2(B)Lista de Exercícios Álgebra Linear

Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares

1) Obtenha a transposta da matriz $A \in M_{3x3}(\Re)$ em que $A = (a_{ij})$ tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i + 3j & \text{se } i = j \\ i^2 - j & \text{se i} \neq \text{j} \end{cases}$$

2) Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcule a expressão dada (se possível)

a) $D + E$
b) $D - E$
c) $5A$
d) $-7C$
e) $2B - C$
f) $4E - 2D$
g) $tr(D)$
h) $tr(D - 3E)$
i) $2A^T + C$
j) $D^T - E^T$
k) $(2E^T - 3D^T)^T$
l) $B - B^T$
m) $(CD)E$
n) $C(BA)$
o) $tr(C^T A^T + 2E^T)$
p) $tr((EC^T)^T A)$

3) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, determine:

a) A^3 b) A^{-3} c) $p(A)$ onde $p(x) = 2x^2 + x + 1$

4) Encontre todos os valores das constantes desconhecidas que tornem a matriz A simétrica:

a) $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ a+5 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 5 & a+c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

5) Mostre que a soma de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica

6) Determine a, b, c,x y, z para que a matriz $\begin{bmatrix} 2x & a+b & a-2b \\ -6 & y^2 & 2c \\ 5 & 8 & z-1 \end{bmatrix}$ seja anti-simétrica.

7) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Determine a matriz X em cada caso:

a) $X = 2A - 3B$

b) $X + A = B - C^T - 2X$

c) $X + B^T = 3A^T + \frac{1}{2}C$

8) Sendo $A = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 6 & 12 & 11 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -8 & 7 & -9 \\ -12 & -19 & -2 \end{bmatrix}$ determine as matrizes X e Y tais que $\begin{cases} 2X + Y = A \\ X - 2Y = B \end{cases}$

9) Sendo $A, B \in M_{mxn}(\Re)$ use as propriedades de matrizes para simplificar a expressão $3(2A^T - B)^T + 5\left(\frac{1}{5}B^T - A^T + \frac{3}{5}B\right)^T$

10) Calcule $A.B$ em cada caso:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

11) Em cada caso, verifique se a matriz B é a inversa de A

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -28 \\ -2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

12) Dadas $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, determine A^{-1}, B^{-1} e $(A.B)^{-1}$

13) Supondo as matrizes A, B e C inversíveis determine X em cada equação.

a) $AXB = C$

b) $AB = CX$

14) Determine, caso exista, a inversa da matriz A, em cada caso:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 10 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

15) Que condições $\lambda \in \Re$ deve satisfazer para que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda \end{bmatrix}$ seja inversível?

16) Dada $A \in M_n(\Re)$ tal que $\det A = D$, determine:

a) $\det A^T$

b) $\det A^{-1}$

c) $\det 2A$

17) Dada as matrizes, determine sua inversa se isso for possível. Classifique as matrizes como singular ou não singular:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

18) Uma matriz quadrada A se diz ortogonal se A é invertível e $A^{-1} = A^T$. Determinar, se possível, todos os valores x e y reais, a fim de que a matriz A seja ortogonal.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & x \\ y & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Dica: Se $A^{-1} = A^T$, então $A^T \cdot A = I$

19) Calcule x para que $\begin{vmatrix} x+2 & 2 & -x \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 2x & x \end{vmatrix} = 14$

20) Calcule o determinante das matrizes abaixo:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & a & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & b \\ 1 & b & a & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & a & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & b & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

21) Mostre que o valor do determinante independe de θ

$$\begin{vmatrix} sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) & sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta)-\cos(\theta) & sen(\theta)+\cos(\theta) & 1 \end{vmatrix}$$

22) Calcule o $\det(A)$ utilizando cofatores pelo método do desenvolvimento de Laplace ao longo de uma linha ou coluna da sua escolha

a) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

23) Calcule o determinante da matriz utilizando o método da triangulação:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

24) Verifique se a matriz é inversível e caso for, use o método da adjunta para encontrar a inversa:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

25) Resolva os sistemas abaixo e classifique-os quanto ao número de soluções:

a) $\begin{cases} 2x + y - z = -6 \\ x - y + 3z = 21 \\ 3x \quad + 2z = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - 3z + t = 1 \\ 3x + 3y + z + 2t = 0 \\ 2x + y + z - 2t = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+3y+2z=2 \\ 3x+5y+4z=4 \\ 5x+3y+4z=-10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x-8y=12 \\ 3x-6y=9 \\ -2x+4y=-6 \end{cases}$

26) Resolva os seguintes sistemas pela regra de Cramer.

a) $\begin{cases} 2x+y+2z=4 \\ x+2y+z=-1 \\ 3x+5y+2z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y-z=0 \\ 2y+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x-y+z=1 \end{cases}$

27) Discuta o sistema:

a) $\begin{cases} x+3y+z=-5 \\ 3x+4y+az=0 \\ 2x+y-3z=b \end{cases}$ em função dos parâmetros a e b:

b) $\begin{cases} x & + & y & + & az & = & 2 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ 6x & + & 8y & + & 4z & = & 2a \end{cases}$ em função do parâmetro a

28) Seja $\begin{bmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{bmatrix}$ a matriz aumentada de um sistema linear. Encontre os valores de a e b com os quais o sistema tem:

a) uma única solução

b) nenhuma solução

29) A matriz dada representa uma matriz aumentada de um sistema linear. Escreva o conjunto de equações lineares correspondentes do sistema usando a eliminação de Gauss para resolver o sistema linear:

a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & 6 \\ -4 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

30) Numa equação química balanceada o número de cada átomo nos reagentes deve ser igual nos produtos. Por exemplo, $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$. Um dos métodos para encontrar uma reação balanceada é por tentativa e erro.

Usando os métodos de resolução de sistemas podemos resolver essa questão facilmente. Assim em cada caso a seguir, encontre a equação química balanceada (mínima).

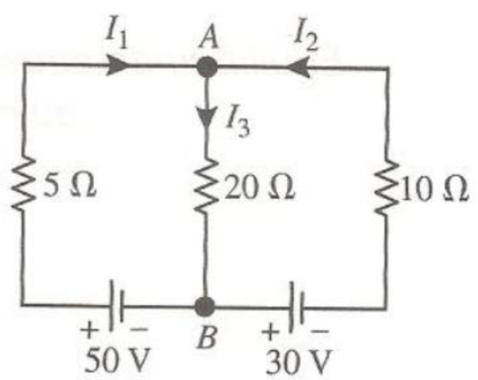
a) $NH_3 + O_2 \rightarrow N_2 + H_2O$

b) $C_5H_{11}OH + O_2 \rightarrow H_2O + CO_2$

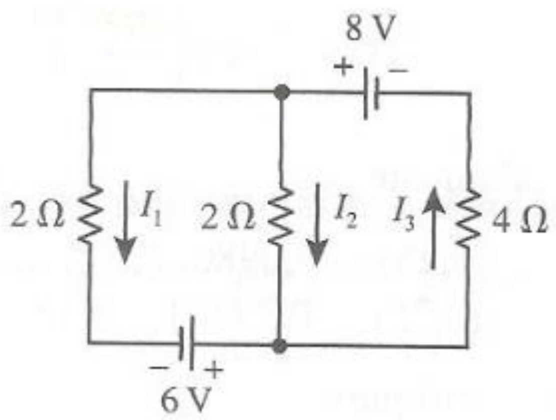
c) $C_4H_{10} + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$

31) Analise os circuitos elétricos dados encontrando as correstes desconhecidas (Utilize as Leis de Kirchhoff)

a)



b)



32) Escreva os sistemas na forma matricial e resolva-os pelo método de Gauss – Jordan (escalonamento de matriz). Dê o posto da matriz dos coeficientes (p_c), o posto da matriz ampliada (p_a) e a nulidade do sistema quando $p_c=p_a$. Classifique o sistema quanto ao número de soluções. Se o sistema for compatível e indeterminado, descreva o infinito conjunto –solução em termos de parâmetros arbitrários.

a) $\begin{cases} x+2y=10 \\ 2x-2y=-4 \\ 3x+5y=26 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-3z=-4 \\ 2x+y-3z=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+y-z=-2 \\ 2x-3y+2z=14 \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x-z=3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+2y+3z+4w=5 \\ x+3y+5z+7w=11 \\ x-z-2w=-6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -x+3y+2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$