Primeira Lista de Geometria Analítica e Álgebra Linear - 20/01/2020

Nome:____

Nome:____

1. Mostre que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são subespaços vetoriais.

a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y - z = 0\}$

b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = y \text{ e } z = 0\}$

2. Verifique que os subconjuntos abaixo são subespaços de $M_2(\mathbb{R})$.

a) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ b = c \right\}$

b) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ b = c + 1 \right\}$

3. Considere o subespaço $S = [(1, 1, -2, 4), (1, 1, -1, 2), (1, 4, -4, 8)]$ de $\mathbb{R}^4$.

a) O vetor $(\frac{2}{3}, 1, -1, 2)$ pertence a S?

b) O vetor $(0, 0, 1, 1)$ pertence a S?

4. Seja W o subespaço de $M_2(\mathbb{R})$ definido por

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & a + 2b \\ 0 & a - b \end{bmatrix};\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

a) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W$? **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in W$?

5. Verifique que

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de $M_2(\mathbb{R})$.

6. Quais são as coordenadas de $v = (1, 0, 0)$ em relação à base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$?

7. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, -1, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$. $[v_1, v_2, v_3] = \mathbb{R}^3$?

8. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $(1, 0, 0)$ e W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$. Mostre que

a) $U + W = \mathbb{R}^3$ **b)** $U \cap W = \{(0,0,0)\}$

9. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(-1,1),(1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$.

a) Determine as matrizes de mudança de base $[I]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ e $[I]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$.

b) Quais são as coordenadas do vetor $v = (3,-2)$ em relação às bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$?

c) As coordenadas de um vetor v em relação à base $\mathcal{B}_2$ são dadas por

$$[v]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quais são as coordenadas de v em relação à base $\mathcal{B}_1$?

10. Sejam $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};\ a = d \text{ e } b = c \right\}$ e $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};\ a = c \text{ e } b = d \right\}$ subespaços de $M_2(\mathbb{R})$. Determine $W_1 \cap W_2$ e exiba uma base.

11. Mostre que as funções abaixo são transformações lineares

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+y, x-y)$.

b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y,z) = (x+z, 2x-y+z)$.

12. Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0,0) = (2,0)$, $T(0,1,0) = (1,1)$ e $T(0,0,1) = (0,-1)$.

13. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que é uma reflexão em torno da reta $y = x$. Em seguida, escreva-a em sua forma matricial.

14. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ache os vetores u e v tais que $T(u) = u$ e $T(v) = -v$.

15. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (z, x-y, -z)$.

a) Encontre a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$.

b) Determine uma base do núcleo de T.

c) Dê a dimensão da imagem de T. (Dica: use o Teorema do Núcleo e da Imagem).

d) T é sobrejetora? Justifique.

16. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Encontre $\ker(T)$, $\operatorname{Im}(T)$ e determine uma base para estes espaços.

17. Dado o isomorfismo $T(x, y) = (x + 2y, y)$, exiba a matriz de T^{-1} em relação à base canônica.

18. Existe uma transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cujo núcleo tem base $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$? Justifique sua resposta.

19 Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0, 0) = (3, 0, 1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (-1, 2, 0)$. T é um isomorfismo? Justifique sua resposta.

20. Determine os autovalores e os autovetores da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + y, x + y)$.

21 Dê um exemplo de transformação linear $T : R^2 \to \mathbb{R}^2$ que não é nem injetora e nem sobrejetora. Mostre que T realmente satisfaz essas propriedades.

22 Considere V e W espaços vetoriais. Diga se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Se for falsa, apresente um contra-exemplo e se for verdadeira, justifique sua resposta.

a) Se $u, v \in V$ são tais que $au + bv = 0$, onde $a = b = 0$, então u e v são linearmente independente.

b) Toda transformação linear $T : V \to W$ satisfaz $T(0) = 0$.

c) Se $T : V \to W$ é uma função tal que $T(0) = 0$, então T é linear.

d) Existe uma transformação linear bijetora $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.