Primeira Lista de Geometria Analítica e Álgebra Linear - 20/01/2020

Nome:____

Nome:____

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$. Encontre o valor de x para o qual $A^T = A$.

2. Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, mostre que $AB = AC$.

3. Dadas $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$,

a) Verifique que $AB = BA = 0$ e $CA = C$.

b) Use os resultados de (a) para verificar que $ACB = CBA$, $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ e $(A-B)^2 = A^2 + B^2$.

4. Um construtor tem contratos para construir 3 estilos de casa: moderno, mediterrâneo e colonial. A quantidade de material empregada em cada tipo de casa é dada pela matriz:

	Ferro	Madeira	Vidro	Tinta	Tijolo
Moderno	5	20	16	7	17
Mediterrâneo	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

a) Se ele vai construir 5, 7 e 12 casas do tipo moderno, mediterrâneo e colonial, respectivamente, quantas unidades de cada material serão empregadas?

b) Suponha agora que os preços por unidade de ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo sejam, respectivamente, 15, 8, 5, 1 e 10 u.p. Qual é o preço unitário de cada tipo de casa?

c) Qual é o custo total do material empregado?

5. Reduza a matriz abaixo à forma escada reduzida por linhas.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Reduza a matriz abaixo à forma escada reduzida por linhas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolva os sistemas dos exercícios 7 a 9 achando as matrizes ampliadas linha reduzidas à forma escada e dando também os seus postos, os postos das matrizes dos coeficientes e, se o sistema for possível, o grau de liberdade. Classifique-os também em SPD, SPI ou SI.

7. **a)** $x + 2y - z + 3t = 1$

b) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x - 2y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

10. Considere o seguinte balanceamento

$$xC_6H_6 + yO_2 \to zCO_2 + wH_2O.$$

a) Encontre a matriz ampliada do sistema linear que representa esse balanceamento.

b) Encontre a matriz ampliada linha reduzida à forma escada desse sistema.

c) Determine o posto da matriz ampliada, o posto da matriz dos coeficientes e, se possível, o grau de liberdade do sistema. O sistema é possível e determinado (SPD), possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI)?

d) Determine os menores valores inteiros de x, y, z e w que balanceiam a reação.

11. Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ calcule

a) A_{23} **b)** $\det(A_{23})$ **c)** Δ_{23} **d)** $\det(A)$

12. Calcule $\det(A)$, onde $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

13. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule

a) $\text{adj}(A)$ **b)** $\det(A)$ **c)** A^{-1}

14. Calcule A^{-1} usando operações elementares sobre linhas, onde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

.

15. Dado o sistema $\begin{cases} x + y - w = 0 \\ x - z + w = 2 \\ y + z - w = -3 \\ x + y - 2w = 1 \end{cases}$

a) Calcule o posto da matriz dos coeficientes.

b) Calcule o posto da matriz ampliada e classifique o sistema. Se possível, apresente o grau de liberdade.

c) Descreva a solução deste sistema.

16. Dizemos que as matrizes A e B são semelhantes se existe uma matriz P inversível tal que $B = P^{-1}AP$. Mostre que se A e B são semelhantes, então $\det(A) = \det(B)$.

17. Verifique que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

Para os Exercícios 18 e 19 abaixo, considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

18. Calcule A^{-1} utilizando operações elementares sobre linhas.

19 Calcule A^{-1} utilizando determinante e a matriz adjunta.

20. Chamamos um sistema homogêneo de n equações e m incógnitas aquele sistema cujos termos independentes b_is, são todos nulos.

a) Um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução. Qual é ela?

b) Encontre os valores de $k \in \mathbb{R}$ tais que o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + kz = 0 \end{cases}$$

admita uma única solução.

21 Considere o sistema homogêneo do item (b) do Exercício 20. Encontre os valores de $k \in \mathbb{R}$ tais que o sistema tenha uma solução distinta da solução trivial ($x = y = z = 0$).

22 Sejam A e B matrizes $n \times n$. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se forem verdadeiras, demonstre e se forem falsas, apresente um contra-exemplo.

a) $\det(AB) = \det(BA)$

b) $\det(A^2) = (\det(A))^2$

c) $\det(2A) = 2\det(A)$

d) Se $\det(A) = 1$, então $\det(A^{-1}) = \det(A)$

e) Se $\det(A) = 1$, então $A^{-1} = A$