# Controle Robusto e Caracterização de incertezas

#### Tassiano Neuhaus

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Departamento de Engenharia Elétrica Av. Osvaldo Aranha, 103 - Bairro Bom Fim CEP: 90035-190 - Porto Alegre - RS - Brasil

Resumo—Neste trabalho será apresentado a caracterização de um sistema sujeito a incertezas. A caracterização será baseada nos seguintes tipos: Politópicas, limitadas em norma, diagonal e elemento por elemento.

Para cada uma das incertezas caracterizadas será projetada uma realimentação de estados para minimizar a norma  $H_2$  em malha fechada. O mesmo será feito para minimizar a norma  $H_\infty$ 

Palavras-chave—Controle Robusto, Incertezas politópicas, limitadas em norma e diagonais.

## I. INTRODUÇÃO

Neste trabalho será apresentado o projeto de controladores denominados Robustos. Para tanto será apresentado o conceito de um controlador Robusto. A fim de modelar um sistema sujeito a incertezas será apresentado alguns métodos para que sua modelagem matemática seja possível.

Para tornar o estudo mais claro será utilizado um sistema físico onde estará sujeito a perturbações e/ou incertezas. Sobre este sistema será feito a modelagem seguindo cada um dos processos e com estes modelos será efetuado uma simulação.

Esta simulação será baseada no projeto de uma realimentação de estados com o intuito de satisfazer a minimização da norma H2 e  $H_{\infty}$ .

O sistema utilizado é apresentado no sistema de equações de estado descrito em (1).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ba & a+b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} \tag{1}$$

Este sistema possui a função de transferência apresentado em (2).

$$G(s) = \frac{k}{(s-a)(s-b)} \tag{2}$$

Os parâmetros a,b,k estão sujeitos as variações apresentadas em (3).

$$b = -0.012725$$

$$k = [k_1 \ k_2] = [-0.4649.10^{-4} - 0.7449.10^{-4}]$$

$$a = [a_1 \ a_2] = [-0.25 \ -2]$$
(3)

# II. CARACTERIZAÇÃO

As incertezas presentes em um modelo matemático podem ter diversas origens:

- As variações paramétricas lentas e continuas devido ao envelhecimento de certos elementos físicos, ou bruscas devido a mudança no ponto de operação.
- Erro de estimativa nos parâmetros do modelo
- Hipóteses simplificarias na modelagem do sistema e/ou dinâmicas negligenciadas para redução do modelo.

As incertezas são classificadas da seguinte forma:

- Paramétricas: Devido as variações ou desconhecimento de certos valores físicos do sistema. Ex: Massa, temperatura ...
- Não Paramétricas: Devido a dinâmicas desconhecidas ou não identificadas no procedimento de identificação do sistema
- Estruturais: Aquelas sobre as quais tem-se uma informação precisa sobre a maneira que elas agem sobre o sistema.
- Não Estruturais: São aquelas onde a única informação é o limite superior de sua norma.

O sistema sujeito as incertezas referidas anteriormente podem ser representados na forma de Equações de estados como em 4

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & A \in \mathbf{A} \\ y(t) = Cx(t) & B \in \mathbf{B} \end{cases}$$
 (4)

Onde  $\mathbf{A}e\mathbf{B}$  é o conjunto de parâmetros que são formados pelas variações das incertezas dos parâmetros.

## A. Politópica

Uma incerteza é dita do tipo politópicas se  $\mathbf{A}e\mathbf{B}$  tem as estruturas seguintes:

$$\mathbf{A}_p \equiv A : A \in \mathbf{Co}(A_i); i = 1, ..., na$$

$$\mathbf{B}_p \equiv B : B \in \mathbf{Co}(B_j); j = 1, ..., nb$$

Onde Ca é um envelope convexo, ou seja, uma combinação linear convexa.

De forma equivalente temos que um sistema de incertezas do tipo politópicas podem ser representados por (5.

$$\mathbf{A}_p \equiv A : A = \sum_{i=1}^{na} \alpha_i(t) A_i; \alpha_i \ge 0; \sum_{i=1}^{na} \alpha_i(t) = 1; \forall t \ge 0$$
(5)

As incertezas politópicas são consideradas *estruturais* pois pode-se facilmente estimar as variações admitidas para cada elemento das matrizes que definem o conjunto de modelos.

### B. Limitada em norma

Incertezas limitadas em norma possuem a seguinte estrutura:

$$\mathbf{A}(\Delta(t)) \equiv \{A : A = A_0 + \Delta A + D\Delta(t)E_A\} \tag{6}$$

$$\mathbf{B}(\Delta(t)) \equiv \{B : B = B_0 + \Delta B + D\Delta(t)E_B\} \tag{7}$$

Com  $||\Delta(t)|| \leq 1$ .

De maneira equivalente o sistema de equações de estado fica como em (8).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) + D p(t) \\ q(t) = E_A x(t) + E_B u(t) \\ p(t) = \Delta(t) q(t) \end{cases}$$
 (8)

O sistema apresentado em (8 pode ser melhor interpretado pela Figura (1).

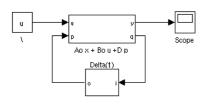


Figura 1. Sistema na forma LFT (Linear Fractional Transformation

De forma bem simplificada a matriz  $A_0$  pode ser vista como a média das perturbações e a matriz  $E_A$  é a amplitude da incerteza sobre cada parâmetro.

Na literatura a matriz  $\Delta(t)$  designa um bloco de incertezas não estruturais.

#### C. Diagonais

As incertezas diagonais podem ser definidas como em (6) e (7) com a diferença de que o valor de  $\Delta(t)$  segue a definição abaixo:

$$\Delta(t)'\Delta(t) \le I$$

Onde:

$$\Delta(t) = diag(\delta_i(t)); i = 1, ..., ni$$

A matriz  $\Delta(t)$  é uma matriz quadrada de ordem ni.

## D. Elemento a elemento

As incertezas de um sistema são elementares se  $\mathbf{A} e \mathbf{B}$  possuem as seguintes estruturas:

$$\mathbf{A}(\Delta_e(t)) \equiv A : A = A_0(s) + \Delta_A = A_0 + D\Delta(t)E_A$$
$$\Delta_A(t)'\Delta_A(t) \le I$$

$$\mathbf{B}(\Delta_e(t)) \equiv B : B = B_0(s) + \Delta_B = B_0 + D\Delta(t)E_B$$
$$\Delta_B(t)'\Delta_B(t) < I$$

Onde:

$$D_A = [d_{a1} \cdots d_{Anai}]; \qquad D_B = [d_{B1} \cdots d_{Bnbi}]$$

$$E'_A = [e'_{A1} \cdots e'_{Anai}]; \qquad E'_B = [e'_{B1} \cdots e'_{Bnbi}]$$

$$\Delta_A(t) = diag(\delta_{A1} \cdots \delta_{Anai}); \qquad \Delta_B(t) = diag(\delta_{B1} \cdots \delta_{Bnbi})$$

Definindo-se

$$\hat{D} \equiv [D_A \ D_B]$$

$$\hat{E}_A \equiv \begin{bmatrix} E_A \\ 0_{nbi \ x \ n} \end{bmatrix}$$

$$\hat{E}_B \equiv \begin{bmatrix} 0_{nai \ x \ m} \\ E_B \end{bmatrix}$$

De maneira equivalente, a equação de estados do sistema pode ser escrito como em (9).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) + \hat{D}p(t) \\ q(t) = \hat{E}_a x(t) + \hat{E}_B u(t) \\ p(t) = \Delta(t)q(t) \\ \Delta(t) = blocdiag(\Delta_A(t), \Delta_B(t)) \\ p_A(t) = \Delta_A(t)q_A(t) \\ p_B(t) = \Delta_B(t)q_B(t) \\ p(t) = [p'_A(t)p'_B(t)]' \\ q(t) = [q'_A(t)q'_B(t)]' \end{cases}$$

$$(9)$$

Na definicão acima, cada bloco de incerteza  $\delta_{Ai}(t)$  e  $\delta_{Bj}(t)$  é um escalar, cujo módulo é inferior a 1. Alem disso as matrizes  $d_{Ai}$  e  $d_{Bj}$  são vetores coluna e  $e_{Ai}$  e  $e_{Bj}$  são vetores linha.

#### III. CONTROLE ROBUSTO

Nas seções seguintes será apresentado a modelagem para os tipos de incertezas. Utilizando o sistema descrito em (1) e os limites das incertezas descritos em (3), será apresentada a modelagem baseado em cada um dos tipos apresentados a seguir.

1) Estabilidade quadrática: A ideia fundamental da estabilização quadrática de um sistema incerto autónomo por realimentação linear estática de estados é encontrar uma lei de controle tal que a função quadrática definida positiva:

$$V(x) = x'Px; comP > 0$$

Possua sua derivada definida negativa ao longo da trajetória do sistema em malha fechada:

$$\dot{V}(x) = x'\{(A-BK)'P + P(A-BK)\}x < 0$$
 
$$\forall A \in \mathbf{A}, \forall B \in \mathbf{B}$$

Desta forma o que busca-se é uma matriz P que satisfaça não apenas uma equação mas um grupo de equações para estabilizar o sistema de forma Robusta.

Para um sistema sem incertezas tem-se que a solução do problema é como abaixo:

$$P = W^{-1}$$
:  $K = RW^{-1}$ 

Para o sistema abaixo com  $R \equiv KP^{-1}$ .

$$WA_0' + A_0W - B_0R - R'B_0 < 0$$

## A. Politópica

Para o caso de incertezas do tipo politópico uma condição necessária e suficiente para a estabilidade quadrática do sistema incerto autónomo em malha fechada é que todos os vértices do poliedro que constituem o conjunto de modelos possuam a mesma matriz P simétrica definida positiva como matriz de Lyapunov.

$$WA_i' + A_iW - B_jR - R'B_j' < 0 (10)$$

Para  $\forall i = 1, ..., na, \forall j = 1, ..., nb.$ 

O sistema utilizado neste trabalho (1) é caracterizado utilizando a forma politópica como em (11).

$$A_{1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ba_{1} & a_{1} + b \end{bmatrix} A_{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ba_{2} & a_{2} + b \end{bmatrix}$$

$$B_{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_{1} \end{bmatrix} B_{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_{2} \end{bmatrix}$$

$$(11)$$

A partir de (10) tem-se o conjunto de inequações lineares apresentado em (12).

$$WA'_{1} + A_{1}W - B_{1}R - R'B'_{1} < 0$$

$$WA'_{1} + A_{1}W - B_{2}R - R'B'_{2} < 0$$

$$WA'_{2} + A_{2}W - B_{1}R - R'B'_{1} < 0$$

$$WA'_{2} + A_{2}W - B_{2}R - R'B'_{2} < 0$$
(12)

#### B. Limitada em norma

Considerando o sistema apresentado em (13) com  $\omega(t) \equiv 0$ .

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) B_{\omega} \omega(t) + D p(t) \\ q(t) = E_A x(t) + E_B u(t) + F p(t) \\ z(t) = G x(t) + H u(t) \\ p(t) = \Delta(t) q(t); \ \|\Delta(t)\| \le 1 \end{cases}$$
(13)

Para este sistema temos que a derivada da função  $V(x)=x^\prime Px$  seja definida positiva:

$$x' - (A_0 - B_0 K)'P - P(A_0 - B_0 K)x - x'PDp - p'D'Px < 0$$

Para todo  $x \neq 0$  tal que  $p'p \leq q'q$  implica de maneira equivalente:

$$p'p \le ((E_A - E_B K)x)'(E_A - E_B K)x$$

Tem-se então que o sistema apresentado em (14) é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade quadrática do sistema com incertezas limitadas em norma e também é convexa, portanto pode ser resolvida com algoritmos de resolução de LMI.

Desta forma para o sistema (1) temos que a modelagem para incertezas limitadas em norma é a apresentada em (15).

$$A_{0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(a_{1} + a_{2})/2 & b + (a_{1} + a_{2})/2 \end{bmatrix}$$

$$B_{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ (k_{1} + k_{2})/2 \end{bmatrix}$$

$$E_{A} = \begin{bmatrix} (a_{1} - a_{2})/2 & 0 \\ 0 & (a_{1} - a_{2})/2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ (k_{1} - k_{2})/2 \end{bmatrix}$$
(15)

# C. Diagonais

Para incertezas diagonais o sistema fica como em (15).

### D. Elemento a elemento

Para as incertezas do tipo elemento a elemento temos as seguintes definições:

$$D_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E_A = \begin{bmatrix} (a_1 - a_2)/2 & (a_1 - a_2)/2 \end{bmatrix}$$

$$D_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E_B = \begin{bmatrix} (k_1 - k_2)/2 \end{bmatrix}$$

Desta forma chega-se:

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{E}_A = \begin{bmatrix} (a_1 - a_2)/2 & (a_1 - a_2)/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{E}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ (k_1 - K2)/2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_A(t) & 0 \\ 0 & \delta_B(t) \end{bmatrix}$$

# IV. MINIMIZAÇÃO DA NORMA $H_2$

Considerando o sistema apresentado em (13) em malha fechada com  $\Delta \equiv 0$  e condição inicial nula. Um critério normalmente utilizado é a norma  $H_2$  da função de transferência entre a entrada das perturbações  $\omega$  e a saída z. A norma  $H_2$  pode ser calculada como em (16).

$$||T(s)||_2 \equiv \gamma_2 = \sqrt{Tr(B_\omega' P_o B_\omega)} \tag{16}$$

Onde:

$$\begin{bmatrix} -A_0 + B_0 R - W A_0' + R' B_0' - DD' & -(W E_A + R E_B') \\ -(W E_A' + R' E_B')' & I \end{bmatrix} > 0 \\ (14) \quad P_o = \int_0^\infty ((G - HK)) e^{(A_0 - BK)} B_\omega)'((G - HK)) e^{(A_0 - BK)} B_\omega' dt$$

Interpretação estocástica da norma  $H_2$ : Se considerarmos  $\omega(t)$  como sendo ruido branco, então a norma  $H_2$  de T(s) é o valor da variância assintótica da saída z(t):

$$||T(s)||_2 = \sqrt{\lim_{t \to \infty} E(z(t)'z(t))}$$

Interpretação determinística da norma  $H_2$ : Dá a ideia da energia da saída z(t) em resposta as condições iniciais nulas.

$$\int_0^\infty z(t)'z(t)dt = x_0'P_ox_0$$

Assim tendo que a norma pode ser apresentada como a seguir:

$$\|T(s)\|_{2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_{w}} \int_{0}^{\infty} \|z^{i}(t)\|^{2} dt}$$

#### A. Sistemas Lineares sem incertezas

Se considerarmos o sistema (13) com condições iniciais nulas e  $\Delta \equiv 0$  temos o sistema apresentado em (17).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_0 - B_0 K)x(t) + B_\omega \omega(t) \\ z(t) = (G - HK)x(t) \end{cases}$$
 (17)

Pode-se desta forma minimizar o escalar  $\gamma_2$  sujeito a (18).

$$\gamma_2^2 > Tr(M)$$

$$\begin{bmatrix} M & B_\omega' \\ B_\omega & W \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} -WA_0' + R'B_0' - A_0W + B_0R & (GW - HR)' \\ (GW - HR) & I \end{bmatrix} > 0$$
(18)

# B. Incertezas do tipo politópico

Para um sistema com incertezas do tipo politopico ter garantia do limite superior de  $\gamma_2$  para a norma  $H_2$  de todos os sistemas pertencentes ao conjunto de sistemas formados pelas incertezas é satisfeita para:

$$\gamma_{2}^{2} > Tr(M)$$

$$\begin{bmatrix} M & B'_{\omega} \\ B_{\omega} & W \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} -WA'_{i} + R'B'_{j} - A_{i}W + B_{j}R & (GW - HR)' \\ (GW - HR) & I \end{bmatrix} > 0$$

$$\forall i = 1, ..., na$$

$$\forall j = 1, ..., nb$$

$$(19)$$

1) Simulação: A resolução do sistema de LMIs (19) gerou os seguintes resultados:

$$W = \begin{bmatrix} 5.3185 & -1.0406 \\ -1.0406 & 938.1095 \end{bmatrix}$$

$$R = 1.10^{6} \begin{bmatrix} 0.0008 & -1.3383 \end{bmatrix}$$

$$K = 1.10^{3} \begin{bmatrix} -0.1259 & -1.4267 \end{bmatrix}$$

$$M = 2.3045e - 12$$

A simulação do sistema em malha fechada com o ganho K encontrado obtem a resposta apresentada na Figura (2), O sistema simulado com as incertezas sendo utilizadas com o valor mediano é apresentada na linha  $A0_B0$ , para os sistemas que possuem as 4 combinações de matrizes  $A_1, A_2, B_1, B_2$  que formam os vértices do politopo, são apresentados nas demais linhas do gráfico.

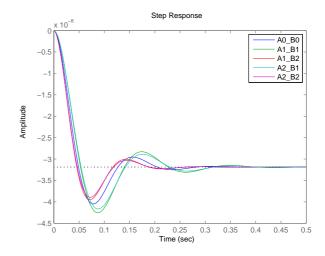


Figura 2. Resposta do sistema (22) com o ganho K encontrado pelo critério de  $H_2$ 

#### C. Incertezas limitadas em norma

Para o caso de incertezas com norma limitada temos (20).

$$\gamma_{2}^{2} > Tr(B'_{\omega}W^{-1}B_{\omega})$$

$$\begin{bmatrix} Y & (E_{A}W - E_{B}R)' & (GW - HR)' \\ (E_{A}W - E_{B}R) & I & 0 \\ (GW - HR) & 0 & I \end{bmatrix} \ge 0$$

$$Y = -WA'_{0} + R'B'_{0} - A_{0}W + B_{0}R - DD'$$
(20)

Com a realimentação  $K = RW^{-1}$ .

1) Simulação: A resolução do sistema de LMIs (20) gerou os seguintes resultados:

$$W = \begin{bmatrix} 0.4644 & -0.0305 \\ -0.0305 & 0.7975 \end{bmatrix}$$

$$R = 1.10^{3} \begin{bmatrix} 0.0009 & -8.6987 \end{bmatrix}$$

$$K = 1.10^{4} \begin{bmatrix} -0.0716 & -1.0935 \end{bmatrix}$$

$$M = 0.0170$$

$$\lambda_{1} = -0.0326$$

$$\lambda_{2} = -1.7666$$

A simulação do sistema em malha fechada com o ganho K encontrado obtem a resposta apresentada na Figura (3). Os valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os autovalores do sistema em malha fechada.

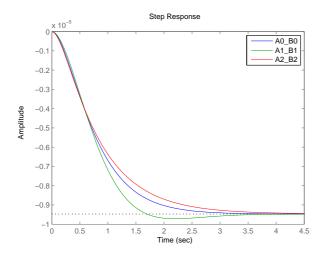


Figura 3. Resposta do sistema (22) com o ganho K encontrado pelo critério de  ${\cal H}_2$ 

# V. Norma $H_{\infty}$

Para o sistema apresentado em (13) a norma  $L_2$  deste sistema é definido como em (21).

$$\sup_{\|\omega(t)\|_2 \neq 0} = \frac{\|z(t)\|_2}{\|\omega(t)\|_2} \tag{21}$$

Onde a norma  $L_2$  de um sinal  $\omega(t)$  é definida como abaixo:

$$\|\omega(t)\|_2 \equiv \sqrt{\int_0^\infty \omega(t)' w(t) dt}$$

Suponha que exista uma função quadrática positiva V(x) = x'Px com P = P' > 0 e um escalar positivo  $\gamma_{\infty}$  tal que:

$$\dot{V}z(t)'z(t) - \gamma_{\infty}^{\omega}\omega(t)'\omega(t) \leq 0$$

#### A. Sistemas Lineares sem incertezas

Considerando o sistema apresentado em (13) em malha fechada, com condição inicial nula ( $x(0) \equiv 0$ ) e com  $\Delta(t) \equiv 0$ , obtém-se desta forma o sistema apresentado em (22).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_0 - B_0 K)x(t) + B_\omega \omega(t) \\ z(t) = (G - HK)x(t) \end{cases}$$
 (22)

A LMI que deve ser satisfeita para que a condição de  $H_{\infty}$  seja obtida é apresentada em (23).

$$\begin{bmatrix} Y & -(GW - HR)' \\ -(GW - HR) & \gamma_{\infty}^{2} I \end{bmatrix} \ge 0$$

$$Y = -WA'_{0} + R'B'_{0} - A_{0}W - B_{0}R - B_{\omega}B'_{\omega}$$
(23)

Assim pode-se garantir o limite superior minimo para o ganho  $L_2$  do sistema (22).

Para o caso de sistemas lineares invariantes no tempo a otimização dá exatamente o valor do ganho  $L_2$  que é igual a norma  $H_{\infty}$ .

$$T(s) = (G - HK)(sI - (A_0 - B_0K))^{-1}B_{\omega}$$

Que é equivalente a:

$$||T(s)||_{\infty} \equiv \max_{\omega \in \Re} \sqrt{\lambda(T'(j\omega)T(j\omega))}$$

# B. Incertezas do tipo politópico

No caso de incertezas do tipo politópicas o limite superior minimo para o ganho  $L_2$  pode ser definido pela equação (24).

$$\begin{bmatrix} Y & -(GW - HR)' \\ -(GW - HR) & \gamma_{\infty}^{2} \end{bmatrix} \ge 0$$

$$Y = -WA'_{i} + R'B'_{j} - A_{i}W + B_{j}R - B_{\omega}B'_{\omega}$$

$$W > 0$$
(24)

1) Simulação: A resolução do sistema de LMIs (24) gerou os seguintes resultados:

$$W = \begin{bmatrix} 0.0012 & -0.6805 \\ -0.6805 & 390.6637 \end{bmatrix}$$
 
$$R = 1.10^8 \begin{bmatrix} -0.0458 & -9.9849 \end{bmatrix}$$
 
$$K = 1.10^12 \begin{bmatrix} -2.4902 & -0.0043 \end{bmatrix}$$
 
$$\gamma_{\infty}^2 = 2.1730e - 11$$

A simulação do sistema em malha fechada com o ganho K encontrado obtem a resposta apresentada na Figura (4). Os valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os autovalores do sistema em malha fechada.

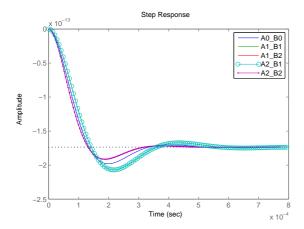


Figura 4. Resposta do sistema (22) com o ganho K encontrado pelo critério de  $H_{\infty}$ 

#### C. Incertezas limitadas em norma

Considerando o sistema descrito em (13) com  $\|\Delta(t)\| \le 1$ . A condição descrita em (23) é equivalente a (25).

$$\begin{bmatrix} Y & (E_A W - E_B R)' & -(GW - HR)' \\ (E_A W - E_B R) & I & 0 \\ -(GW - HR) & 0 & \gamma_{\infty}^2 \end{bmatrix} \ge 0$$

$$Y = -WA'_0 + R'B'_0 - A_0 W + B_0 R - B_{\omega} B'_{\omega}$$

$$W > 0$$
(25)

Satisfazendo a equação (25) obtém-se o limite superior minimo para o ganho  $L_2$  e se o sistema for linear e invariante no tempo este valor será o mesmo da norma  $H_\infty$  da função de transferência entre  $\omega$  e z.

1) Simulação: A resolução do sistema de LMIs (25) gerou os seguintes resultados:

$$W = \begin{bmatrix} 0.2449 & -0.0315 \\ -0.0315 & 0.8360 \end{bmatrix}$$

$$R = 1.10^{3} \begin{bmatrix} 0.0010 & -7.8417 \end{bmatrix}$$

$$K = 1.10^{3} \begin{bmatrix} -1.2096 & -9.4257 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{\infty}^{2} = 0.07$$

$$\lambda_{1} = -0.0529$$

$$\lambda_{2} = -1.6550$$

A simulação do sistema em malha fechada com o ganho K encontrado obtem a resposta apresentada na Figura (5). Os valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os autovalores do sistema em malha fechada.

# VI. SISTEMA NOMINAL - CENTRO DAS INCERTEZAS VII. CONCLUSÕES

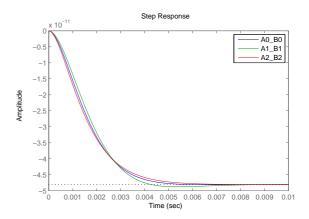


Figura 5. Resposta do sistema (22) com o ganho K encontrado pelo critério de  $H_{\infty}$