

Controle Robusto e Caracterização das incertezas

Tassiano Neuhaus

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Departamento de Engenharia Elétrica
Av. Osvaldo Aranha, 103 - Bairro Bom Fim CEP: 90035-190 - Porto Alegre - RS - Brazil

Resumo—Neste trabalho será apresentado a caracterização de um sistema sujeito a incertezas. A caracterização será baseada nos seguintes tipos: Politópicas, limitadas em norma, diagonal e elemento por elemento.

Para cada uma das incertezas caracterizadas será projetada uma realimentação de estados para minimizar a norma H_2 em malha fechada. O mesmo será feito para minimizar a norma H_∞

Palavras-chave—Controle Robusto, Incertezas politópicas, limitadas em norma e diagonais.

I. INTRODUÇÃO

Neste Trabalho será abordado aspectos da modelagem e utilização do filtro de Kalman (Sec. ??), suas aplicações para o ramo da engenharia (Sec. III) e sua modelagem para o tempo discreto, será apresentado uma breve descrição das vantagens que o filtro possui e sua grande robustez para sistema sujeitos a perturbações, ruídos ou imprecisão na sua modelagem.

Será abordado o problema de LQG e LQR para o sistema de tempo discreto (Sec. V), será apresentado também o principio da separação para a resolução do problema do filtro de Kalman.

Ao fim será apresentado as conclusões (Sec. VI) obtidas com o trabalho desenvolvido.

II. CARACTERIZAÇÃO

A. Politópica

B. Limitada em norma

C. Diagonais

D. Elemento a elemento

III. APLICAÇÕES PRÁTICAS

O filtro de Kalman tem uma longa aplicabilidade. Diversas atividades usam ou ate mesmo dependem dele para seu funcionamento. Abaixo algumas destas aplicações:

- Heading Reference Systems
- Piloto automático
- estimativa de estado de carga de baterias (SoC)
- interface cérebro - computador
- Sinais Caóticos
- Posicionamento dinâmico
- Economia, em particular macroeconomia, series temporais e econometria
- sistema de orientação por inercia
- Radar tracker
- sistemas de navegação por satélite
- Localização e mapeamento simultâneos
- Previsão do tempo

- Sistemas de Navegação
- Modelagem 3D
- Visão computacional
- Robótica móvel

Nesta sessão faremos uma pequena introdução no que diz respeito a dois destes itens e uma ideia de como o filtro de Kalman a utilizado. Os tópicos abordados serão: Visão computacional (III-A) e Robótica móvel (III-B).

A. Visão computacional

Sistemas de visão para localização utilizando filtros de Kalman encontram um ponto de aplicação bem vasto no quesito de movimentação de robôs em ambientes variados e dinâmicos. Existem pesquisas nesta área ([?]) para Robôs moveis autônomos (autonomous mobile robot -AMR) em ambientes dinâmicos e incertos. Primeiramente para obter uma força repulsiva aos obstáculos, sonares são utilizados para determinar o posicionamento dos obstáculos. O Filtro de Kalman a utilizado para eliminar ruido destes sonares alam do ruido ambiente onde o robô esta imerso.

Devido aos distúrbios do ambiente, os sinais do sonar são normalmente instável. Para eliminar os distúrbios e ruídos do ambiente é utilizado um filtro de Kalman com as seguintes vantagens principais:

- Sinais de erro de mínimos quadráticos de estimação são obtidos usando computação recursivo, desta forma é rápido e conveniente para processamento de tempo-real.
- Um filtro de Kalman estável é utilizado para processar sinais instáveis. Desta forma o método pode aceitar estes dados dos sonares e garantir uma baixa taxa de ruido. [?]

B. Robótica Móvel

Um Robô móvel pode ser compreendido como robôs que podem movimentar-se autonomamente no solo ou no espaço. Um robô a um manipulador multifuncional reprogramável projetado para movimentar materiais, ferramentas ou dispositivos especiais seguindo movimentos programados variáveis, tendo por objetivo a realização de tarefas variadas

Para a simulação do robô podemos considerar o sistema (1). [?]

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t)\cos(\theta(t)) \\ v(t)\sin(\theta(t)) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Que pode ser melhor entendido pela Figura (1).

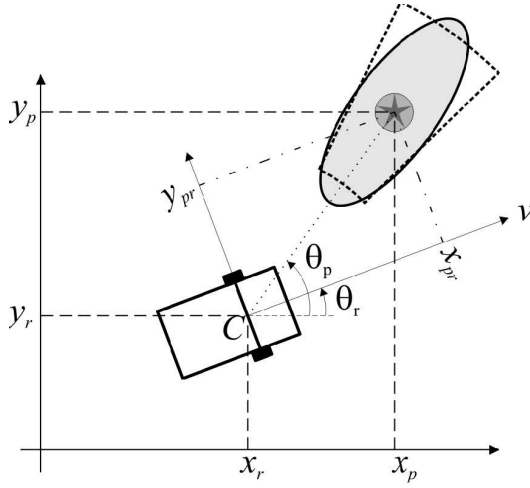


Figura 1. Representação gráfica do estado do Robô. [?]

Sendo o modelo da cinemática do Robot dado pela equação (1) e considerando-se que os sinais de controle são constantes entre cada instante de amostragem, podemos escrever a equação de propagação do estado como:

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(X(t), u(t_k), t), t \in [t_k, t_k + 1]$$

Sendo $u(t) = [v(t) \ \omega(t)]'$

Desta maneira a possível iniciar o algoritmo do filtro de Kalman. Maiores detalhes podem ser obtidos em [?].

IV. LQR E LQG EM TEMPO DISCRETO

A. LQR para sistemas de tempo discreto

Para o problema de LQR discreto iremos considerar o valor que o controlador provê um valor constante entre duas amostras de tempo (*Zero-order Hold*). E o sistema pode ser considerado como em (11). [?]

$$\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u \quad (2)$$

Usaremos T como o período de amostragem (tempo em que o valor na saída do controlador é mantido constante) e k é um inteiro onde kT será o tempo em que o valor contínuo será amostrado.

O objetivo do controle discreto é que seja gerada uma entrada u_k tal que o sistema em tempo contínuo seja minimizado pela performance em (12).

$$V = \int_t^{t_f} (x' \tilde{Q}x + u' \tilde{R}u) d\tau + x'(t_f) S x(t_f) \quad (3)$$

Temos que:

$$x(t) = \Phi(t, kT)x_k + \int_{kT}^t \Phi(t, \tau) \tilde{B}u_k d\tau, \quad kT \leq t \leq (k+1)T \quad (4)$$

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \quad (5)$$

Onde:

$$A_k = \Phi((k+1)T, kT)$$

$$B_k = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1), \tau) \tilde{B} d\tau$$

A partir de (12) temos (15).

$$\int_{kT}^{(k+1)T} (x' \tilde{Q}x + u' \tilde{R}u) d\tau = x'_k Q_k x_k + 2u'_k M_k x_k + u'_k R_k u_k \quad (6)$$

Onde:

$$Q_k = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi'(\tau, kT) \tilde{Q} \Phi(\tau, kT) d\tau$$

$$M_k = \int_{kT}^{(k+1)T} H'_k(\tau) \tilde{Q} \Phi(\tau, kT) d\tau$$

$$R_k = \int_{kT}^{(k+1)T} [\tilde{R} + H'_k(\tau) \tilde{Q} H_k(\tau)] d\tau$$

$$H_k = \int_{kT}^{\tau} \Phi(\tau, \alpha) \tilde{B} d\alpha$$

Podemos então re escrever a performance quadrática dada em (12) por (16).

$$V(x_i, i) = \sum_{k=i}^{N-1} l(x_k, u_k, k) + x'_N S x_N \quad (7)$$

Onde $t_f = NT$ e:

$$l(x, u, k) = x' Q_k x + 2u' M_k x + u' R_k u$$

1) *Otimização LQR de tempo discreto:* Baseado em (16) e a dinâmica descrita em (14, e utilizando o principio da otimalidade temos que o valor ótimo para o estado x_N é dado por (17). [?]

$$V^*(x_N, N) = x'_N S x_N \quad (8)$$

O problema a ser minimizado é o apresentado abaixo:

$$\begin{aligned} x'_i P_i x_i &= \min_{u_i} [x'_i Q_i x_i + 2u'_i M_i x_i + u'_i R_i u_i \\ &\quad + (Ax_i + Bu_i)' P_{i+1} (Ax_i + Bu_i)] \end{aligned}$$

Dizemos que o valor de u_i que coloca o sistema no ponto de valor ótimo é $u_i^* = -K_i x_i$, onde:

$$K_i = (R + B' P_{i+1} A)^{-1} (B' P_{i+1} A + M) \quad (9)$$

Obtemos então a solução da equação de Riccati para tempo discreto:

$$P_i = \begin{aligned} &(Q + A' P_{i+1} A) \\ &-(M + B' P_{i+1} A)' (R + B' P_{i+1} B)^{-1} (M + B' P_{i+1} A) \end{aligned} \quad (10)$$

Onde $P_N = S$. [?]

V. LQR E LQG EM TEMPO DISCRETO

A. LQR para sistemas de tempo discreto

Para o problema de LQR discreto iremos considerar o valor que o controlador provê um valor constante entre duas amostras de tempo (*Zero-order Hold*). E o sistema pode ser considerado como em (11). [?]

$$\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u \quad (11)$$

Usaremos T como o período de amostragem (tempo em que o valor na saída do controlador é mantido constante) e k é um inteiro onde kT será o tempo em que o valor contínuo será amostrado.

O objetivo do controle discreto é que seja gerada uma entrada u_k tal que o sistema em tempo contínuo seja minimizado pela performance em (12).

$$V = \int_t^{t_f} (x' \tilde{Q}x + u' \tilde{R}u) d\tau + x'(t_f) S x(t_f) \quad (12)$$

Temos que:

$$x(t) = \Phi(t, kT) x_k + \int_{kT}^t \Phi(t, \tau) \tilde{B} u_k d\tau, \quad kT \leq t \leq (k+1)T \quad (13)$$

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \quad (14)$$

Onde:

$$A_k = \Phi((k+1)T, kT)$$

$$B_k = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1), \tau) \tilde{B} d\tau$$

A partir de (12) temos (15).

$$\int_{kT}^{(k+1)T} (x' \tilde{Q}x + u' \tilde{R}u) d\tau = x'_k Q_k x_k + 2u'_k M_k x_k + u'_k R_k u_k \quad (15)$$

Onde:

$$Q_k = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi'(\tau, kT) \tilde{Q} \Phi(\tau, kT) d\tau$$

$$M_k = \int_{kT}^{(k+1)T} H'_k(\tau) \tilde{Q} \Phi(\tau, kT) d\tau$$

$$R_k = \int_{kT}^{(k+1)T} [\tilde{R} + H'_k(\tau) \tilde{Q} H_k(\tau)] d\tau$$

$$H_k = \int_{kT}^{\tau} \Phi(\tau, \alpha) \tilde{B} d\alpha$$

Podemos então re escrever a performance quadrática dada em (12) por (16).

$$V(x_i, i) = \sum_{k=i}^{N-1} l(x_k, u_k, k) + x'_N S x_N \quad (16)$$

Onde $t_f = NT$ e:

$$l(x, u, k) = x' Q_k x + 2u' M_k x + u' R_k u$$

1) *Otimização LQR de tempo discreto*: Baseado em (16) e a dinâmica descrita em (14), e utilizando o princípio da otimalidade temos que o valor ótimo para o estado x_N é dado por (17). [?]

$$V^*(x_N, N) = x'_N S x_N \quad (17)$$

O problema a ser minimizado é o apresentado abaixo:

$$\begin{aligned} x'_i P_i x_i &= \min_{u_i} [x'_i Q x_i + 2u'_i M x_i + u'_i R u_i \\ &\quad + (A x_i + B u_i)' P_{i+1} (A x_i + B u_i)] \end{aligned}$$

Dizemos que o valor de u_i que coloca o sistema no ponto de valor ótimo é $u_i^* = -K_i x_i$, onde:

$$K_i = (R + B' P_{i+1} A)^{-1} (B' P_{i+1} A + M) \quad (18)$$

Obtemos então a solução da equação de Riccati para tempo discreto:

$$\begin{aligned} P_i &= (Q + A' P_{i+1} A) \\ &\quad - (M + B' P_{i+1} A)' (R + B' P_{i+1} B)^{-1} (M + B' P_{i+1} A) \end{aligned} \quad (19)$$

Onde $P_N = S$. [?]

VI. CONCLUSÕES

Foi apresentado neste trabalho uma breve descrição do funcionamento do Filtro de Kalman, suas inúmeras aplicações nas mais diversas atividades e ramos da engenharia moderna. Apresentou-se o diferencial da utilização do filtro devido a sua robustez para implementação no que diz respeito ao mundo digital e sua robustez quando existe ruído ou incerteza na planta em questão.

Apresentou-se também o problema de LQR para tempo discreto, sua modelagem e a realização do filtro de kalman pelo princípio da separação, onde a modelagem do filtro pode ser entendida/resolvida pela resolução de um problema de LQR e outro de LQG.

Apresentou-se também dois tipos principais para a realização do filtro de kalman: realização por estimação (??) e a realização em cascata (??).

Com estes pontos apresentados aqui e com a grande aplicabilidade dos filtros de kalman em problemas comuns da engenharia, observamos que este aparato tem grande importância e suas aplicações (III) não se restringem às apresentadas neste trabalho.