Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Campus Medianeira

ÁLGEBRA LINEAR:

MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

Medianeira, Paraná

Prof.ª Priscila Pigatto Gasparin

1. MATRIZES

Fatos históricos

Foi só há pouco mais de 150 anos que as matrizes tiveram sua importância detectada e sairam da sombra dos determinantes. O primeiro a lhes dar um nome parece ter sido Cauchy, 1826 : tableau (= tabela). O nome matriz só veio com James Joseph **Sylvester, 1850.** Seu amigo Cayley, com sua famosa Memoir on the Theory of Matrices, 1858, divulgou esse nome e iniciou a demonstrar sua utilidade.

Sylvester, usou o significado coloquial da palavra matriz, qual seja: local onde algo se gera ou cria. Com efeito, via-as como "...um bloco retangular de termos... o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma MATRIZ a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes, ao fixar um número p e escolher à vontade p linhas e p colunas..." (artigo publicado na Philosophical Magazine de 1850, pg 363-370).

As matrizes são muito utilizadas para a resolução de sistemas de equações lineares e transformações lineares.

Exemplo

A tabela a seguir mostra o consumo mensal, em quilogramas de quatro alimentos básicos, durante um trimestre, por uma família.

	Abril	Maio	Junho
Arroz	10	8	9
Feijão	4	5	6
Carne	5	7	10
Legumes	12	11	6

Para encontrar por exemplo, a quantidade de carne consumida por essa família no mês de maio, procuramos o número localizado na 3ª linha e na 2ªcoluna da tabela; temos 7 quilogramas.

Um outro exemplo é o número 12, situado na 4ª linha e na 1ª coluna da tabela, que representa o consumo de legumes no mês de abril.

Vamos representar a tabela usando um par de parênteses ou um par de colchetes.

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 10 \\ 12 & 11 & 6 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 10 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 10 \\ 12 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

1.1 Definição: Matriz é o conjunto de números reais (ou complexos) dispostos em forma de tabela e distribuídos em m linhas e n colunas, com. $m, n \in \Re^*$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notação: $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ com $i = 1, 2, ..., m$ e $j = 1, 2, ..., n$

a_{ij} é o elemento genérico da matriz A

i índice que representa a linha do elemento a_{ij}

j índice que representa a coluna do elemento a_{ij}

$m \times n$ é a ordem da matriz.

1.2 Representações: $A = (\ )$ $A = [\ ]$ $A = \|\ \|$

Exemplos:

1) A representação de um tabuleiro de xadrez pode ser feita por meio de uma matriz 8×8.

2) A matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{2 \times 3}$ onde $a_{ij} = i^2 + j$ é $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

3) A matriz a seguir fornece (em milhas) as distâncias aéreas entre as cidades indicadas:

$$\begin{array}{c} \\ Cidade\,A \\ Cidade\,B \\ Cidade\,C \\ Cidade\,D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Cidade\,A & Cidade\,B & Cidade\,C & Cidade\,D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 638 & 1244 & 957 \\ 638 & 0 & 3572 & 2704 \\ 1244 & 3572 & 0 & 1036 \\ 957 & 2704 & 1036 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

A matriz acima tem ordem 4 (4×4).

4) A matriz abaixo representa a produção (em unidades) de uma confecção de roupa feminina distribuída nas três lojas encarregadas da venda

$$\begin{array}{c} \\ loja\,1 \\ loja\,2 \\ loja\,3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} shorts & blusas & saias & jeans \end{array} \\ \begin{pmatrix} 50 & 80 & 25 & 40 \\ 70 & 100 & 0 & 60 \\ 30 & 120 & 70 & 25 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta é uma matriz 3×4 (três por quatro).

1.3 Tipos de Matrizes

1) **Matriz Linha:** Uma matriz A é denominada matriz linha quando possuir uma única linha. A matriz linha e denominada vetor – linha.

Notação: $A = \left(a_{ij}\right)_{1\times n}$

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

2) **Matriz Coluna:** Uma matriz A é denominada matriz coluna quando possuir apenas uma coluna. A matriz coluna de ordem n por 1, pode representar as componentes $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ de um vetor u do espaço vetorial V de dimensão *n*. Podemos denominar de vetor – coluna.

Notação: $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times 1}$

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

3) **Matriz Nula:** Uma matriz A é denominada matriz nula quando todos seus elementos forem nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$ para todo $i = 1, 2, ..., m$ e para todo $j = 1, 2, ..., n$.

Notação: $0_{m\times n}$

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 4}$

4) **Matriz Quadrada:** Uma matriz A é uma matriz quadrada quando possuir o mesmo número de linhas e de colunas, isto é, $m = n$.

Notação: $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$

- **Diagonal Principal**: são os elementos da matriz A em que $i = j$ para todo $i, j = 1, 2, ..., n$.
- **Diagonal Secundária**: são os elementos da matriz A em que $i + j = n + 1$ para todo $i, j = 1, 2, ..., n$.
- **Traço:** é o somatório dos elementos da diagonal principal da matriz A, denotado por trA.

$$trA = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + ... + a_{nn}$$

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & 5 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 9 & -2 \end{pmatrix}$

Elementos da diagonal principal: 1, 0, 5 e -2

Elementos da diagonal secundária: 7, 5, 2, 0

$trA = 1 + 0 + 5 - 2 = 4$

5) **Matriz Diagonal:** Uma matriz quadrada A é chamada de matriz diagonal quando todos os elementos que não pertencem à diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$ para todo $i, j = 1, 2, ..., n$.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}_{3\times3}$

6) **Matriz Identidade:** Uma matriz diagonal A é chamada de matriz identidade quando todos os elementos da diagonal principal forem todos iguais a um.

Notação: I_n

Exemplo: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times3}$

1.4 Igualdade de Matrizes

Duas matrizes de mesma ordem $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ e $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i = 1, 2, ..., m$ e para todo $j = 1, 2, ..., n$.

Exemplo: $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

1.5 Operações com Matrizes

1.5.1 Adição: Sejam $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ e $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ matrizes de mesma ordem. Define-se a matriz soma $C=A+B$ tal que $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ e $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ para todo $i=1,2,...,m$ e para todo $j=1,2,...,n$.

Exemplos:

1) Sejam $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}0 & -7 & 2,5\\ -4 & 0,5 & 5\end{pmatrix}$. Então,

$$A+B=\begin{pmatrix}1+0 & 2-7 & -1+2,5\\ 5-4 & 3+0,5 & 4+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -5 & 1,5\\ 1 & 3,5 & 9\end{pmatrix}$$

2) Um laboratório farmacêutico produz certo medicamento. Os custos relativos à compra e transporte de quantidades específicas da substância necessárias para a sua elaboração, adquiridas em dois fornecedores distintos, são dados (em reais), respectivamente, pelas seguintes matrizes:

$$\begin{array}{l} \\ substância\ A \\ substância\ B \\ substância\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} preço\ compra & custo\ transporte \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 12 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$Fornecedor\ 1$$

$$\begin{array}{l} \\ substância\ A \\ substância\ B \\ substância\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} preço\ compra & custo\ transporte \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$Fornecedor\ 2$$

A matriz que representa os custos totais de compra e de transporte de cada uma das substâncias *A*, *B* e *C* é dada por:

$$Custo\ Total=\begin{pmatrix}9 & 23\\ 21 & 17\\ 8 & 7\end{pmatrix}$$

1.5.2 Propriedades da Adição de Matrizes

A1) Associativa: Para quaisquer matrizes $A, B\ e\ C$ de mesma ordem, $(A+B)+C=A+(B+C)$

A2) Comutativa: Para quaisquer matrizes $A\ e\ B$ de mesma ordem, $A+B=B+A$.

Demonstração: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}=d_{ij}$ para todo $i=1,2,...,m$ e para todo $j=1,2,...,n$.

Assim, $C=D$. Logo, a operação é comutativa.

A3) Elemento Neutro: Para toda matriz A, $A+0_{m\times n}=0_{m\times n}+A=A$

A4) Elemento Simétrico: Para toda matriz A de ordem $m \times n$ existe uma matriz S de mesma ordem tal que

$A + S = S + A = 0_{m \times n}$. Sendo $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ tem-se $S = \left(s_{ij}\right)_{m \times n} = -\left(a_{ij}\right)_{m \times n}$.

Notação: $S = -A$.

Assim, $A + \left(-A\right) = \left(-A\right) + A = 0_{m \times n}$

A5) Para quaisquer matrizes quadradas $A \; e \; B$ de mesma ordem, $tr\left(A+B\right) = trA + trB$.

Demonstração: Dado que ambas as matrizes são de mesma ordem, tem-se

$$tr\left(A+B\right) = \left(a_{11}+b_{11}\right)+\ldots+\left(a_{nn}+b_{nn}\right) = \left(a_{11}+\ldots+a_{nn}\right)+\left(b_{11}+\ldots+b_{nn}\right) = trA + trB$$

<u>1.5.3 Multiplicação por Escalar</u>

Sejam $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ uma matriz e $k \in \Re$ um escalar. Define-se a matriz produto por escalar $B = k \cdot A$ tal que $B = \left(b_{ij}\right)_{m \times n}$ e $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ e para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

Exemplos:

1) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ e $k = -5$. Então,

$$\left(-5\right) \cdot A = \begin{pmatrix} (-5)\cdot 1 & (-5)\cdot 0 \\ (-5)\cdot 3 & (-5)\cdot(-5) \\ (-5)\cdot(-1) & (-5)\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -15 & 25 \\ 5 & -35 \end{pmatrix}$$

2) O quadro abaixo mostra a produção de trigo, cevada, milho e arroz em três regiões, em determinada época do ano.

	Trigo	**Cevada**	**Milho**	**Arroz**
Região 1	1200	800	500	700
Região 2	600	300	700	900
Região 3	1000	1100	200	450

Com os incentivos oferecidos, estima-se que a safra no mesmo período do próximo ano seja duplicada. A matriz que representa a estimativa de produção para o próximo ano é:

$$\begin{pmatrix} 2400 & 1600 & 1000 & 1400 \\ 1200 & 600 & 1400 & 1800 \\ 2000 & 2200 & 400 & 900 \end{pmatrix}$$

1.5.4 Propriedades da Multiplicação por Escalar

E1) Para toda matriz A e para quaisquer $k_1 k_2 \in \Re$, $(k_1 + k_2) \cdot A = k_1 \cdot A + k_2 \cdot A$.

E2) Para a matriz A e para quaisquer $k_1 k_2 \in \Re$, $(k_1 \cdot k_2) \cdot A = k_1 \cdot (k_2 \cdot A)$.

E3) Para quaisquer matrizes A e B de mesma ordem e para qualquer escalar $k \in \Re$, $k(A+B) = k \cdot A + k \cdot B$.

Demonstração: Considere as matrizes de ordem $m \times n$, $k(A+B) = k \cdot C = D$ e $k \cdot A + k \cdot B = E + F = G$.

$d_{ij} = k \cdot c_{ij} = k \cdot (a_{ij} + b_{ij}) = k \cdot a_{ij} + k \cdot b_{ij} = e_{ij} + f_{ij} = g_{ij}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ e para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

Assim, $D = G$. Logo, vale a propriedade.

E4) Para toda matriz A de ordem $m \times n$, $0 \cdot A = 0_{m \times n}$.

E5) Para toda matriz A de ordem $m \times n$, $1 \cdot A = A$.

E6) Para toda matriz quadrada A e para todo $k \in \Re$, $tr(k \cdot A) = k \cdot trA$.

1.5.5 Multiplicação de Matrizes: Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$ o produto da matriz A pela matriz B é igual a matriz $C = (c_{ik})_{m \times n}$ tal que C_{ik} é igual ao produto da linha i de A pela coluna k de B. Equivalentemente:

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$. Definimos a matriz $A \cdot B$ como sendo a matriz $m \times p$, $C = (c_{ik})_{mxp}$, tal que

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots a_{in} b_{nk}$$

Observe que definimos o produto $A \cdot B$ de duas matrizes *quando o número de colunas de* A *for igual ao de linhas de* B; além disso, notamos que o produto $A \cdot B$ possui o número de linhas de A e o número de colunas de B.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = AB_{m \times p}$$

igual

O produto resulta na matriz de ordem mxp

Na multiplicação de matrizes, devemos multiplicar linha por coluna, ou seja, multiplicamos o 1º número da linha pelo 1º número da coluna, etc. Então a quantidade de colunas de A deve ser igual à quantidade de linhas de B. A matriz produto C terá o número de linhas de A e o número de colunas de B.

Exemplos:

1) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Então $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+0\cdot 1 & 1\cdot 3+0\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot(-1) \\ 2\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot 3+1\cdot 0 & 2\cdot 1+1\cdot(-1) \\ (-1)\cdot 2+4\cdot 1 & (-1)\cdot 3+4\cdot 0 & (-1)\cdot 1+4\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

2) A matriz a seguir fornece as quantidades de vitaminas A, B e C obtidas em cada unidade dos alimentos I e II.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{alimento I} \\ \text{alimento II} \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ao serem ingeridas 5 unidades do alimento I e 2 unidades do alimento II, a quantidade consumida de cada tipo de vitamina é dada por:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 4+2\cdot 5 & 5\cdot 3+2\cdot 0 & 5\cdot 0+2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 15 & 2 \end{pmatrix}$$

Serão consumidas 30 unidades de vitamina A, 15 unidades de vitamina B e 2 unidades de vitamina C.

1.5.6 Propriedades da Multiplicação de Matrizes

M1) Associativa: Para quaisquer matrizes $A, B \ e \ C$ de ordens $m \times p, \ p \times l, \ l \times n$, respectivamente, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Demonstração:

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{l} d_{ik} \cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{t=1}^{p} a_{it} \cdot b_{tk} \right) \cdot c_{kj}$$

$$e_{ij} = \left(a_{i1}b_{11} + \ldots + a_{ip}b_{p1}\right)c_{1j} + \left(a_{i1}b_{12} + \ldots + a_{ip}b_{p2}\right)c_{2j} + \ldots + \left(a_{i1}b_{1l} + \ldots + a_{ip}b_{pl}\right)c_{lj}$$

$$e_{ij} = a_{i1}b_{11}c_{1j} + \ldots + a_{ip}b_{p1}c_{1j} + a_{i1}b_{12}c_{2j} + \ldots a_{ip}b_{p2}c_{2j} + \ldots a_{i1}b_{1l}c_{lj} + \ldots a_{ip}b_{pl}c_{lj}$$

$$e_{ij} = a_{i1}\left(b_{11}c_{1j} + b_{12}c_{2j} + \ldots + b_{1l}c_{lj}\right) + a_{ip}\left(b_{p1}c_{1j} + b_{p2}c_{2j} + \ldots + b_{pl}c_{lj}\right)$$

$$e_{ij} = \sum_{t=1}^{p} a_{it} \cdot \left(\sum_{k=1}^{l} b_{tk} \cdot c_{kj} \right) = \sum_{t=1}^{p} a_{it} \cdot f_{tj} = g_{ij}$$

Para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ e para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Assim, $E = G$. Logo, vale a propriedade associativa para multiplicação de matrizes.

M2) Distributiva da Multiplicação em relação à adição: Para quaisquer matrizes A e B de ordem $m\times p$, para toda matriz C de ordem $p\times n$ e para toda matriz D de ordem $l\times m$, $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$ e $D\cdot(A+B) = D\cdot A + D\cdot B$.

M3) Elemento Neutro: Para toda matriz quadrada A de ordem n, $A\cdot I_n = I_n\cdot A = A$.

M4) Para quaisquer matrizes quadradas A e B de mesma ordem, $tr(A\cdot B) = tr(B\cdot A)$.

M5) Para quaisquer matrizes quadradas A e B de mesma ordem e para todo $k\in\mathbb{R}$, $k\cdot(A\cdot B) = (k\cdot A)\cdot B = A\cdot(k\cdot B)$.

M6) Para toda matriz quadrada A de ordem n, $A\cdot 0_{m\times n} = 0_{m\times n}\cdot A = 0_{m\times n}$.

Em geral, **<u>não vale a propriedade comutativa</u>** para a operação de multiplicação. Assim, $AB \neq BA$. Quando $AB = BA$, diz-se que A e B são **comutáveis**.

Por M6, qualquer matriz quadrada comuta com a matriz quadrada nula de mesma ordem.

O produto AB e BA, são diferentes. Logo, a multiplicação não é comutativa. Existem matrizes A e B tais que AB = BA, porém essa não é a regra. Mas isso só é possível quando AB = BA = I (identidade), ou seja, para saber se duas matrizes quadradas A e B de mesma ordem uma é inversa da outra, basta multiplicar uma pela outra e verificar se o produto e a matriz Identidade.

Exemplos:

1) Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times 2}$.

$$A\cdot B = C = (c_{ij})_{2\times 2} \neq (d_{ij})_{3\times 3} = D = B\cdot A$$

2) Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times 1}$.

$A\cdot B = C = (c_{ij})_{2\times 1}$ e a matriz produto $B\cdot A$ não é definida.

3) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} = B\cdot A$$

4) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

As matrizes A e B comutam entre si, ou seja, neste caso $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = B \cdot A$.

1.6 Matriz Transposta

Seja a matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ define-se a matriz transposta B tal que $B = \left(b_{ij}\right)_{n \times m}$ e $b_{ij} = a_{ji}$, isto é, é a matriz obtida a partir da matriz A pela troca de suas linhas pelas colunas correspondentes.

Notação: $B = A^t$

Exemplo: Seja a matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}_{3x2}$ então a sua transposta é A^t = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$

1.6.1 Propriedades da Operação de Transposição

T1) Involução: Para toda matriz A, $\left(A^t\right)^t = A$.

T2) Para quaisquer matrizes A e B de mesma ordem, $\left(A+B\right)^t = A^t + B^t$.

Demonstração: Considere as matrizes de ordem $m \times n$, $\left(A+B\right)^t = C^t = D$ e $A^t + B^t = E + F = G$.

$d_{ij} = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = e_{ij} + f_{ij} = g_{ij}$, para todo $i = 1, 2, ..., m$ e para todo $j = 1, 2, ..., n$.

Assim, $D = G$.

T3) Para toda matriz A e para todo escalar $k \in \Re$, $\left(k \cdot A\right)^t = k \cdot A^t$.

T4) Para toda matriz A de ordem $m \times p$ e a toda matriz B de ordem $p \times n$, $\left(A \cdot B\right)^t = B^t \cdot A^t$.

T5) Para toda matriz quadrada A, $tr\left(A^t\right) = trA$.

1.7 Classificação das Matrizes Quadradas

1) **Matriz Simétrica:** Uma matriz quadrada A é denominada simétrica quando $A^t = A$.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ então $A^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Os elementos da matriz dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são iguais ($a_{ij} = a_{ji}$).

2) **Matriz Antissimétrica:** Uma matriz quadrada A é denominada antissimétrica quando $A^t = -A$.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 7 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ então $A^t = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -7 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

Todos os elementos da diagonal principal são iguais a zero e os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal têm sinais contrários.

3) **Matriz Ortogonal:** Uma matriz quadrada A cuja inversa coincide com a transposta $A^{-1} = A^t$, ou seja, $A.A^t = A^t.A = I$

Exemplo: A matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz ortogonal?

De fato, se $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e $A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, note que $A = A^t$ temos:

$A.A^t = A^t.A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, logo $A.A^t = A^t.A = I$, ou seja, $A^t = A^{-1}$.

A matriz A é ortogonal

4) **Matriz Normal:** Uma matriz quadrada A de ordem n é dita normal quando comuta com sua matriz transposta, isto é, $A \cdot A^t = A^t \cdot A$.

Exemplo: $A=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, então $A^t=\begin{pmatrix}6 & 3\\ -3 & 6\end{pmatrix}$. Logo

$A.A^t=\begin{pmatrix}6.6+(-3).(-3) & 6.3+(-3).6\\ 3.6+6.(-3) & 3.3+6.6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45 & 0\\ 0 & 45\end{pmatrix}$ e

$A^t.A=\begin{pmatrix}6.6+(-3).(-3) & 6.3+(-3).6\\ 3.6+6.(-3) & 3.3+6.6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45 & 0\\ 0 & 45\end{pmatrix}$. Desta forma a matriz é normal.

5) Matriz Triangular Superior: Uma matriz quadrada A é uma matriz triangular superior quando os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij}=0$ quando $i>j$ para todo $i,j=1,2,...,n$.

Exemplo: $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 2\\ 0 & 2 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 9 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}_{4\times 4}$

6) Matriz Triangular Inferior: Uma matriz quadrada A é uma matriz triangular inferior quando os elementos acima da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij}=0$ quando $i<j$ para todo $i,j=1,2,...,n$.

Exemplo: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 9 & 8 & 0 & 0\\ 4 & 7 & 5 & 0\\ 3 & 6 & 8 & 7\end{pmatrix}_{4\times 4}$

1.8 Potência de uma Matriz Quadrada de Ordem *n*

$$\begin{aligned}&A^0=I_n\\ &A^1=A\\ &A^2=A\cdot A\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &A^k=A\cdot A^{k-1}=A^{k-1}\cdot A\end{aligned}$$

Toda matriz quadrada A comuta com qualquer potência natural de A.

Exemplos:

1) Seja $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, então $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

2) Seja o polinômio $f(x) = x^2 + 2x - 11$ e a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Determinando o valor de $f(A)$:

$$f(A) = A^2 + 2 \cdot A^1 - 11 \cdot A^0 = A^2 + 2 \cdot A^1 - 11 \cdot I_2$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - 11 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz A é uma raiz do polinômio, já que $f(A) = 0_{2\times 2}$.

1.8.1 Matriz Periódica: Dada uma matriz quadrada A, diz-se que A e uma matriz periodica se $A^n = A$, diz-se que o período de A é $n-1$.

1.9 <u>Matriz Idempotente</u>

Dada uma matriz periodica A tal que $A^2 = A$, diz-se que A é uma matriz idempotente. O período da matriz idepotente ‘e 2- 1= 1.

Exemplo: A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ é idempotente?

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

A matriz A e indepontente uma vez que $A^2 = A$

2.0 <u>Matriz Invertível ou Matriz Inversível ou Matriz Não-Singular</u>: Uma matriz quadrada A de ordem n é dita invertível se existir uma matriz quadrada B de mesma ordem tal que $AB = BA = I_n$

A matriz B é dita matriz inversa da matriz A.

Notação: $B = A^{-1}$ ou $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

Exemplos:

1) A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ é invertível e sua inversa é $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, pois

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Encontre a matriz inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solução:

Considere $B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$. Se $AB = I_n$ então $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2x-y & 2z-t \\ x & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ x=0 \\ 2z-t=0 \\ z=1 \end{cases}$$

Desta forma, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Verifica-se também que $BA = I_n$

Então a matriz inversa da matriz A é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

3) Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ tem como matriz inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{9}{20} & -\frac{3}{20} & -\frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & -\frac{7}{20} & \frac{11}{20} \end{pmatrix}$

Mas existem matrizes que não admitem inversa, como:

4) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, esta matriz não possui inversa.

2.0.1 Matriz Singular

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ cujo determinante é nulo é uma matriz singular:

Exemplo: Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ é singular porque: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$

A matriz singular não tem inversa.

2.0.2 Matriz Não-Singular

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ cujo determinante é diferente de zero é uma matriz não-singular ou regular

Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ é uma matriz não-singular, porque o $\det A \neq 0$

A matriz não-singular sempre tem inversa

2.0.3 Propriedades das Matrizes Inversíveis

1) Se a matriz A admite inversa ($\det A \neq 0$), esta é única
2) Se a matriz A é não-singular, sua inversa A^{-1} também é. A matriz inversa de A^{-1} é A.
3) A matriz unidade I é não-singular ($\det I = 1$) e sua própria inversa é $I = I^{-1}$
4) Se a matriz A é não-singular, sua transposta A^T também é. A matriz inversa de A^T é $(A^{-1})^T$
5) Se as matrizes A e B são não-singulares e de mesma ordem, o produto AB é uma matriz não-singular. A matriz inversa de AB é a matriz $B^{-1}A^{-1}$, ou seja, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Demonstração: $$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (A(BB^{-1}))A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

Analogamente,

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = (B^{-1}(A^{-1}A))B = (B^{-1}I_n)B = B^{-1}B = I_n$$

Logo, o produto é invertível.

2.1 Semelhança de Matrizes

Duas matrizes reais A e B de ordem n são semelhantes quando existe uma matriz real invertível de ordem n tal que $B = P^{-1}AP$.

Exemplo: As matrizes $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ são semelhantes. De fato:

Considere $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Assim,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.2 Operações Elementares

São operações realizadas nas linhas de uma matriz. São consideradas operações elementares:

OE1) Troca da linha i pela linha j $\left(l_i \leftrightarrow l_j\right)$.

OE2) A multiplicação da linha i por um escalar $k \in \Re$ não nulo $\left(l_i \leftarrow k \cdot l_i\right)$.

OE3) A substituição da linha i por ela mesma mais k vezes a linha j, com $k \in \Re$ não nulo $\left(l_i \leftarrow l_i + k \cdot l_j\right)$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} l_1 \leftrightarrow l_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} l_2 \leftarrow \frac{1}{2} l_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} l_2 \leftarrow l_2 + (-1) l_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} l_2 \leftarrow -\frac{1}{3} l_2 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.3 Matriz Equivalente por Linha

Dadas as matrizes A e B matrizes de mesma ordem. A matriz B é equivalente por linha à matriz A, quando for possível transformar a matriz A na matriz B através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A.

Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix}$, vamos encontrar a matriz B equivalente a matriz A, por meio das operações elementares:

1) Permutando a 2ª linha com a 3ª linha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Multiplicando todos os elementos da 2ª linha, da matriz, por $\frac{1}{4}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow \frac{1}{4} L_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Quando se deseja substituir os elementos da 1ª linha, da matriz A somando com os elementos correspondentes da 2ª linha multiplicados por -3. Temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + (-3)L_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que: com as operações elementares é possível transformar a matriz A na matriz B, equivalente a ela

2.4 Matriz na Forma Escalonada ou Forma Escada

Definição: Uma matriz mxn é linha reduzida à forma escada se:

a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1

b) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

c) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo)

d) Se as linhas $1,..., r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nula da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < ... < k_r$

Essa última condição impõe a forma escada da matriz, ou seja, o número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas, se houver.

Exemplos: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.5 Escalonamento por Linhas de uma Matriz

Qualquer matriz quadrada A, de ordem n, não singular, pode ser transformada na matriz equivalente I, de mesma ordem por meio de uma sucessão finita de operações elementares, ou seja, I ~ A.

Para transformar uma matriz quadrada A, não singular, na matriz I, se procederão com as linhas operações elementares adequadas que:

a) Transformem a matriz A numa matriz triangular superior (inferior) ao mesmo tempo em que são substituídos cada um dos elementos da diagonal principal pelo número 1.

b) substituam todos os elementos situados acima (abaixo) da diagonal principal por zeros, ou seja, processem a diagonalização da matriz A.

Exemplos:

1) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_2 \leftarrow l_2 + (-4l_1) \\ l_3 \leftarrow l_3 + (-7l_1) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} l_3 \leftarrow l_3 - 2l_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= l_2 \leftarrow -\frac{1}{3} l_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = l_1 \leftarrow l_1 - 2.l_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} l_1 \leftrightarrow l_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_2 \leftarrow l_2 - 3l_1 \\ l_4 \leftarrow l_4 + l_1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} l_2 \leftarrow -\frac{1}{6} l_2 =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_3 \leftarrow l_3 - 2l_2 \\ l_4 \leftarrow l_4 - 5l_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A escolha de operações de escalonamento não é única. O importante é observar que o objetivo é aumentar o número de zeros, que precede o primeiro elemento não nulo de cada linha, linha a linha.

2.6 Posto de uma Matriz

O posto de uma matriz A pode ser obtido escalonando-se a matriz. O número de linhas não nulas após o escalonamento é o posto da matriz A.

Notação: $postoA$

2.7 Aplicações de Operações Elementares

Cálculo de Inversa de uma Matriz Quadrada de Ordem n

Passo 1: Construir a matriz $(A|I_n)$ de ordem $n \times 2n$

Passo 2: Utilizar operações elementares nas linhas da matriz $(A|I_n)$ de forma a transformar o bloco A na matriz identidade I_n. Caso seja possível, o bloco I_n terá sido transformado na matriz A^{-1}. Se não for possível transformar A em I_n é porque a matriz A não é invertível.

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. A matriz inversa é $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} l_2 \leftarrow l_2 - 3l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - l_1 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) l_2 \leftrightarrow l_3 =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -6 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) l_2 \leftarrow -l_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -6 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) l_3 \leftarrow l_3 + 5l_2 =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right) l_1 \leftarrow l_1 - 2l_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right) l_3 \leftarrow -l_3 =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 5 \end{array}\right) l_2 \leftarrow l_2 - l_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Justificativa do Método para o Cálculo da Matriz Inversa:

Teorema: Uma matriz quadrada de ordem n é invertível se, e somente se, a matriz A é equivalente por linha à matriz I_n.

Desta forma, a sequência de operações elementares que reduz a matriz A na matriz I_n, transforma a matriz I_n na matriz A^{-1}.

Exemplo1: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

A redução da matriz A à matriz identidade é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} l_2 \leftarrow \frac{1}{3} l_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} l_1 \leftarrow l_1 - 2l_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando em I_n a mesma sequência de operações:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} l_2 \leftarrow \frac{1}{3} l_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} l_1 \leftarrow l_1 - 2l_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ é a inversa da matriz A.

Exemplo 2. Encontre a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

2 DETERMINANTES

De modo bem simplificado, os determinantes **determinam antes**. Determinam antes do quê? Eles dizem para você se uma **equação linear** tem solução ou não antes de você resolvê-la.

2.1 Definição: Chama-se determinante de uma matriz quadrada à soma algébrica dos produtos que se obtém efetuando todas as permutações dos segundos índices do termo principal, fixados os primeiros índices, e fazendo-se preceder os produtos dos sinal + ou -, conforme a permutação dos segundos índices seja de classe par ou classe ímpar.

A qualquer matriz quadrada A podemos associar certo número real denominado determinante da matriz.

Notação: $\det A$ ou $|A|$ ou det $\lfloor a_{ij} \rfloor$

Então:

1) Determinante de uma matriz de 1ª ordem

$$\det[a] = a$$

Exemplos:

a) Se M = (5) então o det M = 5

b) Se $A = -\sqrt{2}$ e A é uma matriz de ordem 1, então det A = $-\sqrt{2}$

2) Determinante de uma matriz de 2ª ordem

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21}$$

Exemplo: Calcule o determinante da matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, então

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2.5 - (-3).1 = 10 + 3 = 13$$

3) Determinante de uma matriz de 3ª ordem – Regra de Sarrus

Seja a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, repetimos as duas primeiras colunas à direita e efetuamos as seis multiplicações em diagonal. Os produtos obtidos na direção da diagonal principal permanecem com o mesmo sinal. Os produtos obtidos da diagonal secundária mudam de sinal. O determinante é a soma dos valores obtidos.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \det A = (1\cdot 1\cdot 1) + (2\cdot 0\cdot 4) + (3\cdot 2\cdot 2) - (3\cdot 1\cdot 4) - (1\cdot 0\cdot 2) - (2\cdot 2\cdot 1) =$$
$$= 1 + 0 + 12 - 12 - 0 - 4 = -3$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Exemplo: Calcule o det da matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} = -5 - 16 + 0 - (-6 + 12 + 0) = -27$

4) Propriedade dos Determinantes

1ª propriedade: Se todos os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz quadrada A forem iguais a zero, seu determinante será nulo, isto é, det A = 0.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 0 & 48 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0 \cdot -\frac{1}{3} - 48 \cdot 0 = 0$

2ª propriedade: Se os elementos correspondentes de duas linhas (ou de duas colunas) de uma matriz quadrada A forem iguais, seu determinante será nulo, isto é, det A = 0

Exemplo: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 5 \cdot 4 = 0$

3ª propriedade: Se uma matriz quadrada A possui duas linhas (ou colunas) proporcionais, seu determinante será nulo, isto é , det A = 0

Exemplo: $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 21 \end{vmatrix} = 3 \cdot 21 - 7 \cdot 9 = 0$

4ª propriedade: Se todos os elementos de uma linha (ou de uma coluna) de uma matriz quadrada são multiplicados por um mesmo número real k, então seu determinante fica multiplicado por k.

Exemplo: $7\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 7 \cdot (3 \cdot 9 - (-5) \cdot 4) = 7 \cdot (27 + 20) = 7 \cdot 47 = 329$

$\begin{vmatrix} 21 & -35 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 21 \cdot 9 - (-35) \cdot 4 = 189 + 140 = 329$

5ª propriedade: Se uma matriz quadrada A de ordem n é multiplicada por um número real k, o seu determinante fica multiplicado por k^n, isto é: $det(kA_n) = k^n \cdot det\, A_n$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow det\, A = 15 - 8 = 7$$

$$5A = \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 10 & 25 \end{bmatrix} \Rightarrow det\, 5A = 375 - 200 = 175 = 5^2 \cdot 7$$

6ª propriedade: O determinante de uma matriz quadrada A é igual ao determinante de sua transposta, isto é, det A = det A^t.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$det\, A = a \cdot d - b \cdot c$ e $det\, A^t = a \cdot d - c \cdot b$

7ª propriedade: Se trocarmos de posição entre si duas linhas (ou colunas) de uma matriz quadrada A, o determinante da nova matriz obtida é o oposto do determinante da matriz anterior.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} det\, A = 15 + 0 + 10 + 6 + 0 - 50 = -19$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix} det\, A = 50 + 0 - 6 - 10 + 0 - 15 = 19$

8ª propriedade: O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} det\, A = 5 \cdot 2 \cdot 4 = 40$

9ª propriedade: Sendo A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem e AB a matriz-produto, então $det\, AB = det\, A \cdot det\, B$ (teorema de Binet)

Exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad det\, A = -3 - 10 = -13 \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad det\, B = -6$

$AB = \begin{bmatrix} 0+6 & 6+8 \\ 0-3 & 10-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \quad det\, AB = 36 + 42 = 78 = (-13) \cdot (-6)$

10ª propriedade: Seja A uma matriz quadrada. Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou coluna) pelo mesmo número e somarmos os resultados aos elementos correspondentes de outra linha (ou coluna), formando uma matriz B, então det A=det B (Teorema de Jacobi).

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \quad det\, A = 9 - 20 = -11$

Multiplicando a 1ª linha por -2 e somando os resultados à 2ª linha obtemos:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad det\, A = -1 - 10 = -11$

5) Processo de Triangulação

O cálculo do determinante de uma matriz quadrada, utilizando-se das operações elementares nas linhas da matriz, consiste em encontrar uma matriz triangular equivalente por linha à matriz dada, respeitando-se as propriedades dos determinantes acima

Teorema: Se A é uma matriz triangular (triangular superior, triangular inferior ou diagonal) de ordem nxn, então detA é o produto das entradas na diagonal principal da matriz, ou seja, $\det A = a_{11}.a_{22}.a_{33}...a_{nn}$

É importante observar que:

a) Quando trocamos duas linhas de uma matriz A, seu determinante troca de sinal;

b) O determinante da matriz fica multiplicado pelo escalar não nulo k quando todos os elementos de certa linha forem multiplicados por k;

c) O determinante não se altera quando utilizamos a operação elementar do tipo $l_i \leftarrow l_i + k \cdot l_j$ (Teorema de Jacobi);

d) O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal;

Exemplos

1) Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

Solução:

1) *Realizar operações elementares e transformra matriz em uma triangular superior*

$$det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad L2 \leftarrow L2/3$$

$$= 3det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad L3 \leftarrow L3 - 2L2$$

$$= (-3)det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L2 \leftrightarrow L1 \\ L3 \leftarrow L3 - 10L2 \end{matrix}$$

$$= (-3)\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{pmatrix}$$

2) *Após transformar a matriz A em uma triangular superior, multiplicamos o escalar pelos elementos da diagonal principal. Assim:*

det A=(-3)·1·1·(-55) = 165

Logo, o determinante da matriz A é 165.

Exemplo 2: Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Solução:

1) *Realizar operações elementares transformando a matriz em uma triangular superior.*

$$det \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad L1 \leftrightarrow L3$$

$$= -det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L2 \leftarrow L2 - 2L1 \\ L3 \leftarrow L3 - 2L1 \end{matrix}$$

$$= -det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad L2 \leftrightarrow L3$$

$$= det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L3 \leftarrow L3 + 2L2 \\ L4 \leftarrow L4 - L2 \end{matrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 29 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \quad L3 \leftrightarrow L4$$

$$= (-1) det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 29 \end{pmatrix} \quad L3 \leftarrow L3/2$$

$$= (-2) det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 29 \end{pmatrix} \quad L4 \leftarrow L4 - 4L3$$

$$= (-2) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}$$

2) *Após transformar a matriz em uma triangular superior, multiplicamos o escalar pelos elementos da diagonal principal.*

$= (-2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 45 = -90$

Assim o determinante da matriz A é -90.

2.2 Cofator Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ quadrada de ordem n, $n \in N^*$ e $n \geq 2$ denominamos cofator de a_{ij} o produto de $(-1)^{i+j}$ pelo determinante D_{ij} da matriz que se obtém quando se retira de A a i-ésima coluna. O cofator de a_{ij} será indicado por C_{ij}. Então $C_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$

Assim, se considerarmos a matriz quadrada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ de ordem 3 temos:

$$C_{11} = (-1)^{1+1}.D_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}.D_{23} = (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, calcular:

a) A_{11} b) A_{13} c) A_{32}

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-14) = -14$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (28) = 28$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (6+8) = -14$$

Exemplo: Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule:

a) C_{11} b) C_{32} c) C_{22}

2.2.1 Método de inversão por Matriz Adjunta

1) Calcular o determinante da Matriz M

2) Calcular a matriz C dos cofatores de M

3) Determinar a matriz adjunta $\overline{M}$

4) Calcular $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}.\overline{M}$

Exemplo

1) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ encontre A^{-1}.

2.3 Desenvolvimento de Laplace

Considere a matriz $A = (a_{ij})$ quadrada de ordem n, $n \geq 2$. O determinante D_A dessa matriz é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha ou uma coluna qualquer pelos respectivos cofatores.

Veja como calcular o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ pela 1ª linha:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $D_A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$ temos que:

$$C_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32}$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}.a_{33} - a_{23}.a_{31})$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31}$$

$$D_A = a_{11}(a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32}) - a_{12}(a_{21}.a_{33} - a_{23}.a_{31}) + a_{13}(a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31})$$
$$D_A = a_{11}a_{22}.a_{33} + a_{12}a_{23}.a_{31} + a_{13}a_{21}.a_{32} - a_{13}a_{22}.a_{31} - a_{12}a_{21}.a_{33} - a_{11}a_{23}.a_{32})$$

O determinante da matriz A pode ser desenvolvido segundo os elementos de qualquer linha ou de qualquer coluna que o resultado será o mesmo. Verifique!

Ao escolher uma linha ou coluna para desenvolver o determinante, convém optar pela que possui mais zeros.

Exemplo: Seja a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

O cofator do elemento a_{23}, isto é, 4 é: $(-1)^{2+3} \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 = -1$

O cofator do elemento a_{31}, isto é, de 0 é: $(-1)^{3+1}\cdot\det\begin{pmatrix}5 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix}=1\cdot 20=20$

Considere certa linha i fixada. O determinante da matriz A fica definido por:

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot(-1)^{i+j}\cdot\det A_{ij}$$

A expressão é uma fórmula de recorrência (faz uso de determinantes de matrizes de ordem menores) conhecida como **desenvolvimento de Laplace**. Este desenvolvimento pode ser feito fixando-se certa coluna j e a expressão passa a ser:

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\cdot(-1)^{i+j}\cdot\det A_{ij}$$

Exemplos:

1) $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 7\end{pmatrix}$ fixada a linha 2:

$$\det A=a_{21}\cdot(-1)^{2+1}\cdot\det A_{21}+a_{22}\cdot(-1)^{2+2}\cdot\det A_{22}=2\cdot(-1)^{3}\cdot\det(0)+7\cdot(-1)^{4}\cdot\det(-1)=-7$$

2) $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -2\\ -1 & 0 & 4\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$ fixada a linha 1.

$$\det A=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\det A_{11}+a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\det A_{12}+a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\det A_{13}$$

$$\det A=2\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}0 & 4\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}+5\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}+(-2)\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=-3$$

2.4 Determinante de uma matriz de ordem maior que 3

Para calcularmos um determinante de ordem maior que 3, aplicaremos o teorema de Laplace, tantas vezes quantas forem necessárias, até chegarmos a um determinante de ordem 3. Desta forma, podemos aplicar a regra de Sarrus.

Seja a matriz quadrada de ordem 4 A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, vamos calcular o determinante de A. Para tanto, aplicaremos o teorema de Laplace, até chegarmos a um determinate de 3ª ordem, e depois empregaremos a regra de Sarrus. Assim, desenvolvendo o determinate acima, segundo os elementos da 1ª linha, temos:

$$det\,A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \quad (1)$$

$$a_{11}A_{11} = 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 17 = 34$$

$$a_{12}A_{12} = 3\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -3\cdot 44 = -132$$

$$a_{13}A_{13} = -1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -1\cdot -111 = 111$$

$$a_{14}A_{14} = 0\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Substituindo em (1) temos: $det\,A = 34 - 132 + 111 = 13$

Resolva: Calcule o determinante a seguir, desenvolvendo-o segundo os elementos da 1ª linha.

Exemplo

Calcule o determinante da matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

2.5 Propriedades dos Determinantes

Considere A e B matrizes quadradas de ordem n e $k \in \mathbb{R}$ não nulos.

D1) Se A é uma matriz triangular superior (inferior) então $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

Demonstração: Considere a matriz triangular superior

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Fixando a coluna 1 para o cálculo do determinante,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det A_{11} + a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det A_{21} + \ldots + a_{n1} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \det A_{n1}$$

$$\det A = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot \det A_{i1}$$

$$= a_{11} \left[a_{22} (-1)^{1+1} \det A_{11} + \ldots + a_{nn} (-1)^{n-1+1} \det A_{(n-1)1} \right]$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \sum_{i=1}^{n-2} a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot \det A_{i1}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \left[a_{33} (-1)^{1+1} \det A_{11} + \ldots + a_{nn} (-1)^{n-2+1} \det A_{(n-2)1} \right]$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Corolários:

i) $\det 0_n = 0$

ii) $\det I_n = 1$

iii) Se A é uma matriz diagonal, então $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

D2) $\det A = 0$, quando todos os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz quadrada A forem nulos.

D3) $\det A = 0$ quando 2 linhas (ou 2 colunas) de uma matriz quadrada A forem iguais ou proporcionais.

D4) $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$.

D5) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ (Teorema de Binet).

D6) $\det A = \det A^t$.

D7) Considere a matriz A e, B a matriz obtida a partir de A por aplicação de operações elementares:

a) $l_i \leftrightarrow l_j : \det B = -\det A$

b) $l_i \leftarrow k \cdot l_i : \det B = k \cdot \det A$

Demonstração: Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Fixando a linha i para o cálculo do determinante,

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$$

Seja a matriz $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \ldots & ka_{in} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ obtida pela operação elementar $l_i \leftarrow k \cdot l_i$

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (ka_{ij}) \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij} = k \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij} = k \cdot \det A$$

c) $l_i \leftarrow l_i + k \cdot l_i : \det B = \det A$

D8) A é uma matriz invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

D9) Se A é uma matriz inversível então $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

D10) Se A e B são matrizes semelhantes, então $\det A = \det B$.

D11) Se A é uma matriz ortogonal, então $\det A = \pm 1$.

3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

3.1 Introdução

A preocupação do homem foi sempre descrever a natureza para melhor entender os fenômenos físicos. Por exemplo, sabemos que o hidrogênio (H_2) reage com o oxigênio (O_2) para produzir a água (H_2O).

Quanto de hidrogênio e oxigênio precisamos?

Para descrever esta mudança do seguinte modo:

$$x\,H_2 + y\,O_2 \rightarrow z\,H_2O$$

Como os átomos não são modificados, o número de átomos de cada elemento no início e fim da reação deve ser igual ao número de átomos desse mesmo elemento, no fim da reação. Assim devemos ter para o hidrogênio 2x = 2z, e para o oxigênio 2y = z. Portanto, as nossas incógnitas x, y e z devem satisfazer as equações:

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

Para esse sistema de equações nós encontraremos muitas soluções distintas, e só teremos resolvido o sistema se expressarmos o conjunto de todas as soluções .

Exemplo: $S = \left\{ x = z, y = \dfrac{z}{2}, \forall z \in \Re \right\}$

3.2 Equações Lineares

Definição:

Toda equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ é denominada **equação linear**, em que:

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ são coeficientes

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as incógnitas

b é um termo independente

Exemplos:

a) $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5$ é uma equação linear de três incógnitas.

b) $x + y - z + t = -1$ é uma equação linear de quatro incógnitas.

Observações:

1°) Quando o termo independente b for igual a zero, a equação linear denomina-se **equação linear homogênea.** Por exemplo: $5x + y = 0$.

2°) Uma equação linear não apresenta termos da forma $x_1^2, x_1.x_2$ etc., isto é, cada termo da equação tem uma única incógnita, cujo expoente é sempre 1.

As equações $3x_1^2 + 2x_2 = -3$ e $4x.y + z = \sqrt{2}$ não são lineares.

3°) A solução de uma equação linear a n incógnitas é a seqüência de números reais ou **ênupla** $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, que, colocados respectivamente no lugar de $x_1, x_2, ..., x_n$, tornam verdadeira a igualdade dada.

4°) Uma solução evidente da equação linear homogênea $3x + y = 0$ é a dupla $(0,0)$.

Exemplo. Resolva as seguintes equações lineares:

a) $3x = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$

Esta equação tem como solução única $x = \dfrac{5}{3}$, logo o seu conjunto solução é $S = \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$

b) $0x = 1$

Esta equação não tem nenhuma solução, pois não existe nenhum número real que multiplicado por 0 dê 1. Portanto $S = \varnothing$

c) $5x + 10y - 2z = 3$

Isolemos qualquer uma das variáveis, escrevendo ela em função das outras. Por exemplo, isolando x, temos $x = \dfrac{3}{5} - 2y + \dfrac{2}{5}z$ isto é, escrevemos x em função de y e z. As variáveis y e z não dependem de nenhuma outra; elas são variáveis livres. Logo, elas podem assumir quaisquer valores reais arbitrários, digamos $y = \alpha$ e $z = \beta$. Portanto, o conjunto solução deste sistema é infinito e tem a forma

$$S = \left\{\frac{3}{5} - 2y + \frac{2}{5}z, \alpha, \beta; \alpha, \beta \in \Re\right\}$$

3.3 Solução de uma Equação Linear

Dizemos que a sequência ou n-upla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é uma solução da equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, se $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ for uma sentença verdadeira.

Exemplo: Seja a equação linear $x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -1$. A sequência $(1,0,3,5)$ é uma solução da equação, pois $1+2.0+3-5 = -1$ é uma sentença verdadeira. Por outro lado, a sequência $(1,3,0,1)$ não é solução, pois $1+2.3+0-1=-1$ é uma sentença falsa.

3.4 Sistemas Lineares

Forma geral: É definido a partir de m equações lineares a n incógnitas dispostas da seguinte forma:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2j}x_j & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Observações:

1ª) Se o termo independente de todas as equações do sistema for nulo, isto é, $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, o sistema linear será dito **homogêneo**. Veja o exemplo:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \\ 5x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Uma solução evidente do sistema linear homogêneo é x = y = z = 0.

Esta solução chama-se solução trivial do sistema homogêneo. Se o sistema homogêneo admitir outra solução em que as incógnitas não são todas nulas, a solução será chamada solução não-trivial.

2ª) Se dois sistemas lineares, S_1 e S_2, admitem a mesma solução, eles são ditos sistemas equivalentes.

3.4.1 Sistemas Lineares Equivalentes

Dizemos que dois sistemas são equivalentes se e somente se toda solução de um deles é também solução do outro.

Sejam $S_1: \begin{cases} 2x + y = 4 \\ y + 10z = -28 \\ -14z = 42 \end{cases}$ e $S_2: \begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$,

A terna (6, 2, -3) é solução única de S_1 e também de S_2. Logo, S_1 e S_2 são sistemas equivalentes.

1. Seja o sistema $S_1 : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$.

a) Verifique se (2, -1, 1) é solução de S.

b) Verifique se (0,0,0) é solução de S.

Resposta: a) é b) não é

2. Seja o sistema: $\begin{cases} 3x + y = k^2 - 9 \\ x - 2y = k + 3 \end{cases}$. Calcule k para que o sistema seja homogêneo.

Resposta: k = -3

<u>Forma matricial</u>: $AX = B$, $A \in M_{m \times n}$, $X \in M_{n \times 1}$ e $B \in M_{m \times 1}$,

Dentre suas diferentes aplicações, as matrizes são utilizadas na resolução de um sistema de equações lineares.

Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Utilizando matrizes, podemos representar este sistema da seguinte forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{matriz constituída} \\ \text{pelos coeficientes} \\ \text{das incógnitas}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{matriz coluna} \\ \text{constituída pelas} \\ \text{incógnitas}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{matriz coluna} \\ \text{dos termos} \\ \text{independentes}}}$$

Observe que se você efetuar a multiplicação das matrizes indicadas irá obter o sistema dado. Veja também que, a multiplicação é perfeitamente possível (justifique).

Se a matriz constituída pelos coeficientes das incógnitas for quadrada, o seu determinante é dito determinante do sistema.

Exemplo:

Seja o sistema: $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -1 \\ 7x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$. Ele pode ser representado por meio de matrizes, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

3.5 Solução de Sistemas Lineares

Uma solução do sistema S é uma *n*-upla $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ que é solução de cada uma das *m* equações do sistema.

3.5.1 Classificação de um Sistema Linear Quanto ao Número de Soluções

Um sistema linear do tipo $AX = B$ recebe o nome de:

i. **possível (ou compatível) e determinado**, se apresenta única solução;

ii. **possível e indeterminado**, se possui mais de uma solução;

iii. **impossível (ou incompatível)**, se não admite solução.

Exemplos:

1) O sistema $S: \begin{cases} x + 2y - 3z + 2w = 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6w = 5 \\ 3x + 4y - 5z + 2w = 4 \end{cases}$ é possível e indeterminado.

2) O sistema $S: \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 5 \\ -6x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$ é impossível.

3) O sistema $S: \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 7y = 3 \end{cases}$ é possível e determinado.

3.6 Regra de Cramer

A regra de Cramer consiste num método para se resolver um sistema linear.

$$\text{Seja o sistema : } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .. + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + .. + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + .. + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Vamos determinar a matriz A dos coeficientes das incógnitas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Vamos determinar agora a matriz A_{x1}, que se obtém a partir da matriz A, substituindo-se a coluna dos coeficientes de x_1 pela coluna dos termos independentes.

$$A_{x1} = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \\ b_n & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Pela regra de Cramer: $x_1 = \dfrac{det\, A_{x1}}{det\, A}$

De maneira análoga podemos determinar os valores das demais incógnitas:

$$A_{x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ a_{m1} & b_n & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_2 = \frac{det\, A_{x2}}{det\, A}$$

$$A_{xn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & b_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_n = \frac{det\, A_{xn}}{det\, A}$$

Generalizando, num sistema linear o valor da incógnita x_1 é dado pela expressão:

$$x_i = \frac{det\, A_i}{det\, A} \rightarrow \begin{cases} \text{A é a matriz incompleta do sistema.} \\ \text{A}_\text{i} \text{ é a matriz obtida de A substituindo - se} \\ \quad \text{as colunas dos coeficientes de x}_\text{i} \\ \quad \text{pela coluna dos termos independentes.} \end{cases}$$

Vejamos alguns exemplos.

1° Exemplo: Resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ -x - y = 2 \end{cases}$.

Resolução: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\, A = 0$

$$A_x = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\, A_x = -7$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow det\, A_y = 7$$

$$x = \frac{det\, A_x}{det\, A} = \frac{-7}{0} \text{ impossível} \qquad y = \frac{det\, A_y}{det\, A} = \frac{7}{0} \text{ impossível}$$

Resposta: $S = \phi$

2º Exemplo: Resolver o sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$.

Resolução:

1º) Cálculo do determinante da matriz incompleta.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\,A = -4 + 10 - 3 - 4 - 5 - 6 = -12$$

2º) Cálculo do determinante das incógnitas.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 10 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\,A_1 = 0 + 10 - 10 - 4 + 0 - 20 = -24$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\,A_2 = 10 + 0 - 3 + 10 - 5 + 0 = 12$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\,A_3 = -4 + 20 + 0 + 0 - 10 - 6 = 0$$

3º) Cálculo das incógnitas.

$$x_1 = \frac{det\,A_1}{det\,A} = \frac{-24}{-12} = 2$$

$$x_2 = \frac{det\,A_2}{det\,A} = \frac{12}{-12} = -1$$

$$x_3 = \frac{det\,A_3}{det\,A} = \frac{0}{-12} = 0$$

Resposta: $S = \{(2, -1, 0)\}$ Sistema Possível e Determinado.

3.7 Discussão de um sistema linear

Seja o sistema linear de n equações a n incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Discutir o sistema é saber se ele é **possível, impossível** ou **determinado**.

Utilizando a regra de Cramer, temos:

$$x_1 = \frac{det\,A_1}{det\,A},\ x_2 = \frac{det\,A_2}{det\,A},\ldots,x_n = \frac{det\,A_n}{det\,A}$$

Possível e Determinado $\Rightarrow det\,A \neq 0$

Possível e Indeterminado $\Rightarrow \begin{cases} det\,A = 0 \\ e \\ det\,A_1 = det\,A_2 = \ldots = det\,A_n = 0 \end{cases}$

Impossível $\Rightarrow \begin{cases} det\,A = 0 \\ e \\ \text{pelo menos um } det\,A_n \neq 0 \end{cases}$

Vejamos alguns exemplos:

1º) Exemplo: Discutir o sistema $\begin{cases} 3x + my = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

Resolução: Vamos calcular o valor dos determinantes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & m \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\, A = -3 - m$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & m \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\, A_1 = -2 - m$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\, A_2 = 1$$

Fazendo: $det\, A = 0 \Rightarrow -3 - m = 0 \Rightarrow m = -3$

$det\, A_1 = 0 \Rightarrow -2 - m = 0 \Rightarrow m = -2$

Resposta: SPD $\Rightarrow m \neq -3$ (sistema possível e determinado)

SPI $\Rightarrow \nexists m$ (sistema possível e indeterminado), pois det A_2 = 1 para qualquer valor de m

SI $\Rightarrow m = -3$ (sistema impossível)

2º) Exemplo: Verificar se o sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ é determinado ou indeterminado.

Resolução: Vamos calcular o valor dos determinantes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \det A = 5 \qquad A_x = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \det A_x = 0 \qquad A_y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \det A_y = 0$$

Como $\det A = 5 \neq 0$, o sistema é determinado.

Vamos achar a solução:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{0}{5} = 0 \quad \text{e} \quad y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{0}{5} = 0$$

$S = \{(0,0)\}$

Resposta: O sistema é determinado e $S = \{(0,0)\}$.

Observação:

Todo sistema homogêneo é sempre possível, pois admite a solução (0, 0,.., 0) chamada **solução trivial**.

ɪerve que para um sistema homogêneo teremos sempre $\det A_1 = 0, \det A_2 = 0, \ldots, \det A_n = 0$

Portanto, para a discussão de um sistema linear homogêneo, é suficiente o estudo do determinante dos coeficientes das incógnitas.

$$\text{Determinado} \Rightarrow \det A \neq 0$$
$$\text{Indeterminado} \Rightarrow \det A = 0$$

3°)Exemplo: Calcular o valor de a para que o sistema $\begin{cases} ax + y = 0 \\ ax + ay = 0 \end{cases}$ tenha soluções diferentes da trivial.

Resolução: Neste caso, o sistema deve ser indeterminado, e teremos $\det A = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & a \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a^2 - a = 0 \Rightarrow a.(a-1) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } a = 1$$

Resposta: $\{0,1\}$

3.8 Sistemas Lineares e Matrizes

Um sistema linear pode ser escrito numa forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{, ou seja, } AX = B,$$

onde A é a matriz dos coeficientes, X é a matriz das incógnitas e B é a matriz dos termos independentes.

OBS.: Outra matriz que podemos associar ao sistema $AX = B$ é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

chamada matriz ampliada do sistema $AX = B$.

Exemplo: No sistema $\begin{cases} x+4y+3z=1 \\ 2x+5y+4z=4 \\ x-3y-2z=5 \end{cases}$ temos a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \text{ e a matriz ampliada é } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

3.9 Matrizes Escalonadas

Dizemos que uma matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$ está na forma ***linha reduzida à forma escada*** (LRFE) ou ***forma escalonada reduzida por linhas*** se satisfaz às seguintes condições:

- **a)** O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1
- **b)** Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas
- **c)** O número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha até que sobrem somente linhas nulas, se houver
- **d)** Cada coluna que possui o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os outros elementos nulos.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é Linha Reduzida a Forma Escada

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ não é Linha Reduzida a Forma Escada. Não satisfaz b) e c)

3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ não é Linha Reduzida a Forma Escada. Não satisfaz a) e d)

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ não é Linha Reduzida a Forma Escada. Não satisfaz c).

Mas, se permutarmos a 2ª linha com a 3ª obtemos $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ que é Linha Reduzida a Forma Escada.

5) Toda matriz quadrada Linha Reduzida a Forma Escada ou é a identidade ou tem linhas nulas

<u>Definição</u>: Se uma matriz satisfaz às três primeiras condições dizemos que ela está na ***forma escalonada por linhas*** ou simplesmente na ***forma escalonada***.

Exemplos:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1) e 2) estão na ***forma escalonada***

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ não está na forma escalonada nem Linha Reduzida a Forma Escada

Observação: Toda matriz na forma Linha Reduzida a Forma Escada está na forma escalonada mas não reciprocamente.

<u>3.10 Eliminação de Gauss-Jordan</u>

<u>Teorema</u>: Toda matriz é linha-equivalente a uma única matriz linha reduzida à forma escada.

Seja *A* uma matriz $m \times n$. Veremos o processo que será usado para, a partir da matriz *A*, obtermos a matriz *B*, linha equivalente a *A* (*A* ~ *B*), tal que *B* seja linha reduzida à forma escada. Acompanharemos os passos com um exemplo.

1º) Se *A* tem linhas nulas, colocamos todas as linhas nulas abaixo das linhas não nulas, através de permutação, e a matriz fica satisfazendo a condição b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 7 & 25 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 7 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2º) Seja a_{1j_o} o primeiro elemento não nulo da 1ª linha. Efetuamos a operação elementar $\mathrm{L}_1 \to \dfrac{1}{a_{ij_o}} \mathrm{L}_1$ e a condição a) fica satisfeita para esta linha.

$$A=\begin{pmatrix}0&2&4&8\\1&1&1&1\\3&7&7&25\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\to\frac{1}{2}L_1}\begin{pmatrix}0&1&2&4\\1&1&1&1\\3&7&7&25\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

3º) Substituímos agora cada linha Li, $i \neq 1$, por $L_i - a_{ij_o} L_1$. Desta maneira, na coluna j_0, $a_{1j_o} = 1$ e todos os outros elementos se anulam ficando esta coluna satisfazendo à condição d)

$$\begin{pmatrix}0&1&2&4\\1&1&1&1\\3&7&7&25\\0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{L_3\to L_3-7L_1}{\xrightarrow{L_2\to L_2-L_1}}\begin{pmatrix}0&1&2&4\\1&0&-1&-3\\3&0&-7&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

4º) Repetimos agora o processo para as outras linhas ficando agora todas as outras colunas satisfazendo à condição d)

$$\begin{pmatrix}0&1&2&4\\1&0&-1&-3\\3&0&-7&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\to L_3-3L_2}\begin{pmatrix}0&1&2&4\\1&0&-1&-3\\0&0&-4&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\to\frac{-1}{4}L_3}\begin{pmatrix}0&1&2&4\\1&0&-1&-3\\0&0&1&-3/2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2\to L_2+L_3}{\xrightarrow{L_1\to L_1-2L_3}}\begin{pmatrix}0&1&0&7\\1&0&0&-9/2\\0&0&1&-3/2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

5º) Se as condições b) e c) não estão satisfeitas no fim do 4º) passo, efetuamos permutações de linhas, em um número finito, até que a matriz fique na forma linha reduzida à forma escada.

$$\begin{pmatrix}0&1&0&7\\1&0&0&-3/9\\0&0&1&-3/2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-9/2\\0&1&0&7\\0&0&1&-3/2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

<u>Observações:</u>

1) A matriz linha reduzida à forma escada obtida pelo processo descrito anteriormente é única.
2) O processo que obter uma matriz linha reduzida à forma escada, a partir de uma matriz dada é chamado de **escalonamento de matriz** ou **eliminação de Gauss-Jordan.**
3) O processo para chegarmos a uma forma escalonada (mas não LRFE) é chamado de **eliminação gaussiana**.

Exemplos: Escalone as matrizes a seguir para colocá-las na forma LRFE.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \\ 3 & 3 & 1 & 12 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3.11 Operações Elementares Sobre as Linhas de um Sistema Linear

São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz. (Para simplificar a linguagem vamos indicar por L_i a i-ésima linha de uma matriz)

1) *Permutar linhas*

($L_i \leftrightarrow L_j$ indica que as linhas i e j foram permutadas)

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

2) *Multiplicar uma linha por um escalar não nulo k*

($L_i \rightarrow kL_i$ indica que a i-ésima linha foi substituída por kL_i)

Exemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \overset{L_2 \rightarrow -2L_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix}$

3) *Substituir uma linha por ela somada a outra linha multiplicada por um escalar não nulo*

($L_i \rightarrow L_i + kL_j$ indica que a i-ésima linha foi substituída pela i-ésima linha somada com a j-ésima linha multiplicada por k)

Exemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix} \overset{L_2 \rightarrow L_2 + L_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}$

Observemos que as matrizes, depois de efetuadas estas operações, podem ser consideradas matrizes ampliadas de sistemas equivalentes.

3.12 Posto e Nulidade

Definição: Dada uma matriz A_{mxn} , seja, B_{mxn} a matriz –linha reduzida à forma escada linha equivalente a A. O posto de A, denotado por p é o número de linhas não nulas de B. A nulidade de A é : $n - p$

Observação: Dada a matriz A qualquer, para achar seu posto é necessário primeiro encontrar a matriz –linha reduzida à forma escada, e depois contar as linhas não-nulas. Este número é o posto da matriz A. A nulidade é a diferença entre as colunas da matriz A e o posto.

3.13 Teorema de Rouché-Capelli

i) Um sistema de m equações e n incógnitas tem solução se, e somente se, o posto (p) da matriz ampliada do sistema (PA) é igual ao posto da matriz dos coeficientes (PC).

ii) Se PA = PC = n, então o sistema tem solução única.

iii) se PA = PC < n, então o sistema tem mais de uma solução. Neste caso, o número N = n – p (grau de liberdade) é o número de variáveis do sistema em função das variáveis livres.

Exemplo: Resolva os seguintes sistemas:

a) $$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ y + 2z - w = 0 \\ x + 2y + 3z + w = 1 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$$