4) e aplicado um ruído sobre a mesma, e então aplicado diferentes entradas ao processo e coletados os dados que a planta fornecer. Com estas informações será aplicado o método dos mínimos quadrados e os resultados serão comparados.

O Script utilizado para as simulações está disponível no Anexo (A).

$$G(z) = \frac{a}{z + b} + \nu \quad (4)$$

Aplicando-se a transformada Z inversa à equação (4) obtém-se a equação de diferenças (5).

$$y(t) = a u(t - 1) - b y(t - 1) \quad (5)$$

O critério dos mínimos quadrados para o problema de regressão linear onde a saída é definida por (6). Para a equação (4) obtém-se (7).

$$y(t) = \Theta' \phi \quad (6)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \phi(t) = \begin{bmatrix} u(t - 1) \\ -y(t - 1) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Para o critério dos mínimos quadrados tem-se (8). [1]

$$J(\Theta) = \frac{1}{2N} \sum_{t=1}^N [y(t) - \hat{y}(t, \Theta)]^2 \quad (8)$$

Que tem por solução (9).

$$\Phi' \Phi \Theta = y' \Phi \quad (9)$$

Onde  $\Phi$  é definido com em (10). [2]

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi'(1) \\ \phi'(2) \\ \vdots \\ \phi'(N) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Para o exemplo apresentado neste trabalho  $\Phi$  fica como abaixo:

$$\Phi = \begin{bmatrix} u(0) & -y(0) \\ u(1) & -y(1) \\ u(2) & -y(2) \\ u(3) & -y(3) \\ u(4) & -y(4) \\ \vdots & \vdots \\ u(N-1) & -y(N-1) \end{bmatrix}$$

#### A. Simulação

A simulação realizada foi sobre um sistema com os parâmetros  $a = 1, b = 0.9$  acrescido de um ruído de aproximadamente 5% do sinal de saída do sistema. Aplicou-se o algoritmo sobre 10 entradas aleatórias diferentes e o resultado obtido é apresentado na Tabela (III).

O sinal de entrada aplicado aleatório é semelhante ao apresentado na Figura (3)

Aumentando-se o ruído para 10% chega-se a tabela (IV).

A fim de corroborar o funcionamento do método, foi aplicado na entrada um sinal senoidal composto pela soma de 3 senóides de diferentes frequências, para que o sinal de entrada não fosse muito monótono e conseguisse excitar o sistema

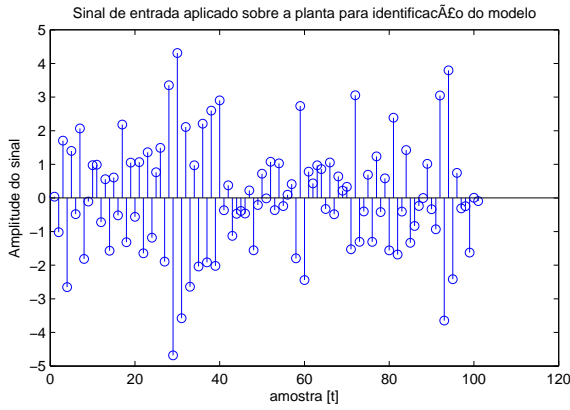


Figura 3. Entrada aleatória aplicada no processo para a identificação do sistema.

Tabela III  
SIMULAÇÃO COM RUÍDO DE 5% E ENTRADA ALEATÓRIA.

Simulação	a	b
1	1.0052	0.8992
2	0.9983	0.9928
3	1.0071	0.8929
4	1.0049	0.8927
5	0.9999	0.8923
6	1.0076	0.9023
7	1.0011	0.9026
8	1.0031	0.8922
9	1.0047	0.8929
10	1.0008	0.8924
Média	1.0033	0.8994
Desv padrão	0.0031	0.0009

adequadamente. Na Figura (4) é apresentado o sinal aplicado em uma das simulações e na Tabela (??) é apresentado o resultado das 10 simulações do sistema com um ruído de 10% na saída do processo.

Observa-se nitidamente que a aplicação de um sinal aleatório na entrada do sistema produz resultados muito mais satisfatórios se comparado com a entrada senoidal com 3 componentes de frequência. Isso se deve ao fato que o sinal periódico excita menos o sistema do que o sinal aleatório, produzindo melhores resultados na estimação dos parâmetros do sistema.

Tabela IV  
SIMULAÇÃO COM RUÍDO DE 10% E ENTRADA ALEATÓRIA.

Simulação	a	b
1	1.0083	0.8995
2	1.0020	0.8989
3	0.9952	0.8993
4	0.9896	0.8994
5	0.9910	0.8982
6	1.0001	0.8987
7	1.0004	0.9018
8	1.0052	0.8989
9	0.9893	0.8986
10	0.9984	0.8986
Média	0.9980	0.8992
Desv padrão	0.0066	0.0010

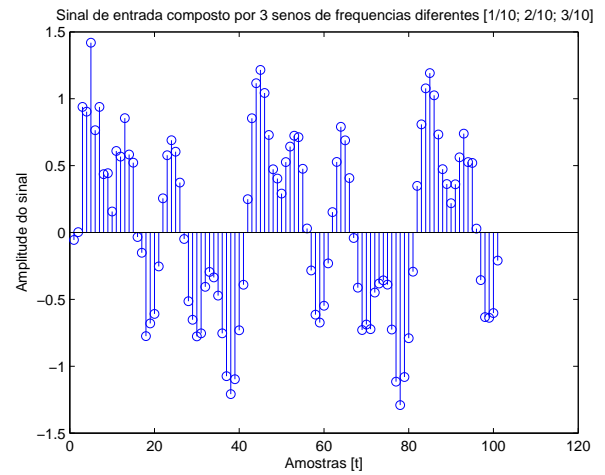


Figura 4. Entrada senoidal aplicada no processo para a identificação do sistema.

Tabela V  
SIMULAÇÃO COM RUÍDO DE 10% E ENTRADA SENOIDAL COMPOSTA PELA SOMA DE 3 SENOIDES.

Simulação	a	b
1	0.9636	0.8506
2	0.9552	0.8104
3	0.9304	0.7522
4	0.9399	0.7840
5	0.9006	0.7822
6	0.9579	0.7443
7	1.0212	0.9162
8	0.9466	0.7951
9	0.9476	0.7913
10	0.9360	0.7947
Média	0.9499	0.8021
Desv padrão	0.0307	0.0497

#### IV. CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentou-se métodos para identificação de sistemas utilizando-se métodos paramétricos, em primeiro lugar estudou-se a estimativa da resistência de um resistor, por diversas formas e como que o ruído interfere em cada um destes métodos e qual é a vantagem de um método sobre o outro.

Em uma segunda etapa estudou-se a aplicação do método de regressão linear utilizando como critério de otimização o método dos mínimos quadrados. Utilizando-se este método foi identificado um sistema com ruído, aplicando-se diferentes entradas ao mesmo e observando como que isso influencia sobre a identificação do sistema em conjunto com o ruído presente no mesmo.

Apresentou-se um comparativo do método para diferentes amplitudes de ruído sobre o sistema e também comparou-se os resultados para entradas não aleatórias. chegou-se a conclusão que entradas aleatórias conseguem excitar mais o sistema e produzir melhores resultados que ondas com menos componentes de frequência (senoides por exemplo).

#### APÊNDICE

##### 1 - Script para estimar Resistência do resistor

```
% =====
% Identificacao de sistemas
% Tassiano Neuhaus
% tassianors@gmail.com
% UFRGS
% =====
clear all; close all;
R=zeros(3,3);
% =====
% Data

I=[0.94;1.6;2.02;2.3;2.63;3.01;3.42;
  4.09;4.51;4.91;5.49;6.6;6.9;3.16];
V=[1.45;2.58;3.08;3.54;4.01;4.57;5.21;
  6.21;7.09;7.71;8.36;9.06;10;10.46;4.8];
I2=[0.81;1.2;1.68;2.28;2.81;3.27;3.9;
  4.22;4.81;5.3;5.78;6.38;6.71;6.94;4.55];
V2=[1.28;2.14;2.71;3.51;4.49;5.05;6.05;
  6.72;7.45;8.13;8.9;9.73;10.17;10.51;7];
I3=[0.82;1.1;1.25;1.94;2.22;2.68;3.12;
  3.42;4;4.55;5.05;5.32;6.1;6.54;6.8];
V3=[1.28;1.71;2.21;3.02;3.64;4.12;4.82;
  5.25;6.11;6.88;7.6;8.32;9.51;10.13;10.52];
% =====
% Method 1
Rm1=V./I;
R(1,1)=mean(Rm1);
figure(1);
stem(Rm1);
axis([0 15 1.45 1.65]);
title('Estimativa da Resistencia a cada amostragem
- Metodo 1');
xlabel('Medidas efetuadas');
ylabel('Resistância em cada medida');

R2m1=V2./I2;
R(1,2)=mean(R2m1);
figure(2);
stem(R2m1);
axis([0 15 1.45 1.8]);
title('Estimativa da Resistencia a cada amostragem
- Metodo 1');
xlabel('Medidas efetuadas');
ylabel('Resistância em cada medida');

R3m1=V3./I3;
R(1,3)=mean(R3m1);
figure(3);
stem(R3m1);
axis([0 15 1.45 1.8]);
title('Estimativa da Resistencia a cada amostragem
- Metodo 1');
xlabel('Medidas efetuadas');
ylabel('Resistância em cada medida');
% =====
% Method 2
Vm2=mean(V);
Im2=mean(I);
R(2,1)=Vm2/Im2;

V2m2=mean(V2);
I2m2=mean(I2);
R(2,2)=V2m2/I2m2;

V3m2=mean(V3);
I3m2=mean(I3);
R(2,3)=V3m2/I3m2;
% =====
% Method 3

Vm2=mean(V.^2);
IVm2=mean(I.*V);
R(3,1)=Vm2/IVm2;

V2m2=mean(V2.^2);
IV2m2=mean(I2.*V2);
```

```
R(3,2)=V2m2/IV2m2;

V3m2=mean(V3.^2);
IV3m2=mean(I3.*V3);
R(3,3)=V3m2/IV3m2;
% =====
```

Listing 1. Descriptive Caption Text

## 2 - Script Utilizado para identificação por mínimos quadrados

```
% =====
% Identificacao de sistemas
% Tassiano Neuhaus
% tassianors@gmail.com
% UFRGS
% =====
close all; clear all;

% Escolhido ao acaso.
a=1;
b=0.9;
Ts=1/100;
Tf=1;
% sistema em estudo
G=tf([a],[1 b],Ts);
% u
tempo = 0:Ts:Tf;
%u = randn(size(tempo));
[u1,T] = gensig('sin',1/10,Tf,Ts);
[u2,T] = gensig('sin',2/10,Tf,Ts);
[u3,T] = gensig('sin',4/10,Tf,Ts);
u=u1+u2+u3;
ynr=lsim(G, u, tempo);

% faz com que o ruido seja alterado cada vez que o
randn for executado
RandStream.setDefaultStream(
  RandStream('mt19937ar', 'seed',
    sum(100*clock)));

% identificacao por MMQ
% modelo y(t)=a*u(t-1)-b*y(t-1)
teta=[a; b];
% e entrada u saida do controlador
%phy=[u(t-1); -y(t-1)]
N=size(tempo,2);
n=size(teta, 1);
% numero de vezes que sera aplicado o metodo.
M=10;
tetaM=zeros(M, n);

for j=1:M
  noise=randn(size(tempo));
  % 5% of noise into the signal
  y=ynr+noise'*0.55*0.1;
  figure(j);stem(y);

  phy=zeros(N, n);
  for t=2:N
    phy(t, 1)=u(t-1);
    phy(t, 2)=-y(t-1);
  end

  % make sure, rank(phy) = n :)
  teta_r=inv(phy'*phy)*phy'*y;
  tetaM(j,1)=teta_r(1);
  tetaM(j,2)=teta_r(2);
end

tetaM
mean(tetaM)
std(tetaM)
```

Listing 2. Descriptive Caption Text

## REFERÊNCIAS

- [1] T. Soderstrom and P. Stoica, *System idendification*. New york: Prentice Hall, 2001.
- [2] L. A. Aguirre, *Introdução à identificação de sistemas, Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*, 2nd ed. Belo Horizonte, Minas Gerais: Editora UFMG, 2004, vol. 1.