Controle Robusto e Caracterização de incertezas

Tassiano Neuhaus
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Departamento de Engenharia Elétrica
Av. Osvaldo Aranha, 103 - Bairro Bom Fim CEP: 90035-190 - Porto Alegre - RS - Brasil

***Resumo*—Neste trabalho será apresentado a caracterização de um sistema sujeito a incertezas. A caracterização será baseada nos seguintes tipos: Politópicas, limitadas em norma, diagonal e elemento por elemento.**

Para cada uma das incertezas caracterizadas será projetada uma realimentação de estados para minimizar a norma H_2 em malha fechada. O mesmo será feito para minimizar a norma H_∞

***Palavras-chave*—Controle Robusto, Incertezas politópicas, limitadas em norma e diagonais.**

I. INTRODUÇÃO

Neste trabalho será apresentado o projeto de controladores denominados Robustos. Para tanto será apresentado o conceito de um controlador Robusto. A fim de modelar um sistema sujeito a incertezas será apresentado alguns métodos para que sua modelagem matemática seja possível.

Para tornar o estudo mais claro será utilizado um sistema físico onde estará sujeito a perturbações e/ou incertezas. Sobre este sistema será feito a modelagem seguindo cada um dos processos e com estes modelos será efetuado uma simulação.

Esta simulação será baseada no projeto de uma realimentação de estados com o intuito de satisfazer a minimização da norma $H2$ e H_∞.

O sistema utilizado é apresentado no sistema de equações de estado descrito em (1).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ba & a+b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} \tag{1}$$

Este sistema possui a função de transferência apresentado em (2).

$$G(s) = \frac{k}{(s-a)(s-b)} \tag{2}$$

Os parâmetros a, b, k estão sujeitos as variações apresentadas em (3).

$$\begin{array}{lll} b = & -0.012725 & \\ k = & [k_1\ k_2] = & [-0.4649.10^{-4}\ -0.7449.10^{-4}] \\ a = & [a_1\ a_2] = & [-0.25\ -2] \end{array} \tag{3}$$

II. CARACTERIZAÇÃO

As incertezas presentes em um modelo matemático podem ter diversas origens:

- As variações paramétricas lentas e continuas devido ao envelhecimento de certos elementos físicos, ou bruscas devido a mudança no ponto de operação.
- Erro de estimativa nos parâmetros do modelo
- Hipóteses simplificarias na modelagem do sistema e/ou dinâmicas negligenciadas para redução do modelo.

As incertezas são classificadas da seguinte forma:

- **Paramétricas**: Devido as variações ou desconhecimento de certos valores físicos do sistema. Ex: Massa, temperatura ...
- **Não Paramétricas**: Devido a dinâmicas desconhecidas ou não identificadas no procedimento de identificação do sistema.
- **Estruturais**: Aquelas sobre as quais tem-se uma informação precisa sobre a maneira que elas agem sobre o sistema.
- **Não Estruturais**: São aquelas onde a única informação é o limite superior de sua norma.

O sistema sujeito as incertezas referidas anteriormente podem ser representados na forma de Equações de estados como em 4

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & A \in \mathbf{A} \\ y(t) = Cx(t) & B \in \mathbf{B} \end{cases} \tag{4}$$

Onde $\mathbf{A}e\mathbf{B}$ é o conjunto de parâmetros que são formados pelas variações das incertezas dos parâmetros.

A. Politópica

Uma incerteza é dita do tipo politópicas se $\mathbf{A}e\mathbf{B}$ tem as estruturas seguintes:

$$\mathbf{A}_p \equiv A : A \in \mathbf{Co}(A_i); i = 1, ..., na$$

$$\mathbf{B}_p \equiv B : B \in \mathbf{Co}(B_j); j = 1, ..., nb$$

Onde $\mathbf{Ca}$ é um envelope convexo, ou seja, uma combinação linear convexa.

De forma equivalente temos que um sistema de incertezas do tipo politópicas podem ser representados por (5.

$$\mathbf{A}_p \equiv A : A = \sum_{i=1}^{na} \alpha_i(t) A_i; \alpha_i \geq 0; \sum_{i=1}^{na} \alpha_i(t) = 1; \forall t \geq 0 \tag{5}$$

As incertezas politópicas são consideradas *estruturais* pois pode-se facilmente estimar as variações admitidas para cada elemento das matrizes que definem o conjunto de modelos.

B. Limitada em norma

Incertezas limitadas em norma possuem a seguinte estrutura:

$$\mathbf{A}(\Delta(t)) \equiv \{A : A = A_0 + \Delta A + D\Delta(t)E_A\} \tag{6}$$

$$\mathbf{B}(\Delta(t)) \equiv \{B : B = B_0 + \Delta B + D\Delta(t)E_B\} \qquad (7)$$

Com $\|\Delta(t)\| \leq 1$.

De maneira equivalente o sistema de equações de estado fica como em (8).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + B_0u(t) + Dp(t) \\ q(t) = E_Ax(t) + E_Bu(t) \\ p(t) = \Delta(t)q(t) \end{cases} \qquad (8)$$

O sistema apresentado em (8 pode ser melhor interpretado pela Figura (1).

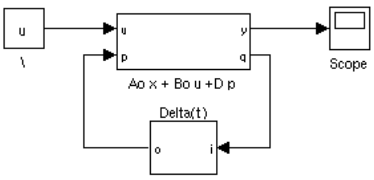

Figura 1. Sistema na forma LFT (*Linear Fractional Transformation*

De forma bem simplificada a matriz A_0 pode ser vista como a média das perturbações e a matriz E_A é a amplitude da incerteza sobre cada parâmetro.

Na literatura a matriz $\Delta(t)$ designa um bloco de incertezas *não estruturais*.

C. Diagonais

As incertezas diagonais podem ser definidas como em (6) e (7) com a diferença de que o valor de $\Delta(t)$ segue a definição abaixo:

$$\Delta(t)'\Delta(t) \leq I$$

Onde:

$$\Delta(t) = diag(\delta_i(t)); i = 1, ..., ni$$

A matriz $\Delta(t)$ é uma matriz quadrada de ordem ni.

D. Elemento a elemento

As incertezas de um sistema são elementares se $\mathbf{A} e \mathbf{B}$ possuem as seguintes estruturas:

$$\begin{gathered} \mathbf{A}(\Delta_e(t)) \equiv A : A = A_0(s) + \Delta_A = A_0 + D\Delta(t)E_A \\ \Delta_A(t)'\Delta_A(t) \leq I \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{B}(\Delta_e(t)) \equiv B : B = B_0(s) + \Delta_B = B_0 + D\Delta(t)E_B \\ \Delta_B(t)'\Delta_B(t) \leq I \end{gathered}$$

Onde:

$$\begin{aligned} D_A &= [d_{a1} \cdots d_{Anai}]; & D_B &= [d_{B1} \cdots d_{Bnbi}] \\ E'_A &= [e'_{A1} \cdots e'_{Anai}]; & E'_B &= [e'_{B1} \cdots e'_{Bnbi}] \\ \Delta_A(t) &= diag(\delta_{A1} \cdots \delta_{Anai}); & \Delta_B(t) &= diag(\delta_{B1} \cdots \delta_{Bnbi}) \end{aligned}$$

Definindo-se

$$\hat{D} \equiv [D_A \ D_B]$$

$$\hat{E}_A \equiv \begin{bmatrix} E_A \\ 0_{nbi\ x\ n} \end{bmatrix}$$

$$\hat{E}_B \equiv \begin{bmatrix} 0_{nai\ x\ m} \\ E_B \end{bmatrix}$$

De maneira equivalente, a equação de estados do sistema pode ser escrito como em (9).

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0x(t) + B_0u(t) + \hat{D}p(t) \\ q(t) = \hat{E}_ax(t) + \hat{E}_Bu(t) \\ p(t) = \Delta(t)q(t) \\ \Delta(t) = blocdiag(\Delta_A(t), \Delta_B(t)) \\ p_A(t) = \Delta_A(t)q_A(t) \\ p_B(t) = \Delta_B(t)q_B(t) \\ p(t) = [p'_A(t)p'_B(t)]' \\ q(t) = [q'_A(t)q'_B(t)]' \end{cases} \qquad (9)$$

Na definicão acima, cada bloco de incerteza $\delta_{Ai}(t)$ e $\delta_{Bj}(t)$ é um escalar, cujo módulo é inferior a 1. Alem disso as matrizes d_{Ai} e d_{Bj} são vetores coluna e e_{Ai} e e_{Bj} são vetores linha.

III. Controle Robusto

Nas seções seguintes será apresentado a modelagem para os tipos de incertezas. Utilizando o sistema descrito em (1) e os limites das incertezas descritos em (3), será apresentada a modelagem baseado em cada um dos tipos apresentados a seguir.

1) Estabilidade quadrática: A ideia fundamental da estabilização quadrática de um sistema incerto autónomo por realimentação linear estática de estados é encontrar uma lei de controle tal que a função quadrática definida positiva:

$$V(x) = x'Px; \ comP > 0$$

Possua sua derivada definida negativa ao longo da trajetória do sistema em malha fechada:

$$\begin{gathered} \dot{V}(x) = x'\{(A - BK)'P + P(A - BK)\}x < 0 \\ \forall A \in \mathbf{A}, \forall B \in \mathbf{B} \end{gathered}$$

Desta forma o que busca-se é uma matriz P que satisfaça não apenas uma equação mas um grupo de equações para estabilizar o sistema de forma Robusta.

Para um sistema sem incertezas tem-se que a solução do problema é como abaixo:

$$P = W^{-1}; K = RW^{-1}$$

Para o sistema abaixo com $R \equiv KP^{-1}$.

$$WA'_0 + A_0W - B_0R - R'B_0 < 0$$

A. Politópica

Para o caso de incertezas do tipo politópico uma condição necessária e suficiente para a estabilidade quadrática do sistema incerto autónomo em malha fechada é que todos os vértices do poliedro que constituem o conjunto de modelos possuam a mesma matriz P simétrica definida positiva como matriz de Lyapunov.

$$WA_i' + A_iW - B_jR - R'B_j' < 0 \tag{10}$$

Para $\forall i = 1, ..., na, \forall j = 1, ..., nb$.

O sistema utilizado neste trabalho (1) é caracterizado utilizando a forma politópica como em (11).

$$\begin{gathered} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ba_1 & a_1 + b \end{bmatrix} A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ba_2 & a_2 + b \end{bmatrix} \\ B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 \end{bmatrix} B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{11}$$

A partir de (10) tem-se o conjunto de inequações lineares apresentado em (12).

$$\begin{matrix} WA_1' + A_1W - B_1R - R'B_1' < 0 \\ WA_1' + A_1W - B_2R - R'B_2' < 0 \\ WA_2' + A_2W - B_1R - R'B_1' < 0 \\ WA_2' + A_2W - B_2R - R'B_2' < 0 \end{matrix} \tag{12}$$

B. Limitada em norma

Considerando o sistema apresentado em (13) com $\omega(t) \equiv 0$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + B_0u(t)B_\omega\omega(t) + Dp(t) \\ q(t) = E_Ax(t) + E_Bu(t) + Fp(t) \\ z(t) = Gx(t) + Hu(t) \\ p(t) = \Delta(t)q(t);\ \|\Delta(t)\| \leq 1 \end{cases} \tag{13}$$

Para este sistema temos que a derivada da função $V(x) = x'Px$ seja definida positiva:

$$x' - (A_0 - B_0K)'P - P(A_0 - B_0K)x - x'PDp - p'D'Px < 0$$

Para todo $x \neq 0$ tal que $p'p \leq q'q$ implica de maneira equivalente:

$$p'p \leq ((E_A - E_BK)x)'(E_A - E_BK)x$$

Tem-se então que o sistema apresentado em (14) é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade quadrática do sistema com incertezas limitadas em norma e também é convexa, portanto pode ser resolvida com algoritmos de resolução de LMI.

$$\begin{bmatrix} -A_0 + B_0R - WA_0' + R'B_0' - DD' & -(WE_A + RE_B') \\ -(WE_A' + R'E_B')' & I \end{bmatrix} > 0 \tag{14}$$

Desta forma para o sistema (1) temos que a modelagem para incertezas limitadas em norma é a apresentada em (15).

$$\begin{gathered} A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(a_1 + a_2)/2 & b + (a_1 + a_2)/2 \end{bmatrix} \\ B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ (k_1 + k_2)/2 \end{bmatrix} \\ E_A = \begin{bmatrix} (a_1 - a_2)/2 & 0 \\ 0 & (a_1 - a_2)/2 \end{bmatrix} \\ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ E_B = \begin{bmatrix} 0 \\ (k_1 - k_2)/2 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{15}$$

C. Diagonais

Para incertezas diagonais o sistema fica como em (15).

D. Elemento a elemento

Para as incertezas do tipo elemento a elemento temos as seguintes definições:

$$D_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$E_A = \begin{bmatrix} (a_1 - a_2)/2 & (a_1 - a_2)/2 \end{bmatrix}$$

$$D_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$E_B = [(k_1 - k_2)/2]$$

Desta forma chega-se:

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{E}_A = \begin{bmatrix} (a_1 - a_2)/2 & (a_1 - a_2)/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{E}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ (k_1 - K2)/2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_A(t) & 0 \\ 0 & \delta_B(t) \end{bmatrix}$$

IV. Minimização da norma H_2

Considerando o sistema apresentado em (13) em malha fechada com $\Delta \equiv 0$ e condição inicial nula. Um critério normalmente utilizado é a norma H_2 da função de transferência entre a entrada das perturbações ω e a saída z. A norma H_2 pode ser calculada como em (16).

$$\|T(s)\|_2 \equiv \gamma_2 = \sqrt{Tr(B_\omega' P_o B_\omega)} \tag{16}$$

Onde :

$$P_o = \int_0^\infty ((G - HK))e^{(A_0 - BK)}B_\omega)'((G - HK))e^{(A_0 - BK)}B_\omega)dt$$

Interpretação estocástica da norma H_2: Se considerarmos $\omega(t)$ como sendo ruido branco, então a norma H_2 de $T(s)$ é o valor da variância assintótica da saída $z(t)$:

$$\|T(s)\|_2 = \sqrt{\lim_{t\to\infty} E(z(t)'z(t))}$$

Interpretação determinística da norma H_2: Dá a ideia da energia da saída $z(t)$ em resposta as condições iniciais nulas.

$$\int_0^\infty z(t)'z(t)dt = x_0' P_o x_0$$

Assim tendo que a norma pode ser apresentada como a seguir:

$$\|T(s)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_w} \int_0^\infty \|z^i(t)\|^2 \, dt}$$

A. Sistemas Lineares sem incertezas

Se considerarmos o sistema (13) com condições iniciais nulas e $\Delta \equiv 0$ temos o sistema apresentado em (17).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_0 - B_0 K)x(t) + B_\omega \omega(t) \\ z(t) = (G - HK)x(t) \end{cases} \tag{17}$$

Pode-se desta forma minimizar o escalar γ_2 sujeito a (18).

$$\gamma_2^2 > Tr(M)$$

$$\begin{bmatrix} M & B_\omega' \\ B_\omega & W \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} -WA_0' + R'B_0' - A_0W + B_0R & (GW - HR)' \\ (GW - HR) & I \end{bmatrix} > 0 \tag{18}$$

B. Incertezas do tipo politópico

Para um sistema com incertezas do tipo politopico ter garantia do limite superior de γ_2 para a norma H_2 de todos os sistemas pertencentes ao conjunto de sistemas formados pelas incertezas é satisfeita para:

$$\gamma_2^2 > Tr(M)$$

$$\begin{bmatrix} M & B_\omega' \\ B_\omega & W \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} -WA_i' + R'B_j' - A_iW + B_jR & (GW - HR)' \\ (GW - HR) & I \end{bmatrix} > 0$$
$$\forall i = 1, ..., na$$
$$\forall j = 1, ..., nb \tag{19}$$

1) Simulação: A resolução do sistema de LMIs (19) gerou os seguintes resultados:

$$W = \begin{bmatrix} 5.3185 & -1.0406 \\ -1.0406 & 938.1095 \end{bmatrix}$$

$$R = 1.10^6 \begin{bmatrix} 0.0008 & -1.3383 \end{bmatrix}$$

$$K = 1.10^3 \begin{bmatrix} -0.1259 & -1.4267 \end{bmatrix}$$

$$M = 2.3045e - 12$$

A simulação do sistema em malha fechada com o ganho K encontrado obtem a resposta apresentada na Figura (2), O sistema simulado com as incertezas sendo utilizadas com o valor mediano é apresentada na linha $A0_B0$, para os sistemas que possuem as 4 combinacões de matrizes A_1, A_2, B_1, B_2 que formam os vértices do politopo, são apresentados nas demais linhas do gráfico.

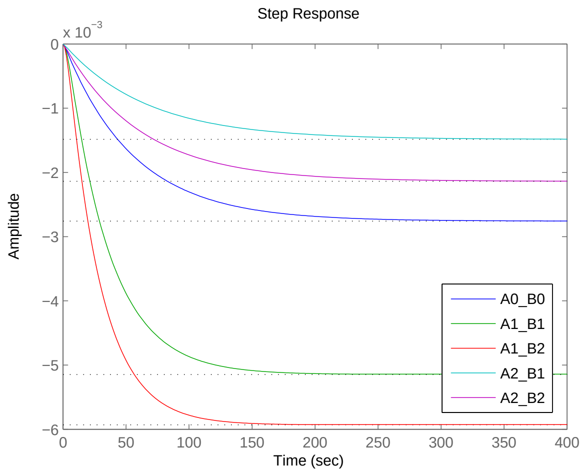

Figura 2. Resposta do sistema (22) com o ganho K encontrado pelo critério de H_2

C. Incertezas limitadas em norma

Para o caso de incertezas com norma limitada temos (20).

$$\gamma_2^2 > Tr(B_\omega' W^{-1} B_\omega)$$

$$\begin{bmatrix} Y & (E_AW - E_BR)' & (GW - HR)' \\ (E_AW - E_BR) & I & 0 \\ (GW - HR) & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0$$

$$Y = -WA_0' + R'B_0' - A_0W + B_0R - DD' \tag{20}$$

Com a realimentação $K = RW^{-1}$.

1) Simulação: A resolução do sistema de LMIs (20) gerou os seguintes resultados:

$$W = \begin{bmatrix} 0.4644 & -0.0305 \\ -0.0305 & 0.7975 \end{bmatrix}$$

$$R = 1.10^3 \begin{bmatrix} 0.0009 & -8.6987 \end{bmatrix}$$

$$K = 1.10^4 \begin{bmatrix} -0.0716 & -1.0935 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} M &= 0.0170 \\ \lambda_1 &= -0.0326 \\ \lambda_2 &= -1.7666 \end{aligned}$$

A simulação do sistema em malha fechada com o ganho K encontrado obtem a resposta apresentada na Figura (3). Os valores de λ_1 e λ_2 são os autovalores do sistema em malha fechada.

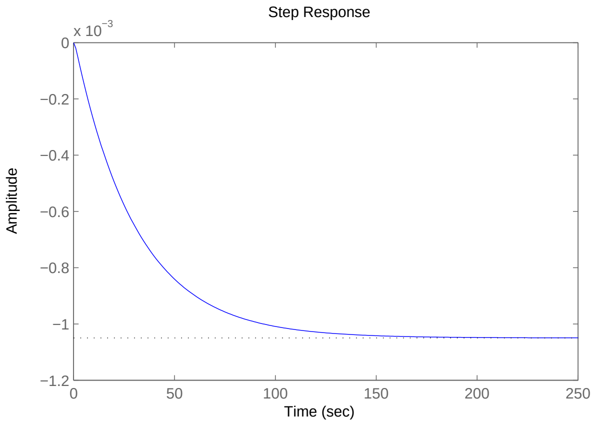

Figura 3. Resposta do sistema (22) com o ganho K encontrado pelo critério de H_2

V. NORMA H_∞

Para o sistema apresentado em (13) a norma L_2 deste sistema é definido como em (21).

$$\sup_{\|\omega(t)\|_2 \neq 0} = \frac{\|z(t)\|_2}{\|\omega(t)\|_2} \tag{21}$$

Onde a norma L_2 de um sinal $\omega(t)$ é definida como abaixo:

$$\|\omega(t)\|_2 \equiv \sqrt{\int_0^\infty \omega(t)' w(t) dt}$$

Suponha que exista uma função quadrática positiva $V(x) = x'Px$ com $P = P' > 0$ e um escalar positivo γ_∞ tal que:

$$\dot{V} z(t)' z(t) - \gamma_\infty^\omega \omega(t)' \omega(t) \leq 0$$

A. *Sistemas Lineares sem incertezas*

Considerando o sistema apresentado em (13) em malha fechada, com condição inicial nula ($x(0) \equiv 0$) e com $\Delta(t) \equiv 0$, obtém-se desta forma o sistema apresentado em (22).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_0 - B_0 K)x(t) + B_\omega \omega(t) \\ z(t) = (G - HK)x(t) \end{cases} \tag{22}$$

A LMI que deve ser satisfeita para que a condição de H_∞ seja obtida é apresentada em (23).

$$\begin{bmatrix} Y & -(GW - HR)' \\ -(GW - HR) & \gamma_\infty^2 I \end{bmatrix} \geq 0$$

$$Y = -WA_0' + R'B_0' - A_0 W - B_0 R - B_\omega B_\omega' \tag{23}$$

Assim pode-se garantir o limite superior minimo para o ganho L_2 do sistema (22).

Para o caso de sistemas lineares invariantes no tempo a otimização dá exatamente o valor do ganho L_2 que é igual a norma H_∞.

$$T(s) = (G - HK)(sI - (A_0 - B_0 K))^{-1} B_\omega$$

Que é equivalente a:

$$\|T(s)\|_\infty \equiv \max_{\omega \in \Re} \sqrt{\lambda(T'(j\omega)T(j\omega))}$$

B. *Incertezas do tipo politópico*

No caso de incertezas do tipo politópicas o limite superior minimo para o ganho L_2 pode ser definido pela equação (24).

$$\begin{bmatrix} Y & -(GW - HR)' \\ -(GW - HR) & \gamma_\infty^2 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$Y = -WA_i' + R'B_j' - A_i W + B_j R - B_\omega B_\omega' \tag{24}$$

$$W > 0$$

C. *Incertezas limitadas em norma*

Considerando o sistema descrito em (13) com $\|\Delta(t)\| \leq 1$. A condição descrita em (23) é equivalente a (25).

$$\begin{bmatrix} Y & (E_A W - E_B R)' & -(GW - HR)' \\ (E_A W - E_B R) & I & 0 \\ -(GW - HR) & 0 & \gamma_\infty^2 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$Y = -WA_0' + R'B_0' - A_0 W + B_0 R - B_\omega B_\omega'$$

$$W > 0 \tag{25}$$

Satisfazendo a equação (25) obtém-se o limite superior minimo para o ganho L_2 e se o sistema for linear e invariante no tempo este valor será o mesmo da norma H_∞ da função de transferência entre ω e z.

1) Simulação: A resolução do sistema de LMIs (25) gerou os seguintes resultados:

$$W = \begin{bmatrix} 0.2449 & -0.0315 \\ -0.0315 & 0.8360 \end{bmatrix}$$

$$R = 1.10^3 \begin{bmatrix} 0.0010 & -7.8417 \end{bmatrix}$$

$$K = 1.10^3 \begin{bmatrix} -1.2096 & -9.4257 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_\infty^2 = 0.07$$
$$\lambda_1 = -0.0529$$
$$\lambda_2 = -1.6550$$

A simulação do sistema em malha fechada com o ganho K encontrado obtem a resposta apresentada na Figura (4). Os valores de λ_1 e λ_2 são os autovalores do sistema em malha fechada.

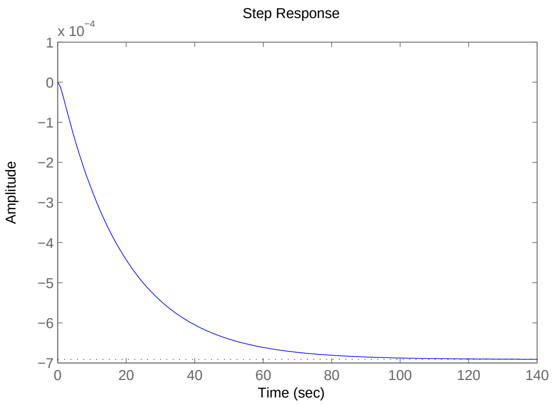

Figura 4. Resposta do sistema (22) com o ganho K encontrado pelo critério de H_∞

VI. Sistema Nominal - Centro das incertezas

VII. Conclusões