3(A)Lista de Exercícios Álgebra Linear

Produto Interno

1) Sejam os vetores $v_1 = (x_1, y_1)$ $v_2 = (x_2, y_2)$ de $V = \Re^2$. Verificar quais das funções $f : VxV \to \Re$, definidas abaixo, são produtos interno em V

a) $f(v_1, v_2) = 2x_1x_2 + 3y_1y_2$

b) $f(v_1, v_2) = x_1^2x_2 + y_1y_2^2$

c) $f(v_1, v_2) = 3x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3y_1y_2$

2) Sejam $V = \Re^3$ e os vetores $u = (x_1y_1, z_1)$ e $v = (x_2y_2, z_2)$. Verificar quais das seguintes funções são produtos interno sobre o $\Re^3$. (Para aquelas que não são produtos internos, citar os axiomas que não se verificam).

a) $u.v = x_1x_2 + 3y_1y_2$

b) $u.v = 3x_1x_2 + 5y_1y_2 + 2z_1z_2$

3) Consideremos o seguinte produto interno em $P_2 : p.q = a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$ sendo $p = a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $q = b_2x^2 + b_1x + b_0$. Dados os vetores $p_1 = x^2 - 2x + 3$ $p_2 = 3x - 4$ $p_3 = 1 - x^2$.

a) $p_1p_2 =$ -18

b) $|p_1|$ e $|p_3|$ $\sqrt{14}$ $\sqrt{2}$

c) $|p_1 + p_2|$ $\sqrt{3}$

d) $\frac{p_2}{|p_2|}$ $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$

e) ângulo entre p_2 e p_3 $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$

4) Se $u = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ são matrizes quaisquer de M(2,2) a seguinte fórmula define um produto interno nesse espaço: $u.v = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$. Dados os vetores $u = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Determine:

a) $|u + v|$

$\sqrt{21}$

b) o ângulo entre u e v

$\theta = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{42}}\right)$

5) Verificar a desigualdade de Cauchy quando se tem u = (2,-1) e v = (-2,-4) e o produto interno $u.v = 2x_1x_2 + 5y_1y_2$

6) No espaço $V = P_2$ consideremos o produto interno $f.g = \int_0^1 f(t).g(t).dt$ em que

$f(t) = t^2 - 2t$ e $g(t) = t + 3$. Determine:

a) $f.g$ $-\frac{29}{12}$ b) $|f|$ $\sqrt{\frac{8}{15}}$

7) Seja a função $f : \Re^2 x\Re^2 \rightarrow M_{11}(\Re)$

$$f((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \rightarrow [x_1,y_1]\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$$

a) Calcular a norma do vetor (1,3) 5

b) Um vetor unitário a partir de (1,3) $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$

c) Um vetor ortogonal a (1,3)

$t(-7,4)$

8) Consideremos o R^3, o produto interno usual. Para que valores de m os vetores u e v são ortogonais?

a) $u = (3m,2,-m)$ e $v = (-4,1,5)$ $\frac{2}{17}$

b) $u = (0,m-1,4)$ e $v = (5,m-1,-1)$ $\pm\sqrt{3}$

9) Seja $V = R^3$ com o produto interno usual. Determinar um vetor $u \in \Re^3$ ortogonal aos vetores $v_1 = (1,1,2)$ $v_2 = (5,1,3)$ $v_3 = (2,-2,-3)$ $u = a(1,7,-4)\ a \in \mathbb{R}$

10) Determinar o vetor (a,b,c) para que o conjunto $B = \{(1,-3,2),(2,2,2),(a,b,c)\}$ seja uma base ortogonal do $\Re^3$ em relação ao produto interno usual. Construir a partir de B uma base ortonormal. $t(-5,1,4)\ t \neq 0$

11) Sejam $V = \Re^3$, munido do produto interno usual e $A = \{(1,-1,-2)\} \subset V$. Encontrar uma base ortogonal B de V tal que $A \subset B$

$\{(1,-1,-2),(1,1,0),(-1,1,-1)\}$ é uma delas.

12) Seja P_1 o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 1. Definimos o produto interno entre dois vetores p e q de P_1, como segue: $p.q = 2ac + ad + bc + 2bd$, sendo

$$\begin{cases} p(t) = at + b \\ q(t) = ct + d \end{cases}$$

a) Calcular o ângulo entre $t-1$ e 3t $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

b) Encontrar um vetor $r(t)$ ortogonal ao vetor $t-1$

$t + 1$ (é uma das soluções)

13) O conjunto $B = \{(2,-1),(k,1)\}$ é uma base ortogonal do $\Re^2$ em relação a produto interno: $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$. Determinar o valor de k e obter, a partir de B, uma base ortonormal. $k = -\frac{1}{3}$ $\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)\right\}$

14) Ortogonalize a base $V = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$ usando o processo de Gram-Schimidt

15) O conjunto $B = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ é uma base ortonormal do $\Re^2$ com o produto interno usual. Determinar o vetor coordenada de $v = (2,4)$ em relação a base B.

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

16) Em relação ao produto interno usual, determinar uma base ortonormal dos seguintes subespaços:

a) $S = \{(x, y, z) \in \Re^3; y - 2z = 0\}$ $\left\{(1,0,0), \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}$

b) $R = \{(x, y, z) \in \Re^3; x + y + z = 0\}$ $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$

17) Seja $\Re^3$ com o produto interno usual e $B = \{(1,2,-3),(2,-4,2)\}$. Determinar:

a) O subespaço S gerado por B $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$

b) O subespaço $S^{\perp}$ $S^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$

18) Seja $V = R^3$ munido do produto interno usual. Dado o subespaço: $S = \{(x, y, z) \in R^3 / x - 2y + 3z = 0\}$. Determine $S^{\perp}$