Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Campus Medianeira

ÁLGEBRA LINEAR – 2º Sem/2011

Profª Tássia Hickmann

Medianeira

2011

SUMÁRIO

1 ESPAÇOS VETORIAIS

Em várias partes da matemática, defrontamo-nos com um conjunto, tal que é, ao mesmo tempo, significativo e interessante lidar com "combinações lineares" dos objetos daquele conjunto. Por exemplo, no estudo de sistemas lineares, é bastante natural considerar combinações lineares das linhas de uma matriz.

A grosso modo, a álgebra linear trata das propriedades comuns a sistemas algébricos constituídos por um conjunto mais uma noção razoável de uma "combinação linear" de elementos do conjunto. Neste tema estudaremos o ambiente dos Espaços Vetoriais que, como a experiência nos mostra, é a abstração mais útil deste tipo de sistema algébrico.

1.1 INTRODUÇÃO E EXEMPLOS

Neste capítulo introduziremos o conceito de espaço vetorial que será usado em todo o decorrer do curso. Porém, antes de apresentarmos a definição de espaço vetorial, passemos a analisar em paralelo dois objetos: o conjunto formado pelas funções reais $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, que será denotado por $F(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e o conjunto das matrizes quadradas de ordem *n* com coeficientes reais que denotaremos por $M_n(\mathbb{R})$, ou simplesmente, por M_n.

A soma de duas funções f e g de $F(\mathbb{R};\mathbb{R})$ é definida como sendo a função $f+g\in F(\mathbb{R};\mathbb{R})$ dada por $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.

Note também que se $\lambda\in R$ podemos multiplicar a função f pelo escalar λ, da seguinte forma $(\lambda f)(x)=\lambda(f(x))$, resultando num elemento de $F(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Com a relação a M_n, podemos somar duas matrizes quadradas de ordem n, $A=(a_{ij})_{n\times n}$ e $B=(b_{ij})_{n\times n}$, colocando $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{n\times n}$, que é um elemento de M_n.

Com relação à multiplicação de um elemento $A=(a_{ij})_{n\times n}$ de M_n por um escalar $\lambda\in\mathbb{R}$, é natural definirmos $\lambda A=(\lambda a_{ij})_{n\times n}$, o qual também pertence a M_n.

O que estes dois conjuntos acima, com estas estruturas de adição de seus elementos e multiplicação de seus elementos por escalares, têm em comum? Vejamos:

Verifica-se facilmente a partir das propriedades dos números reais que, com relação a quaisquer funções f, g e h de $F(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, são válidos os seguintes resultados:

1. $f + g = g + f$;
2. $f + (g + h) = (f + g) + h$;
3. Se O representa a função nula, isto é, $O(x) = 0$ para todo $x \in R$, então $O + f = f$;
4. A função $-f$ definida por $-f(x) = -[f(x)]$ para todo $x \in R$ é tal que $-f + f = O$;
5. $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$;
6. $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$;
7. $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$;
8. $1f = f$.

Agora, com relação a quaisquer matrizes A, B e C em M_n e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, também são válidos os seguintes resultados:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. Se O representa a matriz nula, isto é, $O = (0)_{n\times n}$, então $A + O = A$;
4. Se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ então a matriz $-A$ definida por $-A = (-a_{ij})_{n\times n}$ é tal que $A + (-A) = O$;
5. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;
6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
7. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
8. $1A = A$.

Podemos ver que tanto o conjunto das funções definidas na reta a valores reais como o das matrizes quadradas quando munidos de somas e multiplicação por escalares adequadas apresentam propriedades algébricas comuns. Na verdade muitos outros conjuntos munidos de operações apropriadas apresentam propriedades semelhantes às acima.

É por isso que ao invés de estudarmos cada um separadamente estudaremos um conjunto arbitrário e não vazio, V, sobre o qual supomos estar definidas uma operação de adição, isto é, para cada $u, v \in V$ existe um único elemento de V associado, chamado a soma entre u e v e denotado por $u + v$, e uma operação de multiplicação por escalar, isto é, para cada $u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ existe um único elemento de V associado, chamado de produto de u pelo escalar λ e denotado por λu.

Definição: Diremos que um conjunto V como acima, munido de uma adição e de uma multiplicação por escalar é um ***espaço vetorial*** se para quaisquer u, v e $w \in V$ e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ são válidas as seguintes propriedades:

A. Com relação à adição:

A1. $u + v = v + u$ (comutatividade);

A2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (associatividade);

A3. Existe um elemento $0 \in V$ tal que $u + 0 = u$ para todo $u \in V$ (0 é chamado de ***elemento neutro da adição***);

A4. Para cada elemento $u \in V$ existe um elemento $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$ ($-u$ é chamado de ***elemento oposto, ou inverso, da adição***);

M. Com relação à multiplicação:

M1. $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$, para todo $u \in V$ e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

M2. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$, para todo $u \in V$ e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (distributividade);

M3. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$, para todo $u, v \in V$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$;

M4. $1u = u$, para todo $u \in V$ (1 é chamado de ***elemento neutro da multiplicação***).

Observações:

i. É comum chamarmos os elementos de um espaço vetorial de ***vetores***, independentemente da natureza dos mesmos. Também chamamos de escalares os números reais quando estes desempenham o seu papel na ação de multiplicar um vetor;

ii. O elemento 0 da propriedade (3) é único;

iii. A rigor, a definição de espaço vetorial que demos acima se refere a espaços vetoriais reais, visto que estamos permitindo que os escalares sejam apenas números reais. A noção de espaço vetorial complexo pode ser feita naturalmente a partir da definição acima com as devidas mudanças.

Outro exemplo de espaço vetorial, além dos dois apresentados no início do texto, é o conjunto dos vetores como apresentados em Geometria Analítica munido da adição e da multiplicação por escalar. Dessa forma, o adjetivo vetorial utilizado na definição acima deve ser entendido de uma forma mais ampla, sendo uma referência aos elementos de V independentemente de serem ou não vetores.

Talvez o exemplo mais simples de espaço vetorial seja o conjunto dos números reais com a adição e multiplicação usuais. Mais geralmente, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos transformar o conjunto das *n*-uplas ordenadas de números reais, $\mathbb{R}^n$, em um espaço vetorial definindo a adição de duas *n*-uplas ordenadas, $x=(x_1,\dots,x_n)$ e $y=(y_1,\dots,y_n)$, adicionando-se coordenada a coordenada, isto é, $x+y=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$ e o produto de uma *n*-upla $x=(x_1,\dots,x_n)$ por um escalar $\lambda\in\mathbb{R}$ por $\lambda x=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$.

É uma rotina bem simples verificar que desse modo $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial. Deixamos como exercício esta tarefa. Vejamos mais um exemplo de espaço vetorial:

Sejam $n\in\mathbb{N}$ e $V=P_n(\mathbb{R})$, o conjunto formado pelo polinômio nulo e por todos os polinômios de grau menor ou igual a *n* com coeficientes reais. Definimos a adição e a multiplicação por escalar da seguinte maneira:

- Se $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ e $q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_nx^n$ são elementos de $P_n(\mathbb{R})$ então
$$p(x)+q(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\dots+(a_n+b_n)x^n;$$
- Se $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ é um elemento de $P_n(\mathbb{R})$ e $\lambda\in\mathbb{R}$ então
$$\lambda p(x)=(\lambda a_0)+(\lambda a_1)x+(\lambda a_2)x^2+\dots+(\lambda a_n)x^n$$

1.2 PROPRIEDADES DE ESPAÇOS VETORIAIS

Das oito propriedades que definem um espaço vetorial podemos concluir várias outras. Listaremos algumas destas propriedades na seguinte proposição:

Proposição: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Temos

- **i.** Para qualquer $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda 0=0$;
- **ii.** Para qualquer $u\in V$, $0u=0$;
- **iii.** Se $\lambda u=0$, então $\lambda=0$ ou $u=0$;
- **iv.** Para quaisquer $\lambda\in\mathbb{R}$ e $u\in V$, $(-\lambda)u=\lambda(-u)=-(\lambda u)$;
- **v.** Para qualquer $u\in V$, $-(-u)=u$;
- **vi.** Se $u+w=v+w$, então $u=v$;
- **vii.** Se $u,v\in V$, então existe um único $w\in V$ tal que $u+w=v$.

2 SUBESPAÇOS VETORIAIS

2.1 INTRODUÇÃO E EXEMPLOS

Às vezes, é necessário detectar, dentro de um espaço vetorial V, subconjuntos W que sejam eles próprios espaços vetoriais "menores". Tais conjuntos serão chamados subespaços vetoriais de V. Isto acontece, por exemplo, com o $\mathbb{R}^2$, o plano, onde W é uma reta deste plano que passa pela origem.

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dizemos que um subconjunto $W \subseteq V$ é um ***subespaço vetorial*** de V se forem satisfeitas as seguintes condições:

i. $0 \in W$;

ii. Se $u, v \in W$, então $u + v \in W$;

iii. Se $u \in W$, então $\lambda u \in W$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observações:

1. As condições da definição acima garantem que ao operarmos em W (soma e multiplicação por escalar), não obteremos um vetor fora de W. Isto é suficiente para afirmar que W é ele próprio um espaço vetorial, pois assim as operações ficam bem definidas e, além disso, não precisamos verificar as propriedades A1 a M4 da definição de espaço vetorial, porque elas são válidas em V, que contém W;

2. Obviamente $\{0\}$ e V são subespaços vetoriais do espaço vetorial V, chamados ***subespaços triviais***. Por exemplo, para $V = \mathbb{R}^2$, os subespaços triviais são: $\{(0,0)\}$ e $\mathbb{R}^2$, enquanto os subespaços próprios são as retas que passam pela origem;

Exemplos:

1) Verifiquemos que $S = \{(x, y, z) \in R^3;\ x + y + z = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

i. É claro que $(0,0,0)$ satisfaz $0+0+0=0$. Logo $(0,0,0)\in S$;

ii. Se (x,y,z) e $(u,v,w)\in S$ então $(x+u)+(y+v)+(z+w)=$ $(x+y+z)+(u+v+w)=0+0=0$ e, portanto, $(x,y,z)+(u,v,w)\in S$;

iii. Se $(x,y,z)\in S$ então $\lambda x+\lambda y+\lambda z=\lambda(x+y+z)=\lambda 0=0$ para qualquer $\lambda\in\mathbb{R}$. Assim $\lambda(x,y,z)\in S$.

2) Sejam $V=\mathbb{R}^2$ e $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y=2x\right\}$, ou seja, $S=\left\{(x,2x);\ x\in\mathbb{R}\right\}$, isto é, *S* é o conjunto de vetores no plano que têm a segunda componente igual o dobro da primeira.

Evidentemente $S\neq\varnothing$, pois $(0,0)\in S$. Verifiquemos as condições **(ii)** e **(iii)** da definição de subespaço vetorial:

ii. Tome $u=(x_1,2x_1)\in S$ e $v=(x_2,2x_2)\in S$, temos que $u+v=(x_1,2x_1)+(x_2,2x_2)$ $=(x_1+x_2,2(x_1+x_2))\in S$, pois a segunda componente de $u+v$ é o dobro da primeira.;

iii. Agora, dado um $\lambda\in\mathbb{R}$ e $u=(x_1,2x_1)\in S$, temos que $\lambda u=\lambda(x_1,2x_1)=(\lambda x_1,2(\lambda x_1))\in S$, pois a segunda coordenada de λu é o dobro da primeira.

Portanto *S* é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Este subespaço *S* representa geometricamente uma reta que passa pela origem. Ao tomarmos dois vetores u e v desta reta, o vetor soma $u+v$ ainda é da reta. E se multiplicarmos um vetor u da reta por um numero real λ, o vetor λu ainda estará na reta.

O mesmo não ocorre quando a reta não passa pela origem. Por exemplo, a reta $S=\left\{(x,4-2x);\ x\in\mathbb{R}\right\}$ não um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$. Se escolhermos os vetores $u=(1,2)$ e $v=(2,0)$ de S, temos $u+v=(3,2)\notin S$.

3) Seja $V = M_2(\mathbb{R})$ e $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \; ; \; a + d = 0 \; e \; b + c = 0 \right\}$. Visivelmente segue que S é um subespaço de *V*. De fato, pode-se reescrever $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} ; \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ e verificando que:

i. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$, para tanto basta tomar $a = 0$ e $b = 0$;

ii. Se $v_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & -c \end{pmatrix} \in S$, então $v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & -a-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & -(a+c) \end{pmatrix} \in S$;

iii. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ $v = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in S$, então $\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ -\lambda b & -\lambda a \end{pmatrix} \in S$.

Deixamos como exercício a verificação de que os seguintes exemplos são subespaços vetoriais dos respectivos espaços vetoriais.

4) O conjunto das funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, denotado por $C([a, b]; \mathbb{R})$, tais que

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

é um subespaço vetorial de $C([a, b]; \mathbb{R})$.

5) O conjunto das matrizes simétricas de ordem *n* com coeficientes reais é um subespaço de $M_n(\mathbb{R})$.

6) Tome *B* uma matriz fixa de $M_n(\mathbb{R})$ e $S = \{ A \in M_n(\mathbb{R}); \; AB = 0 \}$, isto é, *S* é o conjunto das matrizes que, multiplicadas à esquerda por *B*, têm como resultado a matriz nula. Verifica-se facilmente que *S* é um subespaço de $M_n(\mathbb{R})$.

7) Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \leq n$. Então $P_m(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $P_n(\mathbb{R})$.

2.2 INTERSEÇÃO E SOMA DE SUBESPAÇOS

Sejam S_1 e S_2 dois subespaços de V. A interseção S de S_1 e S_2, que se representa por $S = S_1 \cap S_2$, é o conjunto de vetores $v \in V$ tais que $v \in S_1$ e $v \in S_2$.

Proposição: A interseção S de dois subespaços vetoriais S_1 e S_2 de V é um subespaço vetorial de V.

Demonstração:

i. Como S_1 e S_2 são subespaços, então $0 \in S_1$ e $0 \in S_2$, logo $0 \in S = S_1 \cap S_2$;

ii. Se $u, v \in S_1$, então $u + v \in S_1$ e se $u, v \in S_2$, então $u + v \in S_2$, logo $u + v \in S = S_1 \cap S_2$;

iii. Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se $v \in S_1$, então $\lambda v \in S_1$ e se $v \in S_2$, então $\lambda v \in S_2$, logo $\lambda v \in S = S_1 \cap S_2$.

Pergunta: Com a notação usada na proposição acima, podemos afirmar que a união dos subespaços S_1 e S_2, ou seja, $S_1 \cup S_2$, é um subespaço vetorial de V ?

Resposta: *Não*. Basta considerar $V = \mathbb{R}^2$, $S_1 = \{(x, y);\ x + y = 0\}$ e $S_2 = \{(x, y);\ x - y = 0\}$. Note que $(1,-1) \in S_1 \subset S_1 \cup S_2$ e $(1,1) \in S_2 \subset S_1 \cup S_2$, mas $(1,-1) + (1,1) = (2,0) \notin S_1 \cup S_2$.

Se S_1 e S_2 são dois subespaços de V e V' é um subespaço de V que contenha S_1 e S_2, isto é, $S_1 \cup S_2 \subset V'$, então V' deverá conter todos os elementos da forma $u + v$, onde $u \in S_1$ e $v \in S_2$. Isto motiva a seguinte definição:

Definição: Sejam S_1 e S_2 dois subespaços de V. Definimos a soma de S_1 e S_2 como $S_1 + S_2 = \{u + v;\ u \in S_1\ e\ v \in S_2\}$.

Proposição: Se S_1 e S_2 dois subespaços de V, então $S_1 + S_2$ também é um subespaço de V.

Demonstração:

i. Como $0 \in S_1$ e $0 \in S_2$, logo $0 = 0 + 0 \in S_1 + S_2$;

ii. Sejam x , $y \in S_1 + S_2$, então $x = u_1 + u_2$ e $y = v_1 + v_2$, com u_1 , $v_1 \in S_1$ e u_2 , $v_2 \in S_2$, então $x + y = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \in S_1 + S_2$.

iii. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in S_1 + S_2$, então $x = u_1 + u_2$, onde $u_1 \in S_1$ e $u_2 \in S_2$, logo $\lambda x = \lambda(u_1 + u_2) = \lambda u_1 + \lambda u_2 \in S_1 + S_2$.

Proposição: Sejam V um subespaço vetorial e S_1 e S_2 dois subespaços de V. Então $S_1 + S_2$ é o menor subespaço vetorial de V que contém $S_1 \cup S_2$. Em outras palavras, se V' é um subespaço vetorial de V que contém $S_1 \cup S_2$, então $S_1 \cup S_2 \subset S_1 + S_2 \subset V'$.

Definição: Sejam S_1 e S_2 dois subespaços de V. Dizemos que $S_1 + S_2$ é a ***soma direta*** de S_1 e S_2 se $S_1 \cap S_2 = \{0\}$. Neste caso usaremos a notação $S_1 \oplus S_2$ para representar $S_1 + S_2$.

Proposição: Sejam S_1 e S_2 dois subespaços de V. Então $V = S_1 \oplus S_2$ se, e somente se, cada vetor $v \in V$ admite uma única decomposição $v = u_1 + u_2$, com $u_1 \in S_1$ e $u_2 \in S_2$.

Demonstração:

$(\Rightarrow)$ Por hipótese a decomposição existe, suponhamos que $v = u_1 + u_2 = v_1 + v_2$, onde $u_1, v_1 \in S_1$ e $u_2, v_2 \in S_2$. Daí, $u_1 - v_1 = v_2 - u_2$, onde $u_1 - v_1 \in S_1$ e $v_2 - u_2 \in S_2$, tendo em vista que $S_1 \cap S_2 = \{0\}$, temos que $u_1 - v_1 = v_2 - u_2 = 0$, logo $u_1 = v_1$ e $v_2 = u_2$.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que $0 \neq v \in S_1 \cap S_2$. Tomando $u_1 \in S_1$ e $u_2 \in S_2$, teremos:

$$u_1 + u_2 = (u_1 + v) + (u_2 - v).$$

Devido à unicidade que diz na hipótese, devemos ter que $u_1 = (u_1 + v)$ e $u_2 = (u_2 - v)$. Logo $v = 0$, provando assim que $S_1 \cap S_2 = 0$.

Exemplo: O espaço $\mathbb{R}^3$ é a soma direta dos subespaços $S_1 = \{(x, 0, 0);\ x \in \mathbb{R}\}$ e $S_2 = \{(0, y, z);\ y, z \in \mathbb{R}\}$. É imediato que $S_1 \cap S_2 = (0, 0, 0)$. Por outro lado,

$$\forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x, y, y) = (x, 0, 0) + (0, y, z) \in S_1 + S_2.$$

Definição: Sejam $S_1, \ldots, S_n$ subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. A soma de S_1 a S_n é definida por

$$S_1 + \ldots + S_n = \{u_1 + \ldots + u_n \ ; \ u_i \in S_i\}$$

Definição: Sejam $S_1, \ldots, S_n$ subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Dizemos que a soma de S_1 a S_n é uma soma direta se

$$S_i \cap \left(S_1 + \ldots + \overset{\wedge}{S_i} + \ldots + S_n \right) = \{0\}, \quad i = 1, \ldots, n$$

em que o termo $\overset{\wedge}{S_i}$ deve ser omitido da soma. Neste caso usaremos a notação $S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ para denotar a soma direita de S_1 a S_n.

Exercício: Verifique que $P_2(\mathbb{R})$ pode ser escrito como a soma direta dos seguintes subespaços vetoriais: $S_1 = \{a_0 \ ; \ a_0 \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{a_1 x ; \ a_1 \in \mathbb{R}\}$ e $S_3 = \{a_3 x^2 \ ; \ a_3 \in \mathbb{R}\}$.

3 COMBINAÇÃO LINEAR

3.1 INTRODUÇÃO E EXEMPLOS

Vimos no capítulo anterior que um subespaço vetorial é um subconjunto de um espaço vetorial que é fechado com relação à adição de vetores e também com relação à multiplicação por escalar. Em outras palavras, quando somamos dois vetores de um subespaço vetorial ou multiplicamos um vetor do subespaço por um escalar, o resultado é um elemento deste subespaço. Quando combinamos repetidas vezes estas ações, temos o que chamamos de combinação linear entre vetores. Mais precisamente, a definição que segue destaca isso:

Definição: Sejam $u_1,...,u_n$ elementos de um espaço vetorial V. Dizemos que u é uma ***combinação linear*** de $u_1,...,u_n$ se existirem números reais $\alpha_1,...,\alpha_n$ tais que $u=\alpha_1 u_1+...+\alpha_n u_n$.

Observação: Sejam S um subespaço vetorial de V. Se $u_1,...,u_n \in S$ e $\alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{R}$ então a combinação linear $\alpha_1 u_1+...+\alpha_n u_n \in S$.

Exemplos:

1) Em $P_2(\mathbb{R})$, o polinômio $p(x)=2-x^2$ é uma combinação linear dos polinômios $p_1(x)=1$, $p_2(x)=x$ e $p_3(x)=x^2$. Basta ver que $p(x)=2p_1(x)+0p_2(x)-p_3(x)$.

2) Sejam os vetores $v_1=(-1,2,1)$, $v_2=(1,0,2)$, $v_3=(-2,-1,0)$ em $\mathbb{R}^3$. Expresse os vetores $u=(-8,4,1)$ e $v=(0,0,0)$ como uma combinação linear de v_1, v_2, v_3.

Solução: Desejamos encontrar escalares $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$u=(-8,4,1)=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3 \quad \textbf{(1)}$$

Da equação (1), determinamos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} -\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3=-8 \\ 2\alpha_1 \qquad -\alpha_3=4 \\ \alpha_1+2\alpha_2 \qquad =1 \end{cases},$$

cuja solução é $\alpha_1=3,\alpha_2=-1,\alpha_3=2$. Portanto podemos escrever $u=3v_1-v_2+2v_3$.

Analogamente para $v=(0,0,0)$, temos agora o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 \qquad - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 \qquad = 0 \end{cases},$$

que possui como única solução é a trivial, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Logo, $v=0v_1+0v_2+0v_3$.

3.2 GERADORES

Definição: Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não vazio de V. Usaremos o símbolo $[S]$ para denotar o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S. Em outras palavras $u\in[S]$ se existirem $\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{R}$ e $u_1,...,u_n\in S$ tais que $u=\alpha_1u_1+...+\alpha_nu_n$.

Proposição: Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não vazio de V. Então $[S]$ é um subespaço vetorial de V.

Definição: Sejam V e S como acima. Diremos que $[S]$ é o ***subespaço vetorial gerado*** por S. Se $S=\{u_1,...,u_n\}$ também usaremos a notação $[S]=[u_1,...,u_n]$.

Proposição: Sejam S e T subconjuntos não vazios de um espaço vetorial V. Temos

1. $S\subset[S]$;
2. Se $S\subset T$, então $[S]\subset[T]$;
3. Se S é um subespaço vetorial, então $S=[S]$;
4. $[S\cup T]=[S]+[T]$.

Definição: Dizemos que um espaço vetorial V é ***finitamente gerado*** se existir um subconjunto finito $S\subset V$ tal que $V=[S]$.

São exemplos de espaços vetoriais finitamente gerados:

1. $P_n(\mathbb{R}) = [1, x, x^2, ..., x^n]$;

2. $\mathbb{R}^n$ é gerado por $e_1 = (1,0,...,0)$, $e_2 = (0,1,...,0)$, ... , $e_n = (0,...,0,1)$.

Observação: Para o caso particular de $S = \varnothing$, define-se $[S] = \{0\}$.

Exemplo: Determinar o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ gerado pelos vetores $p_1(x) = x^2$ e $p_2(x) = x^2 + x$.

Solução: Dado um $p(x) = ax^2 + bx + c \in P_2(\mathbb{R})$, este polinômio pertence ao subespaço gerado por $p_1(x) = x^2$ e $p_2(x) = x^2 + x$ se existirem escalares $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$ax^2 + bx + c = a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) = a_1(x^2) + a_2(x^2 + x) = (a_1 + a_2)x^2 + a_2 x.$$

Mas isto ocorre se, e somente se,

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = a \\ \quad a_2 = b \\ \quad 0 = c \end{cases} \Leftrightarrow c = 0, \text{ logo } p(x) = ax^2 + bx.$$

Portanto, o subespaço gerado pelos vetores $p_1(x)$ e $p_2(x)$ é $\{ax^2 + bx \; ; \; a, b \in \mathbb{R}\}$.

Exercício: Sejam $S_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \; x - y + z + t = 0\}$ e $S_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \; x + y - z + t = 0\}$. Encontre um número finito de geradores para os seguintes subespaços vetoriais: S_1, S_2, $S_1 \cap S_2$ e $S_1 + S_2$.

4 DEPENDÊNCIA LINEAR

4.1 INTRODUÇÃO E EXEMPLOS

No capítulo anterior ao estudarmos os geradores de um espaço vetorial procuramos encontrar um determinado conjunto de vetores de modo que qualquer vetor do espaço em questão pudesse ser escrito como combinação linear dos vetores deste conjunto. Por exemplo, se v e w geram um espaço V então para qualquer $u \in V$ é possível encontrar escalares α e β satisfazendo $u = \alpha v + \beta w$, ou seja,

$$\alpha v + \beta w - 1u = 0$$

Note que a combinação linear acima é nula, embora nem todos os escalares que aparecem na sua formação são nulos.

Vejamos agora a seguinte situação: será possível encontrar escalares α, β e γ, não todos nulos, de modo que, em $\mathbb{R}^3$ tenhamos

$$\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)?$$

A resposta é não. Isto significa que não é possível escrever nenhum dos vetores acima como combinação linear dos outros dois. Num certo sentido, os vetores do primeiro exemplo guardam uma certa dependência entre um e outro enquanto que, no segundo exemplo, os três vetores são independentes.

Vejamos, com as definições e exemplos que seguem como podemos tornar estes conceitos mais precisos.

Definição: Dizemos que uma sequência de vetores $u_1, \ldots, u_n$ de um espaço vetorial V é ***linearmente independente*** (LI, abreviadamente) se a combinação linear $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$ só for satisfeita quando $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Observação: Note que se $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, então $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$, porém a recíproca nem sempre é válida. Basta ver que, por exemplo, em $\mathbb{R}^2$ temos $(0,0) = 1(1,1) + 1(-1,-1)$, deste modo o conjunto de vetores $\{(1,1), (-1,-1)\}$ não é LI.

Definição: Dizemos que uma sequência de vetores $u_1,...,u_n$ de um espaço vetorial V é ***linearmente dependente*** (LD, abreviadamente) se não for linearmente independente.

Observações:

1) A definição de dependência linear para a sequência $u_1,...,u_n$ é equivalente a dizer que é possível encontrar números reais $\alpha_1,...,\alpha_n$ não todos nulos tais que $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = 0$.

2) Convencionamos que o conjunto vazio, $\varnothing$, é LI, pois não sabemos apresentar valores distintos nesse conjunto.

Exemplos:

1) Os vetores $0, u_1,...,u_n \subset V$, onde 0 é o elemento neutro de V, é uma sequência LD. Basta verificar que $1.0 + 0u_1 + ... + 0u_n = 0$.

2) Verifique se a sequência $(1,1,1),(1,1,0)\ e\ (1,0,0)$ é linearmente independente em $\mathbb{R}^3$.

Solução: É preciso verificar as possíveis solução de

$$\alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (0,0,0).$$

Isto equivale a resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta \qquad = 0 \\ \alpha \qquad\qquad = 0 \end{cases},$$

o qual possui como única solução $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Logo os vetores $(1,1,1),(1,1,0)\ e\ (1,0,0)$ são LI.

Exercício: Sejam $f(x) = \cos(2x)$, $g(x) = \cos^2(x)$ e $h(x) = sen^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $f, g\ e\ h$ são linearmente dependentes em $C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (conjunto das funções contínuas diferenciáveis $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

4.2 PROPRIEDADES DA DEPENDÊNCIA LINEAR

1) Se $u_1,...,u_n$ são LD. em um espaço vetorial V, então pelo menos um destes vetores se escreve como combinação linear dos outros;

2) Se $u_1,...,u_n$ são LD, então qualquer sequência finita de vetores de V que os contenha, também será LD;

3) Se $u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_m$ são linearmente independentes em um espaço vetorial V, então qualquer subseqüência destes vetores também é linearmente independente;

4) Se $u_1, \ldots, u_n$ são LI em um espaço vetorial V e $u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}$ é LD, então u_{n+1} é combinação linear de $u_1, \ldots, u_n$.

5) Sejam $u_1, \ldots, u_n$ vetores LI em um espaço vetorial V. Então cada vetor $v \in \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ se escreve de maneira única como $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, com $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

5 BASE E DIMENSÃO

5.1 BASE

A noção de base de um espaço vetorial é muito simples. Ela consiste em escolher um conjunto de geradores que seja o menor possível, isto é, um conjunto que gere o espaço, mas que se deste conjunto for subtraído qualquer elemento, o que resta não gera mais o espaço todo. Vejamos a definição precisa de base.

Definição: Seja $V \neq \{0\}$ um espaço vetorial finitamente gerado. Uma ***base*** de V é uma sequência de vetores linearmente independentes B de V e que também gera V.

Exemplos:

1) Os vetores $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Vê-se facilmente que os vetores de B são LI, e que todo elemento $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$.

2) Os $n+1$ polinômios $1, t, t^2, ..., t^n$ formam uma base para $P_n(\mathbb{R})$.

3) As matrizes

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

formam uma base para $M_2(\mathbb{R})$.

Teorema: Todo espaço vetorial $V \neq \{0\}$ finitamente gerado, admite uma base. Em outras palavras, há uma sequência de vetores LI de V formada por geradores.

Demonstração:

Como $V \neq \{0\}$ é finitamente gerado existem $u_1, ..., u_n \in V$ tais que $V = [u_1, ..., u_n]$. Se $u_1, ..., u_n$ forem LI, então esta sequência é uma base de V e não há nada mais a ser provado.

Suponhamos que $u_1,...,u_n$ sejam LD. Como $V \neq \{0\}$, existe $j \in \{1,...,n\}$j tal que $u_j \neq 0$. Por simplicidade, podemos supor que $u_1 \neq 0$. Agora, se todo u_j, $j = 2,...,n$ puder se escrever como combinação linear de u_1, então $V = [u_1]$ e $B = \{u_1\}$ é uma base de V. Caso isto não ocorra, é porque existe algum u_j, com $2 \leq j \leq n$ tal que u_1, u_j são LI. Por simplicidade, suponhamos que seja o u_2, isto é, u_1, u_2 são LI. Bem, se todos os vetores $u_3,...,u_n$ forem combinações lineares de u_1 e u_2 então $V = [u_1, u_2]$ e u_1, u_2 formam uma base de V.

Podemos repetir este processo e como o número de elementos de $B = \{u_1,...,u_n\}$ é finito, ele finda. Desse modo, existe uma sequência de vetores LI dentre os vetores B que gera V. Esta sequência forma uma base de V.

5.2 DIMENSÃO

Teorema: Em um espaço vetorial $V \neq \{0\}$ finitamente gerado toda base possui o mesmo número de elementos.

Definição: Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Se $V = \{0\}$ definimos a ***dimensão*** de V como sendo 0. Se $V \neq \{0\}$ definimos a dimensão de V como sendo o número de elementos de uma base qualquer de V. Usaremos o símbolo $\dim V$ para designar a dimensão de V.

Observação: Se um espaço vetorial não é finitamente gerado, dizemos que V possui dimensão infinita.

5.2.1 PROPRIEDADES

1. Todo espaço de dimensão infinita possui uma infinidade de vetores linearmente independentes;
2. Em um espaço vetorial de dimensão *m*, qualquer sequência com mais de *m* elementos é linearmente dependente;
3. Todo subespaço vetorial de um espaço vetorial de dimensão finita também tem dimensão finita;

4. Se V é um espaço vetorial n-dimensional e $u_1,...,u_n$ são vetores de V linearmente independentes, então estes vetores forma uma base para V.

Exemplos:

1) $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ **2)** $\dim(M_{n\times m}(\mathbb{R})) = nm$ **3)** $\dim(P_n(\mathbb{R})) = n+1$

Teorema (Complemento): Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Se os vetores $u_1,...,u_r$ são LI em V, com $r<n$, então existem $u_{r+1},...,u_n \in V$ tais que $u_1,...,u_r, u_{r+1},...,u_n$ formam uma base de V.

Exemplo: Encontre uma base do $\mathbb{R}^3$ contendo o vetor $(1,1,-1)$.

Solução: Como a dimensão do $\mathbb{R}^3$ é 3, precisamos encontrar mais dois vetores (a,b,c) e (x,y,z), que juntamente com $(1,1,-1)$ sejam LI, ou seja, devemos ter que se

$$\alpha_1(1,1,-1)+\alpha_2(a,b,c)+\alpha_3(x,y,z)=(0,0,0) \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0.$$

Isto é equivalente a mostrar que o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 a+\alpha_3 x=0 \\ \alpha_1+\alpha_2 b+\alpha_3 y=0 \\ -\alpha_1+\alpha_2 c+\alpha_3 z=0 \end{cases}$$

tem única solução, ou ainda, que a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & a & x \\ 1 & b & y \\ -1 & c & z \end{pmatrix}$$

possua determinante diferente de zero. O seu determinante é $x(b+c)-y(a+c)+z(b-a)$. Existe uma infinidade de valores pra que essa expressão seja diferente de zero, uma delas é tomar $(a,b,c)=(0,1,1)$ e $(x,y,z)=(0,0,1)$.

5.3 DIMENSÃO DA SOMA DE SUBESPAÇOS VETORIAIS

Proposição: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Se U e W são dois subespaços vetoriais de V, então

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W).$$

Corolário: Seja U um subespaço vetorial de um espaço vetorial de dimensão finita V. Se $\dim U=\dim V$, então $U=V$.

Observação: Note que se V, U e W são como na proposição acima e se além do mais tivermos $V=U+W$ e $\dim U+\dim W>\dim V$, então $U\cap W\neq\{0\}$, isto é, a soma $U+W$ não é direta.

Exemplo: Sejam $U=\{p(x)\in P_3(\mathbb{R});\ p(0)=p(1)=0\}$ e $V=\{p(x)\in P_3(\mathbb{R});\ p(-1)=0\}$. Encontre uma base para U, V, $U\cap V$ e $U+V$.

Solução:

U: Temos $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\in U \quad\Leftrightarrow\quad p(0)=p(1)=0$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a_0=0 \\ a_0+a_1+a_2+a_3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad p(x)=-(a_2+a_3)x+a_2x^2+a_3x^3=a_2(x^2-x)+a_3(x^3-x).$$

Desse modo, $U=[x^2-x,x^3-x]$, e estes polinômios são LI, pois como cada um tem graus distintos, nenhum pode ser múltiplo do outro. Assim, $B=\{x^2-x,x^3-x\}$ formam uma base para U.

V: $\quad p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\in V \quad\Leftrightarrow\quad p(-1)=0$

$$\Leftrightarrow\quad a_0-a_1+a_2-a_3=0$$

$$\Leftrightarrow\quad p(x)=a_0+(a_0+a_2-a_3)x+a_2x^2+a_3x^3$$

$$\Leftrightarrow\quad p(x)=a_0(1+x)+a_2(x^2+x)x+a_3(x^3-x).$$

Deste modo $V=[1+x,x^2+x,x^3-x]$ e estes polinômios são LI, pois como cada um tem graus distintos, nenhum pode ser múltiplo do outro. . Assim, $B=\{1+x,x^2+x,x^3-x\}$ formam uma base para V.

$U \cap V$: $\quad p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in U \cap V \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = a_2 = 0 \\ a_1 = -a_3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = -a_1(x^3 - x).$$

Logo $U \cap V = [x^3 - x]$ e $B = \{x^3 - x\}$ é uma base de $U \cap V$.

$U + V$: Temos que $\dim(U + V) = 2 + 3 - 1 = 4 = \dim(P_3(\mathbb{R}))$. Pelo corolário acima temos que $U + V = P_3(\mathbb{R})$, logo $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ é uma base de $U + V$.

5.3 COORDENADAS

Sejam V um espaço vetorial finitamente gerado e B uma base de V formada pelos vetores $u_1, ..., u_n$. Como B é uma base de V, todo elemento de $u \in V$ se escreve como $u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$, com os coeficientes $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Já sabemos que os coeficientes $\alpha_1, ..., \alpha_n$ são unicamente determinados pelo vetor u. Estes coeficientes são denominados coordenas de u com relação à base B. Representaremos as coordenadas de u com relação à base como

$$u_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Exemplos:

1) Mostre que os vetores $(1,1,1), (0,1,1)$ *e* $(0,0,1)$ formam uma base do $\mathbb{R}^3$. Encontre as coordenadas de $(1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ com relação à base B formada pelos vetores acima.

Solução: Já sabemos que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Para verificar se os vetores acima formam uma base de V, basta verificar se eles são LI e eles são, pois o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é $1 \neq 0$. Agora,

$$(1,2,0) = \alpha(1,1,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(0,0,1) = (\alpha, \alpha+\beta, \alpha+\beta+\gamma)$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases},$$

cuja única solução é $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e $\gamma = -2$. Desse modo, as coordenadas de $(1,2,0)$ com relação à base B são dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2) Mostre que os polinômios $1, x, x^2 - x$ formam uma base B para $P_2(\mathbb{R})$. Encontre as coordenadas de $1 + x + x^2$ com relação à base B. Encontre também as coordenadas deste mesmo polinômio com relação à base C formada pelos polinômios $1, x, x^2$.

Solução: Para verificar que $1, x, x^2 - x$ forma uma base para $P_2(\mathbb{R})$ basta mostrar que cada $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in P_2(\mathbb{R})$ se escrever de maneira única como combinação linear de $1, x, x^2 - x$. Isto é equivalente a mostrar que a equação $p(x) = \alpha 1 + \beta x + \gamma(x^2 - x)$ possui uma única solução $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Assim, temos

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \alpha 1 + \beta x + \gamma(x^2 - x)$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \alpha = a_0 \\ \beta - \gamma = a_1 \\ \gamma = a_2 \end{cases},$$

o qual possui uma única solução dada por $\alpha = a_0$, $\beta = a_1 + a_2$ e $\gamma = a_2$.

Com isso em mãos, vemos que as coordenadas de $1 + x + x^2$ com relação à base B são dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Note que com relação à base C formada por $1, x, x^2$ as coordenadas de $1 + x + x^2$ são dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6 MUDANÇA DE BASE

Como vimos no último exemplo do capítulo anterior as coordenadas de um elemento de um espaço vetorial podem variar quando se consideram bases distintas.

O que passaremos a estudar agora é como esta mudança ocorre, ou seja, como é possível encontrar as coordenadas de um vetor com relação a uma base sabendo-se suas coordenadas com relação a outra base.

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Sejam B e C bases de V formada pelos vetores $b_1,...,b_n$ e $c_1,...,c_n$, respectivamente. Como B é uma base, existem $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \le i, j \le n$ tais que

$$\begin{aligned} c_1 &= \alpha_{11}b_1 + \cdots + \alpha_{n1}b_n \\ &\vdots \\ c_n &= \alpha_{1n}b_1 + \cdots + \alpha_{nn}b_n \end{aligned}$$

Dessa forma, as coordenadas de $c_1,...,c_n$, com relação à base B, são respectivamente,

$$c_{1B} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, ..., \; c_{nB} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Reunimos estas informações sobre as coordenadas dos vetores da base C com relação à base B na seguinte matriz

$$M_B^C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

cujas colunas são formadas pelas coordenadas de $c_1, \ldots, c_n$ com relação à base B. A matriz M_B^C é chamada de ***matriz mudança de base*** da base B para a base C.

Antes de mostrarmos a relação que existe entre M_B^C e as coordenadas de um dado vetor com relação às bases B e C, vejamos como podemos encontrar a matriz mudança de base em um exemplo no $\mathbb{R}^3$.

Exemplo: Considere a base B de $\mathbb{R}^3$ formada pelos vetores $(1,0,1),(1,1,1)\, e\, (1,1,2)$. Considere também a base C formada pelos vetores $(1,0,0),(0,1,0)\, e\, (0,0,1)$. Encontre M_B^C.

Solução: Precisamos resolver

$$\begin{aligned}(1,0,0)&=\alpha_{11}(1,0,1)+\alpha_{21}(1,1,1)+\alpha_{31}(1,1,2)\\(0,1,0)&=\alpha_{12}(1,0,1)+\alpha_{22}(1,1,1)+\alpha_{32}(1,1,2)\\(0,0,1)&=\alpha_{13}(1,0,1)+\alpha_{23}(1,1,1)+\alpha_{33}(1,1,2)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned}(\alpha_{11}+\alpha_{21}+\alpha_{31},\alpha_{21}+\alpha_{31},\alpha_{11}+\alpha_{21}+2\alpha_{31})&=(1,0,0)\\(\alpha_{12}+\alpha_{22}+\alpha_{32},\alpha_{22}+\alpha_{32},\alpha_{12}+\alpha_{22}+2\alpha_{32})&=(0,1,0)\\(\alpha_{13}+\alpha_{23}+\alpha_{33},\alpha_{23}+\alpha_{33},\alpha_{13}+\alpha_{23}+2\alpha_{33})&=(0,0,1)\end{aligned}$$

Um momento de reflexão nos poupará um pouco de trabalho neste ponto. Note que cada linha acima representa um sistema de três equações com três incógnitas e que a matriz associada a cada um destes sistemas é a mesma. O que muda são os nomes das variáveis e o segundo membro. Utilizando como variáveis x, y e z, basta resolvermos o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

onde a, b e $c\in\mathbb{R}$. O sistema acima é equivalente a

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c-a\end{pmatrix}$$

cuja única solução é dada por $x=a-b$, $y=a+b-c$ e $z=c-a$.

Tomando $(a,b,c)=(1,0,0)$, obtemos $(\alpha_{11},\alpha_{21},\alpha_{31})=(1,1,-1)$.

Tomando $(a,b,c)=(0,1,0)$, obtemos $(\alpha_{12},\alpha_{22},\alpha_{32})=(-1,1,0)$.

Tomando $(a,b,c)=(0,0,1)$, obtemos $(\alpha_{13},\alpha_{23},\alpha_{33})=(0,-1,1)$.

Desta forma obtemos

$$M_B^C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

Vejamos agora como as coordenadas de um vetor se relacionam com respeito a duas bases de um espaço vetorial de dimensão finita.

Sejam B e C bases de um espaço vetorial de dimensão finita V formadas, respectivamente, pelos vetores $b_1,\ldots,b_n$ e $c_1,\ldots,c_n$. Dado um vetor v em V sejam

$$v_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad v_C = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

as suas coordenadas com relação às bases B e C, respectivamente. Se $M_B^C = (\alpha_{ij})$ representa a matriz de mudança de base de B para C, então como $c_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_i$, $j = 1, \dots, n$, obtemos

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i = \sum_{j=1}^{n} y_j c_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j \right) b_i,$$

onde na última igualdade invertemos a ordem da soma. Como os vetores $b_1, \dots, b_n$ são LI, segue-se que $x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j$, $i = 1, \dots, n$. Porém, estas últimas n equações podem ser escritas na seguinte fórmula matricial

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

ou, mais simplesmente

$$v_B = M_B^C v_c$$

Resumiremos este resultado na seguinte

Proposição: Sejam B e C bases de um espaço vetorial de dimensão finita V. Se v_B e v_C representam as coordenadas de um dado vetor $v \in V$ com relação às bases B e C, respectivamente e se M_B^C é a matriz de mudança de base da base B para a base C então

$$v_B = M_B^C v_c.$$

Proposição: Sejam B, C e D bases de um espaço vetorial n dimensional. Temos

$$M_B^D = M_B^C M_C^D.$$

Proposição: Sejam B e C bases de um espaço vetorial de dimensão finita V. Então a matriz M_B^C possui inversa e esta inversa é dada por M_C^B, a matriz de mudança da base C para a base B.

7 ESPAÇOS VETORIAIS EUCLIDIANOS

Em Geometria Analítica, foi definido o produto escalar ou produto interno usual de dois vetores no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$ e foram estabelecidas, por meio deste produto, algumas propriedades geométricas daqueles vetores. Agora se pretende generalizar o conceito de produto interno e, a partir dessa generalização, definir as noções de comprimento, distância e ângulo em espaços vetoriais mais genéricos.

7.1 PRODUTO INTERNO

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Chama-se ***produto interno***, uma função de $V\times V$ em $\mathbb{R}$ que a todo par de vetores $(u\,,v)\in V\times V$ associa um número real, indicado por $u\,.v$ ou $\langle u\,,v\rangle$. Ou mais explicitamente, $\forall\ u\,,v\in V$ temos

$$\begin{aligned}\langle\ ,\ \rangle : V\times V &\to \mathbb{R}\\ (u\,,v) &\mapsto \langle u\,,v\rangle\end{aligned}$$

obedecendo aos seguintes axiomas:

P1. $\langle u\,,v\rangle = \langle v\,,u\rangle$;

P2. $\langle u+v\,,w\rangle = \langle u\,,w\rangle + \langle v\,,w\rangle$;

P3. $\langle \alpha u\,,v\rangle = \alpha\langle u\,,v\rangle$;

P4. $\langle u\,,u\rangle \geq 0$ e $\langle u\,,u\rangle = 0 \Leftrightarrow = 0$.

Exemplos:

1) Verifique se a função

$$\begin{aligned}\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ \left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) &\mapsto x_1y_1+\cdots+x_ny_n\end{aligned}$$

é um produto interno.

Solução: Sejam $u=(x_1,\ldots,x_n)$, $v=(y_1,\ldots,y_n)$ e $w=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{R}^n$, então

P1. $\langle u,v\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n = y_1x_1+\cdots+y_nx_n = \langle v,u\rangle$;

P2.

$$\begin{aligned}\langle u+v,w\rangle &= \langle (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n),(z_1,\ldots,z_n)\rangle\\ &= (x_1+y_1)z_1+\cdots+(x_n+y_n)z_n\\ &= (x_1z_1+\cdots+x_nz_n)+(y_1z_1+\cdots+y_nz_n)\\ &= \langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle\end{aligned};$$

P3.

$$\begin{aligned}\langle \alpha(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\rangle &= \langle (\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n),(y_1,\ldots,y_n)\rangle\\ &= \alpha x_1y_1+\cdots+\alpha x_ny_n\\ &= \alpha(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)\\ &= \alpha\langle u,v\rangle\end{aligned};$$

P4. Se $u=(x_1,\ldots,x_n)\neq(0,\ldots,0)$, então $\langle u,u\rangle = \langle (x_1,\ldots,x_n),(x_1,\ldots,x_n)\rangle = {x_1}^2+\cdots{x_n}^2>0$.

2) Verifique se a função

$$\begin{aligned}f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2&\to\mathbb{R}\\ ((x_1,x_2),(y_1,y_2))&\mapsto x_1y_1-3x_2y_2\end{aligned}$$

é um produto interno.

Solução: Tome $u=(0,1)\in\mathbb{R}^2$. Temos que

$$\langle u,u\rangle = \langle (0,1),(0,1)\rangle = 0.0-3.1.1=-3<0,$$

portanto f não é um produto interno, pois vimos que o axioma **(P4)** falhou.

3) Seja V o espaço das funções reais contínuas no intervalo $[a,b]$ ($C([a,b];\mathbb{R})$). Se f e g pertencem a V,

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

define sobre V um produto interno (a verificação dos quatro axiomas fica a cargo do leitor).

Exercício: O traço de uma matriz quadrada A é a soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz e é denotado por $tr\,A$. Mostre que se $A, B \in M_n$, então

$$\langle A, B\rangle = tr\left(B^t A\right)$$

define um produto interno em M_n.

Definição: Um espaço vetorial real, de dimensão finita, no qual está definido um produto interno, é um ***espaço vetorial euclidiano***.

7.2 MÓDULO DE UM VETOR

Dado um vetor v de um espaço vetorial euclidiano V, chama-se ***módulo***, ***norma*** ou ***comprimento*** de v, o número real não negativo, indicado por $|v|$, definido por:

$$|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Exemplos:

1) Se $u = (x_1, x_2, x_3)$ for um vetor do $\mathbb{R}^3$ com produto interno usual, tem-se:

$$|u| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)\rangle} = \sqrt{x_1^{\;2} + x_2^{\;2} + x_3^{\;2}}.$$

2) Se $V = P_1(\mathbb{R})$ e $p(x) = x + 1$ e $p(x) \in C([0,1];\mathbb{R})$ com o produto interno definido no exemplo (3) anterior, temos que

$$|p(x)| = \sqrt{\langle p(x), p(x)\rangle} = \sqrt{\int_0^1 p(x)^2\,dx} = \sqrt{\int_0^1 (x+1)^2\,dx} = \sqrt{\left.\left(x + x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1} = \sqrt{\left(1+1+\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

7.2.1 PROPRIEDADES DO MÓDULO

Seja V um espaço vetorial euclidiano

M1. $|v| \geq 0, \quad \forall\, v \in V$ e $|v| = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; v = 0$;

M2. $|\alpha v| = |\alpha||v|, \quad \forall\, v \in V \;\; e \;\; \alpha \in \mathbb{R}$;

M3. $|\langle u, v \rangle| \leq |u||v|, \quad \forall u, v \in V$; (desigualdade de Cauchy-Schwarz)

M4. $|u + v| \leq |u| + |v|, \quad \forall u, v \in V$. (desigualdade triangular)

7.3 DISTÂNCIA ENTRE VETORES

Num espaço euclidiano V definimos a distância entre $u, v \in V$ como

$$d(u, v) = |u - v|.$$

7.3.1 PROPRIEDADES DA DISTÂNCIA

D1. $d(u, v) \geq 0, \; \forall u, v \in V$ e $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$;

D2. $d(u, v) = d(v, u)$;

D3. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v), \; \forall u, v, w \in V$.

Exemplo: Com relação ao produto interno usual, calcule a distância entre os vetores $u = (1, 1, 3, 2)$ e $v = (2, 2, 1, 0)$ de $\mathbb{R}^4$.

Solução: $\quad d(u, v) = |u - v| = \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2 + (3-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{10}$.

7.4 ÂNGULO ENTRE DOIS VETORES

O cálculo do ângulo entre dois vetores é uma aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Se $u, v \neq 0$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle u, v\rangle| \leq |u||v| \Rightarrow \frac{|\langle u, v\rangle|}{|u||v|} \leq 1.$$

Relembremos, agora que $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$. Logo, voltando ao que tínhamos,

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|} \leq 1.$$

Logo, existe um único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{|\langle u, v\rangle|}{|u||v|} \leq 1.$$

E $\cos\theta = \dfrac{\langle u, v\rangle}{|u||v|}$, onde θ é o ângulo entre os vetores u e v.

Exemplo: Seja V um espaço vetorial euclidiano e $u, v \in V$. Determinar o cosseno do ângulo entre os vetores u e v, sabendo que $|u| = 3$, $|v| = 7$ e $|u+v| = 4\sqrt{5}$.

Solução: $|u+v| = \sqrt{\langle u+v, u+v\rangle}$ ou ainda, $|u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$.

Assim temos,

$$\begin{aligned}(4\sqrt{5})^2 &= 3^2 + 2\langle u, v\rangle + 7^2\\ 80 &= 9 + 2\langle u, v\rangle + 49\\ \langle u, v\rangle &= 11\end{aligned}$$

Logo,

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|} = \frac{11}{3.7} = \frac{11}{21}.$$

7.5 VETORES ORTOGONAIS

Definição: Seja V um espaço vetorial euclidiano. Diz-se que dois vetores $u, v \in V$ são ***ortogonais***, e se representa por $u \perp v$, se, e somente se, $\langle u, v \rangle = 0$.

Exemplo: Sejam $V = P_2(\mathbb{R})$, $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$, $p(x) = x$ e $q(x) = x^2$. Verifique se p, q são ortogonais.

Solução: $$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx = \int_{-1}^{1} x.x^2 dx = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 0.$$

Logo, pela definição p e q são ortogonais.

Observação: O vetor $0 \in V$ é ortogonal a qualquer $v \in V$.

7.6 CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

Definição: Seja V um espaço vetorial euclidiano. Diz-se que um ***conjunto de vetores*** $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ ***é ortogonal***, se dois vetores quaisquer, distintos, são ortogonais, isto é, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$.

Exemplo: No $\mathbb{R}^3$, o conjunto $\{(1,2,-3),(3,0,1),(1,-5,-3)\}$ é ortogonal em relação ao produto interno usual, pois:

$\langle (1,2,-3),(3,0,1) \rangle = 0$, $\langle (3,0,1),(1,-5,-3) \rangle = 0$ e $\langle (1,2,-3),(1,-5,-3) \rangle = 0$.

Teorema: Um conjunto ortogonal de vetores não nulos $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente.

7.6.1 BASE ORTOGONAL

Diz-se que uma base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V é ortogonal se os seus vetores são dois a dois ortogonais.

Assim, levando em conta o teorema anterior, se $\dim V = n$, qualquer conjunto de n vetores não nulos e dois a dois ortogonais, constitui uma base ortogonal. Por exemplo, o conjunto apresentado no exemplo anterior, $\{(1,2,-3),(3,0,1),(1,-5,-3)\}$, é uma base do R^3.

7.6.2 BASE ORTONORMAL

Definição: Uma base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de um espaço vetorial euclidiano V é ***ortonormal*** se B é ortogonal e todos os seus vetores são unitários, isto é:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & , se\ i \neq j \\ 1 & , se\ i = j \end{cases}.$$

Exemplo: Em relação ao produto interno usual, temos:

1) $B = \{(1,0),(0,1)\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$;

2) $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, sendo $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $v_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ e $v_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$, pois

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = 0 \qquad \text{e} \qquad \langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = \langle v_3, v_3 \rangle = 1.$$

Observação: Sabemos que se v é um vetor não nulo, o vetor $\frac{v}{|v|}$ é unitário. Diz-se nesse caso, que v está normalizado. O processo que transforma v em $\frac{v}{|v|}$ chama-se ***normalização***. Assim, uma base ortonormal sempre pode ser obtida de uma base ortogonal normalizando cada vetor. Logo, se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é um conjunto ortogonal de vetores, então $\left\{\frac{v_1}{|v_1|}, \frac{v_2}{|v_2|}, \ldots, \frac{v_n}{|v_n|}\right\}$ é um conjunto ortonormal de vetores.

7.7 PROCESSO DE ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHIMIDT

A demonstração do próximo teorema fornece um método para se conseguir uma base ortonormal de um espaço euclidiano a partir de uma base dada.

Teorema: Todo espaço euclidiano de dimensão finita admite uma base ortonormal.

Demonstração: A prova é por indução sobre a dimensão do espaço.

Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita. Se $\dim V = 1$, então existe $v_1 \in V$, tal que $V = [v_1]$. Como $v_1 \neq 0$, tomamos

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$$

e, dessa forma, $\{u_1\}$ é um conjunto ortonormal e $V = [v_1]$, ou seja, $\{u_1\}$ forma uma base ortonormal para V.

Se $\dim V = 2$, então existem $v_1, v_2 \in V$ tais que $V = [v_1, v_2]$. Coloque $u_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$. Nosso trabalho se resume em encontrar um vetor ortogonal a u_1 e que tenha norma 1. Primeiramente vamos encontrar um vetor ortogonal a u_1. Vamos tomar $u_2' = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$. Note que $u_2' \neq 0$, pois v_1 e v_2 são linearmente independentes e u_2' é ortogonal a u_1, pois

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_2' \rangle &= \langle u_1, v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 \rangle = \langle u_1, v_2 \rangle - \langle u_1, \langle v_2, u_1 \rangle u_1 \rangle \\ &= \langle u_1, v_2 \rangle - \langle v_2, u_1 \rangle \langle u_1, u_1 \rangle = \langle u_1, v_2 \rangle - \langle u_1, v_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Resta agora normalizar u_2', isto é, definimos $u_2 = \frac{u_2'}{|u_2'|}$, e então

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} \qquad \text{e} \qquad u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1}{|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1|}$$

formam uma base ortonormal de V.

Dado $n \in \mathbb{N}$, suponha que tenhamos provado o teorema para todos os espaços euclidianos de dimensão $n-1$. Queremos provar que o mesmo é verdade para todo espaço euclidiano de dimensão n.

Se $\dim V = n \geq 2$, então existem $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ que formam uma base de V. Note que $U = [v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}]$ é um subespaço de V de dimensão $n-1$. Desse modo, usando a nossa hipótese de indução, é possível tomar uma base ortonormal de U. Chamemos estes vetores da base ortonormal de U por $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Como $v_n \notin U$ então o vetor

$$u_n' = v_n - \langle v_n, u_1 \rangle u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1} \rangle u_{n-1}$$

é não nulo e ortogonal a todos os elementos de U (e, portanto, ortogonal a $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$). Para finalizar, tomamos como base de V os vetores $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n$, onde

$$u_n = \frac{u_n'}{|u_n'|} = \frac{v_n - \langle v_n, u_1 \rangle u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1} \rangle u_{n-1}}{|v_n - \langle v_n, u_1 \rangle u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1} \rangle u_{n-1}|}.$$

Observação: No caso de um espaço euclidiano tridimensional, se v_1, v_2, v_3 formam uma base, então uma base ortonormal deste espaço pode ser dada pelos vetores

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} \quad , \quad u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1}{|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1|} \quad \text{e} \quad u_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2}{|v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2|}.$$

Exemplo: Encontre uma base ortonormal de $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.

Solução: Usaremos o processo de Gram-Schmidt para construir uma base ortonormal a partir da base formada pelos polinômios $1, x, x^2$. Temos

$$|1| = \int_0^1 1^2\, dx = 1$$

e colocamos $p_1(x) = 1$. Seguindo o processo, definimos

$$p_2(x) = \frac{x - \langle x, 1\rangle 1}{\left| x - \langle x, 1\rangle 1 \right|},$$

onde $\langle x, 1\rangle = \int_0^1 x.1dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$ e $\left| x - \langle x, 1\rangle 1 \right| = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{12}$.

Assim, $$p_2(x) = \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3}(2x - 1).$$

Por fim colocamos $$p_3(x) = \frac{x^2 - \langle x^2, 1\rangle 1 - \langle x^2, \sqrt{3}(2x-1)\rangle \sqrt{3}(2x-1)}{\left| x^2 - \langle x^2, 1\rangle 1 - \langle x^2, \sqrt{3}(2x-1)\rangle \sqrt{3}(2x-1) \right|},$$

onde $\langle x^2, 1\rangle = \int_0^1 x^2.1dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$, $\langle x^2, \sqrt{3}(2x-1)\rangle = \sqrt{3}\int_0^1 x^2(2x-1)dx = \frac{\sqrt{3}}{6}$

e $\left| x^2 - \langle x^2, 1\rangle 1 - \langle x^2, \sqrt{3}(2x-1)\rangle \sqrt{3}(2x-1) \right|^2 = \left| x^2 - x + \frac{1}{6} \right|^2 = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right)^2 dx = \frac{1}{180}$.

Assim, $$p_3(x) = \sqrt{180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) = \sqrt{5}\left(6x^2 - 6x + 1\right).$$

Desta forma, uma base ortonormal para $P_2(\mathbb{R})$ é dada por

$$p_1(x) = 1, \qquad p_2(x) = \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3}(2x - 1), \qquad p_3(x) = \sqrt{180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) = \sqrt{5}\left(6x^2 - 6x + 1\right).$$

8 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Nos temas anteriores nos detivemos estudando alguns aspectos intrínsecos dos espaços vetoriais finitamente gerados: base e dimensão, principalmente. Neste tema, o nosso enfoque está em torno de analisar as correspondências entre espaços vetoriais.

O leitor já deve estar familiarizado com o conceito de funções, principalmente com aquelas que estão definidas em um subconjunto da reta e tomam seus valores também no conjunto dos números reais. Nosso próximo passo é estudar funções que têm como domínio um espaço vetorial e que tomam seus valores em outro espaço vetorial. Note que os valores tomados são, na verdade, vetores. No entanto, vamos nos restringir a apenas alguns tipos especiais dentre estas funções. Estamos interessados em funções que preservem as operações existentes no espaço vetorial que atua como o seu domínio e aquelas do espaço vetorial que age como contra-domínio.

Por exemplo, por preservar a adição de vetores entendemos que ao tomar dois vetores no domínio da função o valor que esta deve ter para a soma destes dois vetores é a soma dos valores que ela possui para cada um dos vetores. De maneira semelhante a função deve preservar o produto por escalar. Funções com estas propriedades são chamadas de transformações lineares. Mais precisamente, temos:

Definição: Sejam U e V espaços vetoriais. Dizemos que uma função $T:U \to V$ é uma ***transformação linear*** se forem verificadas as seguintes condições:

i. $T(u+v)=T(u)+T(v)$, $\quad \forall\ u,v \in U$;

ii. $T(\lambda u)=\lambda T(u)$, $\quad \forall\ u \in U \quad e \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Observações:

1) Note que $T:U \to V$ é uma transformação linear se, e somente se, $T(\lambda u+\mu v)=\lambda T(u)+\mu T(v)$, para todo $u,v \in U$ e $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.

2) Note que pelo item (ii) da definição, temos que

$$T(0)=T(0.0)=0T(0)=0.$$

Ou seja, toda transformação linear de U em V leva o elemento neutro de U no elemento neutro de V.

3) Uma transformação linear de U em U (é o caso de $V = U$) é chamada de ***operador linear***.

A seguir listamos alguns exemplos de transformações lineares definidas em vários espaços vetoriais.

1) $T : U \to V$ dada por $T(u) = 0$, para todo $u \in U$. T é chamada de ***transformação nula***.

2) $T : U \to V$ dada por $T(u) = u$, para todo $u \in U$. T é chamada de ***transformação identidade***.

3) $T : P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$T\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right) = \left(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\right).$$

4) Se $A \in M_{m \times n}$ é uma matriz dada, definimos $T : M_{n \times 1} \to M_{m \times 1}$, por $T(X) = AX$, o produto de A com X, para todo $X \in M_{n \times 1}$.

5) A aplicação derivada $D : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ que leva $f \in P_n(\mathbb{R})$ em sua derivada, isto é, $D(f) = f'$.

6) A projeção ortogonal do $\mathbb{R}^3$ sobre o plano *xy*,

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, 0) \end{aligned}$$

Os exemplos abaixo são de funções entre espaços vetoriais que *não* são transformações lineares.

7) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x, y, z) = x + y + z + 1$. Note que $T(0, 0, 0) = 1 \neq 0$.

8) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = x^2$. Observe que $T(-1) = 1 = T(1)$. Logo não temos $T(-1) = -T(1)$.

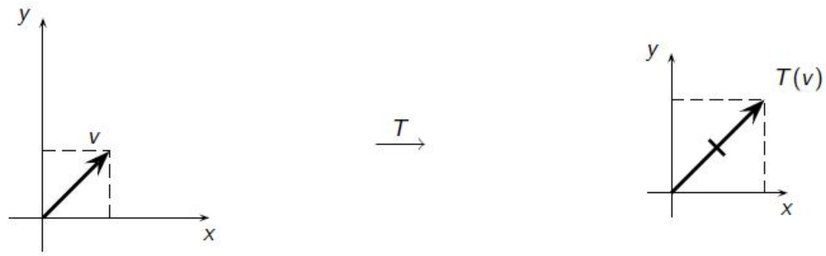
8.1 EXEMPLOS GEOMÉTRICOS DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Apresentaremos uma visão geométrica das transformações lineares, exibindo exemplos de transformações do plano no plano ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$). Veremos assim que, por exemplo, uma expansão, uma rotação e certas deformações podem ser expressas por meio de transformações lineares.

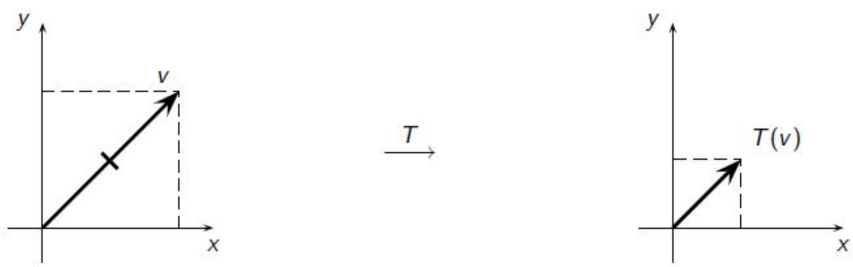
8.1.1 EXPANSÃO OU CONTRAÇÃO UNIFORME

Uma transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que a cada vetor $v \in \mathbb{R}^2$ é associado a um múltiplo deste, ou seja, $v \mapsto \alpha v$, com $\alpha \in R$, é denominada expansão ou contração, conforme o valor de $|\alpha|$. A saber, respectivamente, $|\alpha| > 1$ ou $0 < |\alpha| < 1$.

Exemplo: A transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = 2(x, y)$ leva cada vetor do plano num vetor de mesma direção e sentido de v, mas de módulo maior, exatamente o dobro.

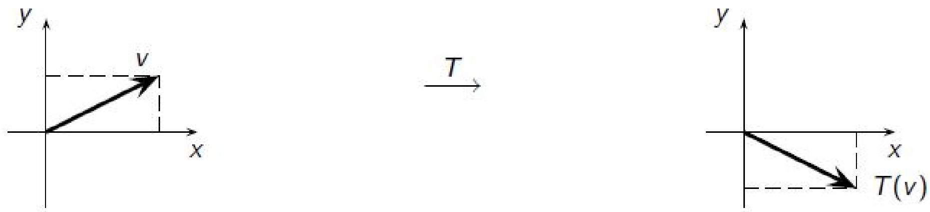


Se fizéssemos $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = \dfrac{1}{2}(x, y)$, T seria uma contração.



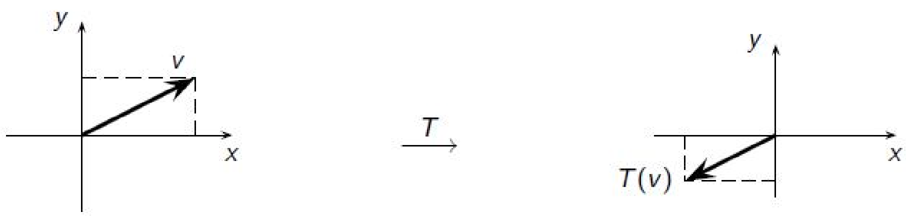
8.1.2 REFLEXÃO EM TORNO DO EIXO *x*

A transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x, -y)$ é chamada de reflexão em torno do eixo *x*.



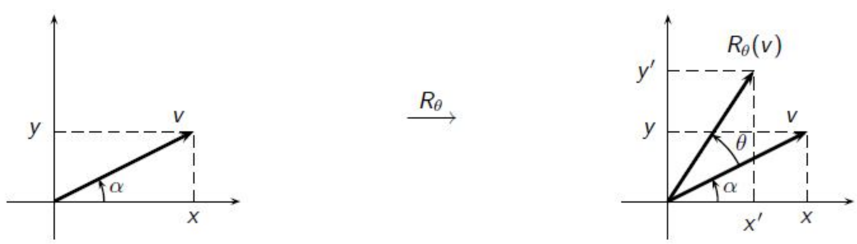
8.1.3 REFLEXÃO EM TORNO DA ORIGEM

A transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y)=(-x,-y)$ leva um vetor v em seu simétrico em relação a origem, $-v$.



8.1.4 ROTAÇÃO

Veremos aqui a transformação linear no plano que gira um vetor de um ângulo θ no sentido anti-horário.



Observando a figura acima temos que:

$$x' = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\,\alpha\cos\,\theta - rsen\;\alpha\;sen\;\theta\,.$$

Mas $r\cos\,\alpha = x$ e $r\,sen\;\alpha = y$, então $x' = x\cos\theta - y\,sen\,\theta$. Analogamente, tem-se

$$y' = rsen(\alpha+\theta) = rsen\;\alpha\cos\,\theta + rsen\;\theta\cos\,\alpha = y\cos\,\theta + xsen\;\theta\,.$$

Assim, $R_\theta(x,y) = (x\cos\,\theta - y\,sen\;\theta\,,\,y\cos\,\theta + xsen\;\theta)$.

Proposição: Seja U um espaço vetorial com base $u_1,...,u_n$. Toda transformação linear $T:U \to V$ fica determinada por $T(u_1),\dots,T(u_n)$, ou seja, conhecidos estes vetores, conhece-se $T(u)$ para qualquer $u \in U$.

Exemplo: Encontre uma transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,2)=(3,-1)$ e $T(0,1)=(1,2)$.

Solução: Note que $(1,2)$ e $(0,1)$ formam um base para o $\mathbb{R}^2$. Se $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, então fica fácil verificar que $(x,y)=x(1,2)+(y-2x)(0,1)$. Deste modo, a transformação T deve satisfazer:

$$\begin{aligned} T(x,y)=T(x(1,2)+(y-2x)(0,1)) &= xT(1,2)+(y-2x)T(0,1) \\ &= x(3,-1)+(y-2x)(1,2) \\ &= (x+y,2y-5x) \end{aligned}$$

Verifica-se facilmente que a transformação T, como definida acima, é linear e satisfaz as condições pedidas.

8.2 NÚCLEO E IMAGEM

Definição: Uma aplicação $T:U \to V$ se diz ***injetora*** se, e somente se,

$$\forall u_1,u_2 \in U \;,\quad T(u_1)=T(u_2) \Rightarrow u_1=u_2\,,$$

ou equivalentemente,

$$\forall u_1,u_2 \in U,\;\; u_1 \neq u_2,\; \Rightarrow T(u_1)\neq T(u_2).$$

Exemplo: A aplicação $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y)=(x,-y)$ é uma aplicação injetora, pois se $T(x_1,y_1)=T(x_2,y_2) \Rightarrow (x_1,-y_1)=(x_2,-y_2) \Rightarrow x_1=x_2 \;\; e \;\; -y_1=-y_2$, ou seja, $x_1=x_2 \;\; e \;\; y_1=y_2$, logo $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$.

Definição: A ***imagem de uma transformação linear*** $T:U \to V$ é o conjunto de vetores $v\in V$ que são imagens de algum $u \in U$. Indica-se esse conjunto por $\mathrm{Im}(T)$ ou $T(U)$. Simbolicamente, temos

$$\mathrm{Im}(T)=\{v\in V\,;\; v=T(u)\;,\; u\in U\}.$$

Se $\operatorname{Im}(T) = V$, então diz-se que T é sobrejetora, isto é, para todo $v \in V$, existe pelo menos um $u \in U$ tal que $T(u) = v$. Formalmente temos isto na seguinte definição:

Definição: Uma aplicação $T : U \to V$ se diz ***sobrejetora*** se, e somente se, $\operatorname{Im}(T) = V$, ou seja, para todo $v \in V$ existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$.

Exemplo: A aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (0, x + y, 0)$ não é sobrejetora, pois o elemento $(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ não é imagem de nenhum elemento $u \in \mathbb{R}^2$ por T.

Exemplo: Seja V um espaço vetorial de dimensão 1. Mostre que qualquer transformação linear não nula $T : U \to V$ é sobrejetora.

Solução: Como T é não nula, existe $u_0 \in U$ tal que $T(u_0) \neq 0$. Já que V tem dimensão 1, então qualquer base de V é constituída de apenas um elemento, e como $T(u_0) \in V$ e não nulo (portanto LI), ele próprio forma uma base de V. Assim, dado $v \in V$ existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha T(u_0) = T(\alpha u_0)$, ou seja, T é sobrejetora.

Definição: Seja $T : U \to V$ uma transformação linear

i. Se $X \subset U$, definimos a imagem de X por T, como sendo o conjunto $T(X) = \{T(x);\ x \in X\}$;

ii. Se $Y \subset V$, definimos a imagem inversa de Y por T, como sendo o conjunto $T^{-1}(Y) = \{u \in U;\ T(u) \in Y\}$;

Proposição: Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Temos

i. Se W é um subespaço vetorial de U, então $T(W)$ é um subespaço vetorial de V;

ii. Se W é um subespaço vetorial de V, então $T^{-1}(W)$ é um subespaço vetorial de U.

Definição: O ***núcleo de uma transformação linear*** $T : U \to V$ é o subespaço vetorial de U dado por $T^{-1}(\{0\})$, ou seja, é o conjunto $\{u \in U;\ T(u) = 0\}$. Denotamos o núcleo de T como $Ker(T)$ ou $N(T)$.

Exemplo: Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x,y,z)=(x-y+4z,3x+y+8z)$, determine $N(T)$.

Solução: Temos que $N(T)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\, T(x,y,z)=0\}$, isto é, um vetor $(x,y,z)\in N(T)$ se, e somente se,

$$(x-y+4z,3x+y+8z)=(0,0)$$

ou,

$$\begin{cases} x-y+4z=0 \\ 3x+y+8z=0 \end{cases},$$

que é um sistema homogêneo de solução $x=-3z$ e $y=z$. Logo

$$N(T)=\{(-3z,z,z);\, z\in\mathbb{R}\}=\{z(-3,1,1);\, z\in\mathbb{R}\}=\langle(-3,1,1)\rangle$$

8.2.1 PROPRIEDADES DO NÚCLEO

1) O núcleo de uma transformação linear $T:U\to V$ é um subespaço vetorial de U;

2) Uma transformação linear $T:U\to V$ é injetora se, e somente se, $N(T)=\{0\}$.

8.2.2 PROPRIEDADES DA IMAGEM

1. $\mathrm{Im}(T)\subset V$ e $\mathrm{Im}(T)\neq\varnothing$, pois $0=T(0)\in\mathrm{Im}(T)$;

2. O conjunto $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de V.

Teorema do Núcleo e da Imagem: Sejam U e V espaços vetoriais e $T:U\to V$ uma transformação linear. Suponha que U tenha dimensão finita. Temos

$$\dim\, U=\dim\, N(T)+\dim\, \mathrm{Im}(T).$$

Corolário: Se U e V são espaços vetoriais de dimensão finita, tais que $\dim U=\dim V$ e se $T:U\to V$ é uma transformação linear, então as seguintes condições são equivalentes:

1. T é sobrejetora;

2. T é injetora;

3. T é bijetora;

4. T leva base de U em bases de V, isto é, se $u_1,\ldots,u_n$ é uma base de U, então $T(u_1),\ldots,T(u_n)$ é uma base de V.

8.2.3 ISOMORFISMO

Definição: Chama-se ***isomorfismo*** do espaço vetorial U em V a uma transformação linear $T:U\to V$, que é bijetora

Neste caso, os espaços vetoriais U e V são ditos isomorfos, em particular, todo espaço vetorial de dimensão n é isomorfo ao $\mathbb{R}^n$. Assim, dois espaços vetoriais de dimensão finita são isomorfos se tiverem a mesma dimensão. A todo isomorfismo $T:U\to V$ corresponde um isomorfismo inverso $T^{-1}:V\to U$, que também é linear.

Exemplos:

1) O operador linear $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y)=(2x+y,3x+2y)$ é um isomorfismo no $\mathbb{R}^2$. Como $\dim U=\dim V=2$, pelo corolário acima, basta mostrar que T é injetora. De fato: $N(T)=\{(0,0)\}$, o que implica T ser injetora.

2) A transformação linear $T:P_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^3$, dada por $T(at^2+bt+c)=(a,a+b,b-c)$ é também um isomorfismo. (Verificar!)

3) Seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z)=(x-2y,z,x+y)$. Mostre que T é um isomorfismo e calcule sua inversa T^{-1}.

Solução: Vamos mostrar que T é injetora, logo, pelo corolário, teremos que T é um isomorfismo. Mas $N(T)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\,T(x,y,z)=0\}$ e $(x,y,z)\in N(T)$ se, e somente se, $(x-2y,z,x+y)=(0,0,0)$. Resolvendo o sistema linear

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \\ x+y=0 \end{cases},$$

achamos que $x=y=z=0$ é a única solução e, portanto, T é um isomorfismo. Tomando base a base canônica do $\mathbb{R}^3$, sua imagem pela T é

$$\{T(1,0,0),T(0,1,0),T(0,0,1)\}=\{(1,0,1),(-2,0,1),(0,1,0)\},$$

que é ainda uma base do $\mathbb{R}^3$ pelo item (4) do corolário acima. Do fato de T ser um isomorfismo, calculemos sua aplicação inversa.

Como $T(1,0,0)=(1,0,1), T(0,1,0)=(-2,0,1), T(0,0,1)=(0,1,0)$, temos que $T^{-1}(1,0,1)=(1,0,0), T^{-1}(-2,0,1)=(0,1,0), T^{-1}(0,1,0)=(0,0,1)$. Queremos calcular $T^{-1}(x,y,z)$. Para isto, escrevemos (x,y,z) em relação à base $\{(1,0,1),(-2,0,1),(0,1,0)\}$, obtendo:

$$(x,y,z)=\frac{x+2z}{3}(1,0,1)+\frac{z-x}{3}(-2,0,1)+y(0,1,0).$$

Então,

$$T^{-1}(x,y,z)=\frac{x+2z}{3}T^{-1}(1,0,1)+\frac{z-x}{3}T^{-1}(-2,0,1)+yT^{-1}(0,1,0).$$

Ou seja,

$$T^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{x+2z}{3},\frac{z-x}{3},y\right).$$

8.3 MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Veremos nesta seção que, em certo sentido, o estudo das transformações lineares pode ser reduzido ao estudo das matrizes.

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita. Fixemos uma base B de U formada por vetores $u_1,\ldots,u_n$ e uma base C de V formada por vetores $v_1,\ldots,v_m$. Se $T:U\to V$ é uma transformação linear podemos escrever

$$T(u_j) = \alpha_{1j} v_1 + \cdots + \alpha_{mj} v_m \qquad j = 1, \ldots, n.$$

A matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

é chamada de ***matriz da transformação*** T com relação às bases B e C, e é denotada por $[T]_{B,C}$ ou $[T]_B^C$. No caso em que $U = V$ e $B = C$ usaremos a notação $[T]_B$.

Exemplos:

1) Encontre a matriz de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, x - z)$ com relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

Solução: Temos

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1) \\ T(0,1,0) &= (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1) \\ T(0,0,1) &= (0,-1) = 0(1,0) - 1(0,1) \end{aligned}$$

Assim, $[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Dadas as bases $B = \{(1,1), (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $C = \{(0,3,0), (-1,0,0), (0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz é $[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Solução: Por definição temos

$$\begin{aligned} T(1,1) &= 0(0,3,0) - 1(-1,0,0) - 1(0,1,1) = (1,-1,-1) \\ T(0,1) &= 2(0,3,0) + 0(-1,0,0) + 3(0,1,1) = (0,9,3) \end{aligned}$$

Devemos agora encontrar $T(x,y)$. Para isto, escrevemos (x,y) em relação à base B:

$$(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1).$$

Aplicando T e usando a linearidade, temos

$$\begin{aligned} T(x,y) &= xT(1,1) + (y-x)T(0,1) \\ &= x(1,-1,-1) + (y-x)(0,9,3) \\ &= (x, 9y-10x, 3y-4x). \end{aligned}$$

8.3.1 PROPRIEDADES

1. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita, com bases B e C, respectivamente. Se $S, T : U \to V$ são transformações lineares e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ então

$$[\lambda T + \mu S]_{B,C} = \lambda [T]_{B,C} + \mu [S]_{B,C}$$

2. Se B e C são bases de um espaço vetorial V de dimensão finita e $I : V \to V$ é a identidade em V, então $[I]_{B,C} = M_B^C$.

3. Sejam U, V e W espaços vetoriais de dimensão finita. Sejam $T : U \to V$ e $S : V \to W$ transformações lineares. Se B, C e D são bases de U, V e W, respectivamente, então

$$[S \circ T]_{B,D} = [S]_{C,D} [T]_{B,C}.$$

4. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita, com bases B e C, respectivamente. Se $T : U \to V$ é uma transformação linear que possui inversa T^{-1}, então $[T^{-1}]_{C,B} = [T]^{-1}{}_{B,C}$.

5. Seja V espaço vetorial de dimensão finita. Se $T : V \to V$ é uma TL e B e C são bases de V, então

$$[T]_{C,C} = M_C^B [T]_{B,B} M_B^C$$

6. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita, com bases B e C, respectivamente. Se $T : U \to V$ é uma TL e $u \in U$ então, representando por $[T(u)]_C$ e $[u]_B$ as coordenadas dos vetores $T(u)$ e u, respectivamente, temos

$$[T(u)]_C = [T]_{B,C}[u]_B .$$

7. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita, com bases B e C, respectivamente. Então $T:U \to V$ é um isomorfismo, se e somente se, $[T]_{B,C}$ possui inversa.

Exemplos:

1) Considere B a base de $\mathbb{R}^2$ formada pelos vetores $(1,1)$ e $(1,-1)$. Seja $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma TL tal que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Encontre $[T]_C$, onde C é a base canônica do $\mathbb{R}^2$.

Solução: Como $(1,0) = \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1)$ e $(0,1) = \frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1)$, obtemos $M_B^C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e $M_C^B = \left(M_B^C\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Assim,

$$[T]_C = M_C^B [T]_B M_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Verifique se $T:\mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ dada por $T(a,b) = a + (a+b)x$ é um isomorfismo.

Solução: Considere as bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $P_1(\mathbb{R})$. Como $T(1,0) = 1 + x$ e $T(0,1) = x$, a matriz de T com relação a estas bases e dada por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como esta matriz possui inversa, segue que T é um isomorfismo.

3) Seja a transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, em que $B = \{(1,0),(0,1)\}$ é a base canônica do R^2, $C = \{(1,0,1),(-2,0,1),(0,1,0)\}$ é a base do R^3. Qual é a imagem do vetor $v = (2,-3)$ pela aplicação T?

Solução: Inicialmente temos que encontrar as coordenadas do vetor v em relação à base B, obtendo $[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. A seguir, pela propriedade (6), temos

$$[T(v)]_C = [T]_{B,C}[v]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -13 \end{pmatrix},$$

ou seja, $T(v) = 5(1,0,1) - 3(-2,0,1) - 13(0,1,0) = (11,-13,2)$.

8.4 OPERAÇÕES COM TRANSFORMAÇÕES LINEARES

8.4.1 ADIÇÃO

Sejam $T_1 : U \to V$ e $T_2 : U \to V$ transformações lineares. Chama-se ***soma*** das transformações lineares T_1 e T_2 à transformação linear

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 : U &\to V \\ u &\mapsto (T_1 + T_2)(u) = T_1(u) + T_2(u) \end{aligned} \quad , \ \forall u \in U .$$

Se A e B são bases de U e V, respectivamente, demonstra-se que

$$[T_1 + T_2]_A^B = [T_1]_A^B + [T_2]_A^B .$$

8.4.2 MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Sejam $T : U \to V$ uma transformação linear e $\alpha \in \mathbb{R}$. Chama-se o ***produto*** de T pelo escalar α à transformação linear

$$\begin{aligned} \alpha T &: U \to V \\ u &\mapsto (\alpha T)(u) = \alpha T(u) \end{aligned} \quad , \ \forall u \in U .$$

Se A e B são bases de U e V, respectivamente, demonstra-se que

$$[\alpha T]_A^B = \alpha [T]_A^B .$$

8.4.3 COMPOSIÇÃO

Sejam $T_1 : U \to V$ e $T_2 : V \to W$ transformações lineares. Chama-se ***aplicação composta*** de T_1 com T_2, e se representa por $T_2 \circ T_1$, à transformação linear

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1 &: U \to W \\ u &\mapsto (T_2 \circ T_1)(u) = T_2(T_1(u)) \end{aligned} \quad , \ \forall u \in U .$$

Exemplos:

1) Sejam $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares definidas por $T_1(x, y) = (x + 2y, 2x - y, x)$ e $T_2(x, y) = (-x, y, x + y)$. Determinar:

a) $T_1 + T_2$ **b)** $3T_1 - 2T_2$

Solução:

a)
$$(T_1 + T_2)(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x, y) = (x + 2y, 2x - y, x) + (-x, y, x + y)$$
$$(T_1 + T_2)(x, y) = (2y, 2x, 2x + y).$$

b)
$$(3T_1 - 2T_2)(x, y) = (3T_1)(x, y) - (2T_2)(x, y) = 3T_1(x, y) - 2T_2(x, y)$$
$$(3T_1 - 2T_2)(x, y) = 3(x + 2y, 2x - y, x) - 2(-x, y, x + y)$$
$$(3T_1 - 2T_2)(x, y) = (5x + 6y, 6x - 5y, x - 2y).$$

2) Sejam T_1 e T_2 operadores lineares no $\mathbb{R}^2$ definidos por $T_1(x, y) = (2x, y)$ e $T_2(x, y) = (x, x - y)$. Determinar:

a) $T_2 \circ T_1$ **b)** $T_1 \circ T_2$ **c)** $T_1 \circ T_1$ **d)** $T_2 \circ T_2$.

Solução:

a) $(T_2 \circ T_1)(x,y) = T_2(T_1(x,y)) = T_2(2x,y) = (2x, 2x - y)$.

b) $(T_1 \circ T_2)(x,y) = T_1(T_2(x,y)) = T_1(x, x - y) = (2x, x - y)$.

c) $(T_1 \circ T_1)(x,y) = T_1(T_1(x,y)) = T_1(2x,y) = (4x, y)$.

d) $(T_2 \circ T_2)(x,y) = T_2(T_2(x,y)) = T_2(x, x - y) = (x, y)$.

9 OPERADORES LINEARES

Em seções anteriores dissemos que as transformações lineares T de um espaço U em si mesmo, isto é, $T: U \rightarrow U$, são chamadas ***operadores lineares*** sobre U.

As propriedades gerais das transformações lineares de U em V são válidas para operadores lineares. Tendo em vista aplicações em Geometria Analítica, serão estudados, de preferência operadores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

9.1 OPERADORES INVERSÍVEIS

Um operador $T: U \rightarrow U$ associa a cada vetor $u \in U$ um vetor $T(u) \in U$. Se por meio de um operador S for possível inverter essa correspondência, de tal modo que a cada vetor transformado $T(u)$ se associe o vetor de partida u, diz-se que S é o operador inverso de T, e se indica por T^{-1}.

9.1.1 PROPRIEDADES DOS OPERADORES INVERSÍVEIS

Seja $T: U \rightarrow U$ um operador linear.

I. Se T é inversível e T^{-1} é a sua inversa, então

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I \quad \text{(identidade);}$$

II. T é inversível se, e somente se, $N(T) = \{0\}$;

III. Se T é inversível, T transforma base em base, isto é, se B é uma base de U, $T(B)$ também é base de U;

IV. Se T é inversível e B é uma base de U, então $T^{-1}: U \rightarrow U$ é linear e

$$\left[T^{-1}\right]_B = \left([T]_B\right)^{-1}.$$

Na prática, a base B será normalmente considerada como a canônica. Logo, de forma mais simples:

$$\left[T^{-1}\right]=\left[T\right]^{-1},$$

e, portanto

$$\left[T\right]\left[T^{-1}\right]=\left[T\circ T^{-1}\right]=\left[I\right].$$

Como conseqüência disso temos: T ***é nversível se, e somente se,*** $\det\left[T\right]\neq 0$.

Exemplo: Verificar se o operador linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definido por $T(1,1,1)=(1,0,0)$, $T(-2,1,0)=(0,-1,0)$ e $T(-1,-3,-2)=(0,1,-1)$ é inversível e, em caso afirmativo, determinar $T^{-1}(x,y,z)$.

Solução: Observe que $\{(1,1,1),(-2,1,0),(-1,-3,-2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e T está bem definida, pois são conhecidas as imagens dos vetores dessa base.

Por definição de T^{-1}, temos $T^{-1}(1,0,0)=(1,1,1)$, $T^{-1}(0,-1,0)=(-2,1,0)$ e $T^{-1}(0,1,-1)=(-1,-3,-2)$. Observando que $\{(1,0,0),(0,-1,0),(0,1,-1)\}$ é também uma base de $\mathbb{R}^3$, e que as imagens desses vetores são conhecidas, o operador T^{-1} está definido. Ora, existindo a T^{-1}, T é inversível. Agora vamos encontrar $T^{-1}(x,y,z)$.

Para tanto, expressemos (x,y,z) em relação a base $\{(1,0,0),(0,-1,0),(0,1,-1)\}$:

$$(x,y,z)=x(1,0,0)+(-y-z)(0,-1,0)+(-z)(0,1,-1).$$

Logo:

$$\begin{aligned}
T^{-1}(x,y,z)&=xT^{-1}(1,0,0)+(-y-z)T^{-1}(0,-1,0)+(-z)T^{-1}(0,1,-1)\\
T^{-1}(x,y,z)&=x(1,1,1)+(-y-z)(-2,1,0)+(-z)(-1,-3,-2)\\
T^{-1}(x,y,z)&=(x+2y+3z,x-y+2z,x+2z).
\end{aligned}$$

9.2 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Dado um operador linear $T: U \to U$, estamos interessados em saber quais vetores são levado em um múltiplo de si mesmos; isto é, procuramos um vetor $u \in U$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(u) = \lambda u$. Neste caso $T(u)$ será um vetor de mesma direção que u.

Como $u = 0$ sempre satisfaz a equação $T(u) = \lambda u$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, iremos determinar vetores $u \neq 0$, tais que $T(u) = \lambda u$. O escalar λ será chamado *autovalor* ou *valor característico* de T e o vetor u um *autovetor* ou *vetor característico* de T.

Definição: Seja $T: U \to U$ um operador linear. Se existirem $u \in U$, $u \neq 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(u) = \lambda u$, λ é um ***autovalor*** de T e u um ***autovetor*** de T associado a λ.

Exemplo 1: Determine os autovalores e os autovetores associados ao operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2x, 2y)$.

Solução: $T(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Observe que $T(x, y) = 2(x, y)$. Na forma matricial temos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Neste caso, 2 é um autovalor de T e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ é um autovetor de T associado ao autovalor 2.

Observação: De um modo geral, todo operador $\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ u &\mapsto \alpha u \end{aligned}$ tem α como autovalor e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ como autovetor correspondente. Observe que $T(u)$ é sempre um vetor de mesma direção que u. Ainda mais, se:

i. $\alpha < 0$, T inverte o sentido do vetor;

ii. $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor.

iii. $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor.

iv. $\alpha = 1$, T é a indentidade.

Exemplo 2: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determine os autovalores e os autovetores associados ao operador $T_A(x, y)$.

Solução: Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, então $A.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ y \end{pmatrix}$ e $T_A(x, y) = (2x+2y, y)$.

Para procurar os autovalores e autovetores de T_A, então devemos resolver a equação $T_A(u) = \lambda u$ ou

$$\begin{pmatrix} 2x+2y \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Assim temos o sistema de equações $\begin{cases} 2x+2y = \lambda x \\ y = \lambda y \end{cases}$. Vamos considerar os seguintes casos: **(i)** $y \neq 0$ e **(ii)** $y = 0$.

(i) Se $y \neq 0$, então da segunda equação temos que $\lambda = 1$. Logo, $2x + 2y = x$ e $y = -\frac{1}{2}x$. Obtemos, assim, para o autovalor $\lambda = 1$, os autovetores do tipo $\left(x, -\frac{1}{2}x\right)$.

(ii) Se $y = 0$, x deve ser diferente de zero, pois senão o autovetor (x, y) seria nulo, o que não pode acontecer pela definição de autovalor. Da primeira equação, $2x + 0 = \lambda x$ ou $\lambda = 2$. Portanto, outro autovalor é 2 e qualquer vetor não nulo $(x, 0)$ é um autovetor correspondente. Então, todos os vetores sobre o eixo x são levados em vetores de mesma direção: $T_A(x, 0) = (2x, 0)$ ou $T_A(u) = 2u$.

Temos, assim, para o operador T_A, autovetores $\left(x, -\frac{1}{2}x\right)$, $x \neq 0$, associados ao autovalor 1 e os autovetores $(x, 0)$, $x \neq 0$, associados ao autovalor 2.

Exemplo 3: Considere o operador linear $\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (y, -x) \end{aligned}$ (rotação de 90º em torno da origem).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Observe que nenhum vetor diferente de zero é levado por T num múltiplo de si mesmo. Logo, T não tem autovalores nem autovetores. Este é um exemplo de que nem todo operador linear possui autovalores e autovetores.

Proposição: Dada uma transformação $T : U \to U$ e um autovetor u associado a um autovalor λ, qualquer vetor $v = \alpha u$ ($\alpha \neq 0$) também é autovetor de T associado a λ.

Demonstração: $T(v) = T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u) = \lambda v$.

Proposição: Seja λ um autovalor de um operador $T : U \to U$. Então o conjunto $U_\lambda = \{u \in U ; T(u) = \lambda u\}$ é um subespaço vetorial de U. Além disso, a imagem $T(U_\lambda)$ do subespaço U_λ está contida em U_λ, isto é, U_λ é invariante sob T.

Demonstração: Suponha que $u, v \in U_\lambda$, isto é, $T(u) = \lambda u$ e $T(v) = \lambda v$. Então para quaisquer escalares α e β, temos:

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) = \alpha(\lambda u) + \beta(\lambda v) = \lambda(\alpha u + \beta v),$$

Ou seja, $\alpha u + \beta v$ é um autovetor associado a λ, portanto $\alpha u + \beta v \in U_\lambda$. Logo U_λ é subespaço vetorial de U.

Definição: O subespaço U_λ é chamado de ***autoespaço*** de T associado a λ e é formado por autovetores associados a λ e pelo vetor nulo.

As noções de autovetor e autovalor de uma transformação linear (ou matriz) são fundamentais, por exemplo, em Física Atômica porque os níveis de energia dos átomos e moléculas são dados por autovalores de determinadas matrizes. Também o estudo de vibrações, análise de estabilidade de um avião e muitos outros problemas de Física levam à procura de autovalores e autovetores de uma matriz.

Outra aplicação que estamos visando é a classificação de cônicas e quádricas que será visto mais a frente. Mais especificamente, eles serão usados para encontrar mudanças de referencial que permitem identificar quais as figuras geométricas que representam certas equações no plano e no espaço.

9.2.1 AUTOVALORES E AUTOVETORES DE UMA MATRIZ

Dada uma matriz quadrada, A, de ordem *n*, estaremos entendendo por *autovalor e autovetor de* A autovalor e autovetor da transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, associada à matriz A em relação à base canônica, isto é, $T_A(v) = A.v$ (na forma coluna). Assim, um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de A, e um autovetor $v \in \mathbb{R}^n$, são soluções da equação $A.v = \lambda v$, $v \neq 0$.

Exemplo: Dada a matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

e dados os vetores $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$, temos:

$$A.e_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11}e_1,$$

e em geral, $A.e_i = a_{ii}e_i$. Então, estes vetores da base canônica de R^n são autovetores para A, e o autovetor e_i é associado ao autovalor a_{ii}.

Veremos na próxima seção que dada uma transformação linear $T : U \to U$ e fixada uma base B podemos reduzir o problema de encontrar autovalores e autovetores para T à determinação de autovalores para a matriz $[T]_B$.

9.2.2 POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

Observamos nos exemplos da seção anterior que se nos basearmos nas definições de autovalor e autovetor, para efetuar os cálculos que determinam seus valores, estaremos adotando um procedimento muito complicado. Por isto vamos procurar um método prático para encontrar autovalores e autovetores de uma matriz real A de ordem *n*. Faremos um exemplo para o caso em que $n=2$, e em seguida generalizaremos para *n* qualquer.

Exemplo: $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. Procuramos vetores $v\in\mathbb{R}^2$ e escalares $\lambda\in\mathbb{R}$ tais que $A.v=\lambda v$. Observe que se I for a matriz identidade de ordem 2, então a equação acima pode ser escrita na forma $A.v=(\lambda I)v$, ou ainda, $(A-\lambda I)v=0$. Escrevendo explicitamente:

$$\left[\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Temos então, a equação matricial:

$$\begin{pmatrix}-3-\lambda & 4\\ -1 & 2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Se escrevermos explicitamente o sistema de equações lineares equivalente a esta equação matricial, iremos obter uma sistema de duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases}(-3-\lambda)x+4y=0\\ -x+(2-\lambda)y=0\end{cases}$$

Se o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, saberemos que este sistema tem única solução, que é a solução nula, ou seja, $x=y=0$. Mas estamos interessados em calcular autovetores de A, isto é, vetores $v\neq 0$, tais que $(A-\lambda I)v=0$. Neste caso $\det(A-\lambda I)$ deve ser zero, ou seja,

$$\det\begin{pmatrix}-3-\lambda & 4\\ -1 & 2-\lambda\end{pmatrix}=0$$

$$(-3-\lambda)(2-\lambda)+4=0$$
$$\lambda^2-\lambda-2=0$$
$$(\lambda-1)(\lambda+2)=0$$

Vemos que $\det(A-\lambda I)$ é um polinômio em λ. Este polinômio é chamado o ***polinômio característico*** de A. Prosseguindo com a resolução temos que $\lambda=1$ e $\lambda=-2$ são as raízes do polinômio característico de A, e, portanto os autovalores da matriz A são 1 e -2. Conhecendo os autovalores podemos encontrar os autovetores correspondentes. Resolvendo a equação $A.v = \lambda v$ para os casos:

i. $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3x+4y \\ -x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x+4y=0 \\ -x+y=0 \end{cases} \Rightarrow x = y \cdot$$

Os autovetores associados a $\lambda = 1$ são (y, y), ou seja, pertencem ao subespaço $[(1,1)]$.

ii. $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3x+4y \\ -x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+4y=0 \\ -x+4y=0 \end{cases} \Rightarrow x = 4y \cdot$$

Os autovetores associados a $\lambda = -2$ são $(4y, y)$, ou seja, pertencem ao subespaço $[(4,1)]$.

O que fizemos neste exemplo com a matriz A de ordem 2 pode ser generalizado. Seja A uma matriz de ordem *n*. Quais são os autovalores e os autovetores correspondentes a A? São exatamente aqueles que satisfazendo a equação $A.v = \lambda v$ ou $(A - \lambda I)v = 0$. Escrevendo esta última equação explicitamente, temos

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Chamemos de B a primeira matriz acima. Então $B.v = 0$. Se $\det B \neq 0$, sabemos que o sistema de equações lineares homogêneo indicado acima tem uma única solução. Ora, como $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ (ou, $v = 0$) sempre é solução de um sistema homogêneo, então esta única soluça seria a nula. Assim, a única maneira de encontrarmos autovetores v (soluções não nulas da equação acima) é termos $\det B = 0$, ou seja, $\det(A - \lambda I) = 0$. Impondo esta condição determinamos primeiramente os autovalores λ que satisfazem a equação e depois os autovetores a eles associados, observamos que

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

é um polinômio em λ de grau n. $p(\lambda) = (a_{11} - \lambda)\ldots(a_{nn} - \lambda) +$ termos de grau $< n$, e os autovalores procurados são as raízes deste polinômio. $p(\lambda)$ é chamado ***polinômio característico*** da matriz A.

9.2.3 MATRIZES SEMELHANTES

Definição: Duas matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são ***semelhantes*** se existe uma matriz inversível $P \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $B = P^{-1}AP$.

Proposição: Se as matrizes A e B são semelhantes então elas possuem o mesmo determinante.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \det B &= \det\left(P^{-1}AP\right) \\ \det B &= \det P^{-1}.\det A.\det P \\ \det B &= \frac{1}{\det P}.\det A.\det P \\ \det B &= \det A. \end{aligned}$$

Proposição: Duas matrizes semelhantes possuem os mesmos autovalores.

Demonstração: Sejam A e B semelhantes, tais que $B = P^{-1}AP$.

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det\left(P^{-1}AP - \lambda I\right) = \det\left(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P\right) = \det\left(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP\right) \\ &= \det\left(P^{-1}(A - \lambda I)P\right) = \det P^{-1}.\det(A - \lambda I).\det P = \det(A - \lambda I) \\ &= p_A(\lambda). \end{aligned}$$

Os polinômios característicos de A e B são iguais, logo os autovalores são os mesmos.

9.2.4 MATRIZES DIAGONALIZÁVEIS

Uma matriz A é diagonalizável (sob semelhança) se existe uma matriz inversível P tal que $D = P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal, isto é, se A é semelhante a uma matriz diagonal D.

Proposição: Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é semelhante a uma matriz diagonal $D \in M_n(\mathbb{R})$ se, e somente se, A tem *n* autovetores linearmente independentes. Em tal caso, os elementos da diagonal de D são os autovalores correspondentes e $D = P^{-1}AP$, onde P é a matriz cujas colunas são os autovetores.

Suponhamos que uma matriz A possa ser diagonalizada, ou seja, existe uma matriz inversível P tal que $D = P^{-1}AP$, e D é uma matriz diagonal, assim temos que $A = PDP^{-1}$, portanto por um resultado demonstrado acima segue que $\det A = \det D$, e se $k_1, k_2, \ldots k_n$ são os elementos da diagonal de D, então $\det A = k_1 . k_2 . \ldots . k_n$.

Além disso, se $D = diag(k_1, k_2, \ldots k_n)$

$$A^m = \left(PDP^{-1}\right)^m = PD^mP^{-1} = P.diag\left(k_1^{\,m}, k_2^{\,m}, \ldots k_n^{\,m}\right).P^{-1}.$$

Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, determine a matriz inversível P e a matriz diagonal D, tais que $A = PDP^{-1}$. Calcule A^4.

Solução: A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ tem dois autovetores linearmente independentes, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, associados aos respectivos autovalores, 4, -1. Pela proposição acima se tomarmos $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, teremos $A = PDP^{-1}$. De fato, como $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$, temos

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

$$A^4 = PD^4P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^4 & 0 \\ 0 & (-1)^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 103 & 102 \\ 153 & 154 \end{pmatrix}.$$

Definição: Chamamos ***multiplicidade algébrica*** de um autovalor a quantidade de vezes que o autovalor aparece como raiz do polinômio característico.

Exemplo: $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -4\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ e $A-\lambda I=\begin{pmatrix}3-\lambda & 0 & -4\\ 0 & 3-\lambda & 5\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{pmatrix}$. Então $p_A(\lambda)=(3-\lambda)^2(-1-\lambda)$. Os autovalores associados a matriz A são $\lambda_1=-1$ e $\lambda_2=3$. O autovalor $\lambda_1=-1$ tem multiplicidade algébrica 1 e o autovalor $\lambda_2=3$ tem multiplicidade algébrica 2, pois é uma raiz dupla do polinômio característico.

9.3 OPERADOR ORTOGONAL

Seja U um espaço vetorial euclidiano. Um operador linear $T:U\to U$ é ***ortogonal*** se preserva o módulo de cada vetor, isto é, se para qualquer $u\in U$, $|T(u)|=|u|$.

Observações:

i. Tendo em vista que o módulo de um vetor é calculado por meio de um produto interno, $|u|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$, os operadores ortogonais são definidos nos espaços vetoriais euclidianos;

ii. Nos operadores ortogonais, serão consideradas somente bases ortonormais em U e, particularmente, a base canônica.

Exemplo: Mostre que no $\mathbb{R}^2$, com o produto interno usual, o operador linear definido por $T(x,y)=\left(\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y,\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y\right)$ é ortogonal.

Solução: $|T(x,y)|=\sqrt{\left(\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y\right)^2+\left(\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{25}x^2+\frac{25}{25}y^2}=\sqrt{x^2+y^2}=|(x,y)|$.

9.3.1 PROPRIEDADES DE UM OPERADOR ORTOGONAL

i. Seja $T:U\to U$ um operador ortogonal sobre o espaço vetorial euclidiano U. Então, a inversa da matriz de T coincide com sua transposta, isto é, $[T]^{-1}=[T]^t$.

A matriz $[T]$, tal que $[T]^{-1} = [T]^t$, é chamada de matriz ortogonal. Portanto, uma matriz ortogonal define um operador ortogonal;

ii. O determinante de uma matriz ortogonal é 1 ou -1;

iii. Todo operador linear ortogonal $T: U \to U$ preserva o produto interno de vetores, isto é, para quaisquer vetores $u, v \in U$, tem-se:

$$\langle u, v \rangle = \langle T(u), T(v) \rangle;$$

iv. A composta de duas transformações ortogonais é uma transformação ortogonal ou, equivalentemente, o produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal;

v. As colunas (ou linhas) de uma matriz ortogonal são vetores ortonormais.

9.4 OPERADOR SIMÉTRICO

Diz-se que um operador $T: U \to U$ é simétrico se a matriz que o representa numa base ortonormal A é simétrica, isto é, se $[T]_A^t = [T]_A$.

Observações:

a) Demonstra-se que a matriz do operador simétrico é sempre simétrica, independente da base ortonormal do espaço. Em nosso estudo trabalharemos somente com bases canônicas;

b) O operador simétrico é também chamado de ***operador auto-adjunto***.

Exemplo: O operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x\ y) = (2x + 4y, 4x - y)$ é simétrico, pois a matriz de T com relação a base canônica é $[T] = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ e $[T]^t = [T]$.

Proposição: Seja U um espaço vetorial euclidiano. Se $T: U \to U$ é um operador simétrico, então para quaisquer $u, v \in U$, tem-se:

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle.$$

9.5 DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES

Seja $T: U \to U$ um operador linear. Estamos a procura de uma base B de U tal que $[T]_B$ seja uma matriz diagonal, que neste caso é a forma mais simples para uma matriz de uma transformação. Observemos, inicialmente a seguinte propriedade de autovetores..

Teorema: Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Corolário: Se U é um espaço vetorial de dimensão n e $T: U \to U$ é um operado linear que possui n autovalores distintos, então U possui uma base cujos vetores são todos autovetores de T.

Em outras palavras, se conseguirmos encontrar tantos autovalores distintos quanto for a dimensão do espaço, podemos garantir a existência de uma base de autovetores.

Exemplo 1: Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por $T(x, y) = (-3x + 4y \; -x + 2y)$ cuja matriz em relação à base canônica é $[T] = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Queremos encontrar uma base B de autovetores, se possível, e ainda observar de que tipo é a matriz $[T]_B$. Desde que $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$, e, portanto $\lambda_1 \neq \lambda_2$, podemos garantir, pelo corolário anterior, a existência de uma base de autovetores.

De fato, dois autovetores associados a λ_1 e λ_2 são $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (4,1)$, respectivamente, os quais formam uma base de R^2. Isto é, o espaço admite uma base $B = \{v_1, v_2\}$ formada por autovetores de T.

Calculemos agora $[T]_B$. Como $T(v_1) = 1v_1 + 0v_2$ e $T(v_2) = -2v_2 = 0v_1 - 2v_2$, $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Observe que a matriz de T em relação à base de autovetores é uma matriz diagonal.

É claro que a matriz diagonal $[T]_B$ como foi obtida no exemplo anterior não foi por acaso. Dado um operador linear qualquer $T: U \to U$, se conseguirmos uma base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ formada por autovetores de T, então, como

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n \\ T(v_2) &= 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + 0v_n \\ &\vdots \\ T(v_n) &= 0v_1 + 0v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

A matriz $[T]_B$ será uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são os autovalores λ_i, isto é,

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Não precisamos ter os λ_i distintos. Na verdade, um autovalor aparecerá na diagonal tantas vezes quantas forem os autovetores LI a ele associados. Concluímos então que um operador $T : U \to U$ admite uma base B em relação a qual a sua matriz é diagonal se, e somente se, essa base B for formada de autovetores de T. É esse o motivo da definição que se segue.

Definição: Seja $T : U \to U$ um operador linear. Dizemos que T é um ***operador diagonalizável*** se existe uma base de U cujos elementos são autovetores de T.

No exemplo 1 tínhamos um operador diagonalizável, pois $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Vamos apresentar agora um exemplo de um operador não diagonalizável.

Exemplo 2: Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação a base canônica é $[T] = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Como $p(\lambda) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$, os autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$. Associado a $\lambda_2 = 3$ conseguimos apenas um autovetor LI, por exemplo, $u = (1,0,0)$. Associado a $\lambda_1 = -1$ temos o autovetor LI, $v = (-1,-20,16)$. Neste caso, temos apenas dois autovetores LI para T e, portanto, não existe uma base de R^3 constituída só de autovetores. Isto significa que em nenhuma base a matriz de T é uma matriz diagonal, ou seja, T *não é diagonalizável*.

Corolário: Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita *n* e $T: U \to U$ um operador linear. Se

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda)$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ são distintos entre si, então T é diagonalizável.

Exemplo: Verifique se $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z)$ é diagonalizável.

Solução: Com relação à base canônica, a matriz de T é dada por

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim, $p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda - 3).$

Desta forma, vemos que $p(\lambda)$ apresenta todas as raízes reais e distintas, segue do corolário acima que T é diagonalizável.