

Modelagem e Identificação de sistemas lineares

Tassiano Neuhaus

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Departamento de Engenharia Elétrica
Av. Osvaldo Aranha, 103 - Bairro Bom Fim CEP: 90035-190 - Porto Alegre - RS - Brasil

Resumo—

Neste trabalho será apresentado diversos meios para a identificação de sistemas lineares. Existem dois grupos principais de métodos para esta identificação, sendo um deles conhecido como *identificação não paramétrica* onde existem infinitos parâmetros para serem estimados e que normalmente é utilizado para identificação de funções gráficas. Outro método é conhecido como *identificação paramétrica* onde o número de parâmetros a ser estimado é finito. Este último método será mais abordado neste trabalho, por possuir uma aplicabilidade maior devido a possibilidade de estimar processos em funções matemáticas que descrevem o comportamento do sistema muitas vezes com mais informação que os métodos gráficos.

Para este trabalho será utilizado um processo de controle de posição angular, controlado por um motor de corrente contínua. Serão apresentados diversos métodos de identificação e ao fim será feito um comparativo entre os resultados obtidos.

Palavras-chave—Identificação de sistemas lineares, métodos paramétricos.

I. INTRODUÇÃO

Neste trabalho será apresentado um sistema de para controle de posição angular, manipulado por um motor de corrente contínua (DC). O objetivo principal, é estimar os valores das variáveis existentes no modelo escolhido para representar este sistema.

Inicialmente será explicado o processo de escolha do modelo que representa a dinâmica deste sistema (Seção (II)). Será explicitado quais considerações sobre o sistema foram feitas para se obter o modelo que será utilizado nas seções seguintes, para determinar os parâmetros.

Em seguida, será utilizado o método dos Mínimos quadrados (MQ), para estimar o sistema, considerando-se para isso que o ruído sobre o sistema sofre influência dos mesmos polos que estão na planta, ou seja, que o modelo para o sistema se comporta como um modelo ARX. Nesta mesma seção (V) será apresentado os resultados para o mesmo sistema, baseado nos mesmos dados, mas para um modelo que não representa o sistema físico, ou que não consegue representa-lo.

Na seção (VI) será apresentado o método das variáveis instrumentais, para estimar os valores do parâmetro para o modelo. Da mesma forma que para o método dos MQ, será utilizado um modelo que não representa o sistema real, e este método será aplicado para determinar a qualidade dos resultados obtidos.

Ao fim, será apresentado uma breve discussão sobre os resultados obtidos em ambos os métodos utilizados, e as considerações finais.

II. MODELAGEM DO SISTEMA

O objetivo da modelagem de um sistema é encontrar um modelo (função com parâmetros livres) que consiga representar

o sistema físico de forma completa. A partir do conhecimento do sistema físico, fazem-se considerações sobre o sistema, para simplifica-lo a fim de tornar o modelo matemático o mais simples possível, mas que ainda represente o sistema real, com a margem de precisão definida, pela quantidade e qualidade das simplificações aplicadas para chegar-se ao modelo matemático do sistema.

A. Sistema Físico

O sistema físico em estudo neste trabalho, é um sistema para controle de posição, onde o atuador é um motor de corrente contínua (DC). Desta forma a entrada do sistema é a tensão aplicada sobre os terminais do motor em Volts [V], e a saída é a posição angular do motor em radianos [rad].

Na Figura (1) pode ser vista a representação elétrica e mecânica do motor em questão.

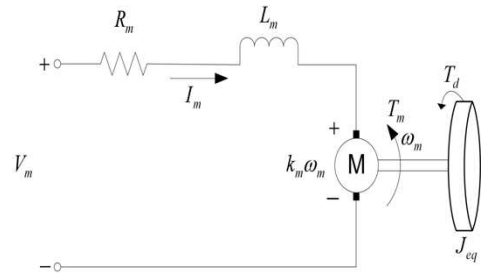


Figura 1. Representação elétrica e mecânica do motor

As variáveis consideradas para a modelagem são as apresentadas abaixo:

- ω = Velocidade do motor.
- v = Tensão aplicada na armadura.
- i_a = corrente de armadura.
- L = Indutância da armadura.
- e = Força contra eletromotriz = $K_2 \omega$
- R = Resistência do enrolamento da armadura.
- T = Torque aplicado = $K_i i_a$
- J = Momento de inércia da carga.
- f = Atrito viscoso no eixo.

Tem-se desta forma as duas equações que descrevem o sistema para a parte elétrica (1) e mecânica (2).

$$V - R \cdot I_a - L \frac{dI_a}{dt} - e = 0 \quad (1)$$

$$J \dot{\omega} = T - f \omega \quad (2)$$

A partir destas equações diferenciais pode-se chegar ao sistema de equações de estado descrito em (3).

$$\begin{bmatrix} \dot{Ia} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -K_2/L & 0 \\ K_1/J & -f/J & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V \quad (3)$$

Com este sistema de equações de estado, é possível obter-se as funções de transferências, que descrevem o sistema, para uma entrada e uma saída. Na equação (4) apresenta-se a função de transferência do motor, que relaciona a posição com a tensão de entrada do motor.

$$G(s) = \frac{k_1/JL}{s(s + f/L)(s + R/L) + s k_1 k_2/JL} \quad (4)$$

Devido a dinâmica do sistema mecânico ser muito menor que a dinâmica do sistema elétrico, pode-se desprezar a influência do polo elétrico do sistema, ficando a função de transferência como a seguir:

$$G(s) = \frac{\frac{k_1}{JL}}{s(s + \frac{fL + k_1 k_2}{JL})}$$

A equação anterior (4) representa o comportamento da posição angular do motor baseado na entrada de tensão aplicada sobre seus terminais. Esta Função de transferência descreve este comportamento em tempo contínuo, nosso sistema é digital e com isso precisamos de uma representação discreta para esta mesma função, para isso pode ser utilizados diversos métodos, como Euler backward, Euler forward, entre outras aproximações. Iremos neste trabalho utilizar a aproximação de Euler Forward (5).

$$s \cong \frac{(z - 1)}{T_S} \quad (5)$$

Desta forma, chega-se a uma função de transferência (6).

$$G(z) = \frac{a}{(z - 1)(z - b)} \quad (6)$$

Onde :

$$a = \alpha T_S^2$$

$$b = \beta T_S - 1$$

$$\alpha = \frac{k_1}{JL}$$

$$\beta = \frac{fL + k_1 k_2}{JL}$$

Com T_S sendo a frequência de amostragem utilizada.

Desta forma chega-se a uma modelagem do sistema que relaciona a posição em função da tensão aplicada sobre o motor. Para tanto foi considerado que a dinâmica da parte mecânica do sistema é muito mais predominante que a dinâmica da parte elétrica, podendo esta ser desprezada para que o sistema se torne um pouco mais simples.

III. MODELAGEM NÃO PARAMÉTRICA

IV. MODELOS PARAMÉTRICOS SIMPLES

V. MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

O método dos mínimos quadrados (MMQ) é um dos mais conhecidos e mais utilizados nas mais diversas áreas da ciência e tecnologia. A origem da ideia básica pode ser encontrada nos trabalhos de Gaus sobre o estudo astronômicos. [1]

A. Sistema com solução única

Considerando-se que o sistema que será observado seja linear e invariante no tempo. Se a função f que descreve o sistema for não linear o sistema poderá em princípio ser identificado por modelos não lineares. Com base nestas restrições temos que:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

$$y = X\theta$$

Com $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Desde que X seja não singular é possível determinar θ :

$$\theta = X^{-1}y \quad (7)$$

B. Sistema sobredeterminado

Para sistemas sobredeterminados onde $N > n$, A variável X da equação (7) fica $X \in \mathbb{R}^{N \times n}$. Como esta matriz não é quadrada, não é possível de ser invertida. Multiplicando-se a equação (7) por X^T tem-se: [1]

$$X^T y = X^T X \theta$$

De onde vem:

$$\theta = [X^T X]^{-1} X^T y \quad (8)$$

O método dos mínimos quadrados minimiza o critério apresentado em (9).

$$J(\theta) = \frac{1}{2N} \sum_{t=1}^N [y(t) - \hat{y}(t, \theta)]^2 \quad (9)$$

Onde $\hat{y}(t, \theta)$ é a predição do sistema e pode ser representado como abaixo:

$$\hat{y}(t, \theta) = \theta^T \phi(t)$$

Desta forma pode se dizer que o sistema real é o próprio sistema estimado mais algum erro de estimativa:

$$y(t) = \hat{y}(t, \theta) + e(t) = \theta^T \phi(t) + e(t)$$

C. Estruturas de modelagem

De forma genérica modelos para descrição de sistemas podem ser representados como em (10).

$$A(q, \theta)Y(t) = \frac{B(q, \theta)}{F(q, \theta)}U(t) + \frac{C(q, \theta)}{D(q, \theta)}e(t) \quad (10)$$

Onde:

$$\begin{aligned} A(q, \theta) &= 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_{na}q^{-na} \\ B(q, \theta) &= b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_{nb}q^{-nb} \\ C(q, \theta) &= 1 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2} + \dots + c_{nc}q^{-nc} \\ D(q, \theta) &= 1 + d_1q^{-1} + d_2q^{-2} + \dots + d_{nd}q^{-nd} \\ F(q, \theta) &= 1 + f_1q^{-1} + f_2q^{-2} + \dots + f_{nf}q^{-nf} \end{aligned}$$

Baseado nestas informações existem modelos onde apenas alguns destes polinômios são diferentes de 1. Na Tabela (I) são apresentados alguns destes modelos mais comumente utilizados.

Tabela I
MODELOS COMUMENTE UTILIZADOS PARA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Modelo	Polinômios diferentes de 1
FIR	B
ARX	A B
ARMAX	A B C
ARMA	A C
ARARMAX	A B C D
OE	B F
BJ	B F C D

O método dos mínimos quadrados utiliza intrinsecamente o modelo ARX para descrever o modelo do sistema.

D. Controle de posição angular do motor DC

O sistema descrito na seção (II) quando utilizamos o método dos mínimos quadrados, intrinsecamente utilizamos o modelo ARX (11) para descrever este sistema. A partir de (10) tem-se que o modelo ARX fica (11).

$$A(q, \theta)Y(t) = B(q, \theta)U(t) + e(t) \quad (11)$$

A equação (11) pode ser reescrita :

$$Y(t) = b_1q^{-1}U(t) + b_2q^{-2}U(t) + \dots + b_{nb}q^{-nb}U(t) - a_1q^{-1}Y(t) - b_2q^{-2}Y(t) - \dots - a_{na}q^{-na}Y(t) + e(t)$$

O que pode ser escrito como em (12).

$$Y(t) = \varphi'(t)\theta + e(t) \quad (12)$$

Onde:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{na} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{nb} \end{bmatrix} \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ \vdots \\ y(t-na) \\ u(t-1) \\ \vdots \\ u(t-nb) \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi'(1) \\ \varphi'(2) \\ \vdots \\ \varphi'(N) \end{bmatrix}$$

Para o sistema de posicionamento do motor DC, a equação (11) fica como em (13).

$$G(q, \theta) = \frac{a}{(q-b)(q-c)} \quad H(q, \theta) = \frac{q^2}{(q-b)(q-c)} \quad (13)$$

A partir de (13) tem-se que o modelo pode ser descrito como abaixo:

$$\theta = [a \quad b+c \quad -bc] \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} r(t-2) \\ y(t-1) \\ y(t-2) \end{bmatrix}$$

Sabe-se de antemão que o valor esperado para a variável c é 1, já que existe um integrador na planta em estudo. No Apêndice (A) está o script utilizado para chegar-se aos resultados obtidos para a estimativa do modelo utilizando o método dos mínimos quadrados.

Foram efetuadas medidas sobre o sistema aplicando-se entradas com formas de ondas diferentes. Inicialmente foi utilizado um sistema controlado por um controlador do tipo PID onde aplicou-se uma referencia do tipo: Rampa, senoidal ou quadrada, e mediu-se a entrada da planta ($u(t)$) e a saída da planta ($y(t)$). Nas figuras (2), (3), (??) e (5).

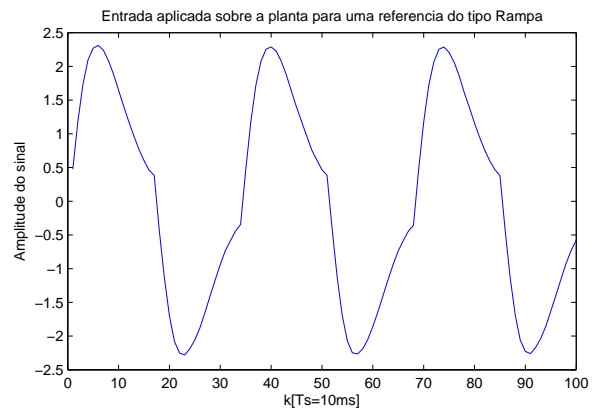


Figura 2. Entrada aplicada sobre o sistema $G(q)$ quando submetido a uma referencia do tipo rampa.

A figura (6) apresenta os valores estimados para o sistema quando submetido a uma referencia do tipo rampa, assim como

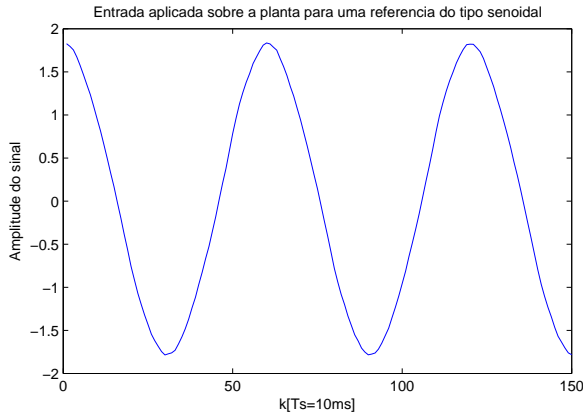


Figura 3. Entrada aplicada sobre o sistema $G(q)$ quando submetido a uma referência do tipo senoidal.

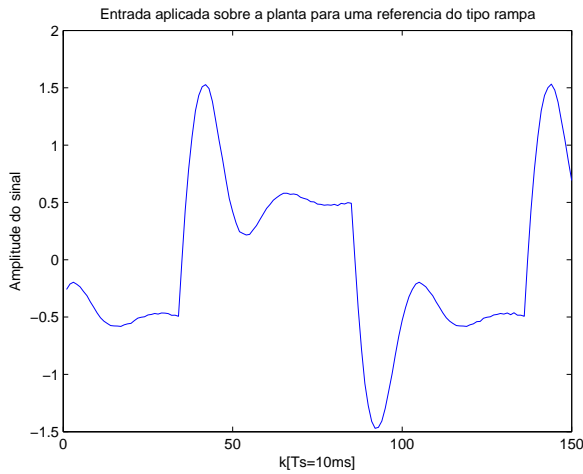


Figura 4. Entrada aplicada sobre o sistema $G(q)$ quando submetido a uma referência do tipo rampa.

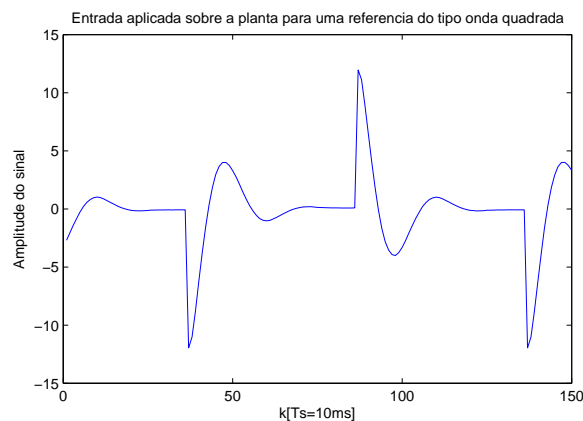


Figura 5. Entrada aplicada sobre o sistema $G(q)$ quando submetido a uma referência do tipo onda quadrada.

na figura (7), a diferença entre ambos os sinais é a frequência da onda de referência.

Na figura (8) é apresentada os resultados para a estimativa do sistema quando a referência para o sistema é uma onda quadrada.

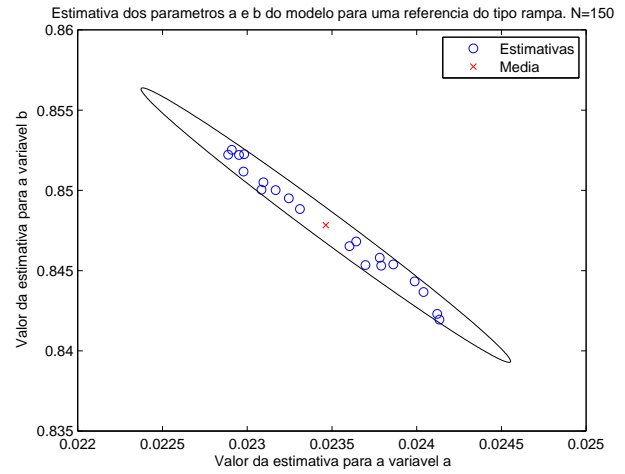


Figura 6. Estimativas das variáveis a e b para o conjunto de dados 1.

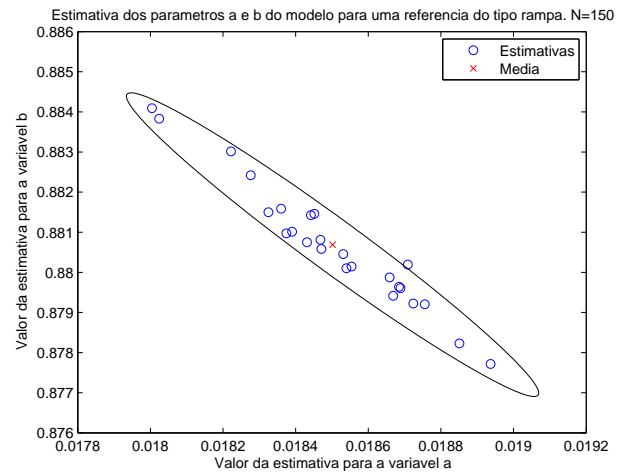


Figura 7. Estimativas das variáveis a e b para o conjunto de dados 3.

Para o caso quando temos na entrada do sistema uma senoide puramente, não é possível estimar os parametros do modelo sem que haja erro de polarização. Isso é devido ao fato de que a entrada do sistema não é suficientemente excitavel para o sistema. Obtem-se desta forma valore defasados dos que foram obtidos com as outras entradas aplicadas sobre o sistema.

Na tabela (II) é apresentada os valores encontrados para cada conjunto de dados. Apresenta-se também para questões de exemplificar, o resultado obtido quando altera-se o tamanho do conjunto de dados que é utilizado para estimar os parametros.

1) *Resultados para um modelo incompleto:* Nesta seção será apresentado resultados para uma estimativa utilizando um modelo que não consegue descrever o sistema propriamente.

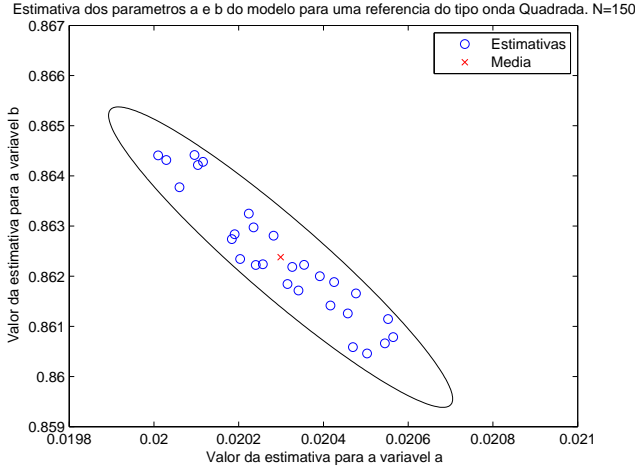


Figura 8. Estimativas das variáveis a e b para o conjunto de dados 4.

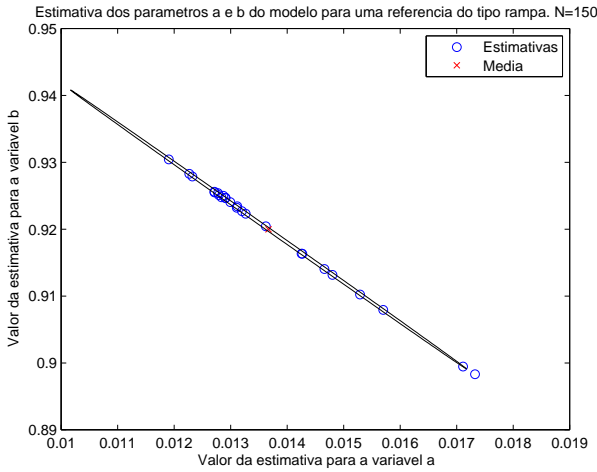


Figura 9. Estimativas das variáveis a e b para o conjunto de dados 2.

Tabela II
VALORES ESTIMADOS DE $G(q)$ PARA O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS (ARX)

Conjunto	N	Media a	Media b
1 - Rampa	150	0.0235	0.8478
1 - Rampa	300	0.0234	0.848
1 - Rampa	600	0.0234	0.8481
1 - Rampa	1500	0.0234	0.8482
2 - Sin	150	0.0137	0.92
2 - Sin	300	0.0137	0.92
2 - Sin	600	0.0136	0.9201
2 - Sin	1500	0.0135	0.9209
3 - Rampa	150	0.0185	0.8807
3 - Rampa	300	0.0185	0.8807
3 - Rampa	600	0.0185	0.8807
3 - Rampa	1500	0.0185	0.8808
4 - Quadrada	150	0.0203	0.8624
4 - Quadrada	300	0.0203	0.8624
4 - Quadrada	600	0.0203	0.8624
4 - Quadrada	1500	0.0202	0.8629

Serão utilizados os mesmos dados da estimativa do item anterior.

O modelo utilizado é descrito em (14). Observa-se que o integrador não está presente neste modelo, desta forma tem-se que o modelo das variáveis a serem utilizadas no método dos mínimos quadrados fica como em (15).

$$G(q, \theta) = \frac{a}{(q-b)} \quad H(q, \theta) = \frac{q}{(q-b)} \quad (14)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} r(t-1) \\ y(t-1) \end{bmatrix} \quad (15)$$

Para este modelo chegou-se aos valores dos parâmetros a e b apresentados na Figura (10).

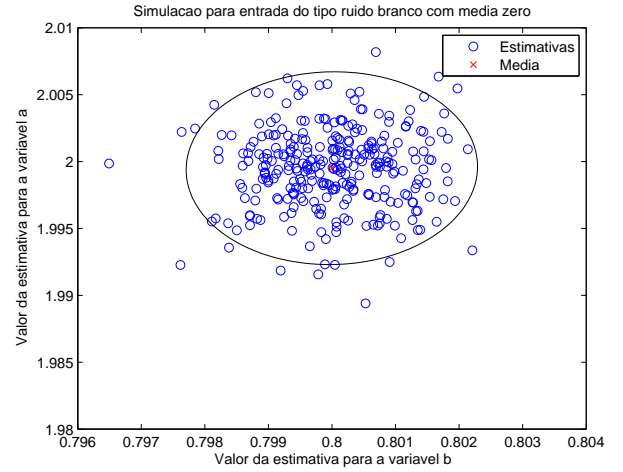


Figura 10. TODO

VI. MÉTODO DA VARIÁVEL INSTRUMENTAL - IV

Uma alternativa para a minimização da polarização PPA (propriedades de pequenas amostras) na estimativa do sistema é a polarização assintótica. A ideia é relaxar um pouco a definição PPA e, por um lado, permitir que haja polarização para uma amostra pequena, mas por outro lado, verificar se tal polarização desaparece à medida que o tamanho do conjunto de observações cresce. [1]

Para utilização deste método, escolhe-se um Instrumento $Z(t)$:

$$Z(t) \in \mathbb{R}^p \quad \forall t \quad E(Z(t)\nu) = 0 \quad (16)$$

$$\hat{y}(t, \theta) = \phi^T(t)\theta$$

$$E[Z(t)(y(t) - \hat{y}(t, \theta))] = 0$$

$$E[Z(t)\phi^T(t)]\theta = E[Z(t)y(t)]$$

De onde vem:

$$\hat{\theta}_N^{iv} = \left[\sum_{t=1}^N Z(t)\phi^T(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N Z(t)y(t) \right] \quad (17)$$

Após a escolha da estimativa $Z(t)$ que satisfaça (17) o passo seguinte é calcular (18).

$$E[\hat{\theta}_N^{iv} - \theta_0] = 0 \quad (18)$$

A. Método aplicado ao controle de posição

Primeiro passo para aplicar o método das *Variáveis instrumentais* é escolher o instrumento que será utilizado.

$$\begin{aligned} w(t) &= F(q)u(t) \\ F(q) &= q^{-1} \\ w(t) &= u(t-1) \end{aligned}$$

O que resulta em um instrumento apresentado em (19).

$$Z(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ w(t-1) \\ \vdots \\ w(t-p) \end{bmatrix} \quad (19)$$

VII. CONCLUSÕES

APÊNDICE

1 - Script para Simulação do MQ para o modelo ARX

```
%=====
% Identificacao de sistemas
% Tassiano Neuhaus
% tassianors@gmail.com
% UFRGS
%=====
close all; clear all;

% LOAD DATA
data_in_4
data_out_4

% Defines
% Number or unknown variables to be determined by
% this method
n=3;
step_size=1500;
N=0;
j=1;

% Total number of points collected
Ntot=size(input, 1);

while N+step_size < Ntot
    % load partial number of points
    y=output(N+1:N+step_size,1);
    u=input(N+1:N+step_size,1);

    phy=zeros(step_size, n);
    for t=3:step_size
        phy(t, 1)=u(t-2);
        phy(t, 2)=y(t-1);
        phy(t, 3)=y(t-2);
    end

    % make sure, rank(phy) = n :)
    teta=inv(phy'*phy)*phy'*y;
    % to be used in grafic plot
    a(j)=teta(1);
    b(j)=-teta(3);
    c(j)=teta(2)-b(j);
    j=j+1;
    N=N+step_size;
end
PN=[a', b'];
```

```
ma=mean(a)
sa=std(a);
mb=mean(b)
mc=mean(c)

% from here is only to plot the estimated points
plot(a, b, 'bo');
hold;
plot(ma, mb, 'rx');
hold;
title('Estimativa dos parametros a e b do modelo
para uma referencia do tipo onda Quadrada.
N=150')
xlabel('Valor da estimativa para a variavel a')
ylabel('Valor da estimativa para a variavel b')
legend('Estimativas', 'Media')

% chi^2 for 95% of confiability
chi = 5.991;
ang = linspace(0,2*pi,360)';
[avetor,SCR,avl] = princomp(PN);
Diagonal= diag(sqrt(chi*avl));
ellipse=[cos(ang) sin(ang)] * Diagonal * avetor' +
repmat(mean(PN), 360, 1);
line(ellipse(:,1), ellipse(:,2), 'linestyle', '--',
'color', 'k');
```

Listing 1. Método dos mínimos quadrados

2 - Script para Simulação do método das variáveis instrumentais

```
%=====
% Identificacao de sistemas
% Tassiano Neuhaus
% tassianors@gmail.com
% UFRGS
%=====
close all; clear all;

% Definitions
Ts=10e-3;
% frequency used when u(t) is a sinusoidal signal.
freq=pi/20;

Tf=10*2*pi/freq;

STD=0.1;
tempo = 0:Ts:Tf;
N=size(tempo, 2);

M=100;

% TFs
%ARX
G=tf([2],[1 -0.8 0], Ts);
H=tf([1 0 0],[1 -0.8 0], Ts);

% Replace the default stream with a stream whose
seed is based on CLOCK, so
% RAND will return different values in different
MATLAB sessions
RandStream.setDefaultStream(
    RandStream('mt19937ar', 'seed',
        sum(100*clock)));

% identification using MMQ
% model y(t)=a*u(t-2)+(b+c)*y(t-1) +bc*y(t-2)
teta=[2; 0.8; 0];
n=size(teta, 1);
% e entrada u saida do controlador
%phy=[ u(t-2); y(t-1); y(t-2)]

% numero de vezes que sera aplicado o metodo.
a=zeros(M,1);
b=zeros(M,1);
c=zeros(M,1);
```

REFERÊNCIAS

- [1] L. A. Aguirre, *Introdução à identificação de sistemas, Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*, 2nd ed. Belo Horizonte, Minas Gerais: Editora UFMG, 2004, vol. 1.

```

for j=1:M
    % make a random noise with std = 0.1
    ran=rand(N, 1);
    s=std(ran);
    % now ran_s has std=1;
    ran_s=ran/s;
    m=mean(ran_s);
    % make noise be zero mean
    rh=(ran_s-m)*STD;

    % make a random noise with std = 1
    ran=rand(N, 1);
    s=std(ran);
    m=mean(ran);
    % now rr has std=1 sinusoidal input signal
    rr=(ran-m)/s;
    %sim
    rr=sin(freq*tempo);
    mean(rr)

    yr=lsim(G, rr, tempo);
    ynoise=lsim(H, rh, tempo);
    y=yr+ynoise;
    u=rr;

    phy=zeros(N, n);
    z=zeros(N, n);
    for t=3:N
        phy(t, 1)=u(t-2);
        phy(t, 2)=y(t-1);
        phy(t, 3)=y(t-2);
    end
    for t=4:N
        % auxiliary instrument z
        z(t, 3)=u(t-1);
        z(t, 2)=u(t-2);
        z(t, 1)=u(t-3);
    end

    % make sure, rank(phy) = n :)
    teta_r=inv(z'*phy)*z'*y;%inv(phy'*phy)*phy'*y;

    % to be used in graphic plot
    a(j)=teta_r(1);
    b(j)=teta_r(2);
    c(j)=teta_r(3);
end
PN=[a, b];
ma=mean(a)
mb=mean(b)
mc=mean(c)

plot(a, b, 'bo');
hold;
plot(ma, mb, 'rx');
hold;
title('Simulacao do sistema para o metodo das
    variavies instrumentais')
xlabel('Valor da estimativa para a variavel a')
ylabel('Valor da estimativa para a variavel b')
legend('Estimativas', 'Media')

%valor da tabela chi-quadrado para 95% de confianca
chi = 5.991;
ang = linspace(0,2*pi,360)';
[avetor,SCR,avl] = princomp(PN);
Diagonal= diag(sqrt(chi*avl));
ellipse=[cos(ang) sin(ang)] * Diagonal * avetor' +
    repmat(mean(PN), 360, 1);
line(ellipse(:,1), ellipse(:,2), 'linestyle', '-.',
    'color', 'k');

```

Listing 2. Método das variáveis instrumentais