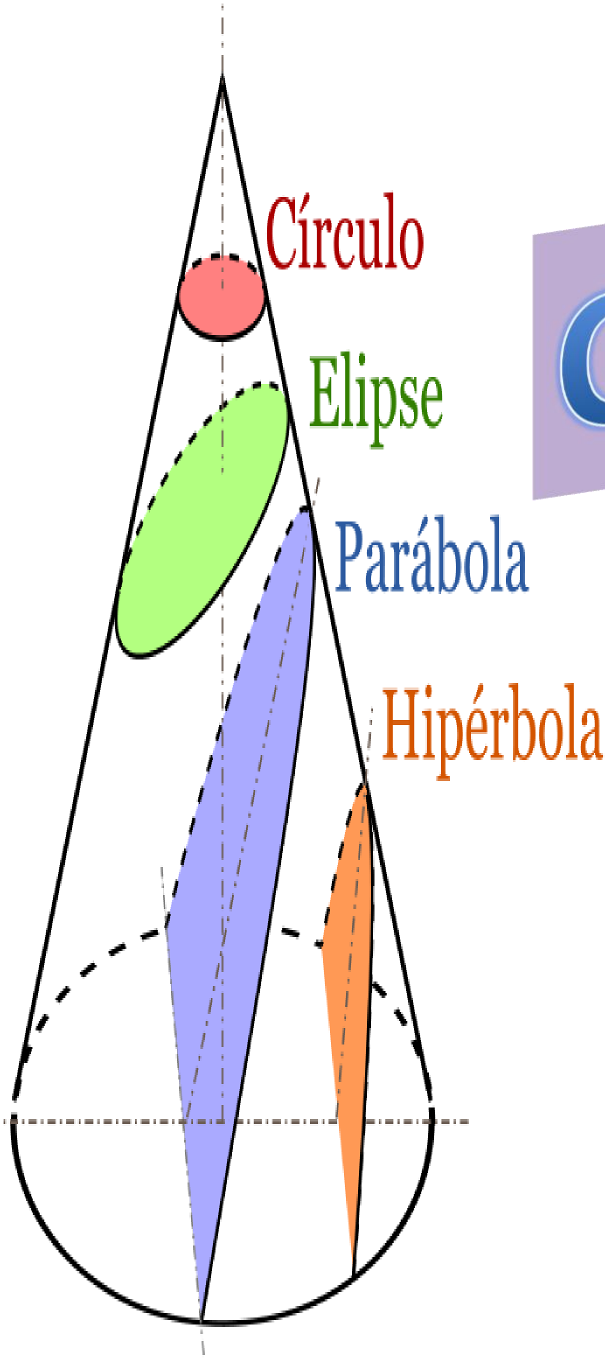
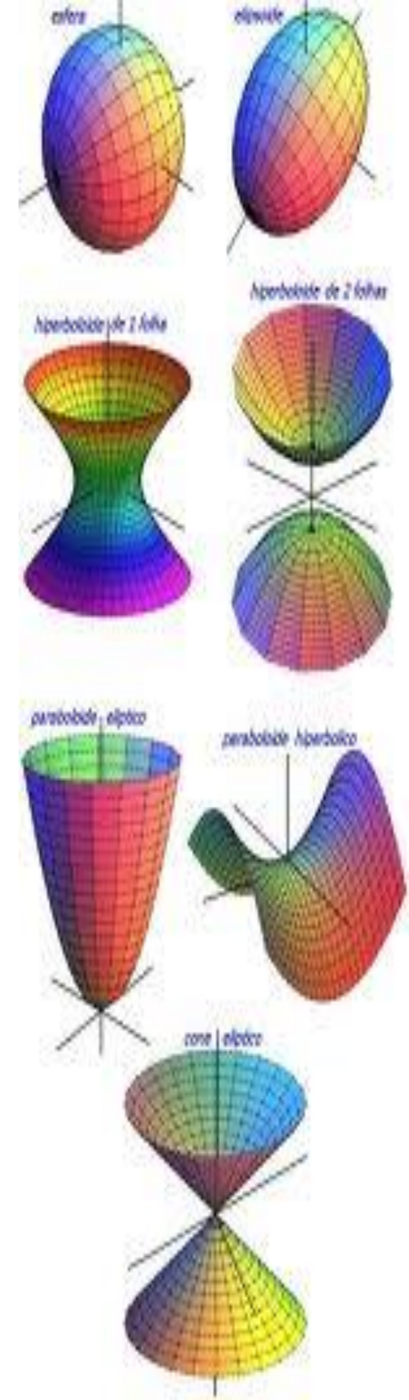
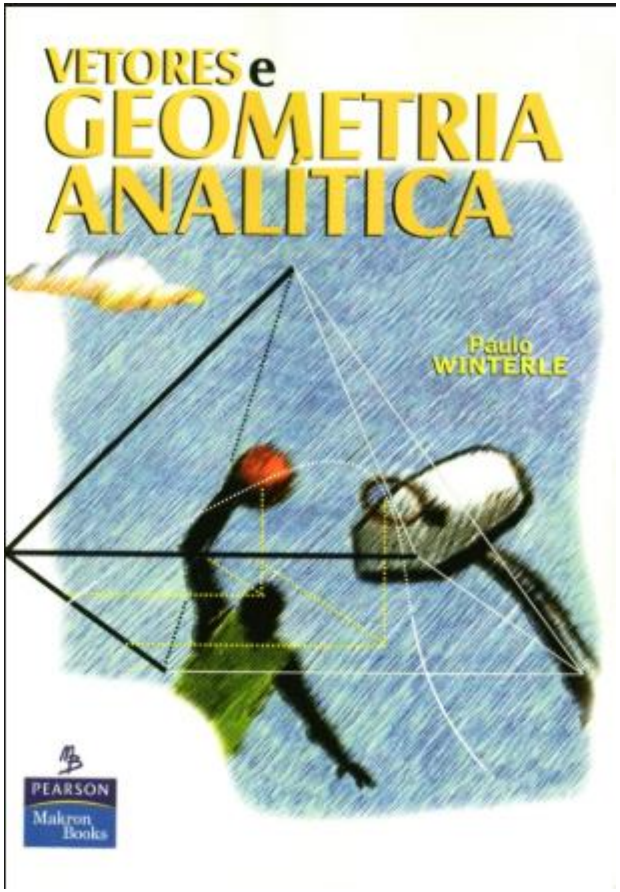


Cônicas

Quádricas



Livros



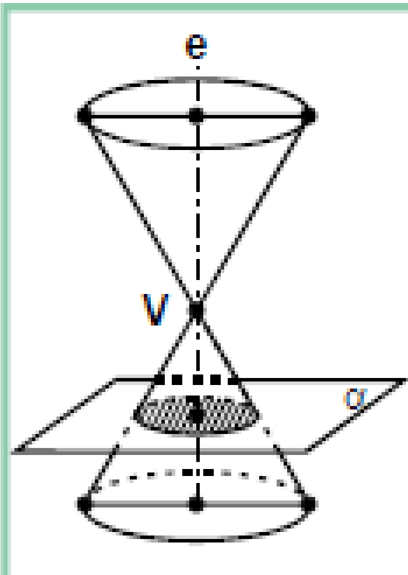
Jacir Venturini

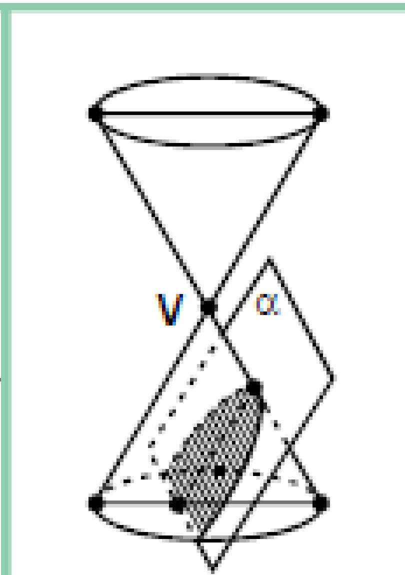
Paulo Winterle

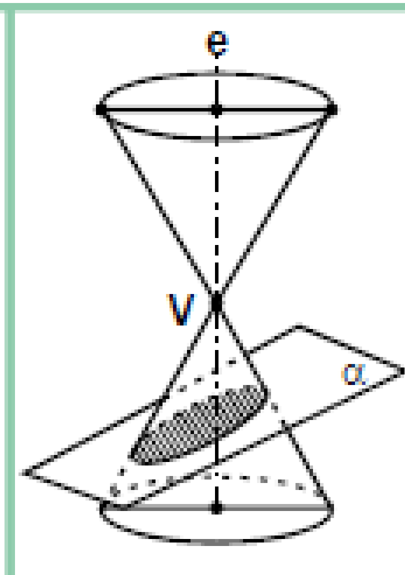
Cônicas

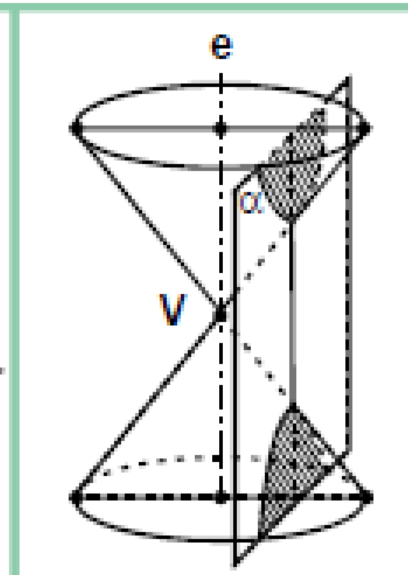
Apolônio (260-200 a.C)

- Consideremos um cone circular reto de duas folhas, de vértice V e eixo (e). Qualquer reta que passa pelo vértice e está sobre a superfície cônica chama-se geratriz (g).
- A palavra cônica (ou seção) cônica procede do fato que tal curva é obtida por meio do corte de um plano α sobre o cone circular reto.
- Quando o plano α for secante ao cone e não contiver o vértice, temos as seguintes cônicas:









Circunferência: quando o plano α for perpendicular ao eixo (e) do cone.	**Parábola:** quando o plano α for paralelo a uma geratriz do cone.	**Elipse:** quando o plano α for oblíquo ao eixo e não paralelo a uma geratriz. O plano corta apenas uma das folhas do cone.	**Hipérbole:** quando o plano α for paralelo ao eixo do cone.

Caso o plano passe pelo vértice temos uma cônica degenerada.

Chamamos de **cônica** ao conjunto de pontos do plano cujas coordenadas cartesianas satisfazem uma equação do 2.º grau com duas variáveis:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Esta equação se diz completa quando todos os coeficientes A, B, C, D, E, F são não nulos. Destarte, a equação contém:

- três termos do 2.º grau: Ax^2, Bxy e Cy^2;
- dois termos do 1.º grau: Dx e Ey;
- umtermo independente: F.

Detêmo-nos no termo **Bxy**:

I) Se $B \neq 0$, o eixo focal da cônica é oblíquo aos eixos cartesianos. Para que a equação fique desprovida do termo em xy faz-se mister que se aplique uma rotação de eixos de amplitude θ.

II) Se $B = 0$, a equação do 2.º grau se reduz à forma:

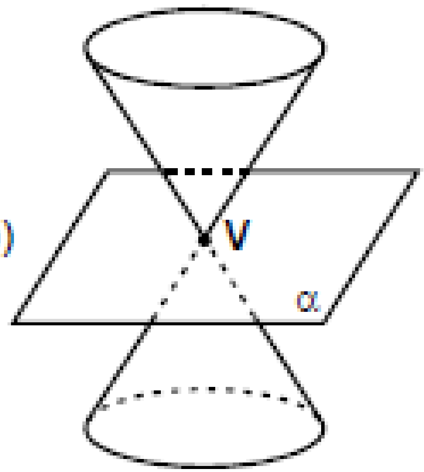
$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

O eixo focal da cônica é paralelo aos eixos cartesianos. Efetuando uma translação de eixos obtemos o seu centro ou o seu vértice (para as cônicas não degeneradas).

Cônicas degeneradas

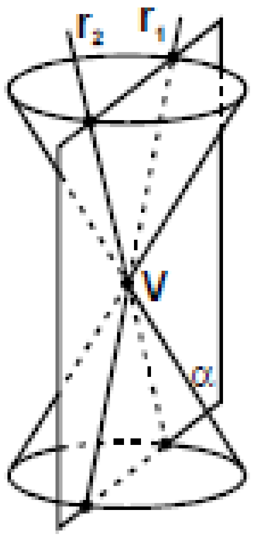
- **O PONTO:** quando o plano α tiver em comum com o cone apenas o vértice V. Trata-se de uma elipse degenerada.

(um ponto)

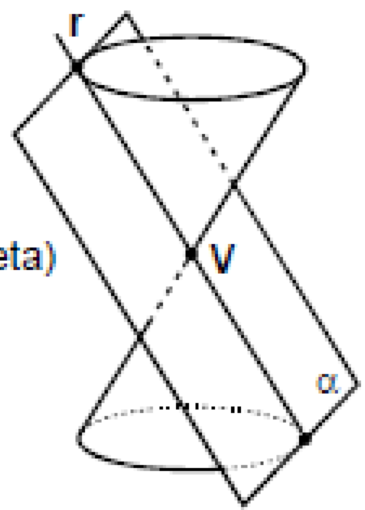


- **UM PAR DE RETAS CONCORRENTES:** quando o plano α contiver o vértice e duas geratrizes do cone. É uma hipérbole degenerada.

(r_1 e r_2: um par de retas concorrentes)

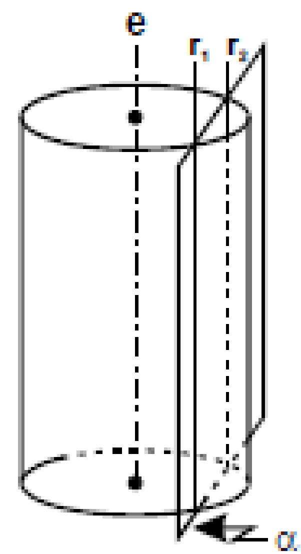


- **UMA RETA:** quando o plano contiver o vértice e uma geratriz do cone. O plano α tangencia o cone. Figura-se como parábola degenerada.



(r: uma reta)

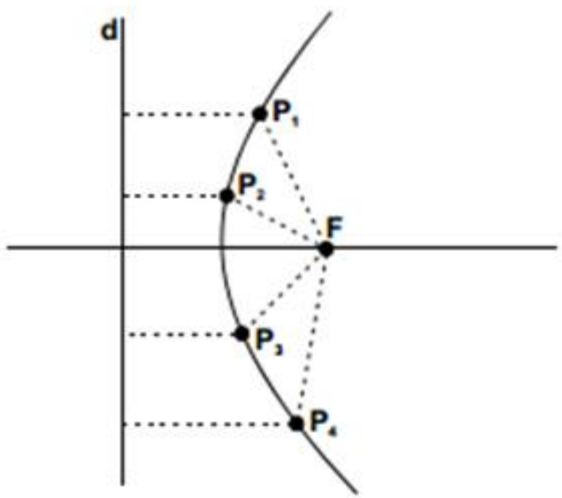
- **UM PAR DE RETAS PARALELAS:** num caso particular obter-se-á duas retas paralelas quando da interseção de uma **superfície cilíndrica circular** (considerada uma **superfície cônica de vértice impróprio**) por um plano α paralelo ao seu eixo.

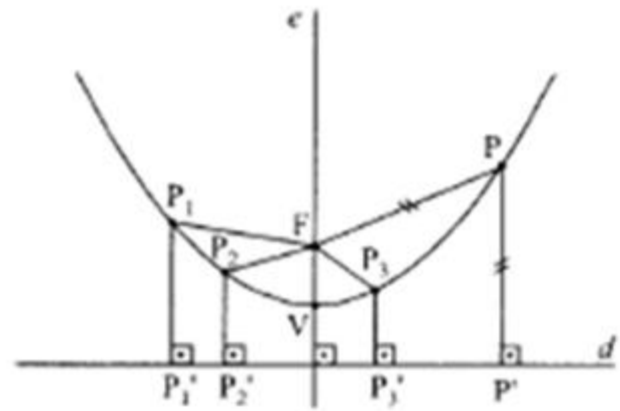


(r_1 e r_2: retas paralelas)

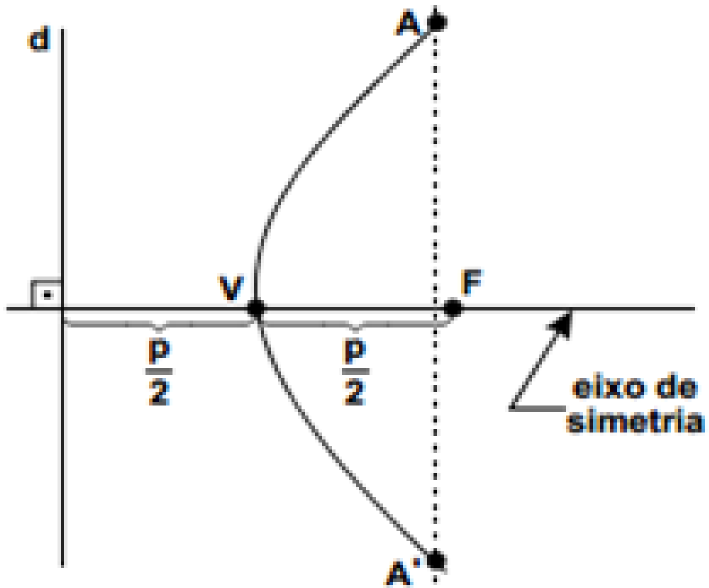
1 Parábola

Definição: Parábola é um conjunto de todos os pontos de um plano equidistante de um ponto fixo e de uma reta fixa desse plano.





Elementos da Parábola



Denominamos:

F: foco

d: diretriz

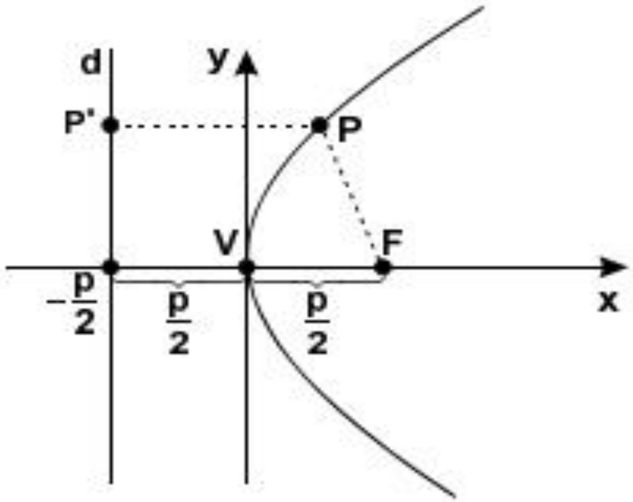
V: vértice

p: parâmetro, que representa a distância do foco à diretriz ($p \neq 0$).

reta VF: eixo de simetria da parábola.

Equações Canônicas ou Reduzidas da Parábola

a) O eixo de simetria coincide com o eixo x.



Na figura ao lado tem-se uma parábola de concavidade voltada para a direita representada no sistema cartesiano xOy. A diretriz tem equação $x = -\frac{p}{2}$.

Ademais:

$P = (x, y)$ é um ponto genérico da parábola.

$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ é o foco.

$P' = \left(-\frac{p}{2}, y\right)$ é o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre a diretriz.

Por definição :

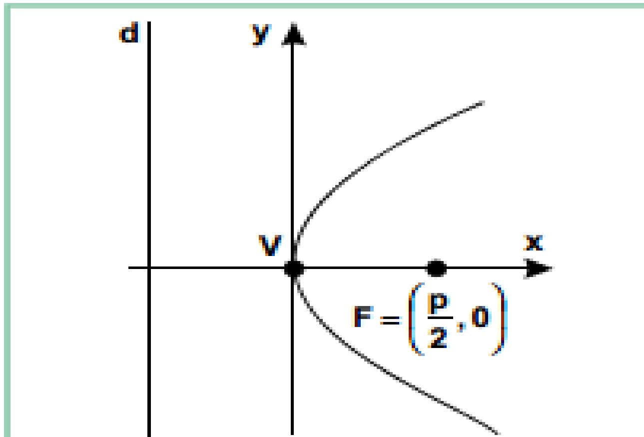
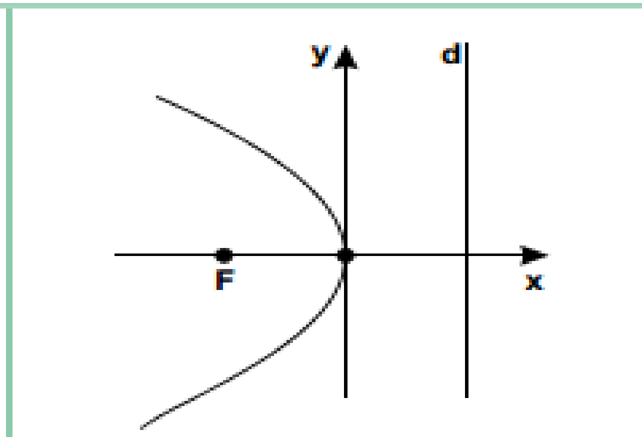
$d(P, F) = d(P, P')$

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2} = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}$$

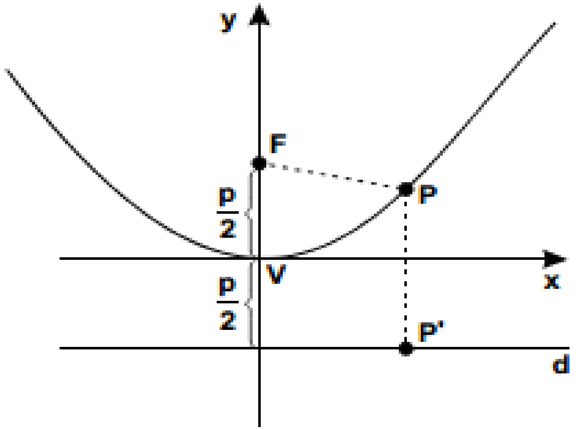
Elevando ambos os membros ao quadrado e desenvolvendo os produtos notáveis, temos:

$\cancel{x^2} - px + \cancel{\frac{p^2}{4}} + y^2 = \cancel{x^2} + px + \cancel{\frac{p^2}{4}}$ donde : $y^2 = 2px$ que representa a equação canônica (ou reduzida ou padrão) da parábola com vértice na origem e cujo eixo de simetria é o eixo x.

Na equação $y^2 = 2px$, observe que:

	
Se $p > 0$, a parábola tem concavidade voltada para a direita (voltada para a parte positiva do eixo x).	Se $p < 0$, a parábola tem concavidade voltada para a esquerda.

b) O eixo de simetria coincide com o eixo y.



A figura ao lado reproduz uma parábola de concavidade voltada para cima. A diretriz tem equação $y = -\frac{p}{2}$.

Ademais:

$P = (x, y)$

$F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$

$P' = \left(x, -\frac{p}{2}\right)$

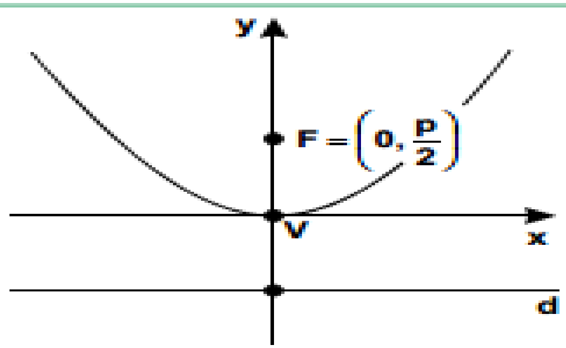
Por definição :

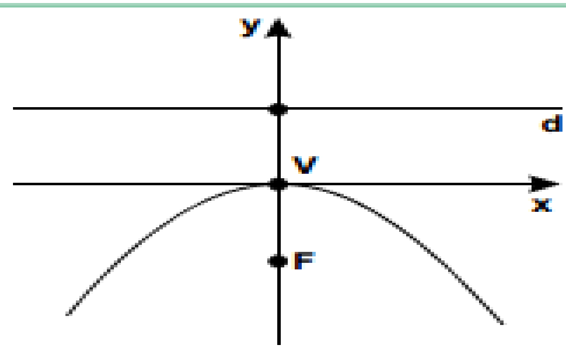
$d(P, F) = d(P, P')$

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$$

Efetuando: $x^2 = 2py$ que representa a equação canônica da parábola com vértice na origem e cujo eixo de simetria é o eixo y.

Na equação $x^2 = 2py$, observe que:

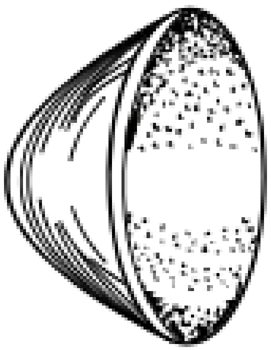




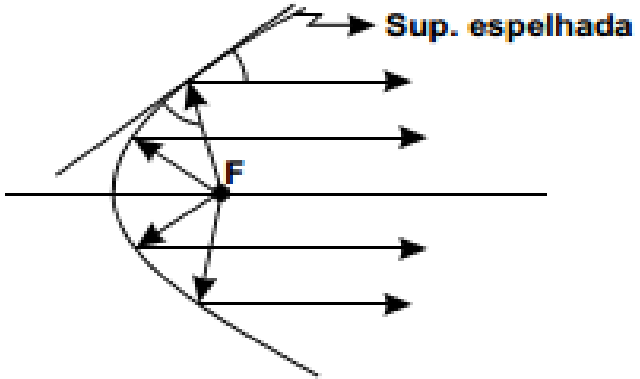
Se $p > 0$, o parábola tem concavidade voltada para cima (voltada para a parte positiva do eixo y).	Se $p < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Aplicações da Parábola

a) A secção de um farol de automóvel tem o formato de uma parábola (a superfície espelhada é um parabolóide). A lâmpada situada no foco, quando acesa, emite raios luminosos que após incidirem sobre a parábola serão refletidos numa mesma direção segundo retas paralelas ao eixo da parábola.



Farol de um automóvel

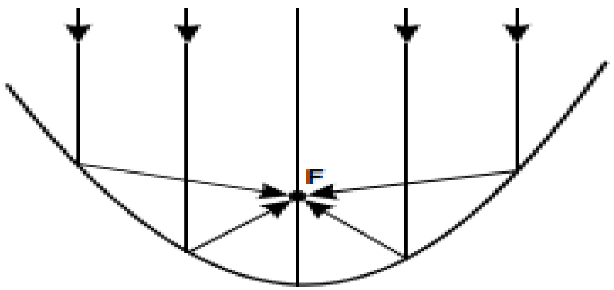


Secção de um farol

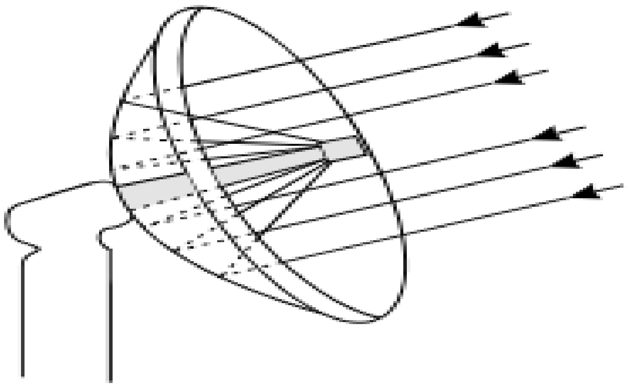
b) Se umespelho parabólico é apontado para o Sol, os raios de luz (paralelos ao eixo da parábola) serão refletidos para o mesmo ponto (foco). Pela grande quantidade de calor produzido nesta fonte, procede o nome <u>foco</u> (em latim *focus* significa **fogo**).

Aplica-se o mesmo princípio na construção de espelhos para

telescópios, antenas de radar e antenas parabólicas (as ondas paralelas ao eixo da parábola, se refletem na antena e confluem para o retransmissor).



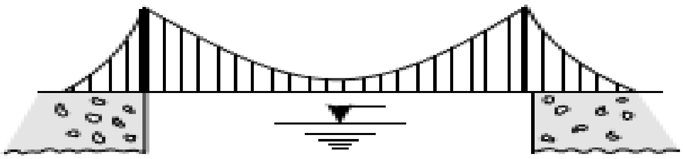
(espelho parabólico)



(antena parabólica)

c) o cabo principal de uma ponte pênsil assumiria a forma de uma parábola (desde que o cabo fosse perfeitamente flexível), se se negligenciasse a sua massa e se o peso da ponte estivesse uniformemente distribuídos ao longo de seu comprimento.

Na prática, sabemos que tais condições não se verificam. Na verdade os cabos assumem a forma de uma curva muito próxima de uma parábola. Tal curva quando sujeita apenas ao próprio peso se chama CATENÁRIA.



Fornos Solares

- *Fornos Solares* são constituídos por grandes espelhos parabólicos (existe um na França, com 54 m de comprimento e 40 m de altura constituído por 9500 espelhinhos de 45cm de lado).
- No foco do espelho atinge-se uma temperatura de 3800 ^{0}C , pois nele convergem os raios solares captados e refletidos pela sua superfície. Estas temperaturas são aproveitadas para conversões de energia, fusão, etc.

Forno Parabólico

- Normalmente, são discos côncavos que focam a luz na parte inferior de um recipiente. A vantagem é que os alimentos cozinham tão rapidamente como num forno convencional. A desvantagem é que eles são complicados de fazer.

- Um fogão parabólico feito de papelão pela Peru Children´s Trust.

Ponte suspensa.

Exemplo é o cabo de suspensão de uma ponte, quando o peso total é uniforme distribuído segundo o eixo horizontal da ponte, toma a forma de uma parábola

A foto retrata um monumento nos EUA da Segunda Guerra Mundial e foi criado em homenagem aos homens e mulheres que lutaram e morreram.

Exemplos:

1) Para cada uma das parábolas $x^2 = 8y$ e $x = -\frac{1}{2}y^2$. Construir o gráfico e encontrar o foco e uma equação da diretriz.

2) Faça um esboço do gráfico e encontre uma equação da parábola que satisfaça as condições:

a) vértice V(0,0) F(1,0)

b) vértice V(0,0) e diretriz $y = 3$

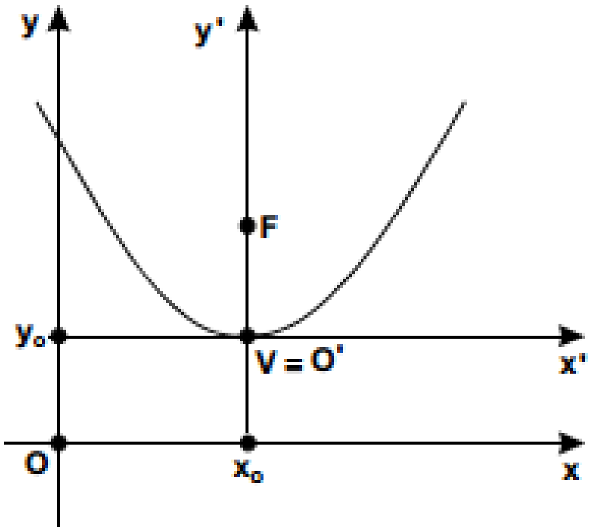
c) vértice V(0,0) passa pelo ponto P(-2,5) e concavidade voltada para cima

1.1 Translações de eixos

a) Eixo da parábola é paralelo ao eixo do y

Com origem no ponto V, o sistema $x'O'y'$ ($O' = V$). A parábola em relação a este sistema tem vértice na origem, portanto sua equação reduzida é $x'^2 = 2py'$

Como para todo ponto P da parábola temos $x' = x - h$ $y' = y - k$. Desta forma, temos a seguinte equação: $(x-h)^2 = 2p(y-k)$.

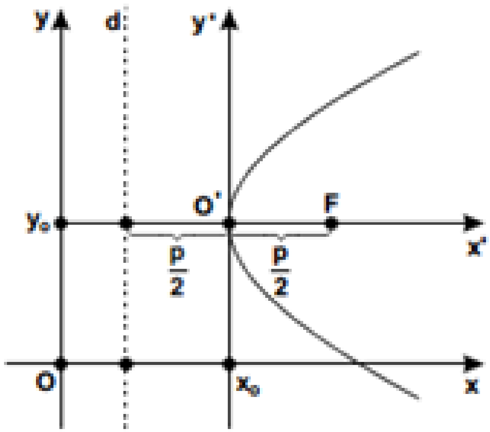


OBS: Se p > 0 a parábola está voltada para cima e p < 0 está voltada para baixo.

$$(x - x_0)^2 = 2p.(y - y_0)$$

b) O eixo da parábola é paralelo ao eixo do x.

Tem com equação $(y-k)^2 = 2p(x-h)$



OBS: Se p > 0 a parábola está voltada para direita e p < 0 está voltada para esquerda.

$$(y-y_0)^2 = 2p.(x-x_0)$$

Exemplos:

1) Dada a parábola de equação $y^2 + 6y - 8x + 17 = 0$ determinar:

a) Equação reduzida

b) Vértice

c) Esboço do gráfico

d) Foco e uma equação diretriz

1.2 Equações Paramétricas

Consideremos a equação reduzida da parábola cujo eixo é do y $x^2 = 2py$. Nesta equação onde x pode assumir qualquer valor real, temos que x = t (em que t é chamado de parâmetro) teremos então: $y = \frac{1}{2p}t^2$

As equações paramétricas da parábola são dadas por:

$$x = t$$
$$y = \frac{1}{2p}t^2; t \in \Re$$

ou

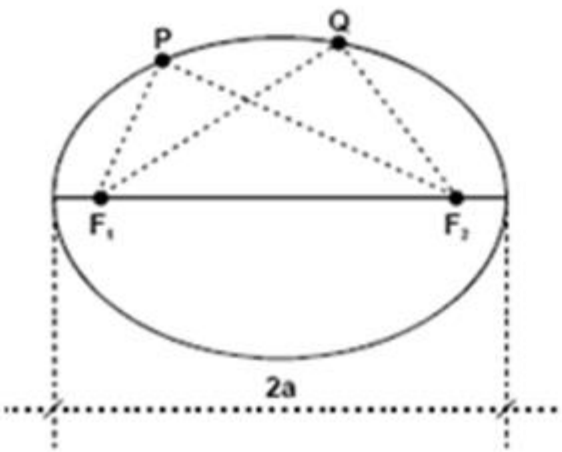
$$x = \frac{1}{2p}t^2$$
$$y = t; t \in \Re$$

Com vértice V(0,0) e eixo 0x.

2 - Elipse

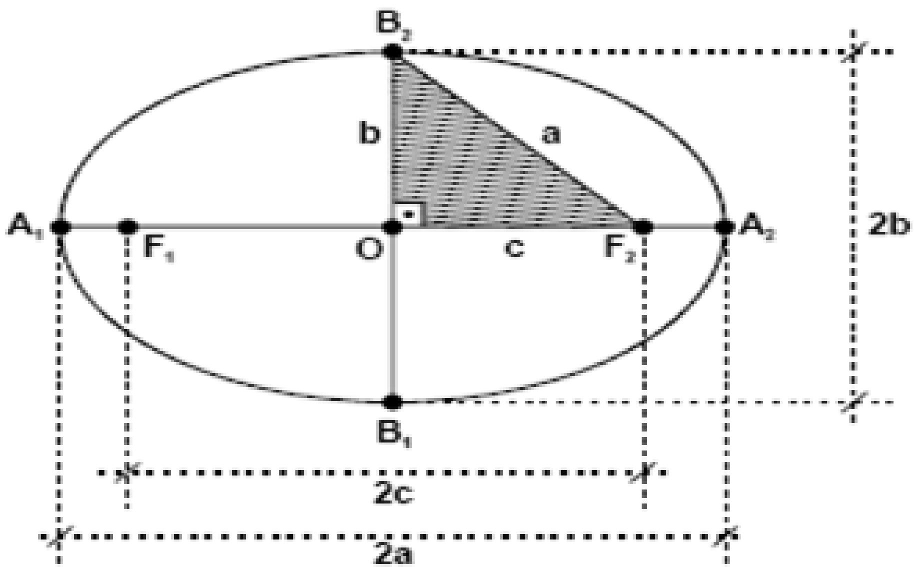
Definição: Elipse é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.

Consideremos no plano dois pontos distintos F_1 e F_2 tal que, a distância $d(F_1, F_2) = 2c$ e um número real positivo a com $2a > 2c$. Chamando 2ª a constante da definição um ponto P pertencente a elipse, se e somente se,



$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$ da mesma forma para $$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = 2a$$

Elementos da Elipse



F_1, F_2: focos. A distância entre os focos F_1 e F_2, igual a 2c, denomina-se **distância focal**.

O: centro da elipse; é o ponto médio do segmento F_1F_2.

A_1, A_2, B_1, B_2: vértices da elipse.

Eixo maior: é o segmento A_1A_2 e cujo comprimento é 2a.

Eixo menor: é segmento B_1B_2 e cujo comprimento é 2b.

Do triângulo retângulo B_2OF_2 hachurado na elipse, obtemos a relação notável:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Observação: Denomina-se "eixo maior" o segmento A_1A_2 e de "eixo menor" o segmento B_1B_2.

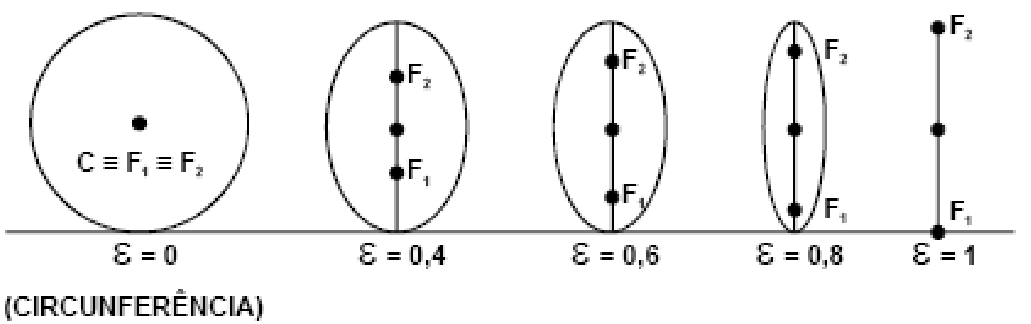
Excentricidade

Uma importante característica da elipse é a sua excentricidade, que é definida pela relação: $\varepsilon = \frac{c}{a}, 0 < \varepsilon < 1$

Como a e c são positivos e c < a depreende-se que $0 < \varepsilon < 1$.

Quanto mais próximo de zero for o valor de ε, mais a elipse se aproxima de uma circunferência. Por outro lado, quanto mais achatada for a elipse, mais o valor de ε se aproxima de 1.

Uma vez fixo o valor de a, há uma correspondência entre o valor de ε e a distância entre os focos, e quanto mais achatada for a elipse, maior a distância entre os focos.



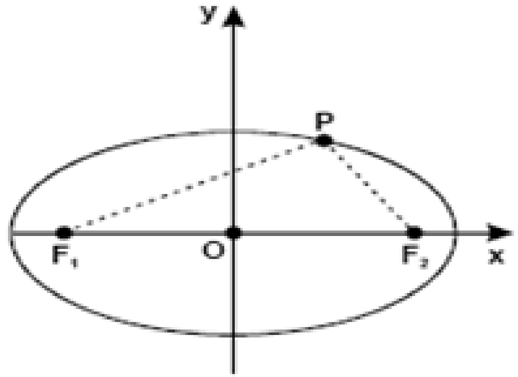
Temos que os valores extremos do domínio de ε:

- Se $\varepsilon = 0$ tem-se uma circunferência de diâmetro 2a e os focos F_1 e F_2, coincidem com o centro da circunferência.

- se $\varepsilon = 1$ tem-se segmento retilíneo F_1F_2

2.1 Equação canônica ou reduzida da elipse de centro na origem

a) O eixo maior coincide com o eixo x.



Sejam:

$P = (x, y)$ um ponto genérico da elipse.

$F_1 = (-c, 0)$

$F_2 = (c, 0)$

Por definição:

$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

Transpondo o 2.º radical ao 2.º membro :

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando ao quadrado e desenvolvendo os produtos notáveis:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

Isolando o radical:

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx$$

Dividindo por 4 e tornando a quadrar:

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$\text{ou}\ \ (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

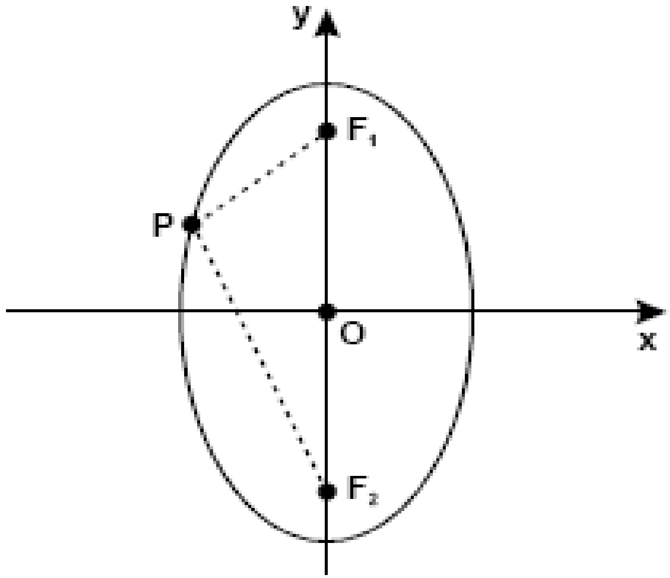
Mas pela relação notável $a^2-c^2=b^2$:

$$b^2x^2+c^2y^2=a^2b^2$$

Dividindo ambos os membros por a^2b^2 :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad (\text{eixo maior} \equiv \text{eixo } x)$$

que é chamada equação **canônica** ou **reduzida** da elipse de centro na origem e focos sobre o eixo x.



Na figura tem-se:
$F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$

De forma análoga demonstra-se que para um ponto $P = (x, y)$ pertencente à elipse tem-se a equação canônica:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

(eixomaior $\equiv$ eixo y)

Aqui cabe um destaque: na equação canônica **a** é a medida do semi-eixo maior e **a**^{2} representa o maior dos denominadores. Se o número a^2 é denominador de:

x^2 então os focos estão sobre o eixo x;

y^2 então os focos estão sobre o eixo y.

Exemplifiquemos: A equação $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ representa uma elipse na qual $a^2 = 16$; portanto a medida do seu eixomaioré $2a = 2\sqrt{16} = 8$ e o eixomaior coincide como o eixo y.

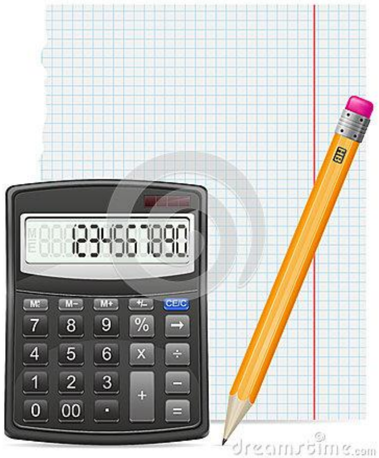
Exemplo

1) Dada a equação da elipse $16x^2 + 9y^2 = 144$ pede-se;

a) Equação Canônica

b) Excentricidade

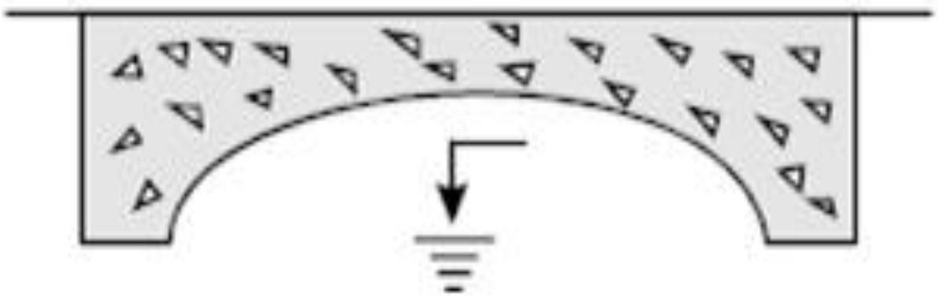
c) Gráfico, coordenadas dos focos e dos vértices.



Aplicações da Elipse

Mesmo depois de Copérnio, que no século XVI formulou a teoria heliocêntrica, se acreditava que o "movimento natural" era o movimento circular e, por isso, os planetas deveriam seguir esse tipo de trajetórias à volta do sol. Foi o astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler, em 1969, que descobriu que “cada planeta descreve uma elipse de que o Sol ocupa um dos focos” (1ª lei de Kepler).

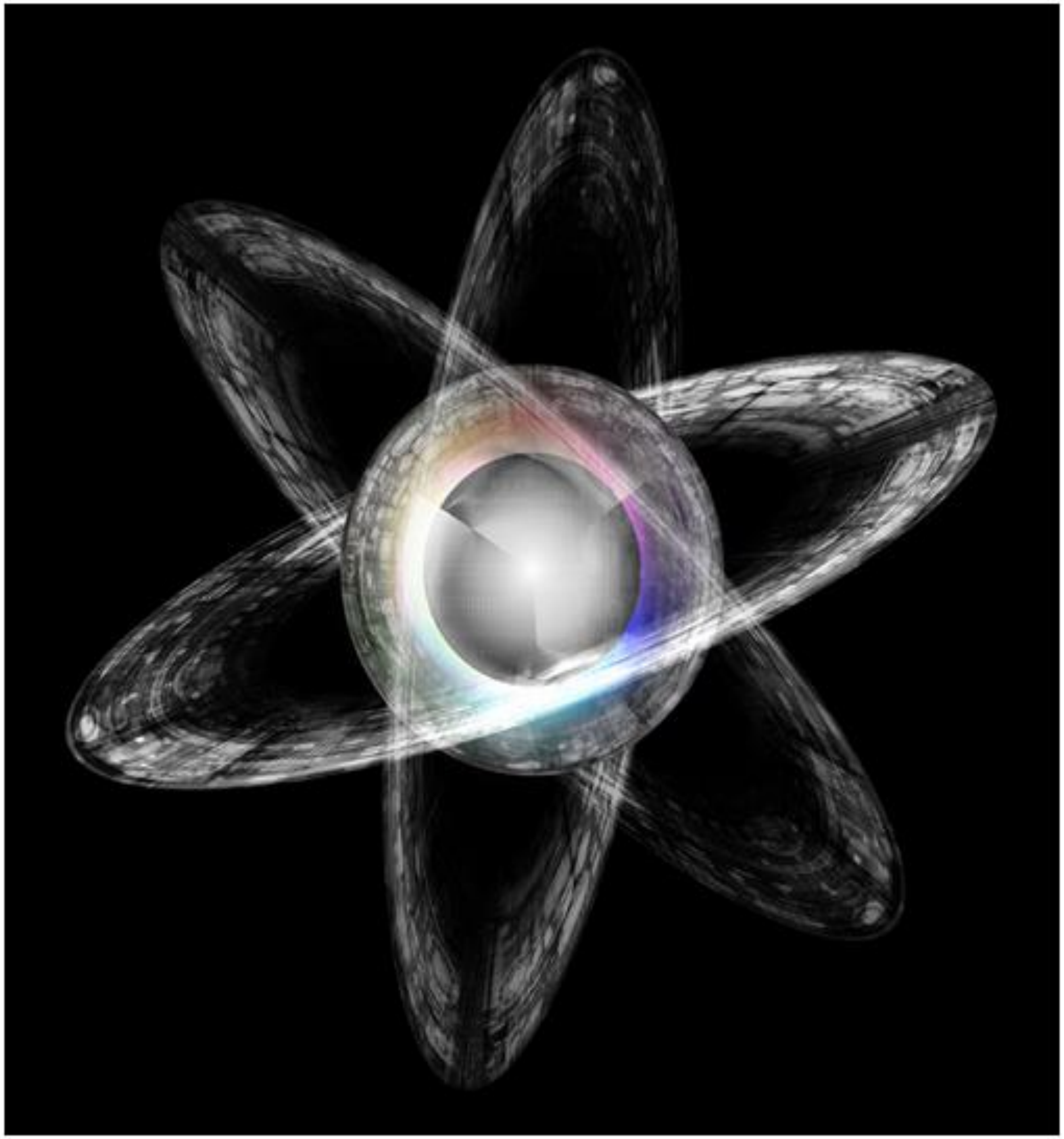
b) Arcos emforma de semi-elipse sãomuito empregados na construção de pontes de concreto e de pedras (desde os antigos romanos).



c) Engenharia Civil: em Resistência dos Materiais é muito empregada a elipse de inércia.

Engenharia Elétrica: conjuntos de elipses homofocais (elipses de mesmo foco) são utilizadas na teoria de correntes elétricas estacionárias.

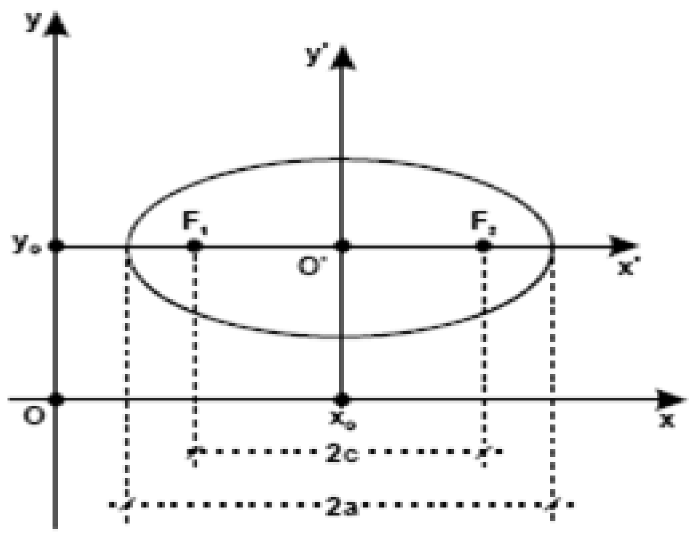
Engenharia Mecânica: são usadas engrenagens elípticas (excêntricos).



A foto ilustra a estrutura de um átomo. Ao centro é possível ver o núcleo(formado de prótons e nêutrons) envolto por elipses por onde orbitam os elétrons.

2.2 Equação da Elipse cujo centro é $O' = (x_0, y_0)$ e cujos eixos são paralelos aos eixos coordenados.

a) O eixo maior é paralelo ao eixo x.



Por meio de uma translação de eixos, representamos um novo sistema x'O'y', cuja origem $O' = (x_o, y_o)$ coincide com o centro da elipse.

A equação da elipse referida ao novo sistema x'O'y' é:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad ①$$

No entanto, as fórmulas de translação fornecem:

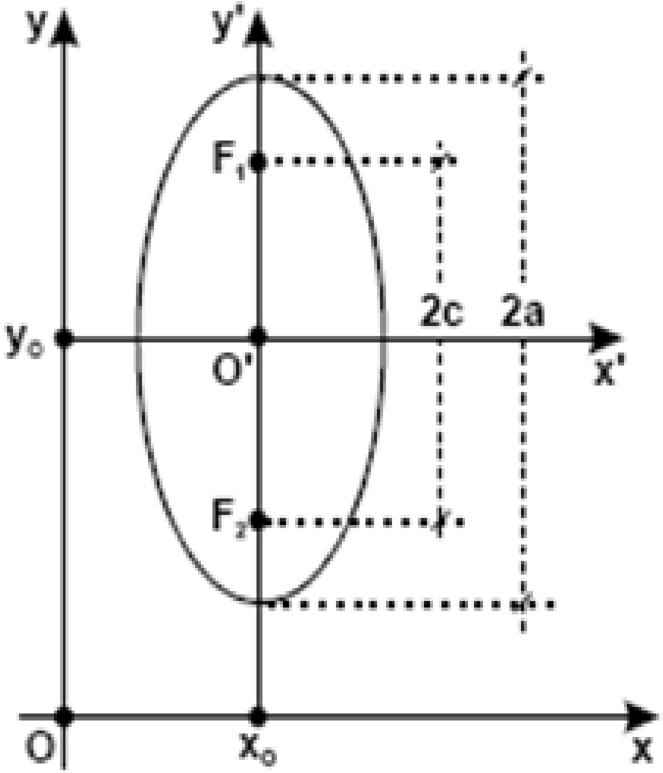
$$\begin{cases} x' = x - x_o \\ y' = y - y_o \end{cases} \qquad ②$$

Levando ② em ①:

$$\boxed{\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1} \qquad (\mathrm{I})$$

que representa a equação canônica da elipse cujo centro é $O' = (x_o, y_o)$ e cujos focos estão sobre uma paralela ao eixo x.

b) O eixo maior é paralelo ao eixo y.



Adotando um raciocínio similar ao caso (I), ter-se-á para equação da elipse:

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1 \qquad \text{(II)}$$

Em (I) e (II) eliminando-se os denominadores, desenvolvendo-se os produtos notáveis e ordenando-se as variáveis, a equação da elipse assume a forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, em que A e C têm o mesmo sinal e $A \neq C$.

Exemplo

1) Dada a elipse de equação $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$. Determinar:

a) Equação canônica ou reduzida;

b) Centro;

c) Vértices;

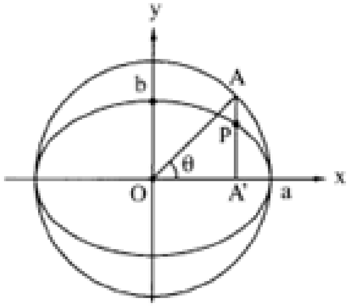
d) Focos;

e) Excentricidade;

f) Gráfico

2.3 Equação Paramétrica

Consideremos a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Fazendo a circunferência de centro O e raio igual ao semi-eixo maior a da elipse.



Seja P(x,y) um ponto qualquer desta elipse. A reta que passa por P e é paralela ao eixo dos y, intercepta a circunferência em A e o raio AO determina o eixo dos x um ângulo θ. Do triângulo A'AO vem $OA' = OA.\cos\theta$ ou $x = a.\cos\theta$.

Como x é abscissa de um ponto da elipse, a ordenada y do mesmo ponto é calculada substituindo o valor de x na equação da elipse:

$\frac{(a.\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ em que $\frac{y^2}{b^2}=1-\cos^2\theta = sen^2\theta$ e $y = b.sen\theta$

Observemos que, para cada valor θ corresponde um e um só ponto P da elipse e quando θ varia de 0 a 2π, o ponto P parte de (a,0) e "descreve"a elipse no sentido anti-horário. Então θ é o parâmetro e o sistema:

$$\begin{cases} x = a.\cos\theta \\ y = b.sen\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Equações Paramétricas da Elipse.

Observações:

1) No caso da elipse ser $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ (eixo maior sobre Oy) suas equações paramétricas são: $\begin{cases} x = b.\cos\theta \\ y = a.sen\,\theta \end{cases}$

2) Quando o centro da elipse for C(x₀, y₀) pela translação de eixos obtemos:

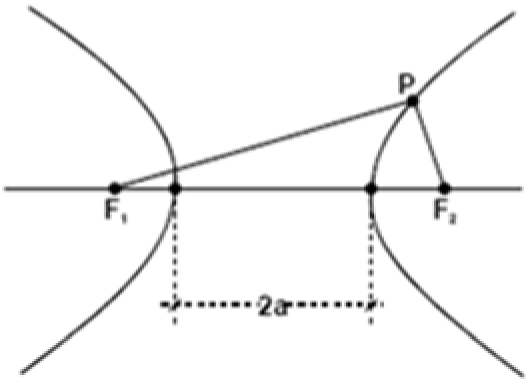
$\begin{cases} x = x_0 + a\cos\theta \\ y = y_0 + b sen\theta \end{cases}$ (eixo maior paralelo a Ox)

$\begin{cases} x = x_0 + b\cos\theta \\ y = y_0 + a sen\theta \end{cases}$ (eixo maior paralelo a Oy)

3) O sistema de equações: $\begin{cases} x = a.sen\theta \\ y = b.\cos\theta \end{cases}$ $0 \le \theta \le 2\pi$. Descreve de outra forma a mesma elipse dada pelo sistema, porém neste caso o ponto P parte de (0,b) e "descreve"a elipse no sentido horário.

3 - Hipérbole

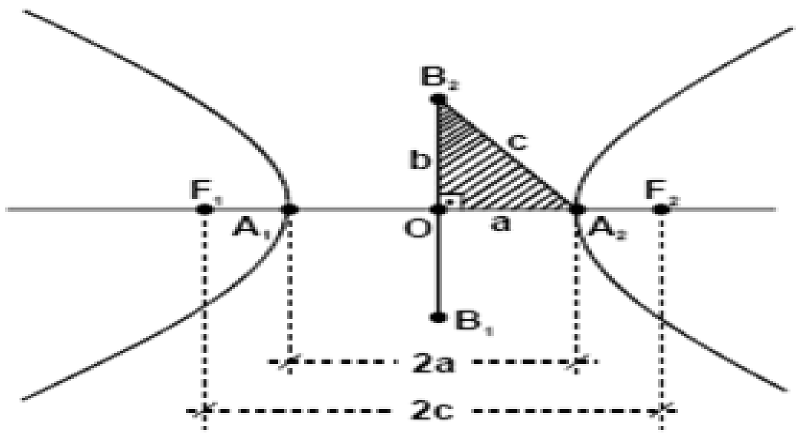
Definição: É o conjunto de todos os pontos de um plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é constante.



Consideremos no plano dois pontos distintos F_1 e F_2 tal que a distância $d(F_1,F_2)=2c$ e um número real positivo a de modo que $2a < 2c$. Chamando de 2a a constante da definição, um ponto P pertence à hipérbole, se e somente se, $|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a$.

A hipérbole é uma curva com dois ramos e o valor absoluto pode ser desconsiderado desde que adotemos a diferença entre a maior e a menor distância.

3.1 Elementos da Hipérbole



F_1, F_2: focos. A distância entre os focos F_1 e F_2, igual a 2c, denomina-se **distância focal**.

O: Centro da hipérbole; é o ponto médio do segmento F_1F_2.

A_1, A_2: vértices da hipérbole.

Eixo real ou transverso: é o segmento A_1A_2 e cujo comprimento é 2a.

Eixo imaginário ou conjugado: é o segmento B_1B_2 e cujo comprimento é 2b.

Observação: Por abuso de linguagem, denomina-se "eixo real" o segmento A_1A_2 e "eixo imaginário" o segmento B_1B_2. O eixo imaginário tem como reta suporte a mediatriz do segmento A_1A_2. Do triângulo retângulo B_2OA_2, hachurado, obtemos a relação notável: $c^2 = a^2 + b^2$.

Excentricidade da Hipérbole

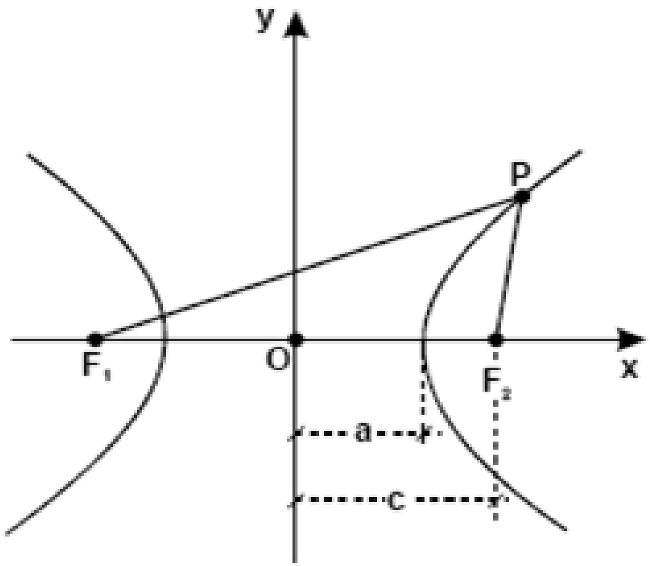
É definida pela relação $\varepsilon = \dfrac{c}{a} \qquad (\varepsilon > 1)$

Como a e c são positivos e c > a, conclui-se que $\varepsilon > 1$.

Há uma proporcionalidade entre a excentricidade e a abertura da hipérbole: quanto maior a excentricidade maior a abertura e vice-versa.

3.2 Equação canônica da hipérbole de centro na origem

a) O eixo real coincide com o eixo x.



Seja:

$P = (x, y)$ um ponto genérico da hipérbole.

$F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$.

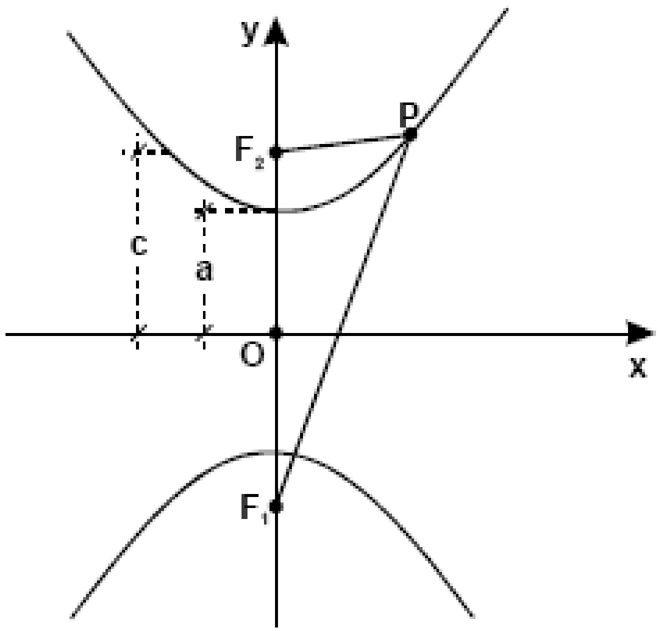
Por definição:

$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \right| = 2a$$

Agora, empregando as mesmas operações para deduzir a equação da elipse, chegamos à equação: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (eixo real = eixo x) $\Rightarrow$ Equação Canônica ou reduzida da hipérbole.

b) O eixo real coincide com o eixo y



O posicionamento da hipérbole no sistema cartesiano fornece:

$F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$

Analogamente demonstra-se que para um ponto $P = (x, y)$ pertencente à hipérbole tem-se a equação canônica:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

(eixo real $\equiv$ eixo y)

Vale enfatizar que na elipse sempre $a > b$. Na hipérbole, no entanto, pode-se ter $a > b$, $a = b$ ou $a < b$.

Ademais, numa hipérbole o eixo real, bem como o eixo focal, coincide com o eixo da coordenada correspondente à variável de coeficiente positivo (se a equação estiver na forma canônica).

Exemplo:

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{24} = 1 \quad \rightarrow$ o eixo focal coincide com o eixo x.

$\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{8} = 1 \quad \rightarrow$ o eixo focal coincide com o eixo y.

3.3 Assíntotas

As assíntotas r e s são retas que passam pelo centro da hipérbole, no caso, a origem do sistema. Logo, suas equações são do tipo:

$y = mx$, sendo m a declividade $m_1 = \frac{b}{a}$ $\Longrightarrow$ Para a equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

E a assíntota s tem declividade $m_2 = -\frac{b}{a}$

Quando a equação da hipérbole é da forma $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ as declividades das assíntotas serão $m_1 = \frac{a}{b}$ e $m_2 = -\frac{a}{b}$ com equação $y = mx$

<u>Exemplo</u>

1) Dada a equação da hipérbole, determine:

a) A medida dos semi - eixos.

b) Vértices

c) Focos

d) Excentricidade

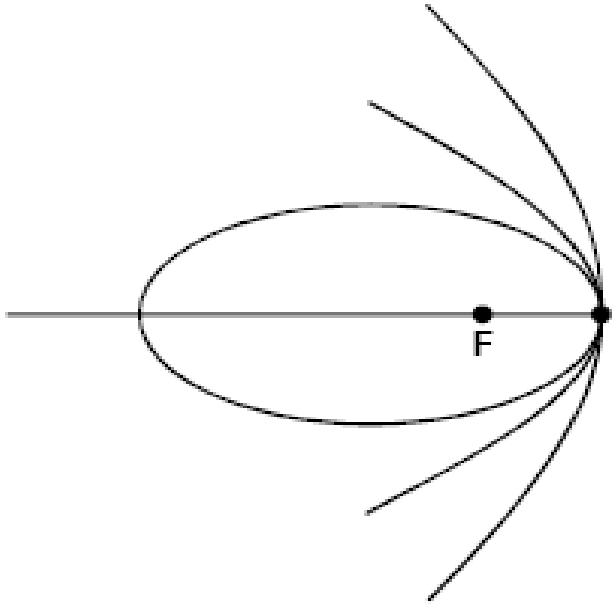
e) Assíntotas

f) Gráfico

i) $x^2 - 4y^2 + 16 = 0$

ii) $x^2 - y^2 = 4$

Aplicações da Hiperbole



a) **Mecânica Celeste:** dependendo de sua velocidade, um cometa tem uma órbita elíptica, parabólica ou hiperbólica (o foco coincide com o Sol). Vide figura à esquerda.

b) Em Mecânica dos Fluidos e em alguns problemas referentes ao fluxo estacionário de eletricidade são utilizadas hipérboles homofocais (demesmofoco).

c) O sistema LORAN (longe range navigation) e o sistema DECCA de navegação aérea usam a hipérbole. Da Terra, concomitantemente são transmitidos sinais de rádio de dois pontos fixos F_1 e F_2 que são captados pelo aeroplano em P, ao longo de t_1 e t_2 segundos, respectivamente. A diferença entre t_1 e t_2 determina 2a e assim se obtém a característica da hipérbole na qual está P.

Igualmente na navegação marítima utilizam-se sistemas hiperbólicos: o sistema RADUX (de baixíssima freqüência) e o sistema LORAC (de ondas contínuas para observações de grande precisão).

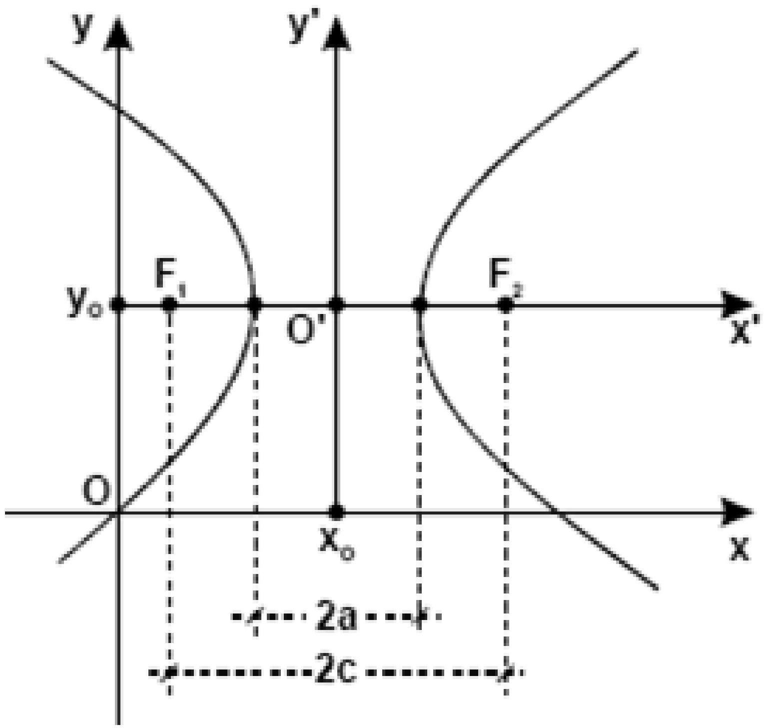
 

Catedral de Brasília. Brasília,1958.

É frequente na natureza formações de cônicas. A foto mostra uma imagem em que é possível perceber os dois ramos de uma hipérbole. Um ramo pode ser visto no desenho do céu e o outro ramo o reflexo deste na água.

3.4 Equação da hipérbole cujo centro é $O' = (x_o, y_o)$ e cujos eixos são paralelos aos eixos coordenados.

a) O eixo real é paralelo ao eixo x



A equação da hipérbole referida ao novo sistema x'O'y' é:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad ①$$

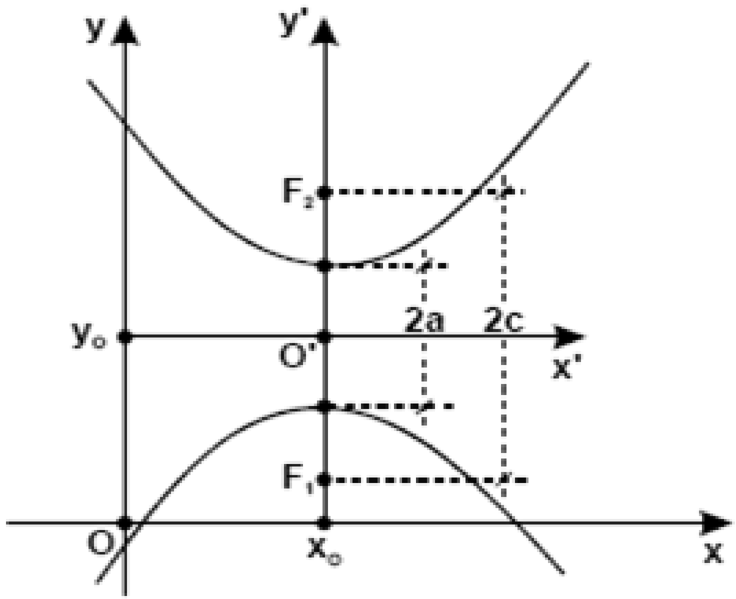
Como há translação de eixos:

$$\begin{cases} x' = x - x_o \\ y' = y - y_o \end{cases} \qquad ②$$

Levando ② em ①:

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1 \qquad (\text{I})$$

b) O eixo real é paralelo ao eixo y



Adotando um raciocínio análogo ao caso (I), a hipérbole ao lado figurada tem equação:

$$\frac{(y - y_o)^2}{a^2} - \frac{(x - x_o)^2}{b^2} = 1 \qquad (\text{II})$$

Em (I) e (II) eliminando os denominadores, desenvolvendo os produtos notáveis e ordenando as variáveis, a equação de hipérbole tem a forma da equação do 2.º grau:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

em que A e C são não nulos e diferem emsinal.

Ademais, quando a hipérbole tem o centro em $O' = (x_o, y_o)$, as assíntotas passarão por esse ponto e terão por equações:

$$y - y_o = \pm\frac{b}{a}(x - x_o) \quad \text{para a hipérbole (I) ou}$$

$$y - y_o = \pm\frac{a}{b}(x - x_o) \quad \text{para a hipérbole (II)}$$

Exemplo

1) Obter a equação canônica da hipérbole $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$

EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

Consideremos a hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Escrevendo esta equação como: $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ significa dizer que $\frac{x}{a}$ e $\frac{y}{b}$ são números reais cuja diferença de seus quadrados é sempre igual a 1.

Se na identidade $sen^2\theta+\cos^2\theta=1$ dividirmos ambos os membros por $\cos^2\theta\neq 0$ obtemos

$\frac{sen^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}\Rightarrow\frac{sen^2\theta}{\cos^2\theta}+1=\frac{1}{\cos^2\theta}\Rightarrow\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$. Desta forma temos que: $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$

Portanto, confrontando esta equação com a equação da hipérbole $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ podemos fazer: $\frac{x}{a}=\sec\theta$ e $\frac{y}{b}=\tan\theta$, podemos concluir que para o parâmetro θ $0\leq\theta\leq 2\pi$ excluídos $\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ o sistema:

$\begin{cases}x=a.\sec\theta\\y=b.\tan\theta\end{cases}$ equações paramétricas da hipérbole.

Quando θ percorre o intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ está descrito o ramo direito da hipérbole $(x \geq a)$ e quando percorre o intervalo $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ o ramo esquerdo $(x \leq -a)$.

Observações

a) No caso da hipérbole ser $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ (eixo real sobre Oy) suas equações paramétricas são: $\begin{cases} x = b.\tan\theta \\ y = a.\sec\theta \end{cases}$

b) Quando o centro da hipérbole for $C(x_0,y_0)$ aplicando a translação de eixos, as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = x_0 + a.\sec\theta \\ y = y_0 + b.\tan\theta \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = x_0 + b.\tan\theta \\ y = y_0 + a.\sec\theta \end{cases}$$

Conforme o eixo real seja paralelo a Ox ou Oy, respectivamente.

Quádricas

Definição:

Uma **quádrica** ou **superfície quádrica** é o conjunto dos pontos do espaço tridimensional, cujas coordenadas cartesianas verificam uma equação do 2.º grau a, nomáximo três variáveis:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

denominada de **equação cartesiana da superfície quádrica**.

Se o termo independente **J** da equação acima for nulo, a quádrica passa pela origem, pois o ponto O = (0, 0, 0) satisfaz tal equação.

Exemplos de Quádricas

Esferas, parabolóides, elipsóides, hiperbolóides, cilindros (do 2.º grau), **cones** (do 2.º grau) constituem as mais conhecidas superfícies quádricas.

Acrescem-se: **pares de planos**, **pontos** ou **conjuntos vazios**, que podem ser representados por uma equação do 2.º grau com três variáveis no $\mathfrak{R}^3$ e constituem as **quádricas degeneradas**.

As equações podem ser descritas:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 10z + 13 = 0$ (esfera)

b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 2$ (elipsóide)

c) $xy + yz + xz - 2x + 2 = 0$ (hiperbolóide)

d) $x^2 + y^2 - z = 4$ (parabolóide)

e) $x^2 + 2y^2 - y + z - 3xy + xz - yz = 0$ (superfície cilíndrica)

f) $x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - 2xz - 2yz = 0$ (superf. cônica)

g) $x^3 - z^3 + 3xz^2 - 3x^2z - z - y = 0$ (não é uma quádrica. Esta equação do 3.º grau representa uma superfície cilíndrica)

Superfícies

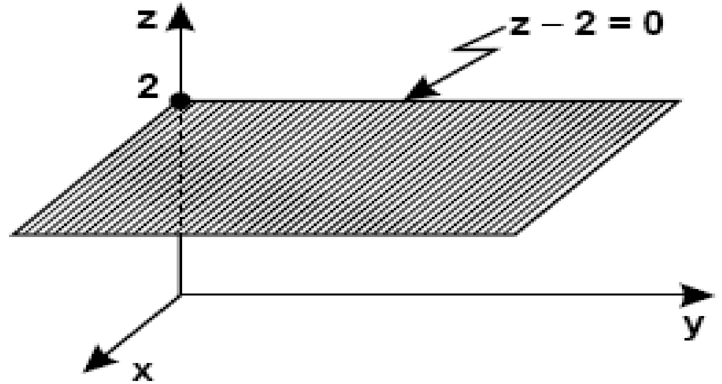
A equação cartesiana $f(x, y, z) = 0$ representa genericamente uma superfície. No $\Re^3$ as equações do 2.º grau constituem-se em superfícies quádricas e as do 1.º, 3.º, 4.º... graus em superfícies não quádricas.

Exemplos

a) $3x + 4y - 5z + 2 = 0$ (superf. do 1.º grau $\Rightarrow$ plano)
b) $x^2 + 2xy + 3yz + x - 2 = 0$ (superf. do 2.º grau $\Rightarrow$ quádrica)

Representações:

a) $z - 2 = 0$ (Plano paralelo ao plano xy)



Equações curvas no $\Re^3$

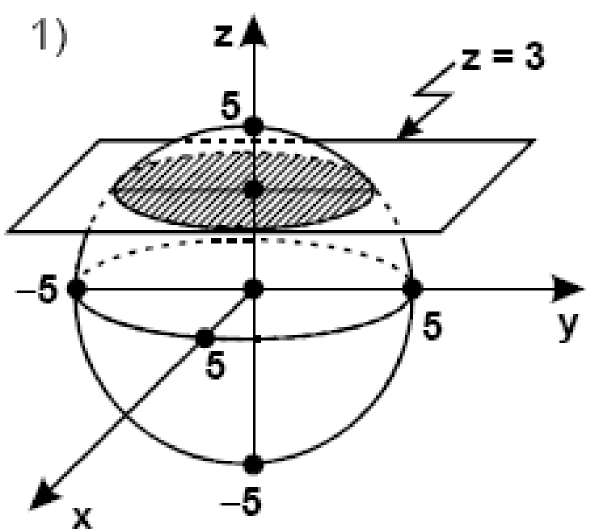
É sabido que uma única equação representa uma curva no plano cartesiano bidimensional. Por exemplo: a equação $3x^2 - 2y^2 = 5$ é uma hipérbole no plano xy. Por sua vez, a equação $z^2 = 2y$ representa uma parábola no plano yz.

No entanto, no $\Re^3$, adotando um conceito bastante intuitivo, uma curva pode ser concebida geometricamente como interseção de duas superfícies. O sistema constituído pelas equações de duas superfícies distintas e interceptantes em mais de um ponto, fornece a equação cartesiana da curva:

$$\text{curva} \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Exemplos

1)



A figura ao lado mostra na área hachurada um círculo, fruto da interseção de uma esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ com o plano $z = 3$.

Equação da curva no E^3:

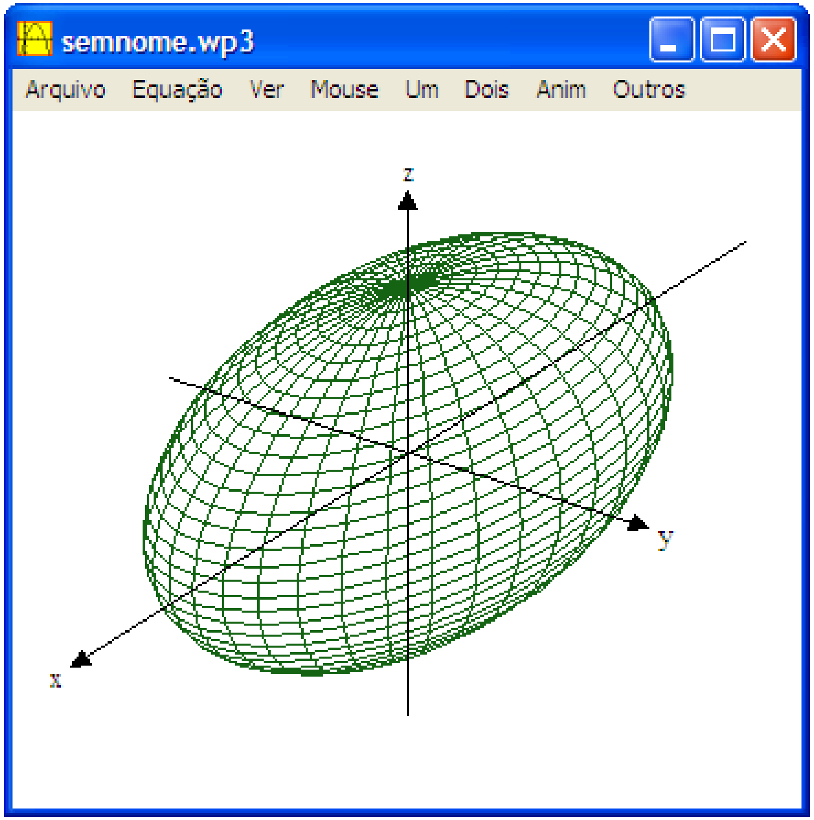
$$\text{circunferência} \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ z = 3 \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO:
Para $z = 3$ tem-se a equação $x^2 + y^2 + (3)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$, que representa umcírculo de raio igual a 4 no plano $z = 3$.

INTERSEÇÃO DA SUPERFÍCIE COM OS PLANOS

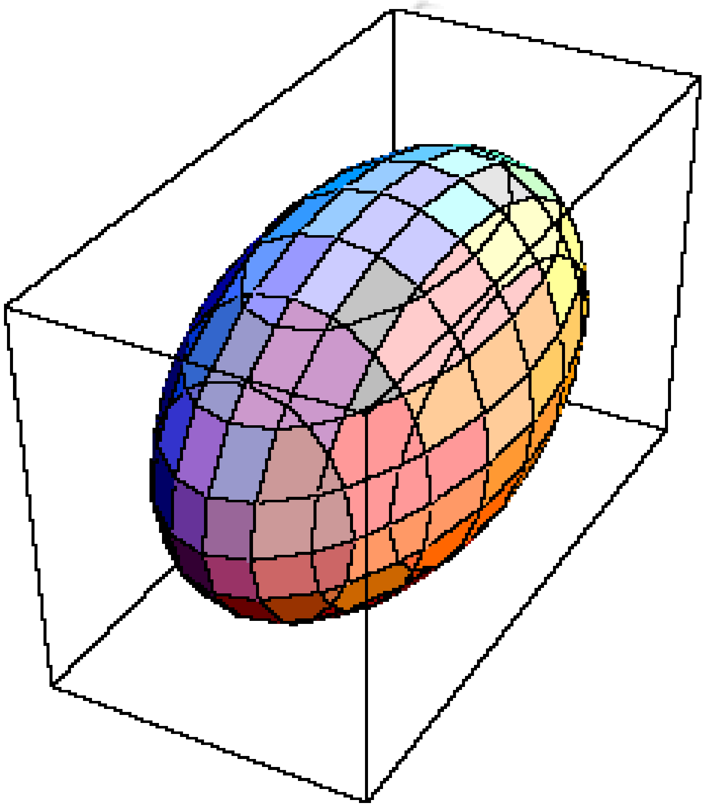
Ao se representar graficamente uma superfície é assaz importante se conhecer as suas curvas de interseção com os planos coordenados ou então com planos paralelos aos planos coordenados. Tais curvas são denominadas de **traços** da superfície no plano. **O traço de uma superfície quádrica é sempre uma cônica.** A demonstração é trivial. Podemos ter uma idéia da forma da superfície $f(x, y, z) = 0$, efetuando-se sua interseção com o plano $z = k$, $k \in R$.

Elipsóide



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\textbf{para } a>0, b>0, c>0$$



O traço nos planos coordenados são elipses, como também são elipses os traços em planos paralelos aos planos coordenados, que interceptam a superfície em mais de um ponto.

Elipsoide é um sólido que resulta da rotação de uma elipse em torno de um dos seus eixos. A equação de um elipsoide num sistema de coordenadas cartesiano *x*-*y*-*z* é

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

onde *a*, *b* e *c* são números reais positivos que determinam as dimensões e forma do elipsoide. Se dois dos números são iguais, o elipsoide é um esferoide; se os três forem iguais, trata-se de uma esfera.

Supondo a ≥ b ≥ c, então:

a ≠ b ≠ c : o elipsoide é **escaleno**

c = 0 : o elipsoide é **plano** (duas elipses em simetria)

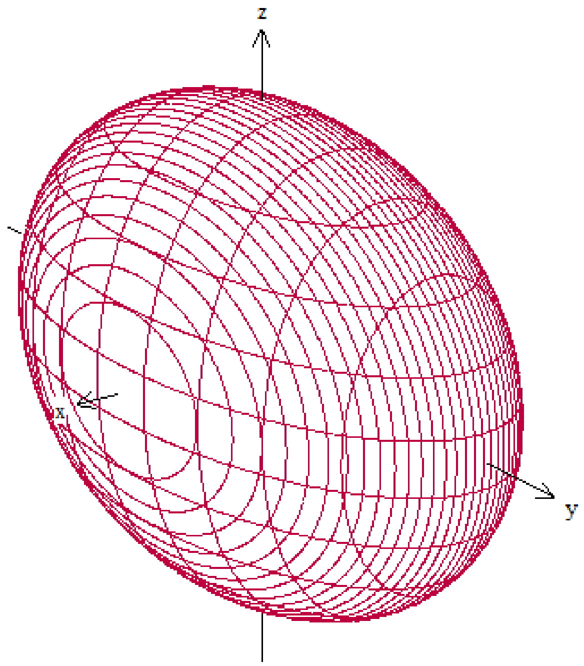
b = c : esferoide em forma de charuto

a = b : esferoide em forma de comprimido

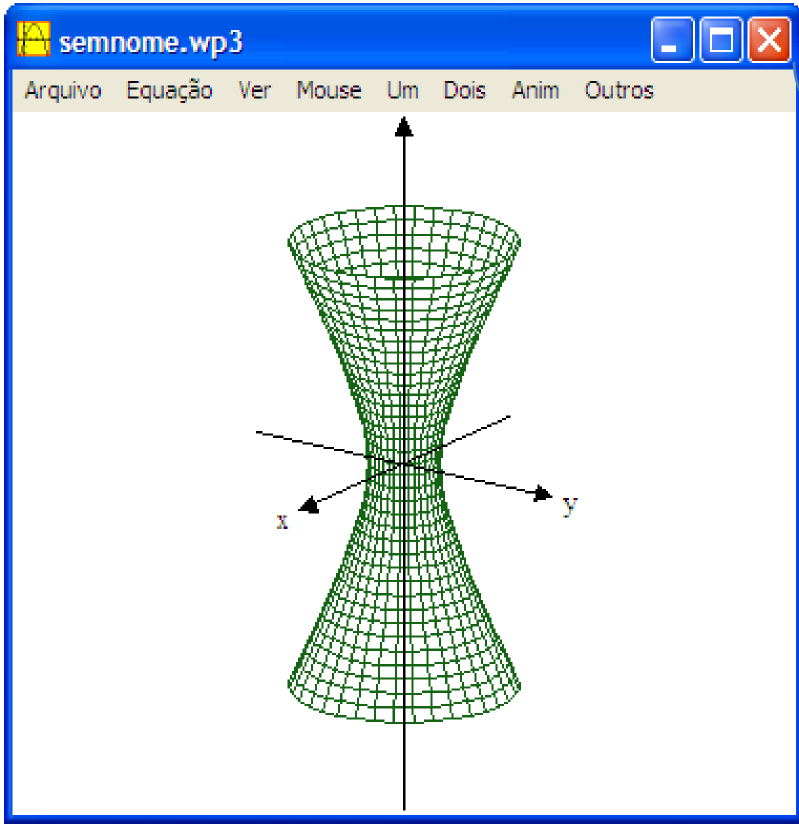
a = b = c : esfera

Exemplo:

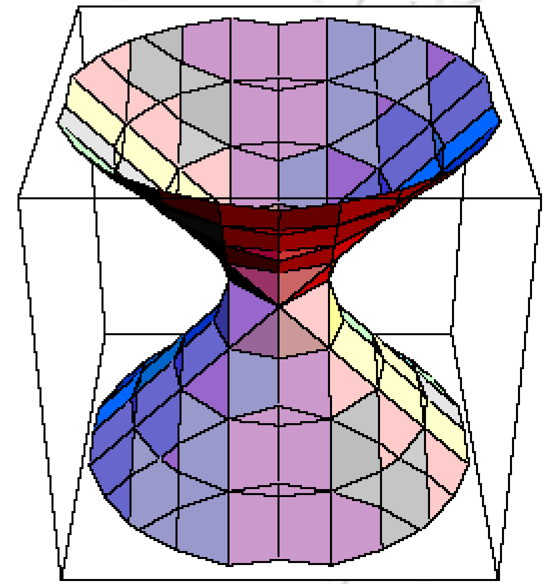
Esboce o Elipsóide $$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$$



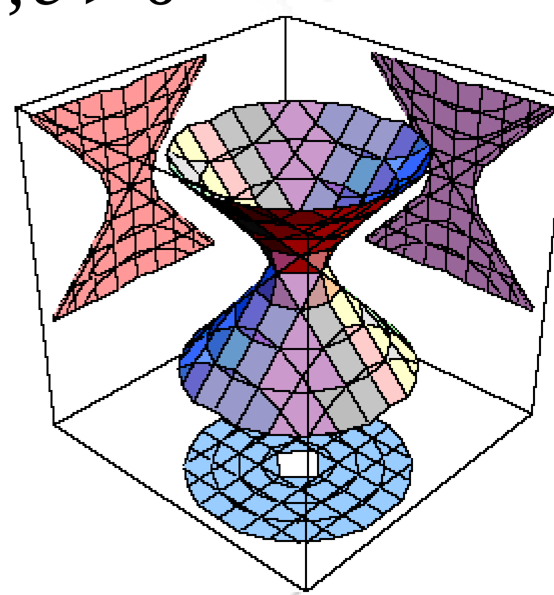
Hiperbolóide de uma folha



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

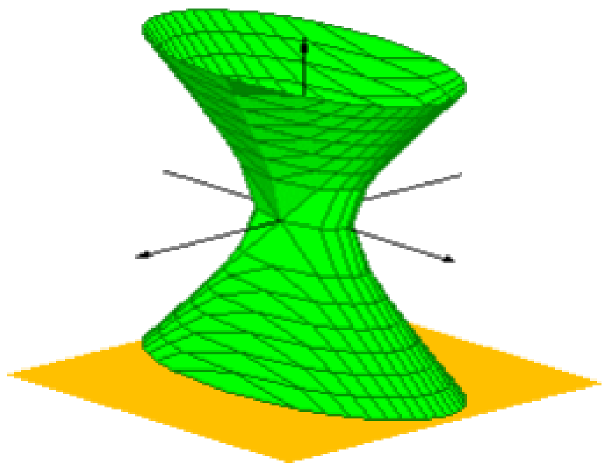


para $a>0, b>0, c>0$



O traço no plano xy é uma elipse, como são os traços nos planos paralelos ao plano xy. Os traços nos planos yz e xz são hipérboles, bem como os traços nos planos paralelos a eles que não passam pelos interceptos x e y. Nestes interceptos, os traços são pares de retas concorrentes.

Hiperbolóide de uma folha



Equações na forma reduzida:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$a, b, c > 0$$

Hiperboloide de uma Folha

Se, e somente se, a=b, a superfície é um hiperboloide de revolução. Um hiperboloide de uma folha pode ser obtido girando-se uma hipérbole ao redor de seu eixo transversal

Dicas para reconhecer a equação reduzida de um hiperbolóide de uma folha

- As três variáveis ($x, \ y, z$) estão na segunda potência e o termo independente é não nulo.

- Os coeficientes de duas variáveis são positivos e da outra é negativo.

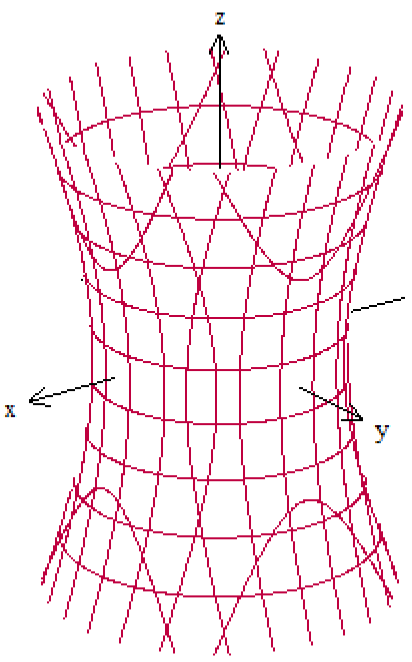
- O eixo do hiperbolóide de uma folha é homônimo à variável de coeficiente negativo.

- Os traços nos planos perpendiculares a dois dos eixos coordenados são hipérboles e nos planos perpendiculares ao outro eixo coordenado são elipses ou círculos

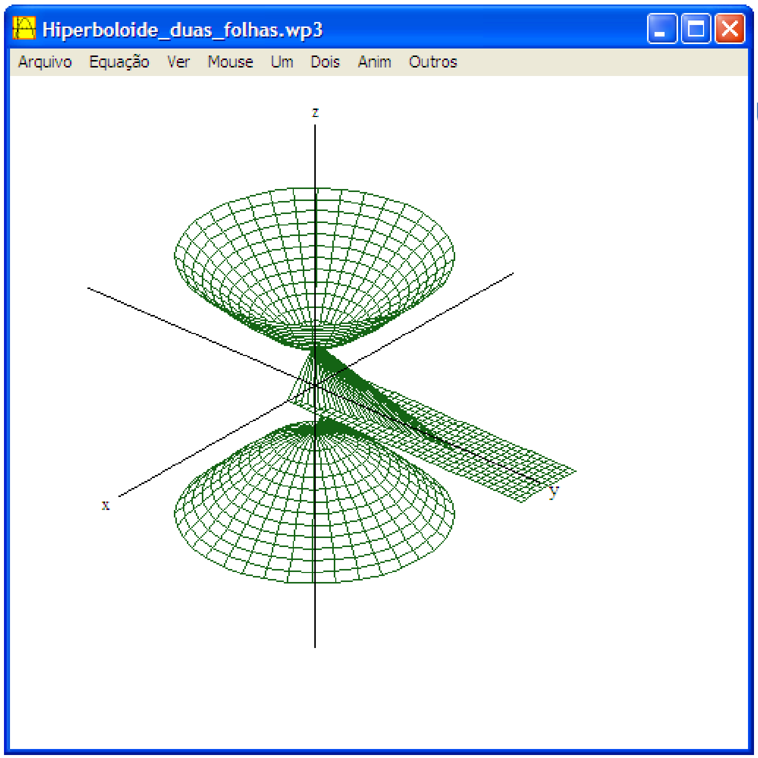
Exemplo:

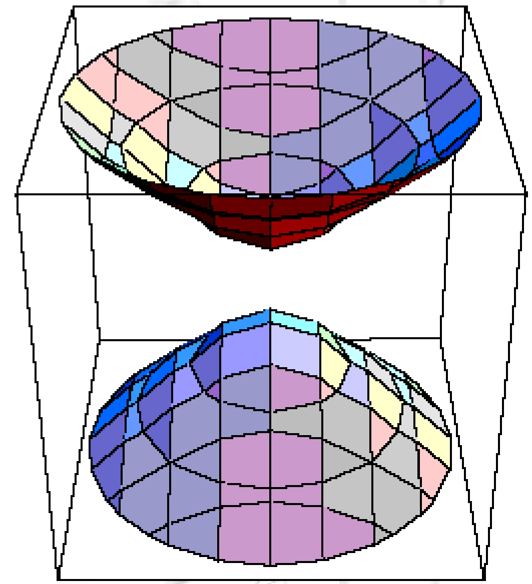
Esboce o Hiperbolóide de uma folha

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$$



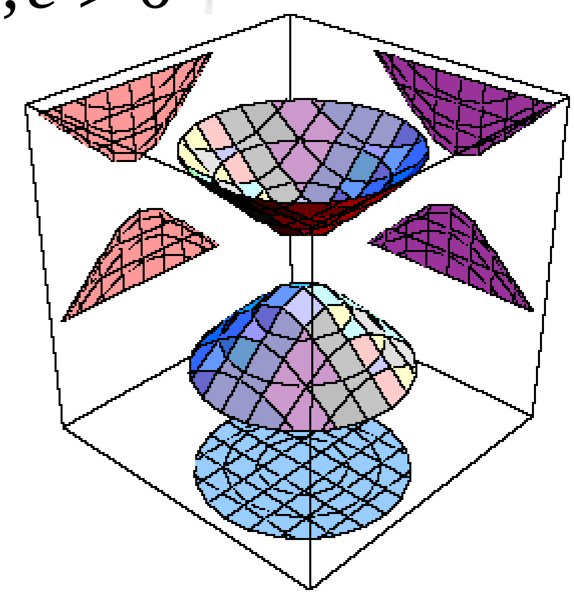
Hiperbolóide de duas folha





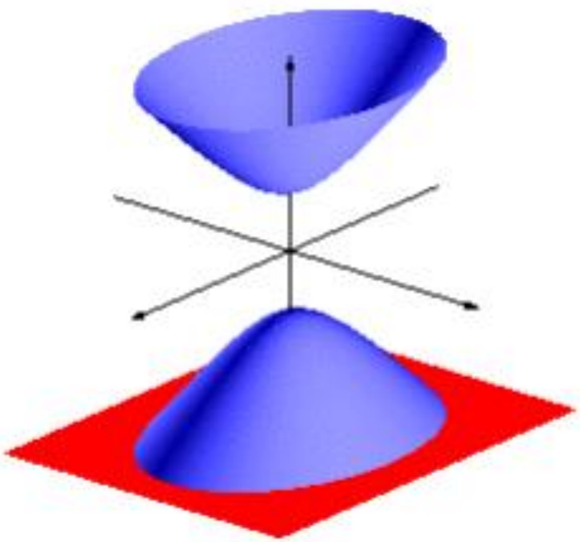
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

para $a > 0, b > 0, c > 0$



Não há traço no plano xy. Em planos paralelos ao plano xy que interceptam a superfície em mais que um ponto os traços são elipses. Nos planos yz , xz e nos planos paralelos a eles que interceptam a superfície em mais de um ponto, os traços são hipérboles.

Equações na forma reduzida:



$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$a, b, c > 0$$

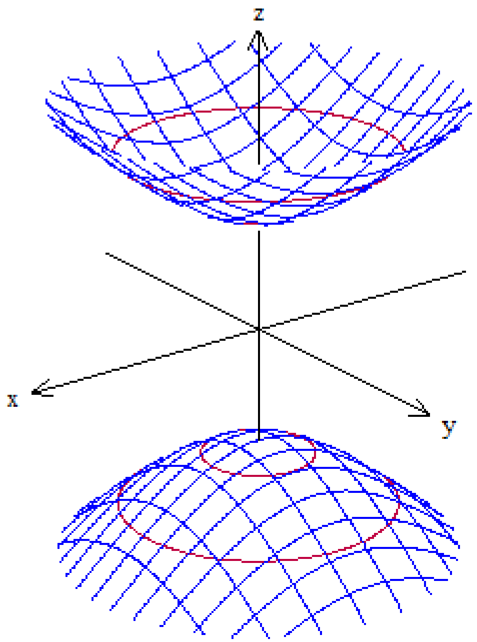
Dicas para reconhecer a equação de um hiperbolóide de duas folhas

- As três variáveis ($x,\ y, z$) estão na segunda potência e o termo independente é não nulo.
- Os coeficientes de duas variáveis são negativos e da outra é positivo.
- O eixo do hiperbolóide de duas folhas é homônimo à variável de coeficiente positivo.
- Os traços nos planos perpendiculares a dois dos eixos coordenados são hipérboles e nos planos perpendiculares ao outro eixo coordenado são elipses ou círculos

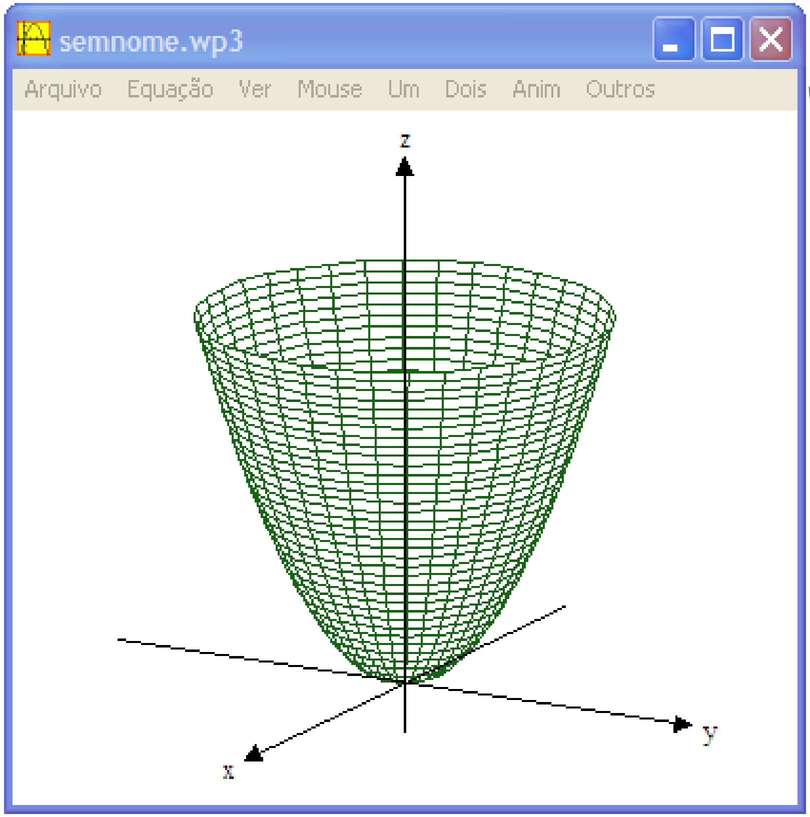
Exemplo:

Esboce o Hiperbolóide de duas folhas

$$-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$$

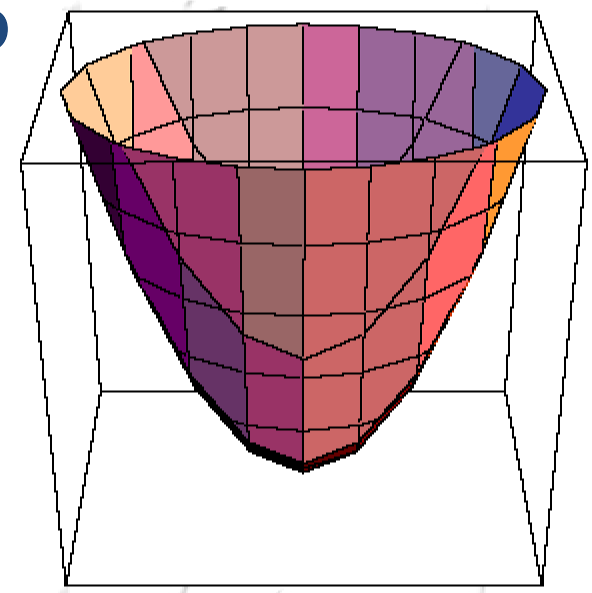


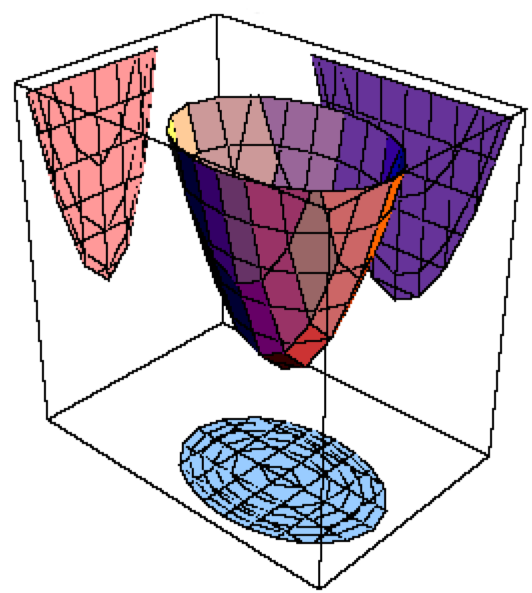
Parabolóide elíptico



$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

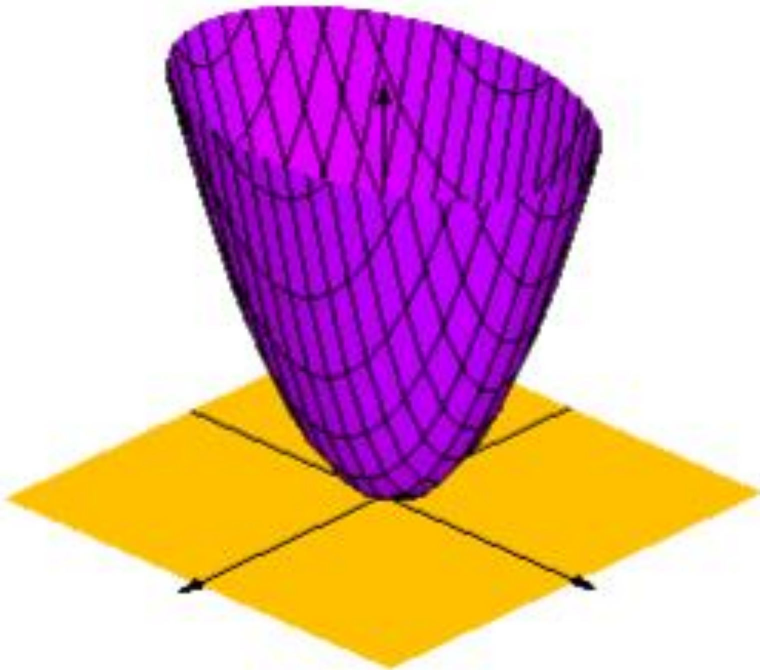
para $a > 0, b > 0$





O traço no plano xy é um ponto (a origem) e os traços em planos paralelos e acima dele são elipses. Os traços nos planos yz e xy, bem como em planos paralelos a eles são parábolas.

<u>Equações na forma reduzida:</u>



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

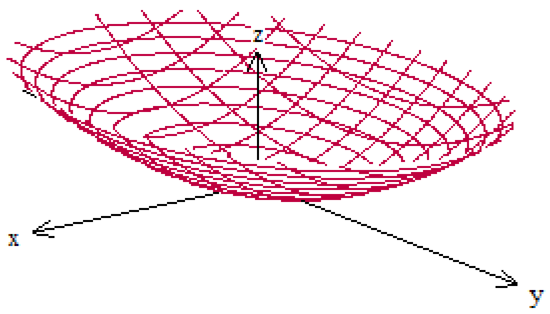
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{y}{c}$$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{x}{c}$$

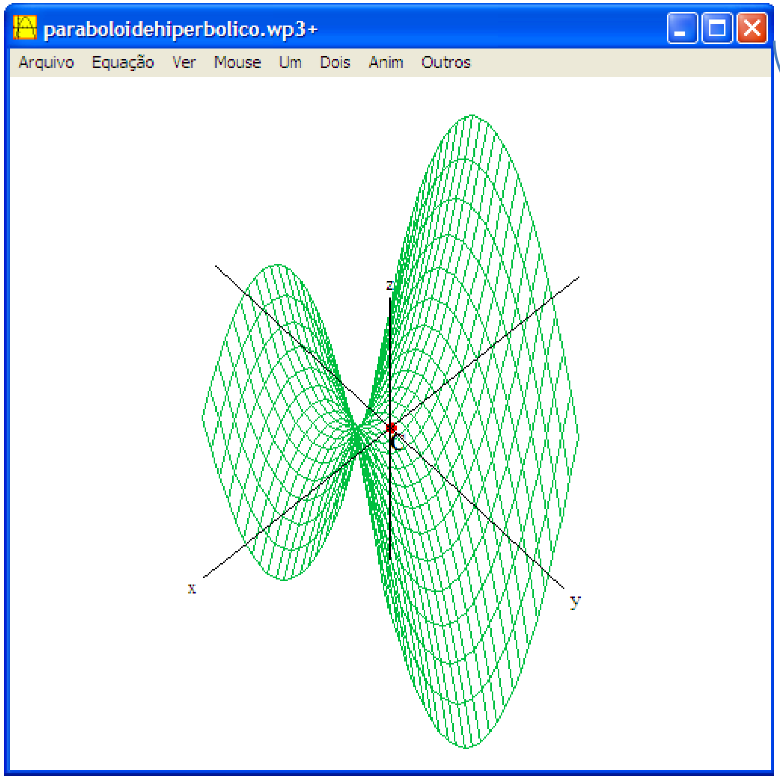
$$a, b > 0 \; e \;\; c \neq 0$$

Exemplo:

Esboce o parabolóide elíptico $$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

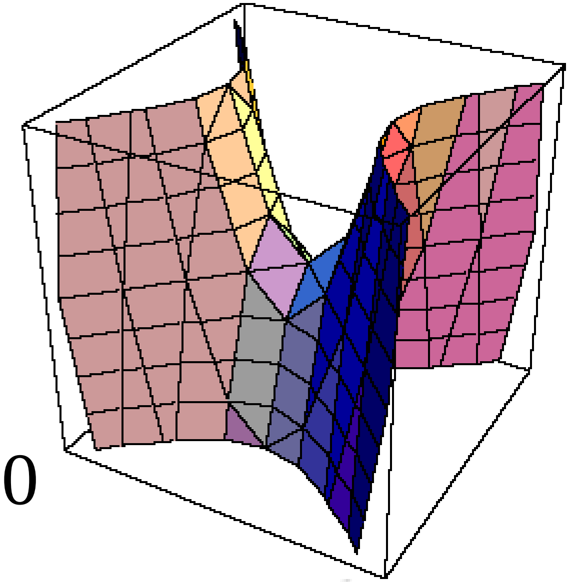


Parabolóide Hiperbólico

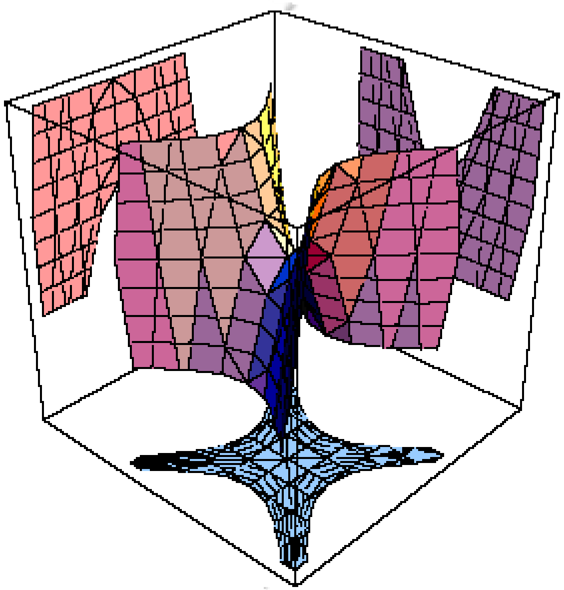


$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

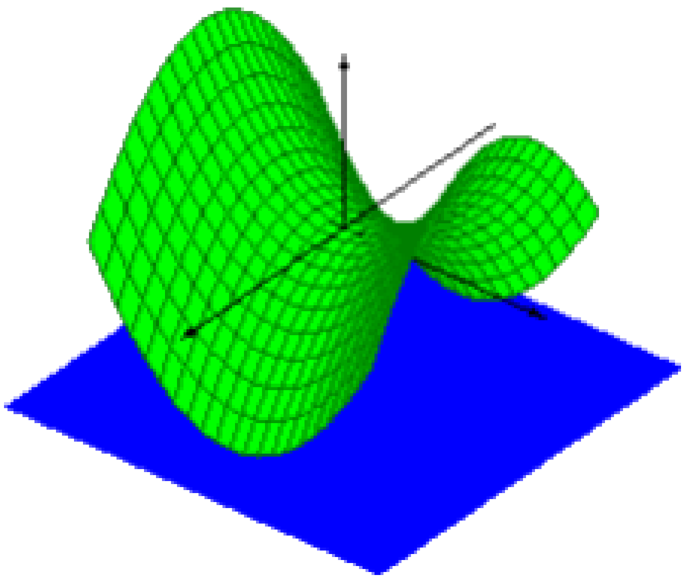
para $a > 0, b > 0$



O traço no plano xy é um par de retas que se cruzam na origem. Os traços em planos paralelos ao plano xy são hipérboles. As hipérboles acima do plano xy abrem se na direção de y e as abaixo na direção de x .Os traços nos planos yz e xz são parábolas, assim como os traços nos planos paralelos a estes.



Equações na forma reduzida:



$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c} \quad ou \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=\frac{y}{c} \quad ou \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=\frac{y}{c}$$

$$-\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=\frac{x}{c} \quad ou \quad \frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=\frac{x}{c}$$

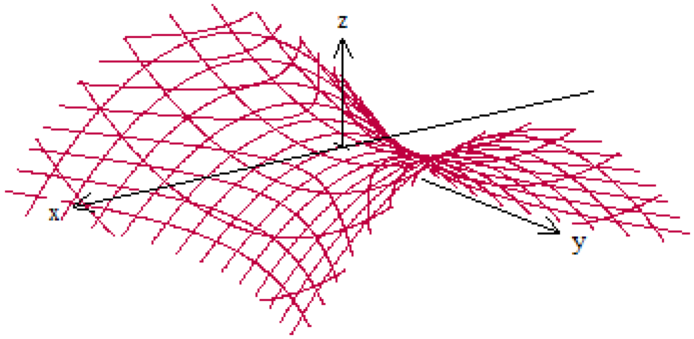
$$a, b > 0 \ e \ \ c \neq 0$$

Dicas para reconhecer a equação de um parabolóide hiperbólico

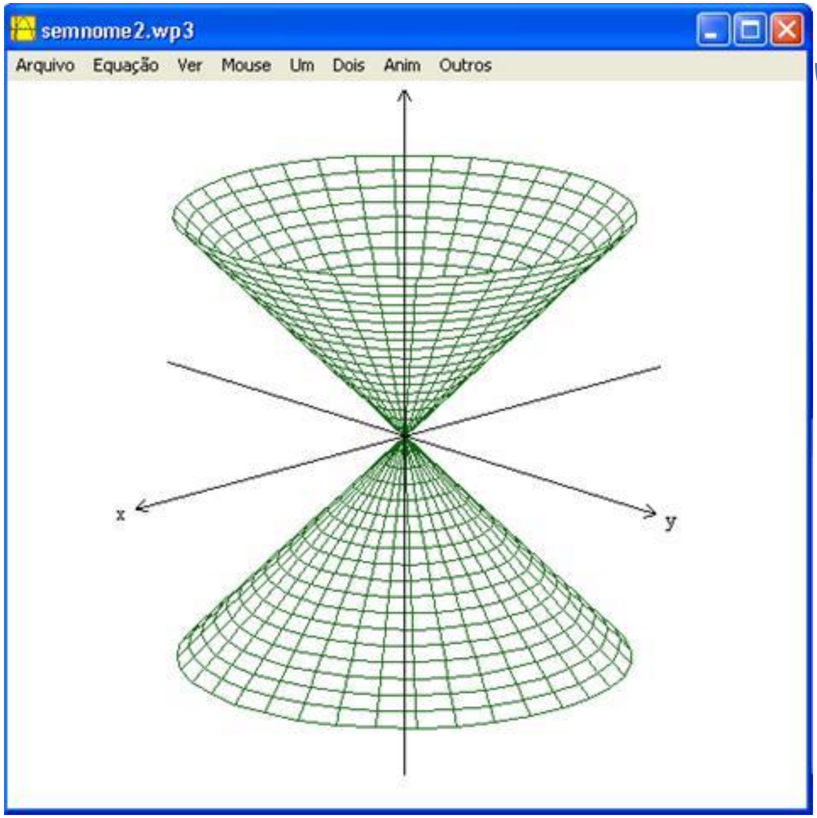
- Duas variáveis estão na segunda potência e a outra na primeira potência.
- Os coeficientes das variáveis em segunda potência têm sinais contrários.
- Os traços hiperbólicos são os obtidos pela interseção da superfície com planos paralelos homônimos à variável em primeira potência.
- Os traços nos planos perpendiculares a dois dos eixos coordenados são parábolas e nos planos perpendiculares ao outro eixo coordenado são hipérboles.

Exemplo:

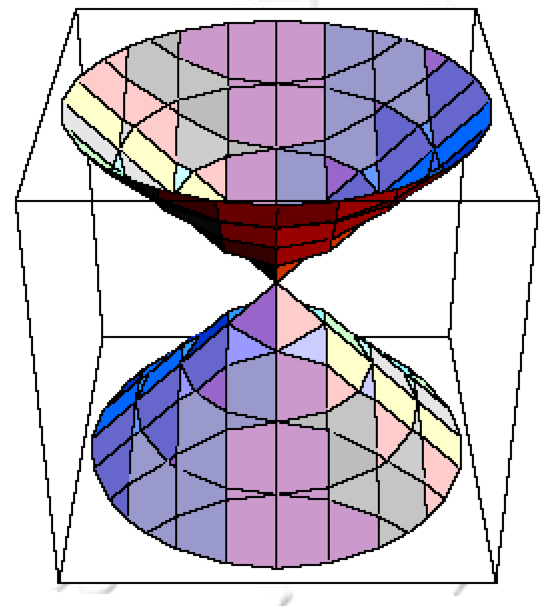
Esboce $z = -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$



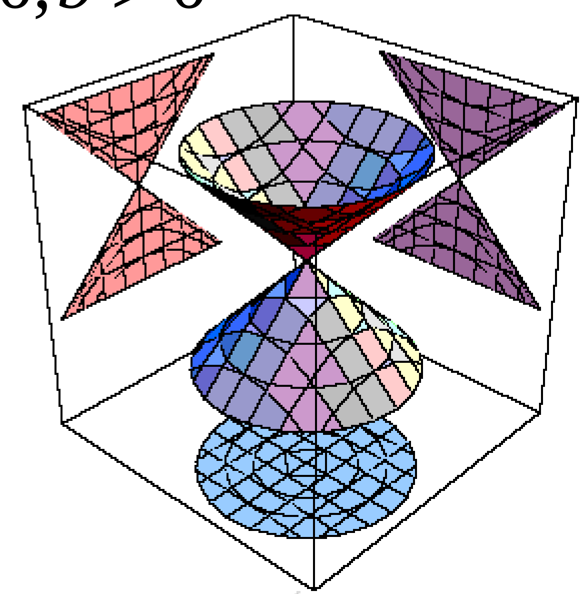
Cone Elíptico



$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



para $a > 0, b > 0$



O traço no plano xy é um ponto (a origem) e os traços em planos paralelos ao plano xy são elipses. Os traços nos planos yz e xy são pares de retas que se interceptam na origem. Os traços em planos paralelos a estes são hipérboles.

Exemplo:

Esboce o Cone Elíptico: $$z^2 = x^2 + \frac{y^2}{4}$$