Projeto de controladores não lineares utilizando referência virtual

Dissertação de mestrado

Tassiano Neuhaus
Orientador: Alexandre Sanfelice Bazanella

PPGEE - UFRGS

Setembro de 2012

Agenda

Objetivo / Motivação

Objetivo

Apresentar um estudo sobre projeto de controladores não lineares utilizando identificação de sistemas e o conceito de referência virtual.

Motivação

- Controladores não lineares são pouco explorados
- Para alguns tipos de sistemas, controladores não lineares conseguem ser mais performáticos

Definições

Foco em sistemas SISO

Sistemas *Single input single output* (SISO) discretos:

$$y(t) = G_0(z)u(t) + H_0(z)e(t)$$

onde $G_0(z)$ é a representação da planta real do sistema, H_0 é a representação do filtro que atua sobre o ruido $e(t)$. $y(t)$ é a saída e $u(t)$ é a entrada do sistema.

Definições
Identificação de sistemas

Identificação de sistemas pode ser dividido em 3 partes principais:

- O sistema real a ser identificado $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S}: \quad y(t) = G_0(z)u(t) + H_0(z)e(t) \tag{1}$$

- A classe de modelos a ser utilizada na identificação $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M}: \quad \{G(z,\theta), H(z,\theta) | \theta \in D_{\mathcal{M}}\} \tag{2}$$

Definições
Identificação de sistemas

- Algum critério para elencar qual modelo dentro da classe de modelos melhor consegue representar o sistema $\mathcal{S}$ nas propriedades escolhidas.

Neste trabalho optou-se por:

$$V(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{1}{2}\varepsilon^2(t,\theta) \qquad (3)$$

onde $\varepsilon(t,\theta)$ é o erro de predição e pode ser definido como:

$$\varepsilon(t,\theta) = H^{-1}(z,\theta)\left\{y(t) - G(z,\theta)u(t)\right\}$$

Definições

Propriedades estatisticas das estimativas

- θ: Representa a estimativa obtida com um experimento.
- θ_0: conjunto de parametros que faz com que:

$$G(z, \theta_0) \equiv G_0(z)$$

- $\hat{\theta}_N$: Estimativa para um certo valor de N pontos.
- θ^*: Valor de convergência da estimativa quando $N \to \infty$:

$$\lim_{N \to \infty} \hat{\theta}_N = \theta^*$$

Definições

Propriedades estatisticas das estimativas - Erros envolvidos

Erros atrelados às estimativas

$$\text{Erro de variância} = G(z,\hat{\theta}_N) - G(z,\theta^*)$$
$$\text{Erro de polarização} = G(z,\theta^*) - G_0(z)$$

Onde observa-se que o erro de polarização é a diferença entre o valor real $G_0(z)$ e a melhor aproximação possível (quando $N \to \infty$) $G(z,\theta^*)$.

Erro de variância é a diferença entre cada uma das estimativas obtidas e a estimativa quando $N \to \infty$ $G(z,\theta^*)$

Definições

Propriedades estatisticas das estimativas - Elipse de confiança

Região de confiança é definido pela elipse:

$$U_\theta = \left\{ \theta \mid (\hat{\theta}_N - \theta_0)^T P_N^{-1} (\hat{\theta}_N - \theta_0) \leq \chi^2_\alpha(n) \right\}$$

onde:

$$P(\theta^*) \triangleq \lim_{N \to \infty} N \, E(\hat{\theta}_N - \theta^*)(\hat{\theta}_N - \theta^*)^T$$

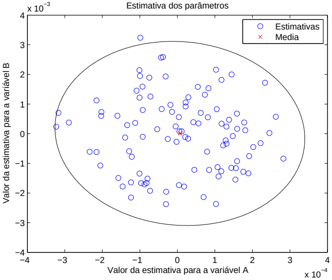


Figura: Estimativas de um sistema e a elipse representando a região de confiança para um χ de 99%.

Definições
Sinal PRBS

Sinal PRBS

$$u(t) = rem(A(z)u(t), 2) = rem(a_1 u(t-1) + ... + a_n u(t-n), 2)$$

Ordem n	$M = 2^n - 1$	a_k não zeros para k
2	3	1, 2
3	7	2, 3
4	15	1, 4
5	31	2, 5
6	63	1, 6
7	127	3, 7
8	255	1, 2, 7, 8
9	511	4, 9
10	1023	7, 10
11	2047	9, 11

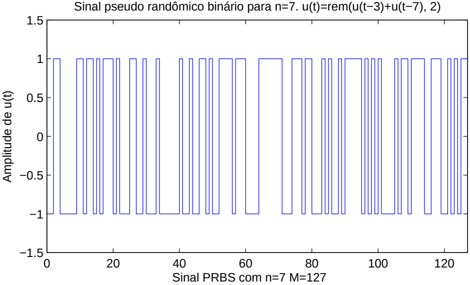


Figura: Sinal PRBS para $n = 7$

Classes de modelos

Sistemas lineares - SISO de tempo discreto

Classe de modelos genérica

$$A(z)y(t) = \frac{B(z)}{F(z)}u(t) + \frac{C(z)}{D(z)}e(t)$$

onde:

$$A(z,\theta) = 1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{na} z^{-n_a}$$
$$B(z,\theta) = b_1 z^{-1} + \ldots + b_{nb} z^{-n_b}$$
$$C(z,\theta) = 1 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_{nc} z^{-n_c}$$
$$D(z,\theta) = 1 + d_1 z^{-1} + \ldots + d_{nd} z^{-n_d}$$
$$F(z,\theta) = 1 + f_1 z^{-1} + \ldots + f_{nf} z^{-n_f}$$

Polinômios $\neq 1$	Nome
B	FIR
AB	ARX
ABC	ARMAX
AC	ARMA
ABD	ARARX
ABCD	ARARMAX
BF	OE
BFCD	Box-Jenkins

Classes de modelos
Sistemas não lineares

- Muitos são os tipos de classes de modelos para sistemas não lineares.
- Eles podem ser divididos em dois típos principais:
  - Não linearidades estáticas
  - Não linearidades dinâmicas
- Diversas classes de modelos se diferenciam pela escolha da base que irá representar o sistema.

Classes de modelos - Wiener e Hammerstein

Sistemas não lineares

Representa não linearidades estáticas

Wiener: Não linearidade acoplada na saída do sistema
Hammerstein: Não linearidade acoplada na entrada do sistema

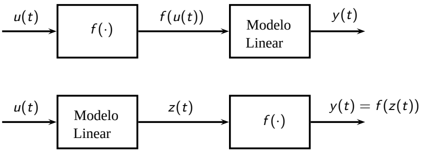


Figura: Acima: modelo de Hammerstein. Abaixo: Modelo de Wiener.

Classes de modelos
Sistemas não lineares

- Voltera: Relaciona valores passados da entrada com o valor atual da saída.

$$y(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_j(\tau_1, ..., \tau_j) \prod_{i=1}^{j} u(t-\tau_i) d\tau_i$$

- Redes Neurais:

$$x = f\left(\sum_{j=1}^{n} \omega_j x_j + b\right)$$

  - Redes neurais multi camadas
  - Redes neurais recorrente

- Funções radiais de base: Casos particulares de redes neurais, mas lineares nos parametros ω_i.

$$f(y) = \omega_0 + \sum_i \omega_i \phi(\|y - c_i\|)$$

Classes de modelos - NARMAX

Sistemas não lineares

Nonlinear AutoRegressive Moving Average model with eXogenous variables

$$y(t) = \theta^T \Phi_{nl}(y, u, e)$$

onde $\Phi_{nl}(\cdot)$ denota um campo vetorial que depende dos valores passados de $y(t)$ e presente e passados de $u(t)$ e $e(t)$; θ é o vetor de parâmetros a ser identificado.

Classes de modelos - NARMAX

Modelo Polinômial

Modelo polinômial

$$y(t) = \sum_{m=0}^{l} \sum_{p=0}^{m} \sum_{n1,n_m}^{n_y,n_u} c_{p,m-p}(n_1, \ldots, n_m) \prod_{i=1}^{p} y(t-n_i) \prod_{i=p+1}^{m} u(t-n_i)$$

sendo que

$$\sum_{n1,n_m}^{n_y,n_u} \equiv \sum_{n_1=1}^{n_y} \cdots \sum_{n_m=1}^{n_y}$$

Exemplo:

$$y(t) = \alpha_1 u^2(t-1) + \alpha_2 y(t-1) y^2(t-2) + \alpha_3 u(t-2) y(t-1)$$

Classes de modelos - NARMAX
Modelo Racional

Modelo Racional

$$y(t) = \frac{a(y(t-1),\dots,y(t-n_y),u(t-1),\dots,u(t-n_u),}{b(y(t-1),\dots,y(t-n_y),u(t-1),\dots,u(t-n_u),}\cdots$$

$$\cdots\frac{e(t-1),\dots,e(t-n_e))}{e(t-1),\dots,e(t-n_e))} + e(t)$$

$$a(t-1) = \sum_{j=1}^{N_n} p_{nj}\theta_{nj} = \psi_n^T(t-1)\theta_n$$

$$b(t-1) = \sum_{j=1}^{N_d} p_{dj}\theta_{dj} = \psi_d^T(t-1)\theta_d$$

Exemplo:

$$y(t) = \frac{\alpha_1 u^2(t-1) + \alpha_2 y(t-1)y^2(t-2) + \alpha_3 u(t-2)y(t-1)}{1 + \alpha_4 u^3(t-1)y(t-2) + \alpha_5 y^3(t-1)}$$

Algoritmo para identificação de modelos racionais

Pode ser utilizado para modelos polinômiais

Modelo

$$y(t) = \frac{a(y(t-1),...,y(t-n_y),u(t-1),...,u(t-n_u))}{b(y(t-1),...,y(t-n_y),u(t-1),...,u(t-n_u))} + c(e(t-1),...,e(t-n_e)) + e(t)$$

- O ruído é modelado por um polinômio que pode ou não ser linear.

Algoritmo para identificação de modelos racionais

Passo 1

Faça $i = 0$. Monte a matriz Ψ de regressão e estime os parâmetros usando o método dos mínimos quadrados:

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}_n^i \\ \hat{\theta}_{d1}^i \end{bmatrix} = \left[\Psi^T \Psi\right]^{-1} \Psi^T y^*$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_n^T(t-1) & \psi_{d1}^T(t-1) \\ \vdots & \vdots \\ \psi_n^T(t+N-2) & \psi_{d1}^T(t+N-2) \end{bmatrix}$$

Algoritmo para identificação de modelos racionais

Passo 2

Faça $i = i + 1$. Determine os resíduos e sua variância, respectivamente como:

$$\xi^i(t) = y(t) - \frac{\psi_n^T(t-1)\hat{\theta}_n}{\psi_d^T(t-1)\hat{\theta}_d}$$

$$\left(\sigma_\xi^2\right)^i = \frac{1}{N - m_d} \sum_{i=m_d+1}^{N} \left(\xi^i(t)\right)^2$$

Passo 3

Usando-se os resíduos determinados no passo anterior, atualize $\Psi^T \Psi$ e $\Psi^T y^*$ usando:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_n^T(t-1) & y(t)\psi_{d1}^T(t-1) & \psi_\xi^T(t-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_n^T(t+N-2) & y(t)\psi_{d1}^T(t+N-2) & \psi_\xi^T(t+N-2) \end{bmatrix}$$

Algoritmo para identificação de modelos racionais
Passo 4 e 5

Passo 4: Determine:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sum_{t=1}^{N} p_{d2}^2 & \dots & \sum_{t=1}^{N} p_{d2} p_{dN_d} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sum_{t=1}^{N} p_{dN_d} p_{d2} & \dots & \sum_{t=1}^{N} p_{dN_d}^2 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sum_{k=1}^{N} p_{d2} p_{d1} \\ \vdots \\ -\sum_{k=1}^{N} p_{dN_d} p_{d1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

E estime novamente os parâmetros utilizando:

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}_n^i \\ \hat{\theta}_{d1}^i \end{bmatrix} = \left[\Psi^T \Psi - (\sigma_\xi^2)^i \Phi \right]^{-1} \left[\Psi^T y^* - (\sigma_\xi^2)^i \phi \right]$$

Passo 5: Volte ao Passo 2 até atingir convergência (de parâmetro ou de variância de resíduo).

Projeto de controladores baseados em dados

Definições

Sistema básico de controle

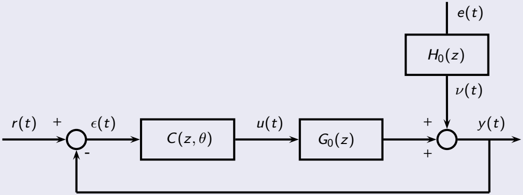


Figura: Representação de um sistema de controle em malha fechada, com ruído aditivo na saída.

$$T(z,\theta) = \frac{C(z,\theta)G_0(z)}{1 + C(z,\theta)G_0(z)}$$

Projeto de controladores baseados em dados
Critérios de perfomance

- Seguimento de referência,
- Rejeição ao ruído e
- Uso reduzido de esforço de controle.

Para o objetivo de seguimento de referência, a performance pode ser avaliada pela norma:

$$J_y(\theta) \triangleq \bar{E}\left[y(t) - y_d(t)\right]^2 = \bar{E}\left[(T(z,\theta) - T_d(z))r(t)\right]^2$$

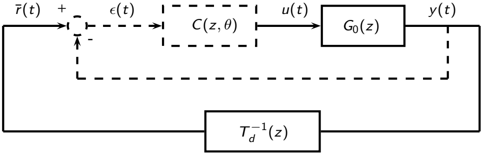
Controlador ideal - Seguimento de referência

$$C_d(z) = \frac{T_d(z)}{G_0(z)(1 - T_d(z))}$$

Referência Virtual para identificação de controladores

Método VRFT

- Método VRFT utiliza referência virtual para obtenção dos sinais necessários à identificação.



- O método VRFT faz com que a função custo a ser minimizada seja quadrática em θ, não recaindo em mínimos locais.

$$J_{VR}^{N}(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(u_L(t) - \varphi_L^T(t)\theta)^2$$

$$\varphi_L(t) = \beta(z)\epsilon_L(t)$$

Referência Virtual para identificação de controladores

Método VRFT - função custo de um sistem hipotético

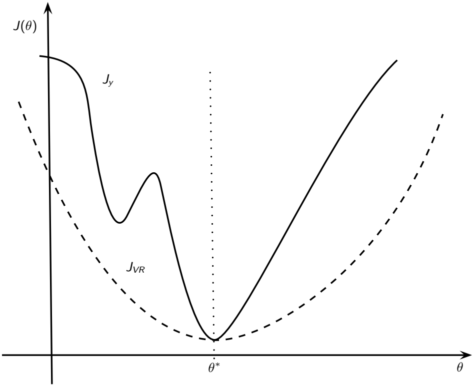


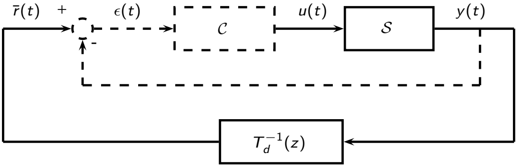
Figura: O valor θ^* é o ponto de mínimo de ambas as funções custo, logo, minimizando a função custo $J_{VR}(\theta)$ é o equivalente a minimizar $J_y(\theta)$ sob condições ideais.

Projeto de controladores não lineares baseados em dados

União do algoritmo de identificação de sistemas não lineares com referência virtual

Definições

- Deseja-se que o sistema não linear, se comporte linearmente em malha fechada: $T_d(z)$
- $\mathcal{C}_d$ é quem proporciona isso.



Projeto de controladores não lineares baseados em dados

União do algoritmo de identificação de sistemas não lineares com referência virtual

Objetivo para encontrar o controlador

$$\min_{\theta} J^{VR}(\theta)$$

$$J^{VR}(\theta) \triangleq \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left[\left(u(t) - C(\bar{\psi}_C(t), \theta)\right)^2\right].$$

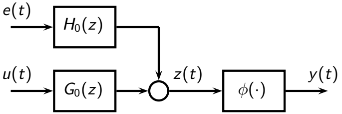
Classes de modelos exploradas:

- Não linearidades estáticas: Sistema do tipo Wiener
- Não linearidades dinâmicas: Sistema racional (NARMAX)

Projeto de controladores não lineares baseados em dados
Sistema do tipo Wiener - Não linearidade estática na saída

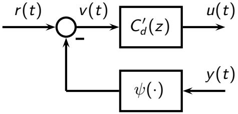
Wiener

$$\begin{aligned} z(t) &= G_0(z)u(t) + H_0(z)e(t) \\ y(t) &= \phi(z(t)) \end{aligned}$$



Controlador: Hammerstein

$$\begin{aligned} u(t) &= C_d'(z)v(t) \\ v(t) &= r(t) - \psi(y(t)) \end{aligned}$$



Observação

Fica claro que mesmo no caso padrão o controlador ideal não é uma função do erro $r(t) - y(t)$, mas sim de $r(t)$ e $y(t)$ separadamente.

Projeto de controladores não lineares baseados em dados

Sistema do tipo Wiener - Não linearidade estática na saída

Assumindo que a referência $r(t)$ seja constante, uma topologia alternativa é tornar o controlador dependente do erro de referência.

Controlador dependente do erro de referência

$$\begin{aligned} u(t) &= C'(z,\theta)v(t) \\ v(t) &= \psi(r(t)-y(t),\eta) \end{aligned}$$

onde

$$\psi(r(t)-y(t)) = \alpha[r(t)-z(t)]$$

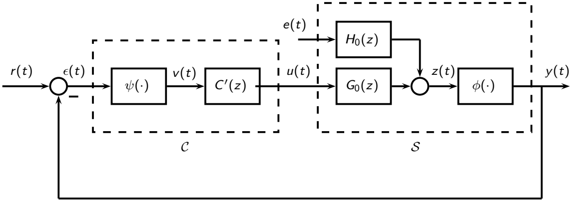


Figura: Diagrama de blocos de um sistema não linear do tipo Wiener.

Sistema do tipo Wiener
Exemplo numérico

Sistema Real

$$G_0(z) = \frac{0.5}{z - 0.9}$$

$$\phi(z(t)) = y(t) = 1.5z(t) + 0.2z^3(t)$$

Comportamento desejado

$$M(z) = \frac{0.4}{z - 0.6}$$

Classe de controlador (PI):

$$C(z,\theta) = \theta_1 \frac{1}{z-1} + \theta_2 \frac{z}{z-1}$$

e

$$\psi(\epsilon(t)) = a_1\epsilon(t) + a_2\epsilon^2(t) + a_3\epsilon^3(t) + a_4\epsilon^4(t)$$

Sistema do tipo Wiener

Exemplo numérico

Parte linear do controlador

$$C_d'(z) = \frac{0.8z - 0.72}{z - 1} \tag{4}$$

Classe do controlador

$$\begin{aligned} u_f(t) =& \theta_1 \epsilon(t) + \theta_2 \epsilon^2(t) + \theta_3 \epsilon^3(t) + \theta_4 \epsilon^4(t) + \\ & \theta_6 \epsilon^2(t-1) + \theta_7 \epsilon^3(t-1) + \\ & \theta_8 \epsilon^4(t-1) \end{aligned} \tag{5}$$

O custo obtido foi: $J^{MR}(\theta_{\text{média}}) = 3.0078 \times 10^{-3}$;

100 Monte Carlo experimentos foram realizados e a média das estimativas obtidas foi:

$$\theta_{\text{média}} = \begin{bmatrix} 0.44717 \\ 2.0216 \times 10^{-3} \\ -6.5181 \times 10^{-4} \\ -1.608 \times 10^{-5} \\ -0.40435 \\ -1.6163 \times 10^{-3} \\ 6.1265 \times 10^{-4} \\ 1.469 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

Sistema do tipo Wiener
Exemplo numérico

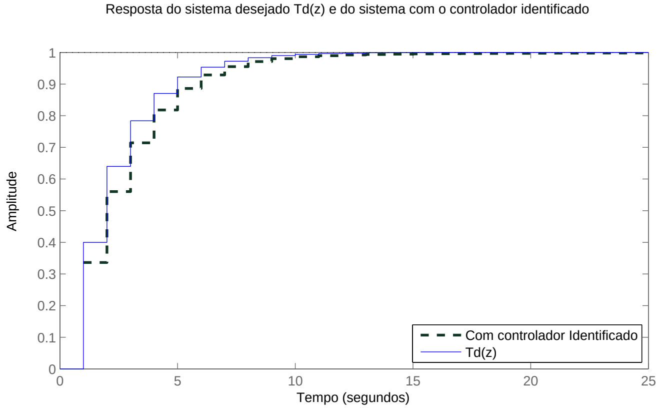


Figura: Comparativo da resposta a um degrau unitário do modelo de referência $T_d(z)$ com o sistema real quando o controlador controlador não linear representado por um modelo NARMAX polinomial é inserido na planta.

Sistema do tipo Wiener
Exemplo numérico

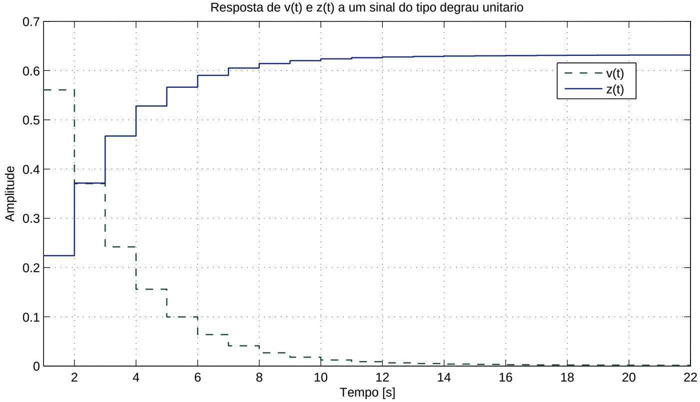


Figura: Sinais $v(t)$ e $z(t)$ do sistema apresentado na Figura 6 quando este é excitado por um degrau unitário.

Sistema do tipo Wiener
Exemplo numérico

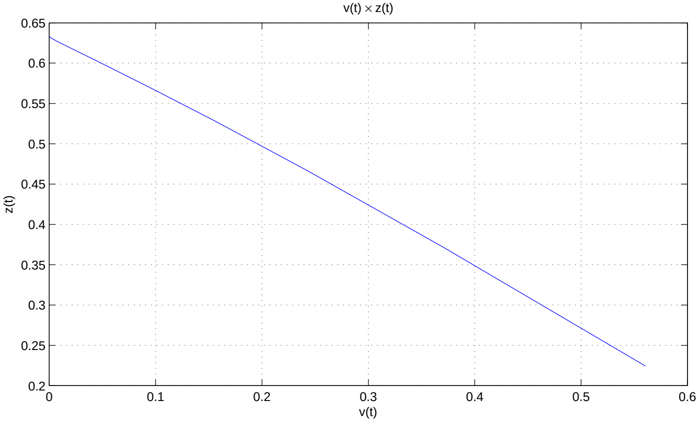


Figura: relação entre os sinais $v(t)$ e $z(t)$ quando o sistema é alimentado por um degrau unitário

Projeto de controladores não lineares baseados em dados

Sistema Racionais - Não linearidade na dinâmica do sistema

Sistemas racionais

Projeto de controladores não lineares baseados em dados

Sistema Racionais - Não linearidade na dinâmica do sistema

Quando a planta é um sistema racional e o comportamento em malha fechada é linear, o controlador ótimo pode ser também reprentado por um modelo racional.

Exemplificando:

Sistema real

$$y(t) = \frac{0.5u(t-1)y(t-1) + u(t-1)}{1 + 0.25y^2(t-2)}$$

Comportamento em malha fechada esperado:

$$T_d(z) = \frac{0.4}{z - 0.6}$$

$$y(t) = 0.4r(t-1) + 0.6y(t-1)$$

Controlador ótimo para este conjunto

$$u(t) = \frac{0.4r(t) + 0.6y(t) + 0.1y^2(t-1)r(t) + 0.15y(t)y^2(t-1)}{1 + 0.5y(t)}$$

Sistema Racionais - Não linearidade na dinâmica do sistema

Exemplo numérico: $\mathcal{C}_d \in \mathcal{C}$

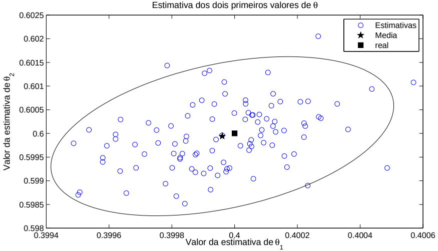
Classe de modelos do controlador: $\mathcal{C}_d \in \mathcal{C}$

$$u(t) = \frac{\theta_1 r(t) + \theta_2 y(t) + \theta_3 y^2(t-1) r(t) + \theta_4 y(t) y^2(t-1)}{1 + \theta_5 y(t)}$$

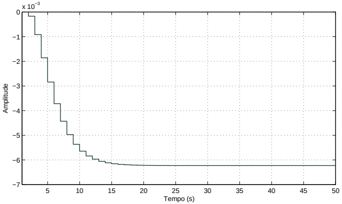
Utilizando um sinal PRBS de 254 pontos (ordem 7) e fazendo 100 experimentos de Monte Carlo com um ruído de variância de $\sigma_e^2 = 0.005$

$\theta_{\text{média}} = [0.4000 \quad 0.5999 \quad 0.1001 \quad 0.1501 \quad 0.5000]$

Custo obtido foi $J_y(\theta_{\text{médio}}) = 0.0033$ e $J_{VR}(\theta_{\text{médio}}) = 2.7291 \times 10{-}8$



Erro entre a resposta esperada e a obtida:



Sistema Racionais - Não linearidade na dinâmica do sistema

Exemplo numérico: $\mathcal{C}_d \notin \mathcal{C}$

Considerando o mesmo sistema real apresentado anteriormente:

Classe de modelos do controlador: $\mathcal{C}_d \notin \mathcal{C}$

$$u(t) = \frac{\theta_1 r(t) + \theta_2 y(t) + \theta_3 r(t) y(t-1) + \theta_4 y(t-1) y(t)}{1 + \theta_5 y(t)}$$

Utilizando um sinal PRBS de 254 pontos (ordem 7) e fazendo 100 experimentos de Monte Carlo com um ruído de variância de $\sigma_e^2 = 0.005$

$$\theta_{\text{média}} = \begin{bmatrix} 0.4696 & 0.7011 & 0.0083 & 0.0063 & 0.5013 \end{bmatrix}$$

Custo obtido foi $J_y(\theta_{\text{médio}}) = 1.0999$

Sistema Racionais - Não linearidade na dinâmica do sistema

Exemplo numérico: $\mathcal{C}_d \notin \mathcal{C}$

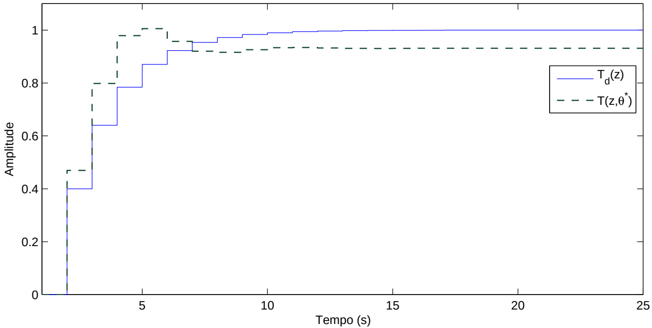


Figura: Exemplo onde $\mathcal{C}_d \notin \mathcal{C}$: Resposta do sistema ao degrau unitário para o sistema desejado $T_d(z)$ e o sistema quando o controlador parametrizado por $\theta_{\text{médio}}$

Conclusões

- Utilização de algoritmos de identificação de sistemas não lineares pode ser extendida para a identificação de controladores não lineares.
- Referência virtual traz diversas vantagens para a obtenção dos dados para alimentação dos algoritmos não lineares.
- Resultados obtidos com os exemplos apresentados podem ser consiederados satisfatórios para um grande número de aplicações.

Questões

Muito Obrigado.