

Controle Robusto e Caracterização de incertezas

Tassiano Neuhaus

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Departamento de Engenharia Elétrica
Av. Osvaldo Aranha, 103 - Bairro Bom Fim CEP: 90035-190 - Porto Alegre - RS - Brasil

Resumo—Neste trabalho será apresentado a caracterização de um sistema sujeito a incertezas. A caracterização será baseada nos seguintes tipos: Politópicas, limitadas em norma, diagonal e elemento por elemento.

Para cada uma das incertezas caracterizadas será projetada uma realimentação de estados para minimizar a norma H_2 em malha fechada. O mesmo será feito para minimizar a norma H_∞ .

Palavras-chave—Controle Robusto, Incertezas politópicas, limitadas em norma e diagonais.

I. INTRODUÇÃO

Neste trabalho será apresentado o projeto de controladores denominados Robustos. Para tanto será apresentado o conceito de um controlador Robusto. A fim de modelar um sistema sujeito a incertezas será apresentado alguns métodos para que sua modelagem matemática seja possível.

Para tornar o estudo mais claro será utilizado um sistema físico onde estará sujeito a perturbações e/ou incertezas. Sobre este sistema será feito a modelagem seguindo cada um dos processos e com estes modelos será efetuado uma simulação.

Esta simulação será baseada no projeto de uma realimentação de estados com o intuito de satisfazer a minimização da norma H_2 e H_∞ .

O sistema utilizado é apresentado no sistema de equações de estado descrito em (1).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ba & a+b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} \quad (1)$$

Este sistema possui a função de transferência apresentado em (2).

$$G(s) = \frac{k}{(s-a)(s-b)} \quad (2)$$

Os parâmetros a, b, k estão sujeitos as variações apresentadas em (3).

$$\begin{aligned} b &= -0.012725 \\ k &= [k_1 \ k_2] = [-0.4649 \cdot 10^{-4} \ -0.7449 \cdot 10^{-4}] \\ a &= [a_1 \ a_2] = [-0.25 \ -2] \end{aligned} \quad (3)$$

II. CARACTERIZAÇÃO

As incertezas presentes em um modelo matemático podem ter diversas origens:

- As variações paramétricas lentas e contínuas devido ao envelhecimento de certos elementos físicos, ou bruscas devido a mudança no ponto de operação.
- Erro de estimativa nos parâmetros do modelo
- Hipóteses simplificadas na modelagem do sistema e/ou dinâmicas negligenciadas para redução do modelo.

As incertezas são classificadas da seguinte forma:

- **Paramétricas:** Devido as variações ou desconhecimento de certos valores físicos do sistema. Ex: Massa, temperatura ...
- **Não Paramétricas:** Devido a dinâmicas desconhecidas ou não identificadas no procedimento de identificação do sistema.
- **Estruturais:** Aquelas sobre as quais tem-se uma informação precisa sobre a maneira que elas agem sobre o sistema.
- **Não Estruturais:** São aquelas onde a única informação é o limite superior de sua norma.

O sistema sujeito as incertezas referidas anteriormente podem ser representados na forma de Equações de estados como em 4

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & A \in \mathbf{A} \\ y(t) = Cx(t) & B \in \mathbf{B} \end{cases} \quad (4)$$

Onde $\mathbf{A} \in \mathbf{B}$ é o conjunto de parâmetros que são formados pelas variações das incertezas dos parâmetros.

A. Politópica

Uma incerteza é dita do tipo politópicas se $\mathbf{A} \in \mathbf{B}$ tem as estruturas seguintes:

$$\mathbf{A}_p \equiv A : A \in \mathbf{Co}(A_i); i = 1, \dots, na$$

$$\mathbf{B}_p \equiv B : B \in \mathbf{Co}(B_j); j = 1, \dots, nb$$

Onde \mathbf{Co} é um envelope convexo, ou seja, uma combinação linear convexa.

De forma equivalente temos que um sistema de incertezas do tipo politópicas podem ser representados por (5).

$$\mathbf{A}_p \equiv A : A = \sum_{i=1}^{na} \alpha_i(t) A_i; \alpha_i \geq 0; \sum_{i=1}^{na} \alpha_i(t) = 1; \forall t \geq 0 \quad (5)$$

As incertezas politópicas são consideradas *estruturais* pois pode-se facilmente estimar as variações admitidas para cada elemento das matrizes que definem o conjunto de modelos.

B. Limitada em norma

Incetezas limitadas em norma possuem a seguinte estrutura:

$$\mathbf{A}(\Delta(t)) \equiv \{A : A = A_0 + \Delta A + D\Delta(t)E_A\} \quad (6)$$

$$\mathbf{B}(\Delta(t)) \equiv \{B : B = B_0 + \Delta B + D\Delta(t)E_B\} \quad (7)$$

Com $\|\Delta(t)\| \leq 1$.

De maneira equivalente o sistema de equações de estado fica como em (8).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) + D p(t) \\ q(t) = E_A x(t) + E_B u(t) \\ p(t) = \Delta(t) q(t) \end{cases} \quad (8)$$

O sistema apresentado em (8) pode ser melhor interpretado pela Figura (1).

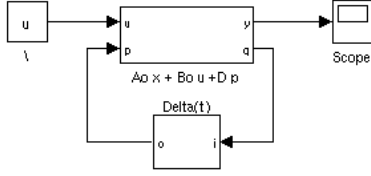


Figura 1. Sistema na forma LFT (Linear Fractional Transformation)

De forma bem simplificada a matriz A_0 pode ser vista como a média das perturbações e a matriz E_A é a amplitude da incerteza sobre cada parâmetro.

Na literatura a matriz $\Delta(t)$ designa um bloco de incertezas não estruturais.

C. Diagonais

As incertezas diagonais podem ser definidas como em (6) e (7) com a diferença de que o valor de $\Delta(t)$ segue a definição abaixo:

$$\Delta(t)' \Delta(t) \leq I$$

Onde:

$$\Delta(t) = \text{diag}(\delta_i(t)); i = 1, \dots, ni$$

A matriz $\Delta(t)$ é uma matriz quadrada de ordem ni .

D. Elemento a elemento

As incertezas de um sistema são elementares se $\mathbf{A}e\mathbf{B}$ possuem as seguintes estruturas:

$$\mathbf{A}(\Delta_e(t)) \equiv A : A = A_0(s) + \Delta_A = A_0 + D\Delta(t)E_A \\ \Delta_A(t)' \Delta_A(t) \leq I$$

$$\mathbf{B}(\Delta_e(t)) \equiv B : B = B_0(s) + \Delta_B = B_0 + D\Delta(t)E_B \\ \Delta_B(t)' \Delta_B(t) \leq I$$

Onde:

$$D_A = [d_{a1} \dots d_{Anai}]; \quad D_B = [d_{B1} \dots d_{Bnbi}] \\ E'_A = [e'_{A1} \dots e'_{Anai}]; \quad E'_B = [e'_{B1} \dots e'_{Bnbi}] \\ \Delta_A(t) = \text{diag}(\delta_{A1} \dots \delta_{Anai}); \quad \Delta_B(t) = \text{diag}(\delta_{B1} \dots \delta_{Bnbi})$$

Definindo-se

$$\hat{D} \equiv [D_A \ D_B]$$

$$\hat{E}_A \equiv \begin{bmatrix} E_A \\ 0_{nbi \times n} \end{bmatrix}$$

$$\hat{E}_B \equiv \begin{bmatrix} 0_{nai \times m} \\ E_B \end{bmatrix}$$

De maneira equivalente, a equação de estados do sistema pode ser escrito como em (9).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) + \hat{D} p(t) \\ q(t) = \hat{E}_A x(t) + \hat{E}_B u(t) \\ p(t) = \Delta(t) q(t) \\ \Delta(t) = \text{blocdiag}(\Delta_A(t), \Delta_B(t)) \\ p_A(t) = \Delta_A(t) q_A(t) \\ p_B(t) = \Delta_B(t) q_B(t) \\ p(t) = [p'_A(t) p'_B(t)]' \\ q(t) = [q'_A(t) q'_B(t)]' \end{cases} \quad (9)$$

Na definição acima, cada bloco de incerteza $\delta_{Ai}(t)$ e $\delta_{Bj}(t)$ é um escalar, cujo módulo é inferior a 1. Além disso as matrizes d_{Ai} e d_{Bj} são vetores coluna e e_{Ai} e e_{Bj} são vetores linha.

III. CONTROLE ROBUSTO

Nas seções seguintes será apresentado a modelagem para os tipos de incertezas. Utilizando o sistema descrito em (1) e os limites das incertezas descritos em (3), será apresentada a modelagem baseado em cada um dos tipos apresentados a seguir.

1) *Estabilidade quadrática*: A ideia fundamental da estabilização quadrática de um sistema incerto autônomo por realimentação linear estática de estados é encontrar uma lei de controle tal que a função quadrática definida positiva:

$$V(x) = x' P x; \text{ com } P > 0$$

Possua sua derivada definida negativa ao longo da trajetória do sistema em malha fechada:

$$\dot{V}(x) = x' \{ (A - BK)' P + P(A - BK) \} x < 0 \\ \forall A \in \mathbf{A}, \forall B \in \mathbf{B}$$

Desta forma o que busca-se é uma matriz P que satisfaça não apenas uma equação mas um grupo de equações para estabilizar o sistema de forma Robusta.

Para um sistema sem incertezas tem-se que a solução do problema é como abaixo:

$$P = W^{-1}; K = RW^{-1}$$

Para o sistema abaixo com $R \equiv KP^{-1}$.

$$WA'_0 + A_0 W - B_0 R - R' B_0 < 0$$

A. Politópica

Para o caso de incertezas do tipo politópico uma condição necessária e suficiente para a estabilidade quadrática do sistema incerto autónomo em malha fechada é que todos os vértices do poliedro que constituem o conjunto de modelos possuam a mesma matriz P simétrica definida positiva como matriz de Lyapunov.

$$WA'_i + A_iW - B_jR - R'B'_j < 0 \quad (10)$$

Para $\forall i = 1, \dots, na, \forall j = 1, \dots, nb$.

O sistema utilizado neste trabalho (1) é caracterizado utilizando a forma politópica como em (11).

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ba_1 & a_1 + b \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ba_2 & a_2 + b \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

A partir de (10) tem-se o conjunto de inequações lineares apresentado em (12).

$$\begin{aligned} WA'_1 + A_1W - B_1R - R'B'_1 &< 0 \\ WA'_1 + A_1W - B_2R - R'B'_2 &< 0 \\ WA'_2 + A_2W - B_1R - R'B'_1 &< 0 \\ WA'_2 + A_2W - B_2R - R'B'_2 &< 0 \end{aligned} \quad (12)$$

B. Limitada em norma

Considerando o sistema apresentado em (13) com $\omega(t) \equiv 0$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + B_0u(t)B_\omega\omega(t) + Dp(t) \\ q(t) = E_Ax(t) + E_Bu(t) + Fp(t) \\ z(t) = Gx(t) + Hu(t) \\ p(t) = \Delta(t)q(t); \|\Delta(t)\| \leq 1 \end{cases} \quad (13)$$

Para este sistema temos que a derivada da função $V(x) = x'Px$ seja definida positiva:

$$x' - (A_0 - B_0K)'P - P(A_0 - B_0K)x - x'PDp - p'D'Px < 0$$

Para todo $x \neq 0$ tal que $p'p \leq q'q$ implica de maneira equivalente:

$$p'p \leq ((E_A - E_BK)x)'(E_A - E_BK)x$$

Tem-se então que o sistema apresentado em (14) é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade quadrática do sistema com incertezas limitadas em norma e também é convexa, portanto pode ser resolvida com algoritmos de resolução de LMI.

$$\begin{bmatrix} -A_0 + B_0R - WA'_0 + R'B'_0 - DD' & -(WE_A + RE'_B) \\ -(WE'_A + R'E'_B)' & I \end{bmatrix} > 0 \quad (14)$$

Desta forma para o sistema (1) temos que a modelagem para incertezas limitadas em norma é a apresentada em (15).

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(a_1 + a_2)/2 & b + (a_1 + a_2)/2 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ (k_1 + k_2)/2 \end{bmatrix}$$

$$E_A = \begin{bmatrix} (a_1 - a_2)/2 & 0 \\ 0 & (a_1 - a_2)/2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_B = \begin{bmatrix} 0 \\ (k_1 - k_2)/2 \end{bmatrix}$$

C. Diagonais

Para incertezas diagonais o sistema fica como em (15).

D. Elemento a elemento

Para as incertezas do tipo elemento a elemento temos as seguintes definições:

$$D_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E_A = [(a_1 - a_2)/2 \quad (a_1 - a_2)/2]$$

$$D_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E_B = [(k_1 - k_2)/2]$$

Desta forma chega-se:

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{E}_A = \begin{bmatrix} (a_1 - a_2)/2 & (a_1 - a_2)/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{E}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ (k_1 - k_2)/2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_A(t) & 0 \\ 0 & \delta_B(t) \end{bmatrix}$$

IV. MINIMIZAÇÃO DA NORMA H_2

Considerando o sistema apresentado em (13) em malha fechada com $\Delta \equiv 0$ e condição inicial nula. Um critério normalmente utilizado é a norma H_2 da função de transferência entre a entrada das perturbações ω e a saída z . A norma H_2 pode ser calculada como em (16).

$$\|T(s)\|_2 \equiv \gamma_2 = \sqrt{\text{Tr}(B'_\omega P_o B_\omega)} \quad (16)$$

Onde :

$$P_o = \int_0^\infty ((G - HK))e^{(A_0 - BK)} B_\omega)' ((G - HK))e^{(A_0 - BK)} B_\omega dt$$

Interpretação estocástica da norma H_2 : Se considerarmos $\omega(t)$ como sendo ruído branco, então a norma H_2 de $T(s)$ é o valor da variância assintótica da saída $z(t)$:

$$\|T(s)\|_2 = \sqrt{\lim_{t \rightarrow \infty} E(z(t)'z(t))}$$

Interpretação determinística da norma H_2 : Dá a ideia da energia da saída $z(t)$ em resposta as condições iniciais nulas.

$$\int_0^\infty z(t)'z(t)dt = x_0'P_0x_0$$

Assim tendo que a norma pode ser apresentada como a seguir:

$$\|T(s)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_w} \int_0^\infty \|z^i(t)\|^2 dt}$$

A. Sistemas Lineares sem incertezas

Se considerarmos o sistema (13) com condições iniciais nulas e $\Delta \equiv 0$ temos o sistema apresentado em (17).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_0 - B_0K)x(t) + B_\omega\omega(t) \\ z(t) = (G - HK)x(t) \end{cases} \quad (17)$$

Pode-se desta forma minimizar o escalar γ_2 sujeito a (18).

$$\gamma_2^2 > Tr(M)$$

$$\begin{bmatrix} M & B_\omega' \\ B_\omega & W \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} -WA_0' + R'B_0' - A_0W + B_0R & (GW - HR)' \\ (GW - HR) & I \end{bmatrix} > 0 \quad (18)$$

B. Incertezas do tipo politópico

Para um sistema com incertezas do tipo politópico ter garantia do limite superior de γ_2 para a norma H_2 de todos os sistemas pertencentes ao conjunto de sistemas formados pelas incertezas é satisfeita para:

$$\gamma_2^2 > Tr(M)$$

$$\begin{bmatrix} M & B_\omega' \\ B_\omega & W \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} -WA_i' + R'B_j' - A_iW + B_jR & (GW - HR)' \\ (GW - HR) & I \end{bmatrix} > 0$$

$\forall i = 1, \dots, na$
 $\forall j = 1, \dots, nb$

(19)

1) *Simulação*: A resolução do sistema de LMIs (19) gerou os seguintes resultados:

$$W = \begin{bmatrix} 5.3185 & -1.0406 \\ -1.0406 & 938.1095 \end{bmatrix}$$

$$R = 1.10^6 \begin{bmatrix} 0.0008 & -1.3383 \end{bmatrix}$$

$$K = 1.10^3 \begin{bmatrix} -0.1259 & -1.4267 \end{bmatrix}$$

$$M = 2.3045e - 12$$

A simulação do sistema em malha fechada com o ganho K encontrado obtém a resposta apresentada na Figura (2), O sistema simulado com as incertezas sendo utilizadas com o valor mediano é apresentada na linha $A0_{B0}$, para os sistemas que possuem as 4 combinações de matrizes A_1, A_2, B_1, B_2 que formam os vértices do politopo, são apresentados nas demais linhas do gráfico.

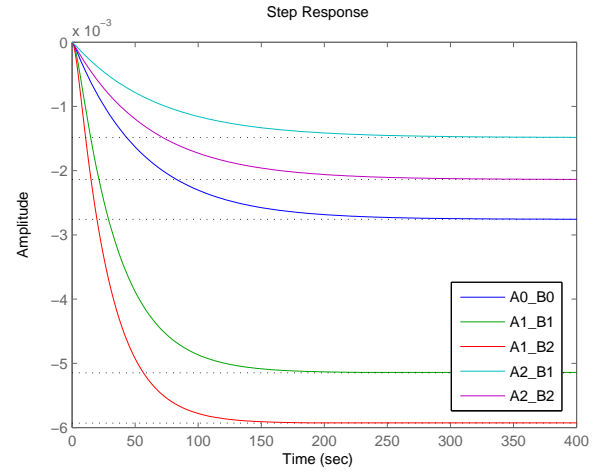


Figura 2. Resposta do sistema (22) com o ganho K encontrado pelo critério de H_2

C. Incertezas limitadas em norma

Para o caso de incertezas com norma limitada temos (20).

$$\gamma_2^2 > Tr(B_\omega'W^{-1}B_\omega)$$

$$\begin{bmatrix} Y & (E_AW - E_BR)' & (GW - HR)' \\ (E_AW - E_BR) & I & 0 \\ (GW - HR) & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0$$

$$Y = -WA_0' + R'B_0' - A_0W + B_0R - DD' \quad (20)$$

Com a realimentação $K = RW^{-1}$.

1) *Simulação*: A resolução do sistema de LMIs (20) gerou os seguintes resultados:

$$W = \begin{bmatrix} 0.4644 & -0.0305 \\ -0.0305 & 0.7975 \end{bmatrix}$$

$$R = 1.10^3 \begin{bmatrix} 0.0009 & -8.6987 \end{bmatrix}$$

$$K = 1.10^4 \begin{bmatrix} -0.0716 & -1.0935 \end{bmatrix}$$

$$M = 0.0170$$

$$\lambda_1 = -0.0326$$

$$\lambda_2 = -1.7666$$

A simulação do sistema em malha fechada com o ganho K encontrado obtem a resposta apresentada na Figura (3). Os valores de λ_1 e λ_2 são os autovalores do sistema em malha fechada.

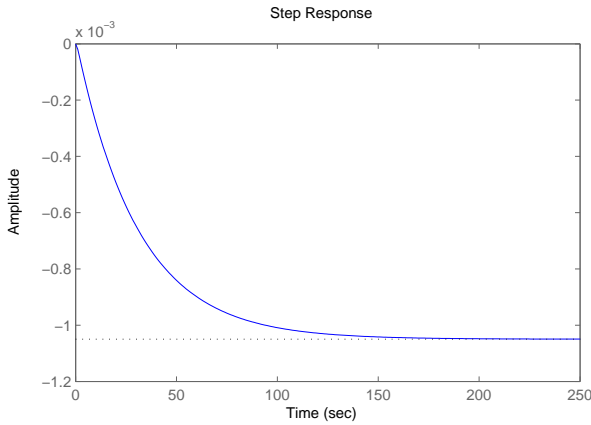


Figura 3. Resposta do sistema (22) com o ganho K encontrado pelo critério de H_2

V. NORMA H_∞

Para o sistema apresentado em (13) a norma L_2 deste sistema é definido como em (21).

$$\sup_{\|\omega(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|\omega(t)\|_2} \quad (21)$$

Onde a norma L_2 de um sinal $\omega(t)$ é definida como abaixo:

$$\|\omega(t)\|_2 \equiv \sqrt{\int_0^\infty \omega(t)' \omega(t) dt}$$

Suponha que exista uma função quadrática positiva $V(x) = x'Px$ com $P = P' > 0$ e um escalar positivo γ_∞ tal que:

$$\dot{V}z(t)'z(t) - \gamma_\infty^2 \omega(t)'\omega(t) \leq 0$$

A. Sistemas Lineares sem incertezas

Considerando o sistema apresentado em (13) em malha fechada, com condição inicial nula ($x(0) \equiv 0$) e com $\Delta(t) \equiv 0$, obtém-se desta forma o sistema apresentado em (22).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_0 - B_0K)x(t) + B_\omega \omega(t) \\ z(t) = (G - HK)x(t) \end{cases} \quad (22)$$

A LMI que deve ser satisfeita para que a condição de H_∞ seja obtida é apresentada em (23).

$$\begin{bmatrix} Y & -(GW - HR)' \\ -(GW - HR) & \gamma_\infty^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (23)$$

$$Y = -WA'_0 + R'B'_0 - A_0W - B_0R - B_\omega B'_\omega$$

Assim pode-se garantir o limite superior mínimo para o ganho L_2 do sistema (22).

Para o caso de sistemas lineares invariantes no tempo a otimização dá exatamente o valor do ganho L_2 que é igual a norma H_∞ .

$$T(s) = (G - HK)(sI - (A_0 - B_0K))^{-1}B_\omega$$

Que é equivalente a:

$$\|T(s)\|_\infty \equiv \max_{\omega \in \Re} \sqrt{\lambda(T'(j\omega)T(j\omega))}$$

B. Incertezas do tipo politópico

No caso de incertezas do tipo politópicas o limite superior mínimo para o ganho L_2 pode ser definido pela equação (24).

$$\begin{bmatrix} Y & -(GW - HR)' \\ -(GW - HR) & \gamma_\infty^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (24)$$

$$Y = -WA'_i + R'B'_j - A_iW + B_jR - B_\omega B'_\omega$$

$$W > 0$$

1) *Simulação*: A resolução do sistema de LMIs (24) gerou os seguintes resultados:

$$W = \begin{bmatrix} 0.0012 & -0.6805 \\ -0.6805 & 390.6637 \end{bmatrix}$$

$$R = 1.10^8 \begin{bmatrix} -0.0458 & -9.9849 \end{bmatrix}$$

$$K = 1.10^{12} \begin{bmatrix} -2.4902 & -0.0043 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_\infty^2 = 2.1730e - 11$$

A simulação do sistema em malha fechada com o ganho K encontrado obtem a resposta apresentada na Figura (4). Os valores de λ_1 e λ_2 são os autovalores do sistema em malha fechada.

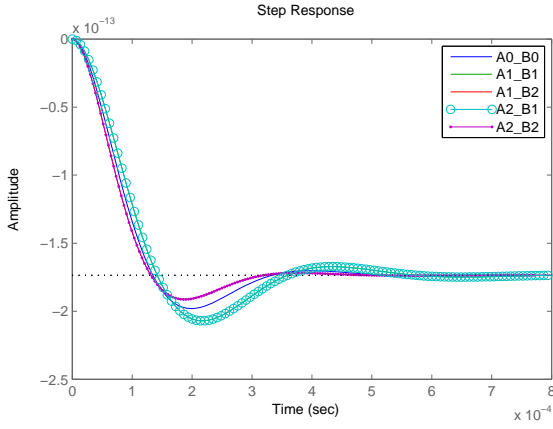


Figura 4. Resposta do sistema (22) com o ganho K encontrado pelo critério de H_∞

C. Incertezas limitadas em norma

Considerando o sistema descrito em (13) com $\|\Delta(t)\| \leq 1$. A condição descrita em (23) é equivalente a (25).

$$\begin{bmatrix} Y & (E_A W - E_B R)' & -(GW - HR)' \\ (E_A W - E_B R) & I & 0 \\ -(GW - HR) & 0 & \gamma_\infty^2 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$Y = -W A'_0 + R' B'_0 - A_0 W + B_0 R - B_\omega B'_\omega$$

$$W > 0$$

(25)

Satisfazendo a equação (25) obtém-se o limite superior mínimo para o ganho L_2 e se o sistema for linear e invariante no tempo este valor será o mesmo da norma H_∞ da função de transferência entre ω e z .

1) *Simulação:* A resolução do sistema de LMIs (25) gerou os seguintes resultados:

$$W = \begin{bmatrix} 0.2449 & -0.0315 \\ -0.0315 & 0.8360 \end{bmatrix}$$

$$R = 1.10^3 \begin{bmatrix} 0.0010 & -7.8417 \end{bmatrix}$$

$$K = 1.10^3 \begin{bmatrix} -1.2096 & -9.4257 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_\infty^2 = 0.07$$

$$\lambda_1 = -0.0529$$

$$\lambda_2 = -1.6550$$

A simulação do sistema em malha fechada com o ganho K encontrado obtém a resposta apresentada na Figura (5). Os valores de λ_1 e λ_2 são os autovalores do sistema em malha fechada.

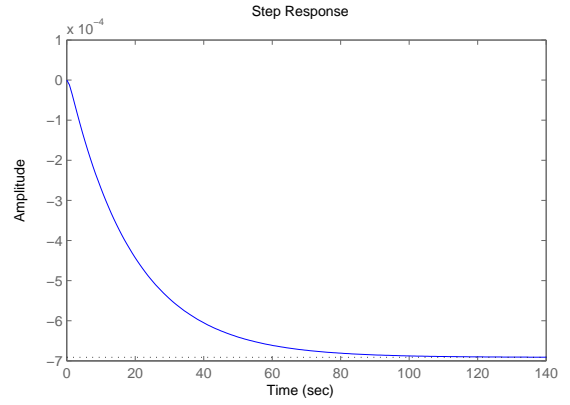


Figura 5. Resposta do sistema (22) com o ganho K encontrado pelo critério de H_∞

VI. SISTEMA NOMINAL - CENTRO DAS INCERTEZAS

VII. CONCLUSÕES