

Filtro de Kalman, LQG e LQR em tempo discreto

Tassiano Neuhaus

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Departamento de Engenharia Elétrica
Av. Osvaldo Aranha, 103 - Bairro Bom Fim CEP: 90035-190 - Porto Alegre - RS - Brazil

Resumo—Este trabalho apresenta a formulação do filtro de Kalman e algumas de suas aplicações.

Apresenta também a o problema de Linear-Quadratic Regulator (LQR) e Linear-Quadratic Gaussian (LQG) para tempo discreto.

Palavras-chave—Filtro de Kalman, LQG, LQR.

I. INTRODUÇÃO

Neste Trabalho será abordado aspectos da modelagem e utilização do filtro de Kalman (Sec. II), suas aplicações para o ramo da engenharia (Sec. III) e sua modelagem para o tempo discreto, será apresentado uma breve descrição das vantagens que o filtro possui e sua grande robustez para sistema sujeitos a perturbações, ruídos ou imprecisão na sua modelagem.

Será abordado o problema de LQG e LQR para o sistema de tempo discreto (Sec. IV), será apresentado também o principio da separação para a resolução do problema do filtro de Kalman.

Ao fim será apresentado as conclusões (Sec. V) obtidas com o trabalho desenvolvido.

II. FILTRO DE KALMAN

A. História

Em 1960 Rudolph Emil Kalman publicou um famoso artigo [?] descrevendo um processo recursivo para solucionar problemas lineares relacionados à filtragem de dados discretos. Sua pesquisa proporcionou contribuições relevantes ajudando a estabelecer bases teóricas sólidas em várias áreas da engenharia de sistemas. Em 1960-1961 Kalman desenvolveu, com colaboração de Richard S. Bucy, a versão em tempo contínuo do filtro de Kalman, que se tornou conhecida como o filtro de Kalman-Bucy [?]. Com o avanço computacional, o filtro de Kalman e suas extensões a problemas não lineares representam o produto mais largamente utilizado dentro da moderna teoria de controle.

B. O Filtro

O filtro de Kalman assume que a função densidade de probabilidade em cada instante de tempo segue uma distribuição Gaussiana. Este filtro permite a estimativa do estado de um sistema de forma a minimizar o quadrado da média do erro [?], tratando-se de uma solução ótima para o seguimento, caso sejam satisfeitas algumas restrições: se o ruído tiver uma distribuição Gaussiana de parâmetros conhecidos e se a transição de estados representada pelo modelo do sistema for linear [?] [?].

O Filtro de Kalman é bastante poderoso e versátil em diversos aspectos: ele suporta estimações do passado, presente

e até mesmo futuros estados do sistema, mesmo quando o modelo do sistema não é totalmente conhecido. [?]

1) *Filtro de Kalman Discreto*: O Filtro de Kalman foi altamente difundido por sua robustez e facilidade de implementação do algoritmo proposto. Desta forma sistemas computacionais podem, de forma bem eficiente, utilizar o filtro e expandir a sua utilização.

O processo a ser estimado é o descrito em (1) com $x \in \mathbb{R}^n$ e com a saída mensurável descrita por (2) onde $z \in \mathbb{R}^m$.

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \quad (1)$$

$$z_k = Hx_k + \nu_k \quad (2)$$

As origens computacionais do filtro:

Define-se $\hat{x}_k^- \in \mathbb{R}^n$ como sendo o estado *a priori* estimado para um k definido, bastando para isso o conhecimento do estado anterior. Chama-se $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ como sendo o estado *a posteriori*. Pode-se definir estados pelas equações abaixo:

$$\begin{aligned} e_k^- &\equiv x_k - \hat{x}_k^- \\ e & \\ e_k &\equiv x_k - \hat{x}_k \end{aligned}$$

Na Equação (3) observa-se que o estado *posteriori* é uma combinação linear do estado *priori* com um balanceamento entre a atual medida z_k e a predição $H\hat{x}_k^-$.

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (3)$$

O ganho K é escolhido a fim de minimizar o erro da covariância do estado *posteriori*. Um dos possíveis valores que minimiza este critério pode ser observado em (4).

$$K_k = P_k^- H' (HP_k^- H' + R)^{-1} \quad (4)$$

C. Algoritmo

O filtro de Kalman utiliza realimentação para estimar os valores dos estados: Ele estima o estado do processo em um determinado tempo e então obtém a realimentação o valor medido (podendo haver ruído). Desta forma o filtro pode ser dividido em duas partes principais: Equações de tempo e equações de medida. As equações de tempo tem como finalidade a projeção (em questões de tempo) o estado atual e a covariância para obter a *priori* estimativa para o próximo passo. As equações de medida são responsáveis pela realimentação, adicionando algumas medidas ao estado *a priori* para obter um estado *a posteriori* mais acurado. Este procedimento pode ser observado na Figura (1).

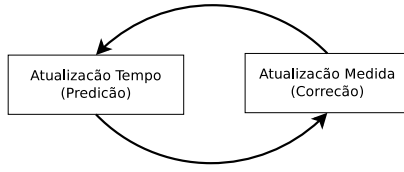


Figura 1. Ciclo de funcionamento do filtro de Kalman. [?]

Nas Equações (5) e (6) podem ser observadas as equações referentes a etapa de Time Update e as equações de Measurement Update são apresentadas em (4), (3) e (7).

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \quad (5)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A' + Q \quad (6)$$

$$P_k = (I - K_k H)P_k^- \quad (7)$$

Na atual implementação do filtro a medida da covariância do ruído (R) é algo factível na prática pois é necessário medir o processo de qualquer forma. Desta forma algumas medidas off-line são necessárias para se conhecer esta covariância do ruído.

A determinação do ruído de covariância do processo (Q) é geralmente mais difícil de ser estimado, já que usualmente não temos a possibilidade de observar todo o sistema. Em alguns casos uma estimativa pobre para esta variável pode trazer resultados satisfatórios.

Independentemente de ser possível a medida apurada para ambas as variáveis, é possível que seja feito uma sintonia para estas variáveis utilizando outro filtro de Kalman para tanto. Esta etapa que normalmente é feita off-line é chamada de Identificação do sistema (*System Identification*).

D. Extended Kalman Filter - EKF

O filtro de Kalman descrito até aqui faz referência a uma estimativa do estado $x \in \mathbb{R}^n$ de tempo discreto regida por uma equação diferencial estocástica *linear*. No caso desta linearidade não ser verdadeira, é uma das mais interessantes aplicações do filtro. Neste caso, conhecido como *Filtro de Kalman Estendido - EKF*.

Utilizando a série de Taylor é possível linearizar em torno de um ponto de operação, por meio de derivadas parciais uma função não linear.

Assume-se que o sistema é regido por uma equação não linear (8).

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) \quad (8)$$

$$z_k = h(x_k, \nu_k) \quad (9)$$

Na prática não há necessidade de se saber os valores de w_k e ν_k em cada amostra. Pode-se aproximar estas equações sem este valor:

$$\hat{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0)$$

$$\tilde{z}_k = h(\tilde{x}_k, 0)$$

Onde \hat{x}_k pode ser definido pela equação (10), que é uma aproximação *a posteriori* do estado, baseado na amostra anterior.

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K(z_k - \tilde{z}_k) \quad (10)$$

A lista completa de equações para o Filtro de Kalman Estendido é apresentada nas equações (11) e (12) para a etapa de time update e as equações (13) e (14) (15) para a etapa de measurement update.

$$\hat{x}_K^- = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) \quad (11)$$

$$P_k^- = A_k P_{k-1} A_k' + W_k Q_{k-1} W_k' \quad (12)$$

$$K_k = P_k^- H_k' (H_k P_k^- H_k' + V_k R_k V_k')^{-1} \quad (13)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - h(\hat{x}_k^-, 0)) \quad (14)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- \quad (15)$$

Onde H_k e V_k são as matrizes jacobianas das medidas na iteração k .

E. Propriedade da Separação - LQG e LQR

Princípio da separação: O problema de LQG ótimo pode ser resolvido separadamente resolvendo-se o problema de estimativa ótima e o problema de controle determinístico da certeza equivalente. [?]

O princípio da separação demonstra que o problema de LQG pode ser reduzido para a solução de duas equações de Riccati desacopladas (16) e (17). O compensador neste caso é dinâmico e de ordem igual a ordem da planta original.

$$0 = AS + SA' + \Xi - SC'\Theta^{-1}CS \quad (16)$$

$$0 = A'P + PA + Q - PBR^{-1}B'P \quad (17)$$

O controlador final do LQG pode ser realizado de duas maneiras: Uma delas é separadamente implementar um filtro de Kalman-Bucy [?], gerando \hat{x} e multiplicando a saída do filtro de Kalman-Bucy por $-k_c$ para gerar a entrada do controlador $u = -k_c \hat{x}$. Esta realização é conhecida como *realização de estimação*. Na Figura (2) observa-se esta realização. Esta abordagem tem a vantagem de ter um compensador sempre estável pois o filtro de Kaman-Bucy é sempre estável. A desvantagem no entanto é de ser necessário a medida da entrada do controlador u . [?]

Uma outra maneira de realizar este compensador é calculando uma matriz de realimentação equivalente dita $F(s)$ a partir da saída y para a entrada u . Esta realização é conhecida

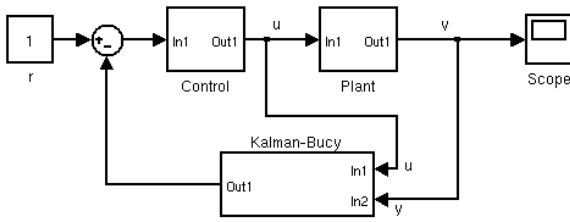


Figura 2. Realização de estimação por realimentação

como *Realização em cascata*. Na Figura (3) é possível observar a estrutura desta realização. Se $u = -K_c \hat{x}$ for substituído em (18) obtemos (19).

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - C\hat{x}) \quad (18)$$

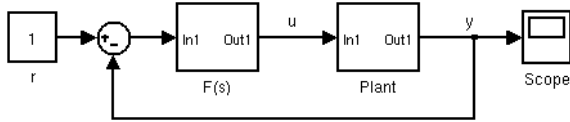


Figura 3. Realização em cascata

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = (A - BK_c - K_f C)\hat{x} + K_f y \quad (19)$$

A função de transferência de y para $-u$ pode ser escrita como:

$$F(s) = K_c(sI - A + BK_c + K_f C)^{-1} K_f$$

Por conveniência a função transferência na forma

$$F(s) = C_f(sI - A_f)^{-1} B_f + D_f$$

É escrita:

$$F(s) \equiv \begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix}$$

O espaço d estado da realização em cascata pode ser escrito como:

$$F(s) \equiv \begin{bmatrix} A - BK_c - K_f C & K_f \\ K_c & 0 \end{bmatrix}$$

Enquanto que $(A - BK_c)$ e $(A - K_f C)$ são ambas matrizes estáveis, a matriz $(A - BK_c - K_f C)$ não é necessariamente estável, então para alguns tipos de problemas, mesmo com uma planta estável, a realização em cascata irá requerer um compensador instável. Esta é a desvantagem da realização em cascata. [?]

O valor da medida de performance mínimo é calculado por:

$$V^* = tr \{PK_f \Theta K_f'\} + \{SQ\}$$

Onde $K_f = SC'\Theta^{-1}$ e P satisfaz a Equação (17) e S satisfaz a Equação (16).

III. APLICAÇÕES PRATICAS

O filtro de Kalman tem uma longa aplicabilidade. Diversas atividades usam ou ate mesmo dependem dele para seu funcionamento. Abaixo algumas destas aplicações:

- Heading Reference Systems
- Piloto automático
- estimativa de estado de carga de baterias (SoC)
- interface cérebro - computador
- Sinais Caóticos
- Posicionamento dinâmico
- Economia, em particular macroeconomia, series temporais e econometria
- sistema de orientação por inercia
- Radar tracker
- sistemas de navegação por satélite
- Localização e mapeamento simultâneos
- Previsão do tempo
- Sistemas de Navegação
- Modelagem 3D
- Visão computacional
- Robótica móvel

Nesta sessão faremos uma pequena introdução no que diz respeito a dois destes itens e uma ideia de como o filtro de Kalman a utilizado. Os tópicos abordados serão: Visão computacional (III-A) e Robótica móvel (III-B).

A. Visão computacional

Sistemas de visão para localização utilizando filtros de Kalman encontram um ponto de aplicação bem vasto no quesito de movimentação de robôs em ambientes variados e dinâmicos. Existem pesquisas nesta área ([?]) para Robôs moveis autônomos (autonomous mobile robot -AMR) em ambientes dinâmicos e incertos. Primeiramente para obter uma força repulsiva aos obstáculos, sonares são utilizados para determinar o posicionamento dos obstáculos. O Filtro de Kalman a utilizado para eliminar ruido destes sonares alam do ruido ambiente onde o robô esta imerso.

Devido aos distúrbios do ambiente, os sinais do sonar são normalmente instável. Para eliminar os distúrbios e ruídos do ambiente é utilizado um filtro de Kalman com as seguintes vantagens principais:

- Sinais de erro de mínimos quadráticos de estimação são obtidos usando computação recursivo, desta forma é rápido e conveniente para processamento de tempo-real.
- Um filtro de Kalman estável é utilizado para processar sinais instáveis. Desta forma o método pode aceitar estes dados dos sonares e garantir uma baixa taxa de ruido. [?]

B. Robótica Móvel

Um Robô móvel pode ser compreendido como robôs que podem movimentar-se autonomamente no solo ou no espaço. Um robô a um manipulador multifuncional reprogramável projetado para movimentar materiais, ferramentas ou dispositivos especiais seguindo movimentos programados variáveis, tendo por objetivo a realização de tarefas variadas

Para a simulação do robô podemos considerar o sistema (20). [?]

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t)\cos(\theta(t)) \\ v(t)\sin(\theta(t)) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \quad (20)$$

Que pode ser melhor entendido pela Figura (4).

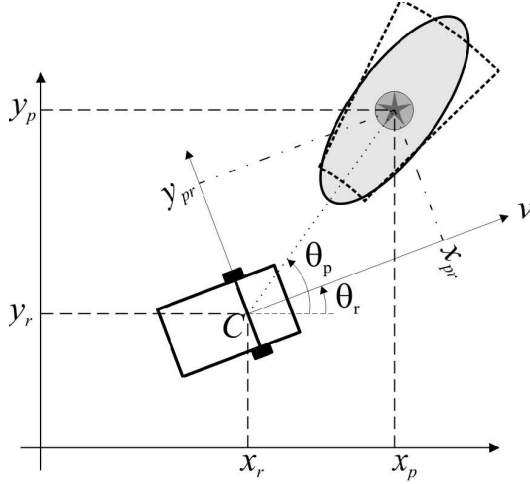


Figura 4. Representação gráfica do estado do Robô. [?]

Sendo o modelo da cinemática do Robot dado pela equação (20) e considerando-se que os sinais de controle são constantes entre cada instante de amostragem, podemos escrever a equação de propagação do estado como:

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(X(t), u(t_k), t), t \in [t_k, t_k + 1]$$

Sendo $u(t) = [v(t) \ \omega(t)]'$

Desta maneira a possível iniciar o algoritmo do filtro de Kalman. Maiores detalhes podem ser obtidos em [?].

IV. LQR E LQG EM TEMPO DISCRETO

A. LQR para sistemas de tempo discreto

Para o problema de LQR discreto iremos considerar o valor que o controlador provê um valor constante entre duas amostras de tempo (*Zero-order Hold*). E o sistema pode ser considerado como em (21). [?]

$$\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u \quad (21)$$

Usaremos T como o período de amostragem (tempo em que o valor na saída do controlador é mantido constante) e k é um inteiro onde kT será o tempo em que o valor contínuo será amostrado.

O objetivo do controle discreto é que seja gerada uma entrada u_k tal que o sistema em tempo contínuo seja minimizado pela performance em (22).

$$V = \int_t^{t_f} (x' \tilde{Q}x + u' \tilde{R}u) d\tau + x'(t_f) S x(t_f) \quad (22)$$

Temos que:

$$x(t) = \Phi(t, kT)x_k + \int_{kT}^t \Phi(t, \tau) \tilde{B}u_k d\tau, \quad kT \leq t \leq (k+1)T \quad (23)$$

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \quad (24)$$

Onde:

$$A_k = \Phi((k+1)T, kT)$$

$$B_k = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1), \tau) \tilde{B} d\tau$$

A partir de (22) temos (25).

$$\int_{kT}^{(k+1)T} (x' \tilde{Q}x + u' \tilde{R}u) d\tau = x'_k Q_k x_k + 2u'_k M_k x_k + u'_k R_k u_k \quad (25)$$

Onde:

$$Q_k = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi'(\tau, kT) \tilde{Q} \Phi(\tau, kT) d\tau$$

$$M_k = \int_{kT}^{(k+1)T} H'_k(\tau) \tilde{Q} \Phi(\tau, kT) d\tau$$

$$R_k = \int_{kT}^{(k+1)T} [\tilde{R} + H'_k(\tau) \tilde{Q} H_k(\tau)] d\tau$$

$$H_k = \int_{kT}^{\tau} \Phi(\tau, \alpha) \tilde{B} d\alpha$$

Podemos então re escrever a performance quadrática dada em (22) por (26).

$$V(x_i, i) = \sum_{k=i}^{N-1} l(x_k, u_k, k) + x'_N S x_N \quad (26)$$

Onde $t_f = NT$ e:

$$l(x, u, k) = x' Q_k x + 2u' M_k x + u' R_k u$$

1) *Otimização LQR de tempo discreto:* Baseado em (26) e a dinâmica descrita em (24, e utilizando o princípio da otimalidade temos que o valor ótimo para o estado x_N é dado por (27). [?]

$$V^*(x_N, N) = x'_N S x_N \quad (27)$$

O problema a ser minimizado é o apresentado abaixo:

$$\begin{aligned} x'_i P_i x_i &= \min_{u_i} [x'_i Q_i x_i + 2u'_i M_i x_i + u'_i R_i u_i \\ &\quad + (Ax_i + Bu_i)' P_{i+1} (Ax_i + Bu_i)] \end{aligned}$$

Dizemos que o valor de u_i que coloca o sistema no ponto de valor ótimo é $u_i^* = -K_i x_i$, onde:

$$K_i = (R + B' P_{i+1} A)^{-1} (B' P_{i+1} A + M) \quad (28)$$

Obtemos então a solução da equação de Riccati para tempo discreto:

$$P_i = \frac{(Q + A'P_{i+1}A)}{-(M + B'P_{i+1}A)'(R + B'P_{i+1}B)^{-1}(M + B'P_{i+1}A)} \quad (29)$$

Onde $P_N = S$. [?]

V. CONCLUSÕES

Foi apresentado neste trabalho uma breve descrição do funcionamento do Filtro de Kalman, suas inúmeras aplicações nas mais diversas atividades e ramos da engenharia moderna. Apresentou-se o diferencial da utilização do filtro devido a sua robustez para implementação no que diz respeito ao mundo digital e sua robustez quando existe ruído ou incerteza na planta em questão.

Apresentou-se também o problema de LQR para tempo discreto, sua modelagem e a realização do filtro de kalman pelo princípio da separação, onde a modelagem do filtro pode ser entendida/resolvida pela resolução de um problema de LQR e outro de LQG.

Apresentou-se também dois tipos principais para a realização do filtro de kalman: realização por estimação (2) e a realização em cascata (3).

Com estes pontos apresentados aqui e com a grande aplicabilidade dos filtros de kalman em problemas comuns da engenharia, observamos que este aparato tem grande importância e suas aplicações (III) não se restringem às apresentadas neste trabalho.