

# Controle Robusto e Caracterização de incertezas

Tassiano Neuhaus

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Departamento de Engenharia Elétrica  
Av. Osvaldo Aranha, 103 - Bairro Bom Fim CEP: 90035-190 - Porto Alegre - RS - Brazil

**Resumo**—Neste trabalho será apresentado a caracterização de um sistema sujeito a incertezas. A caracterização será baseada nos seguintes tipos: Politépicas, limitadas em norma, diagonal e elemento por elemento.

Para cada uma das incertezas caracterizadas será projetada uma realimentação de estados para minimizar a norma  $H_2$  em malha fechada. O mesmo será feito para minimizar a norma  $H_\infty$

**Palavras-chave**—Controle Robusto, Incertezas politópicas, limitadas em norma e diagonais.

## I. INTRODUÇÃO

Neste trabalho será apresentado o projeto de controladores denominados Robustos. Para tanto será apresentado o conceito de um controlador Robusto. A fim de modelar um sistema sujeito a incertezas será apresentado alguns métodos para que sua modelagem matemática seja possível.

Para tornar o estudo mais claro será utilizado um sistema físico onde estará sujeito a perturbações e/ou incertezas. Sobre este sistema será feita a modelagem seguindo cada um dos processos e com estes modelos será efetuado uma simulação.

Esta simulação será baseada no projeto de uma realimentação de estados com o intuito de satisfazer a minimização da norma  $H_2$  e  $H_\infty$ .

O sistema utilizado é apresentado no sistema de equações de estado descrito em (1).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ba & a+b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} \quad (1)$$

Este sistema possui a função de transferência apresentado em (2).

$$G(s) = \frac{k}{(s-a)(s-b)} \quad (2)$$

Os parâmetros  $a, b, k$  estão sujeitos as variações apresentadas em (3).

$$\begin{aligned} b &= -0.012725 \\ k &= [k_1 \ k_2] = [-0.4649 \cdot 10^{-4} \ -0.7449 \cdot 10^{-4}] \\ a &= [a_1 \ a_2] = [-0.25 \ -2] \end{aligned} \quad (3)$$

## II. CARACTERIZAÇÃO

As incertezas presentes em um modelo matemático podem ter diversas origens:

- As variações paramétricas lentas e contínuas devido ao envelhecimento de certos elementos físicos, ou bruscas devido a mudança no ponto de operação.
- Erro de estimativa nos parâmetros do modelo

- Hipóteses simplificarias na modelagem do sistema e/ou dinâmicas negligenciadas para redução do modelo.

As incertezas são classificadas da seguinte forma:

- **Paramétricas:** Devido as variações ou desconhecimento de certos valores físicos do sistema. Ex: Massa, temperatura ...
- **Não Paramétricas:** Devido a dinâmicas desconhecidas ou não identificadas no procedimento de identificação do sistema.
- **Estruturais:** Aquelas sobre as quais tem-se uma informação precisa sobre a maneira que elas agem sobre o sistema.
- **Não Estruturais:** São aquelas onde a única informação é o limite superior de sua norma.

O sistema sujeito as incertezas referidas anteriormente podem ser representados na forma de Equações de estados como em 4

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & A \in \mathbf{A} \\ y(t) = Cx(t) & B \in \mathbf{B} \end{cases} \quad (4)$$

Onde  $\mathbf{A} \in \mathbf{B}$  é o conjunto de parâmetros que são formados pelas variações das incertezas dos parâmetros.

### A. Politópica

Uma incerteza é dita do tipo politópicas se  $\mathbf{A} \in \mathbf{B}$  tem as estruturas seguintes:

$$\mathbf{A}_p \equiv A : A \in \text{Co}(A_i); i = 1, \dots, na$$

$$\mathbf{B}_p \equiv B : B \in \text{Co}(B_j); j = 1, \dots, nb$$

Onde  $\text{Co}$  é um envelope convexo, ou seja, uma combinação linear convexa.

De forma equivalente temos que um sistema de incertezas do tipo politópicas podem ser representados por (5).

$$\mathbf{A}_p \equiv A : A = \sum_{i=1}^{na} \alpha_i(t) A_i; \alpha_i \geq 0; \sum_{i=1}^{na} \alpha_i(t) = 1; \forall t \geq 0 \quad (5)$$

As incertezas politópicas são consideradas *estruturais* pois pode-se facilmente estimar as variações admitidas para cada elemento das matrizes que definem o conjunto de modelos.

### B. Limitada em norma

Incertezas limitadas em norma possuem a seguinte estrutura:

$$\mathbf{A}(\Delta(t)) \equiv \{A : A = A_0 + \Delta A + D\Delta(t)E_A\} \quad (6)$$

$$\mathbf{B}(\Delta(t)) \equiv \{B : B = B_0 + \Delta B + D\Delta(t)E_B\} \quad (7)$$

Com  $\|\Delta(t)\| \leq 1$ .

De maneira equivalente o sistema de equações de estado fica como em (8).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + B_0u(t) + Dp(t) \\ q(t) = E_Ax(t) + E_Bu(t) \\ p(t) = \Delta(t)q(t) \end{cases} \quad (8)$$

O sistema apresentado em (8) pode ser melhor interpretado pela Figura (1).

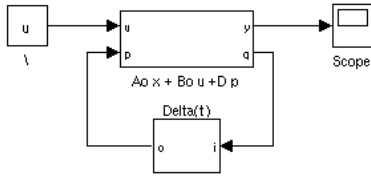


Figura 1. Sistema na forma LFT (Linear Fractional Transformation)

De forma bem simplificada a matriz  $A_0$  pode ser vista como a média das perturbações e a matriz  $E_A$  é a amplitude da incerteza sobre cada parâmetro.

Na literatura a matriz  $\Delta(t)$  designa um bloco de incertezas não estruturais.

### C. Diagonais

As incertezas diagonais podem ser definidas como em (6) e (7) com a diferença de que o valor de  $\Delta(t)$  segue a definição abaixo:

$$\Delta(t)' \Delta(t) \leq I$$

Onde:

$$\Delta(t) = \text{diag}(\delta_i(t)); i = 1, \dots, ni$$

A matriz  $\Delta(t)$  é uma matriz quadrada de ordem  $ni$ .

## III. CONTROLE ROBUSTO

Nas seções seguintes será apresentado a modelagem para os tipos de incertezas. Utilizando o sistema descrito em (1) e os limites das incertezas descritos em (3), será apresentada a modelagem baseado em cada um dos tipos apresentados a seguir.

1) *Estabilidade quadrática:* A ideia fundamental da estabilização quadrática de um sistema incerto autônomo por realimentação linear estática de estados é encontrar uma lei de controle tal que a função quadrática definida positiva:

$$V(x) = x'Px; \text{ com } P > 0$$

Possua sua derivada definida negativa ao longo da trajetória do sistema em malha fechada:

$$\dot{V}(x) = x' \{ (A-BK)'P + P(A-BK) \} x < 0; \forall A \in \mathbf{A}, \forall B \in \mathbf{B}$$

Desta forma o que busca-se é uma matriz  $P$  que satisfaça não apenas uma equação mas um grupo de equações para estabilizar o sistema de forma Robusta.

Para um sistema sem incertezas tem-se que a solução do problema é como abaixo:

$$P = W^{-1}; K = RW^{-1}$$

Para o sistema abaixo com  $R \equiv KP^{-1}$ .

$$WA_0' + A_0W - B_0R - R'B_0 < 0$$

### A. Politópica

Para o caso de incertezas do tipo politópico uma condição necessária e suficiente para a estabilidade quadrática do sistema incerto autônomo em malha fechada é que todos os vértices do poliedro que constituem o conjunto de modelos possuam a mesma matriz  $P$  simétrica definida positiva como matriz de Lyapunov.

$$WA_i' + A_iW - B_jR - R'B_j' < 0 \quad (9)$$

Para  $\forall i = 1, \dots, na, \forall j = 1, \dots, nb$ .

O sistema utilizado neste trabalho (1) é caracterizado utilizando a forma politópica como em (10).

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ba_1 & a_1 + b \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ba_2 & a_2 + b \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

A partir de (9) tem-se o conjunto de inequações lineares apresentado em (11).

$$\begin{aligned} WA_1' + A_1W - B_1R - R'B_1' &< 0 \\ WA_1' + A_1W - B_2R - R'B_2' &< 0 \\ WA_2' + A_2W - B_1R - R'B_1' &< 0 \\ WA_2' + A_2W - B_2R - R'B_2' &< 0 \end{aligned} \quad (11)$$

### B. Limitada em norma

Considerando o sistema apresentado em (12) com  $\omega(t) \equiv 0$ .

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + B_0u(t)B_\omega\omega(t) + Dp(t) \\ q(t) = E_Ax(t) + E_Bu(t) + Fp(t) \\ z(t) = Gx(t) + Hu(t) \\ p(t) = \Delta(t)q(t); \|\Delta(t)\| \leq 1 \end{cases} \quad (12)$$

Para este sistema temos que a derivada da função  $V(x) = x'Px$  seja definida positiva:

$$x' - (A_0 - B_0K)'P - P(A_0 - B_0K)x - x'PDp - p'D'Px < 0$$

Para todo  $x \neq 0$  tal que  $p'p \leq q'q$  implica de maneira equivalente:

$$p'p \leq ((E_A - E_BK)x)'(E_A - E_BK)x$$

Tem-se então que o sistema apresentado em (13) é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade quadrática do sistema com incertezas limitadas em norma e também é convexa, portanto pode ser resolvida com algoritmos de resolução de LMI.

$$\begin{bmatrix} -A_0 + B_0R - WA'_0 + R'B'_0 - DD' & -(WE_A + RE'_B) \\ -(WE'_A + R'E'_B)' & I \end{bmatrix} > 0 \quad (13)$$

Desta forma para o sistema (1) temos que a modelagem para incertezas limitadas em norma é a apresentada em (14).

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(a_1 + a_2)/2 & b + (a_1 + a_2)/2 \end{bmatrix} \\ B_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ (k_1 + k_2)/2 \end{bmatrix} \\ E_A &= \begin{bmatrix} (a_1 - a_2)/2 & 0 \\ 0 & (a_1 - a_2)/2 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

### C. Diagonais

#### IV. MINIMIZAÇÃO DA NORMA H2

#### V. NORMA $H_\infty$

#### VI. SISTEMA NOMINAL - CENTRO DAS INCERTEZAS

#### VII. CONCLUSÕES