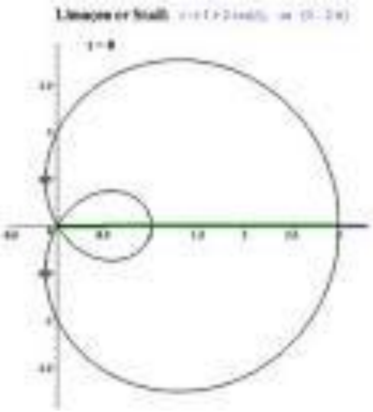
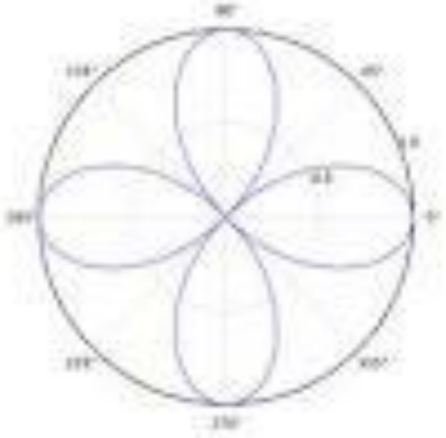
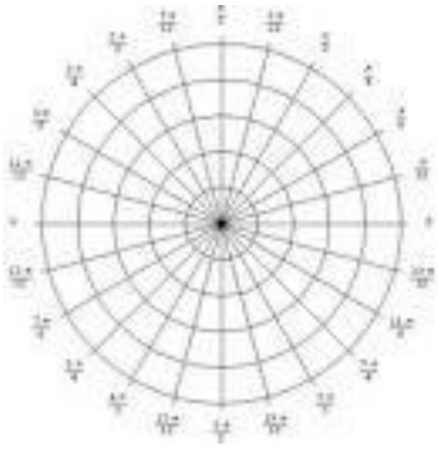
Gráficos em Coordenadas Polares

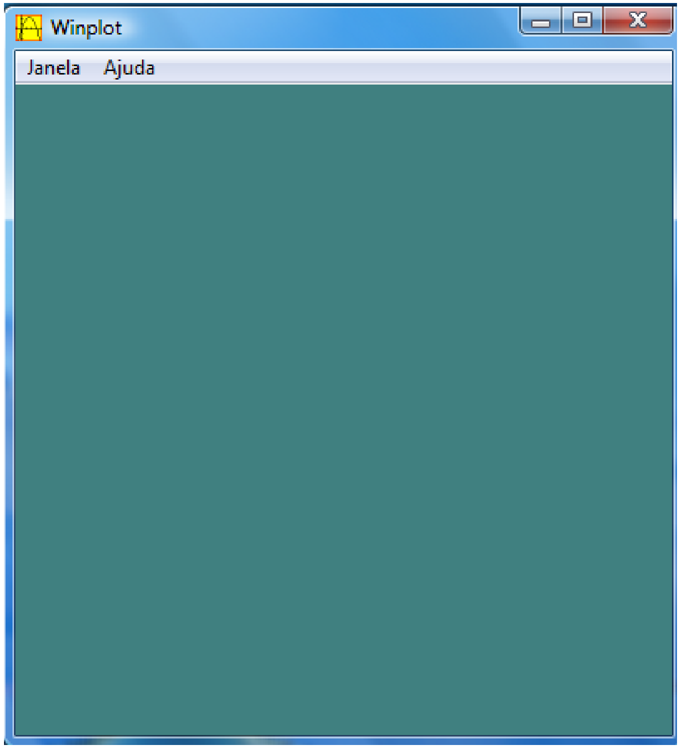
Prof. Priscila

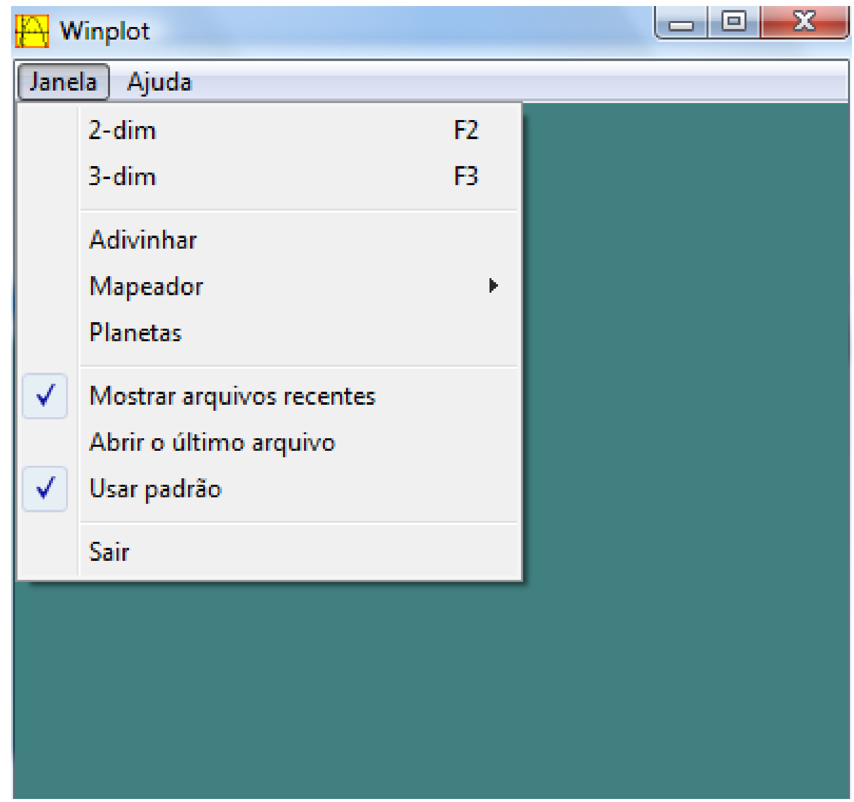


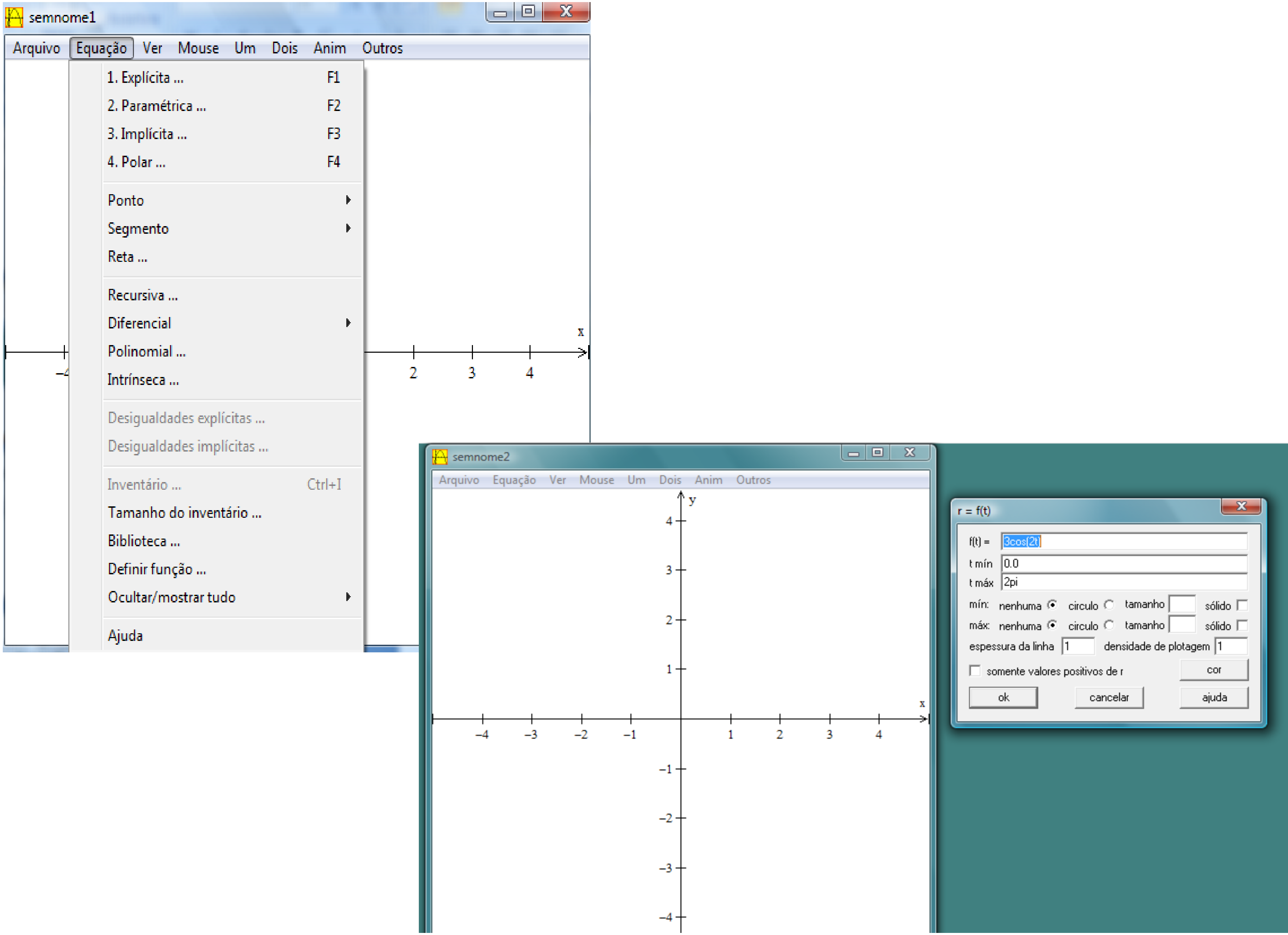




Software Winplot





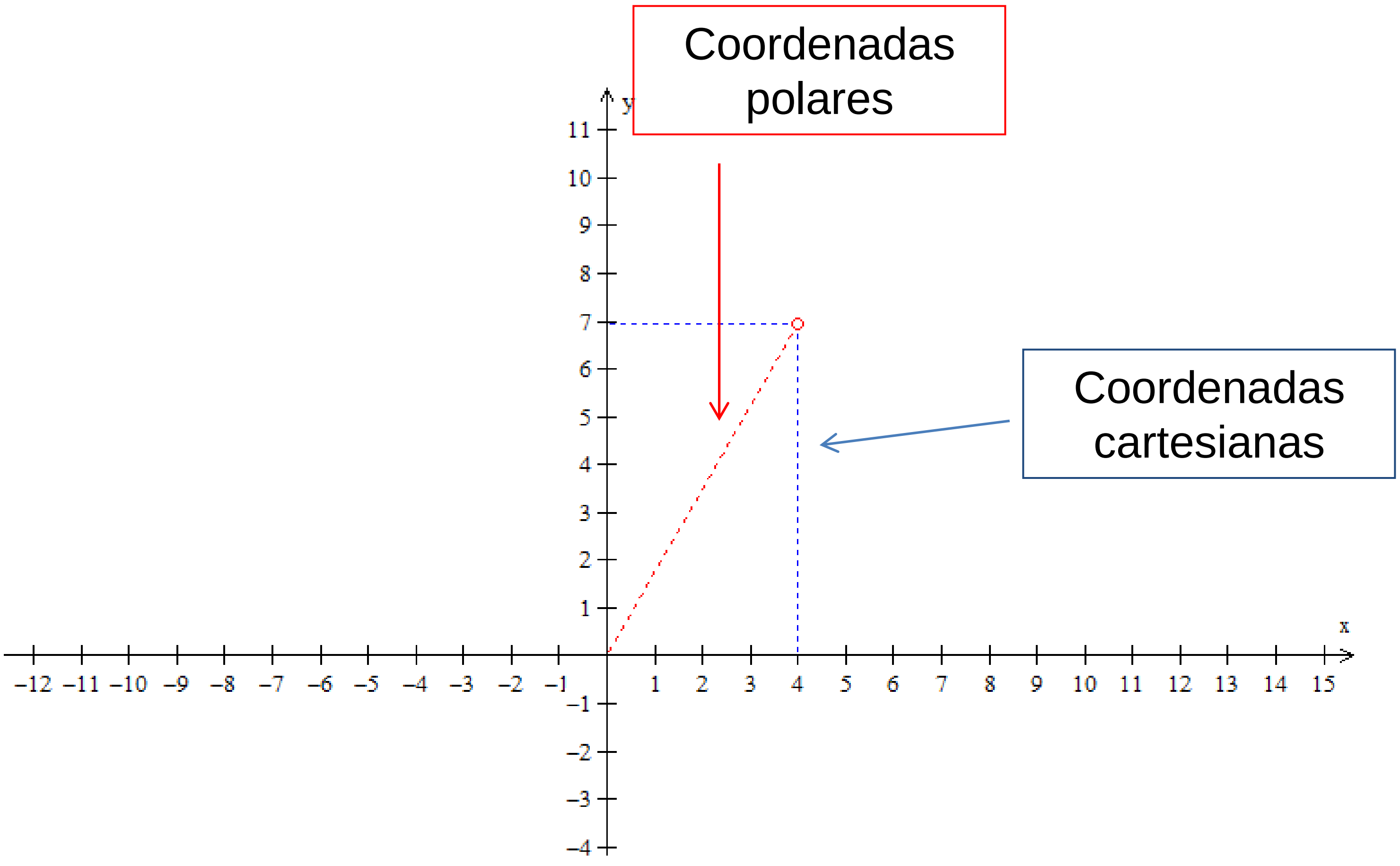

semnome1
Arquivo
Equação
Ver
Mouse
Um
Dois
Anim
Outros
1. Explícita ... F1
2. Paramétrica ... F2
3. Implícita ... F3
4. Polar ... F4
Ponto
Segmento
Reta ...
Recursiva ...
Diferencial
Polinomial ...
Intrínseca ...
Desigualdades explícitas ...
Desigualdades implícitas ...
Inventário ... Ctrl+I
Tamanho do inventário ...
Biblioteca ...
Definir função ...
Ocultar/mostrar tudo
Ajuda
semnome2
r = f(t)
f(t) =
3cos(2t)
t mín
0.0
t máx
2pi
mín: nenhuma circulo tamanho sólido
máx: nenhuma circulo tamanho sólido
espessura da linha
1
densidade de plotagem
1
somente valores positivos de r
cor
ok
cancelar
ajuda

Usando o Winplot

Exemplo: Encontre os seguintes pontos

$$P(4, 4\sqrt{3})$$

$$Q\left(8, \frac{\pi}{3}\right)$$



Gráfico

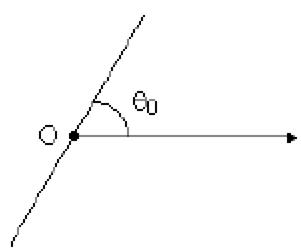
O gráfico de uma equação polar $f(r,\theta) = 0$, é formado por todos os pontos cujas coordenadas polares (r,θ) satisfazem a equação acima. É comum apresentar a equação na forma explícita:

$r = f(\theta)$.

Para traçar o gráfico de uma equação polar, atribuímos valores ao θ, encontramos r e formamos uma tabela. Usamos as mesmas técnicas utilizadas no esboço dos gráficos em coordenadas cartesianas.

1- Equação da Reta

Seja $\theta = \theta_0$ onde $\theta_0 \geq 0$. Esta equação representa os pontos $P=(r,\theta_0)$ onde r é um número real qualquer. Logo, $\theta=\theta_0$ representa uma reta passando pelo polo e que forma um ângulo de θ_0 com o eixo polar.

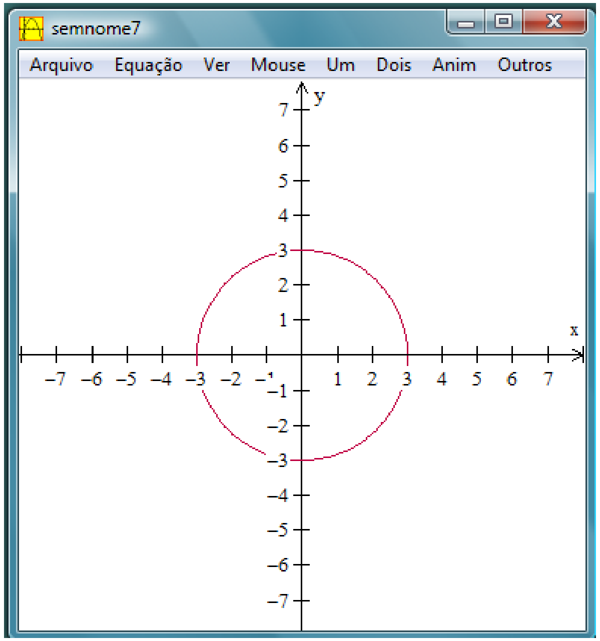


2- Equação da Circunferência

a) Se r =a com $a \in \Re$, esta equação representa os pontos do plano, cuja distância ao polo é a. É uma circunferência de raio a e centro no polo.

<u>Exemplo</u>:

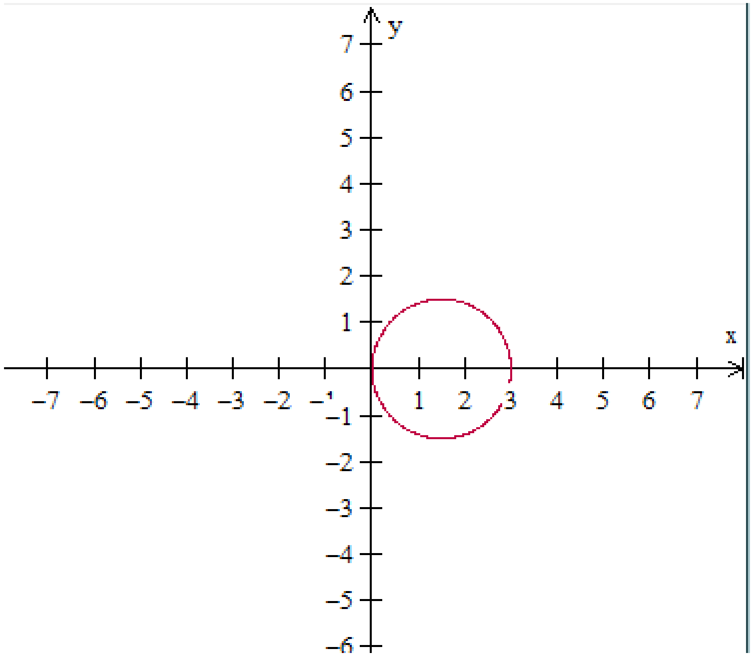
r = 2



b) r=a.cos(θ) com $a \in \Re$ sendo **a** o diâmetro da circunferência:

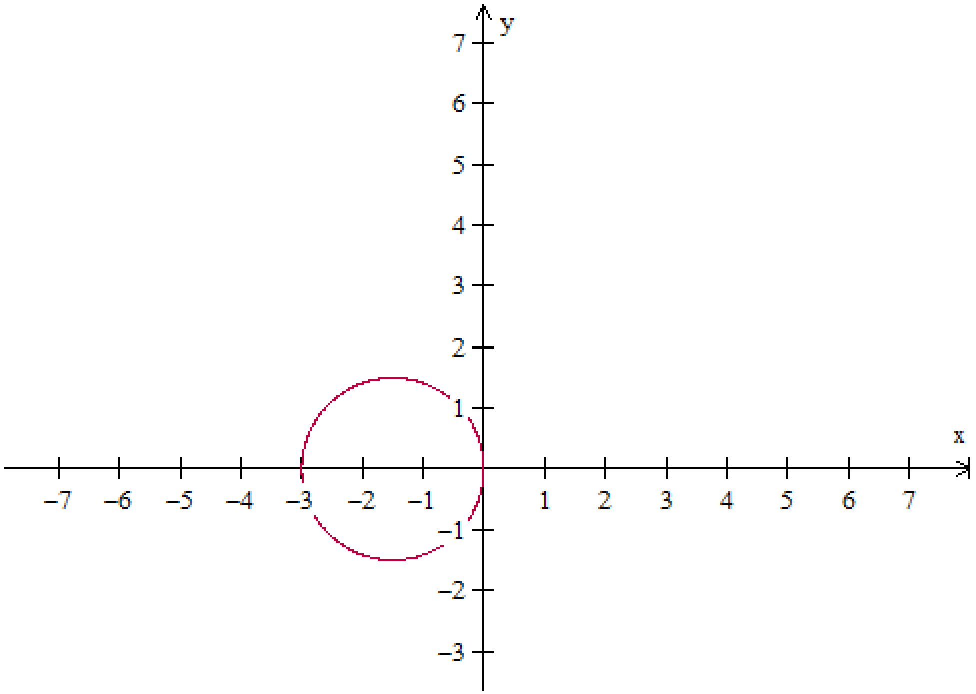
i) Caso: a > 0

Ex: r = 3cos(θ)



- ii) Caso $a < 0$

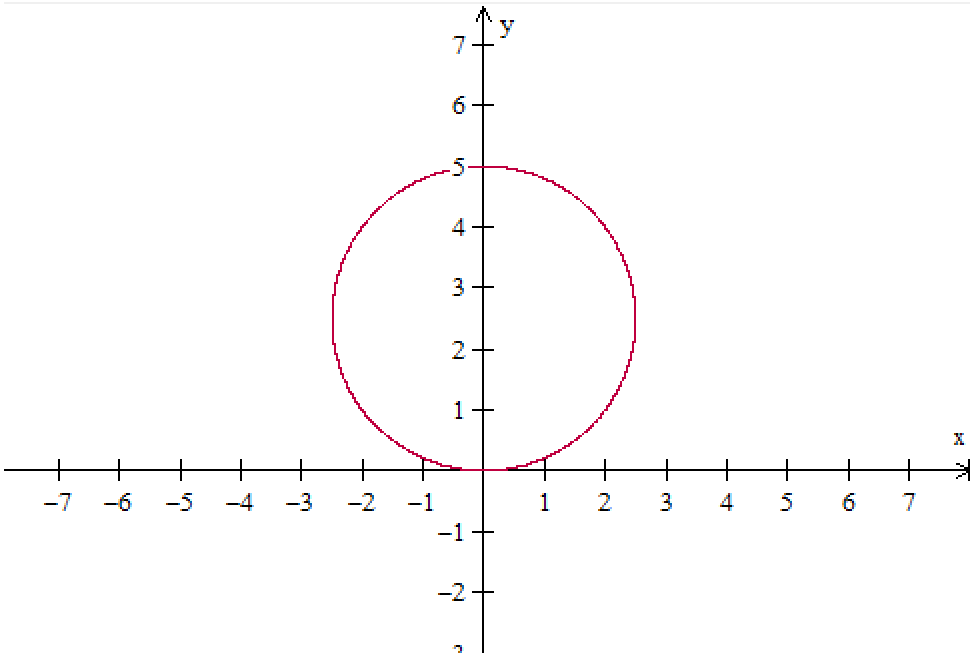
Ex: $r = -3\cos(\theta)$



c) r=asen(θ) com $a \in \Re$ sendo a o diâmetro da circunferência:

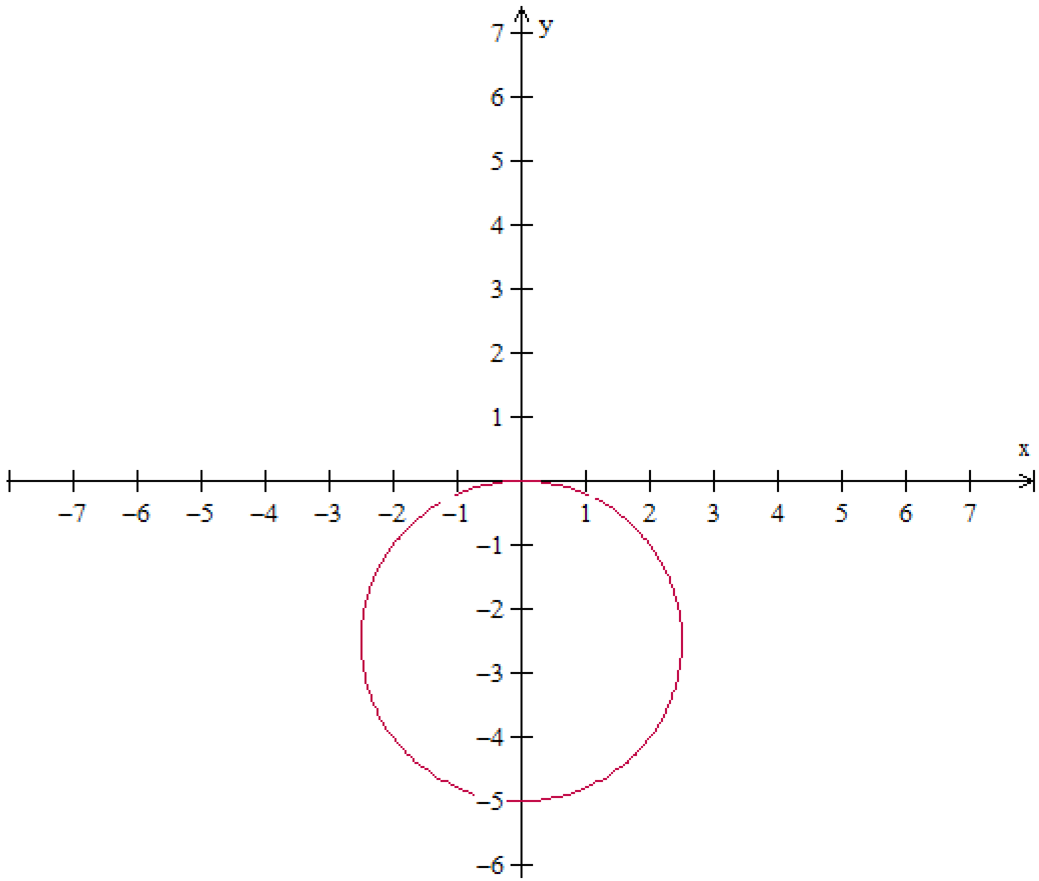
i) Caso a > 0

Ex: r=5sen(θ)



ii) Caso a < 0

Ex: $r=-5sen(\theta)$



3 Limaçon

A equação é do tipo $r = a \pm b\cos(\theta)$ ou $r = a \pm bsen(\theta)$. Existem quatro tipos de limaçon e cada tipo depende da razão $\frac{a}{b}$ onde a e b são números positivos.

1) Se $0 < \frac{a}{b} < 1$ limaçon com um laço

2) Se $\frac{a}{b} = 1$ cardióide (formato de um coração)

3) Se $1 < \frac{a}{b} < 2$ limaçon com um dente

4) Se $\frac{a}{b} \geq 2$ limaçon convexo (sem dente)

i) Se $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$. Simetrias:

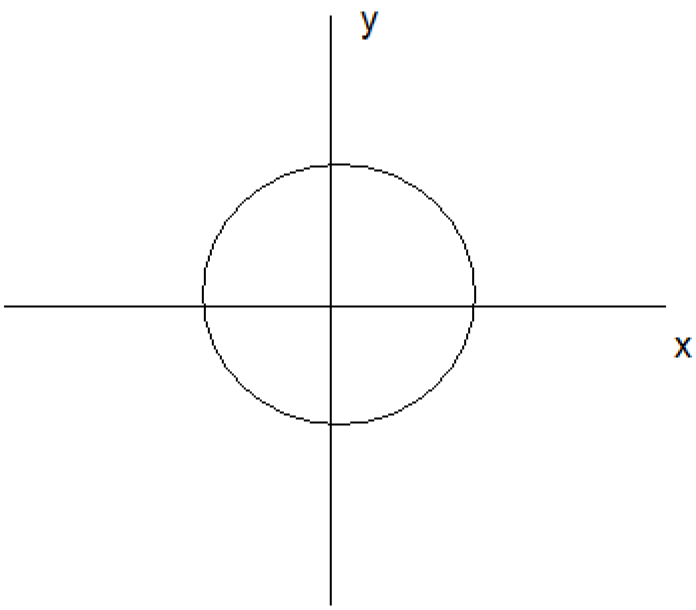
$r \to -r$, a equação muda, portanto, não existe simetria em relação ao pólo.

$\theta \to -\theta$ $cos(-\theta) = cos(\theta)$; a equação não muda, logo, existe simetria em relação ao eixo polar.

$\theta \to \pi - \theta$ $cos(\pi - \theta) = - cos(\theta)$; a equação muda, não existe simetria em relação ao eixo $\frac{\pi}{2}$.

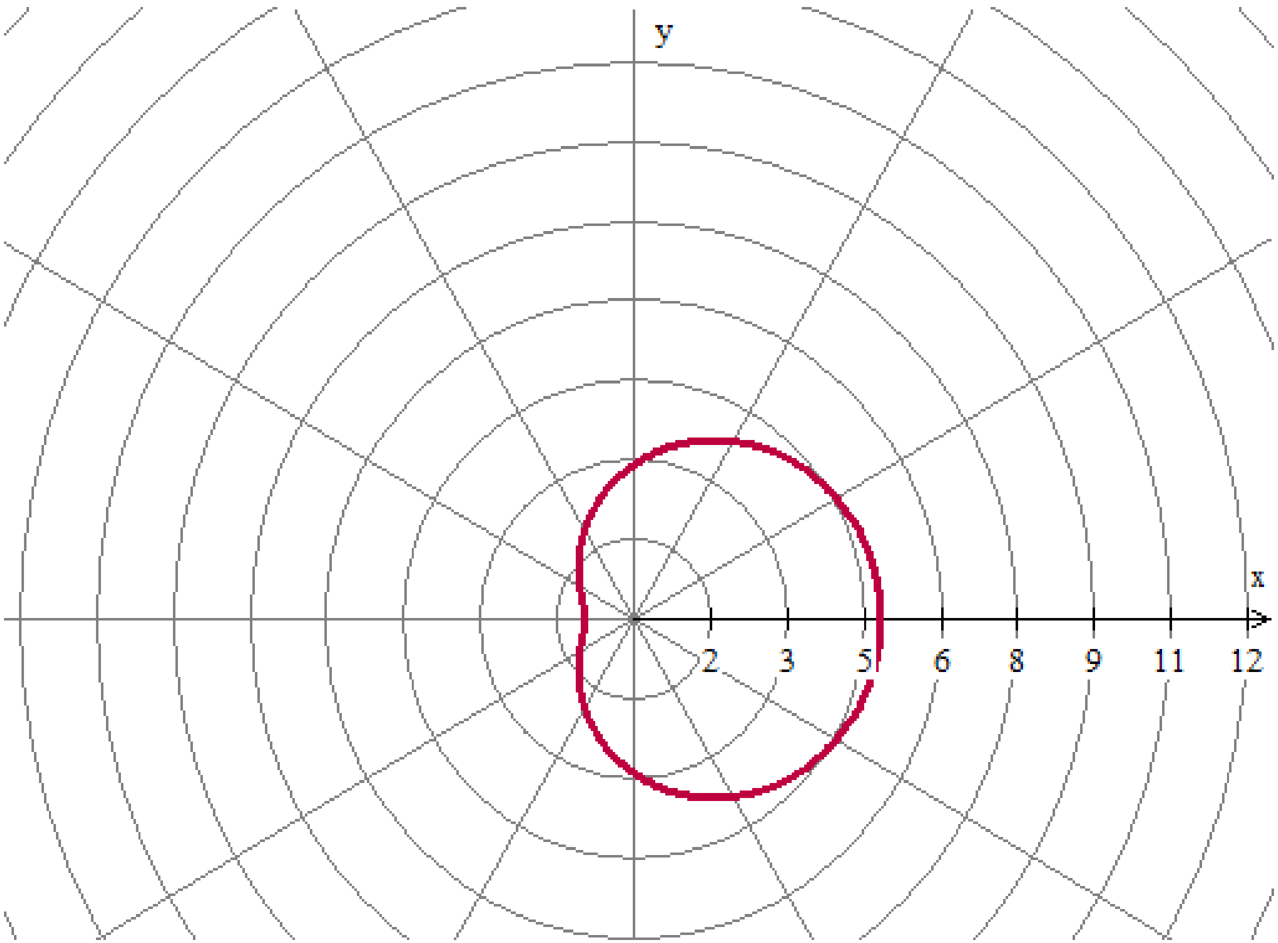
- Exemplo: $r = 3 + 2\cos(\theta)$

θ	r
0	5
$\pi/6$	4,73
$\pi/3$	4
$\pi/2$	3
$2\pi/3$	2
$5\pi/6$	1,27
π	1
$7\pi/6$	1,27
$4\pi/3$	2
$3\pi/2$	3
$5\pi/3$	4
$11\pi/6$	4,73
2π	5



Lápis e papel

Usando Winplot



Simetria em relação ao eixo polar

ii) Se $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$. Simetrias:

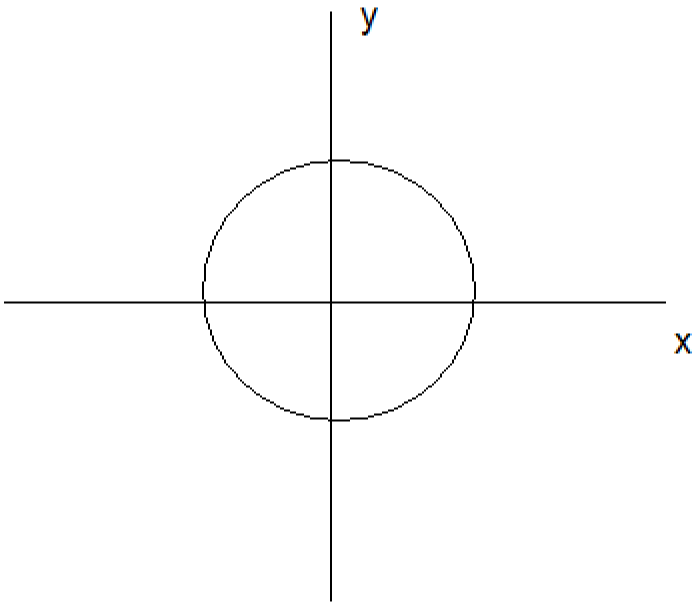
$r \rightarrow -r$, a equação muda (não existe simetria em relação ao pólo).

$\theta \rightarrow -\theta$ $sen(-\theta) = -\ sen(\theta),\ \ r = 1 - 2\ sen(\theta)$ a equação muda (não existe simetria em relação ao eixo polar).

$\theta \rightarrow \pi - \theta$ $sen(\pi - \theta) = sen(\pi)\ cos(\theta) - sen(\theta)\ cos(\pi) = \boldsymbol{sen(\theta)}$, a equação não muda (existe simetria em relação ao eixo $\dfrac{\pi}{2}$).

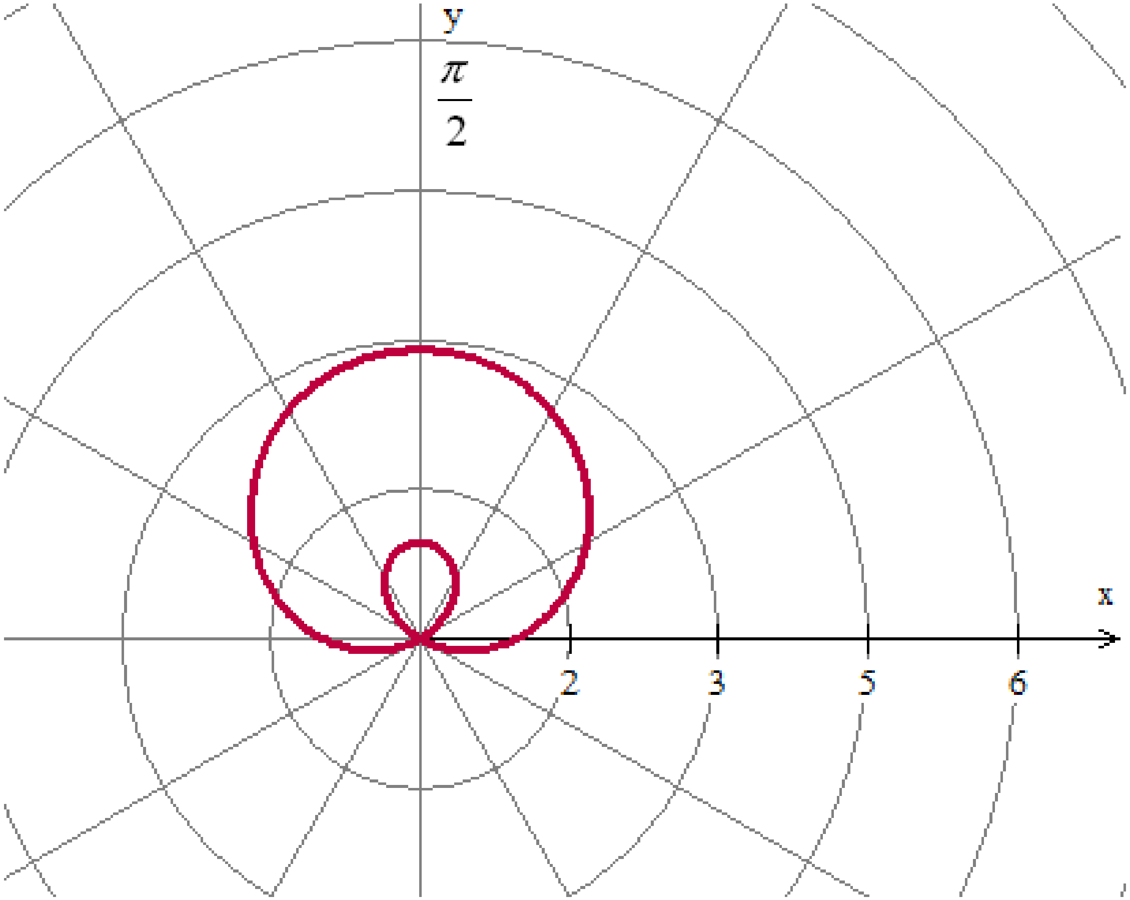
- Exemplo: $r = 1 + 2\,sen(\theta)$

ângulo	θ	r
0	0	1
30	$\pi/6$	2
60	$\pi/3$	2,73
90	$\pi/2$	3
120	$2\pi/3$	2,73
150	$5\pi/6$	2
180	π	1
210	$7\pi/6$	0
240	$4\pi/3$	-0,73
270	$3\pi/2$	-1
300	$5\pi/3$	-0,73
330	$11\pi/6$	0
360	2π	1



Lápis e papel

Usando Winplot



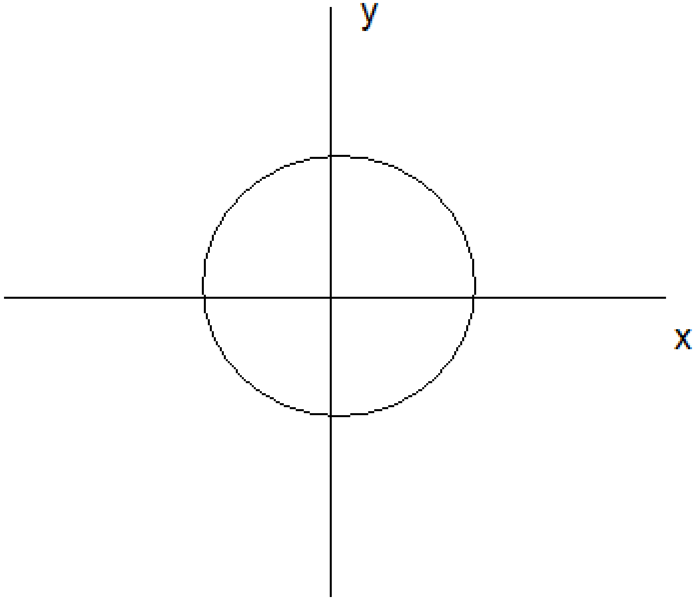
Simetria em relação ao eixo $\frac{\pi}{2}$

iii) Se $a = b$. O gráfico tem e forma de um coração

Cardióide

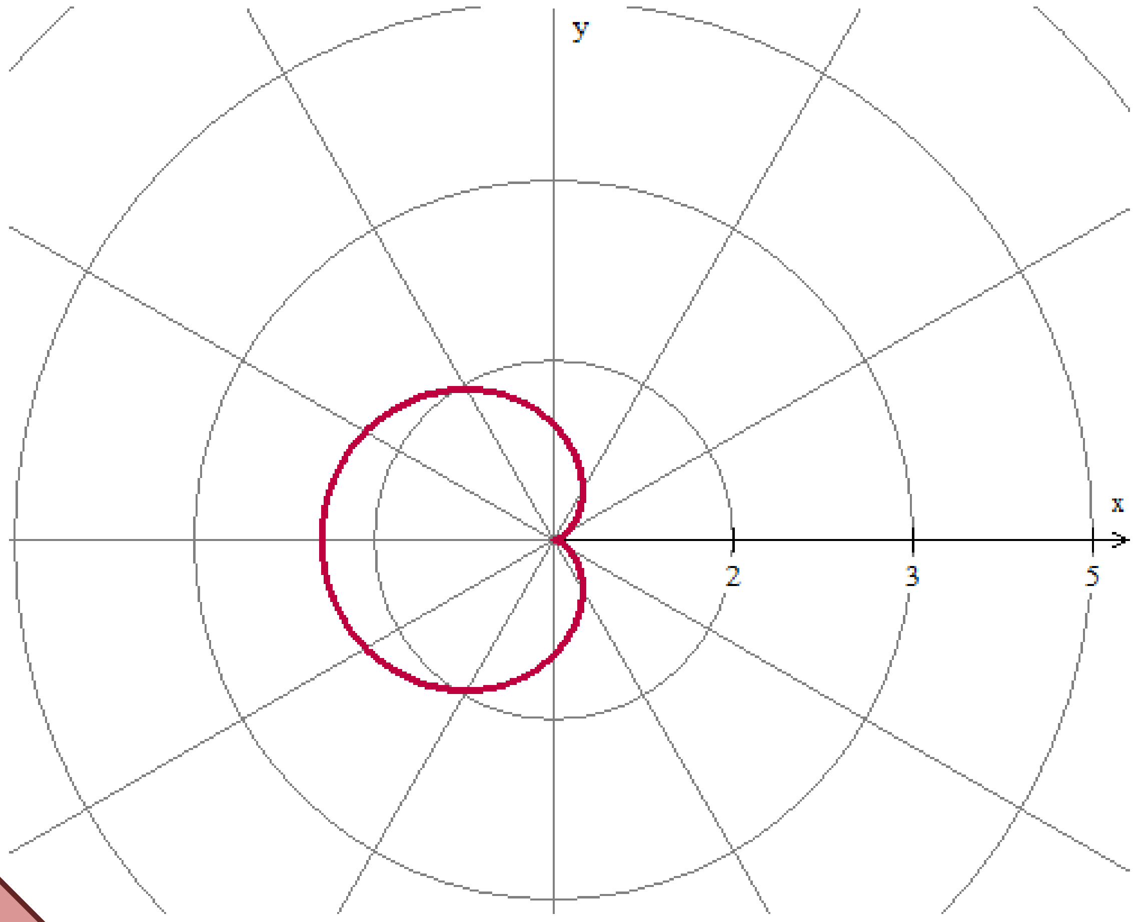
- Exemplo: $r = 1 - cos(\theta)$.

θ	r
0	0
$\pi/6$	0,13
$\pi/3$	0,5
$\pi/2$	1
$2\pi/3$	1,5
$5\pi/6$	1,87
π	2



Lápis e papel

Usando Winplot



Simetria em relação ao eixo polar

4 Lemniscatas

São funções do tipo $r^2 = \pm k\cos(2\theta)$ ou $r = \pm k sen(2\theta)$ em que $k \in \Re$

Exemplo:

a) $r^2 = 3\cos(2\theta)$

Simetrias:

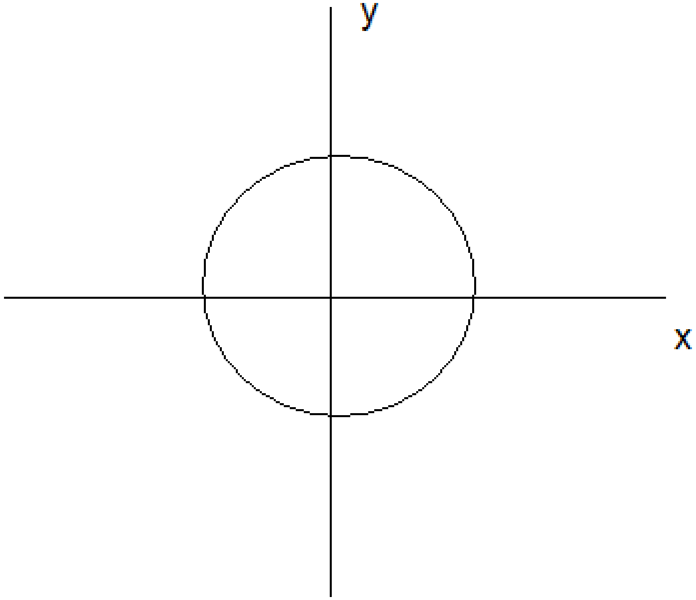
$r \rightarrow -r$, a equação não muda, logo, existe simetria em relação ao pólo.

$\theta \rightarrow -\theta$ $cos(-2\theta) = cos(2\theta)$, $r = 3\ cos(2\theta)$ a equação não muda, logo, existe simetria em relação ao eixo polar.

$\theta \rightarrow \pi - \theta$ $cos(2(\pi - \theta)) = cos(2\pi)\ cos(2\theta) + sen(2\theta)\ sen(2\pi) = \boldsymbol{cos(2\theta)}$, a equação não muda, logo, existe simetria em relação ao eixo $\frac{\pi}{2}$.

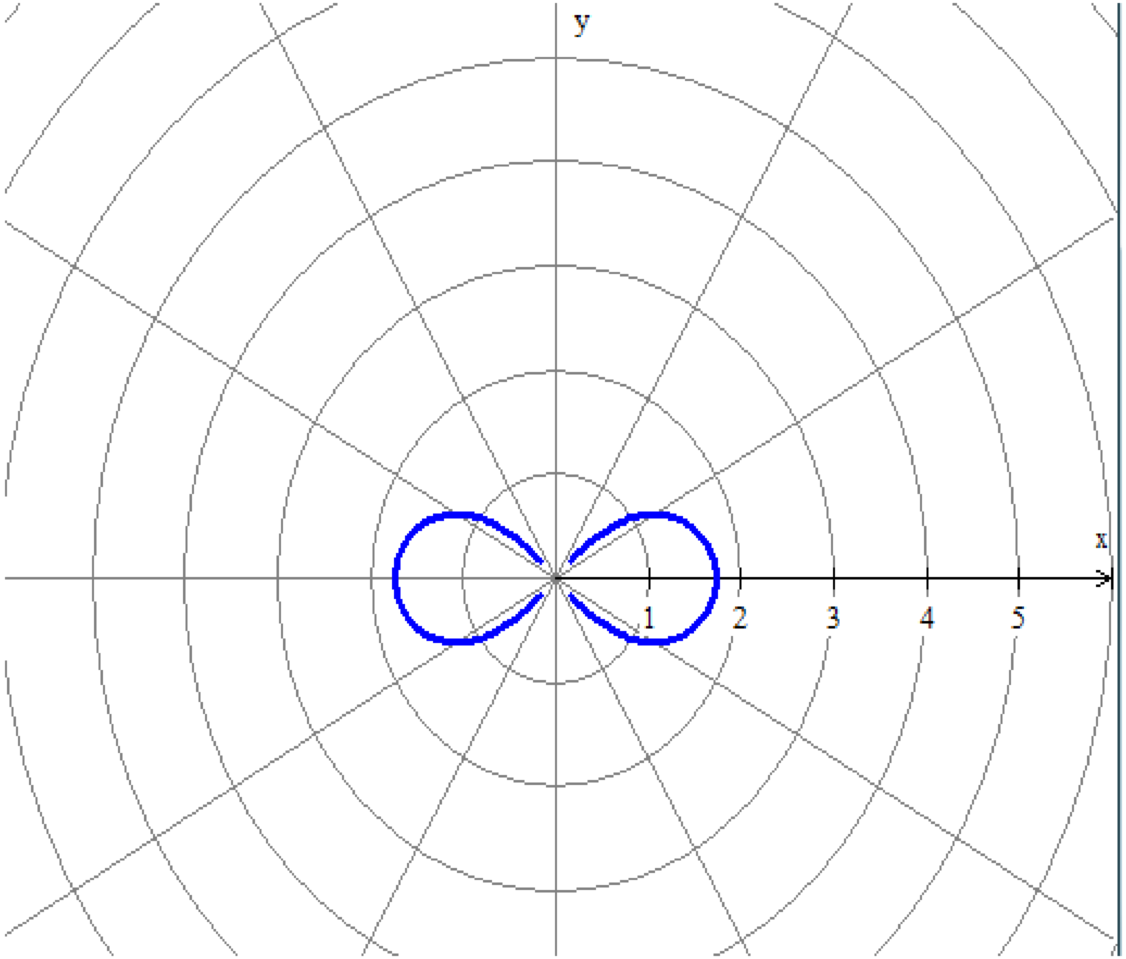
- Exemplo $r^2 = 3\cos(2\theta)$

θ	R
0	1,73
$\pi/8$	1,45
$\pi/6$	1,22,
$\pi/4$	0



Lápis e papel

Usando Winplot



Simetria em relação a todos os eixos polares

- Exemplo $r^2 = 8sen(2\theta)$

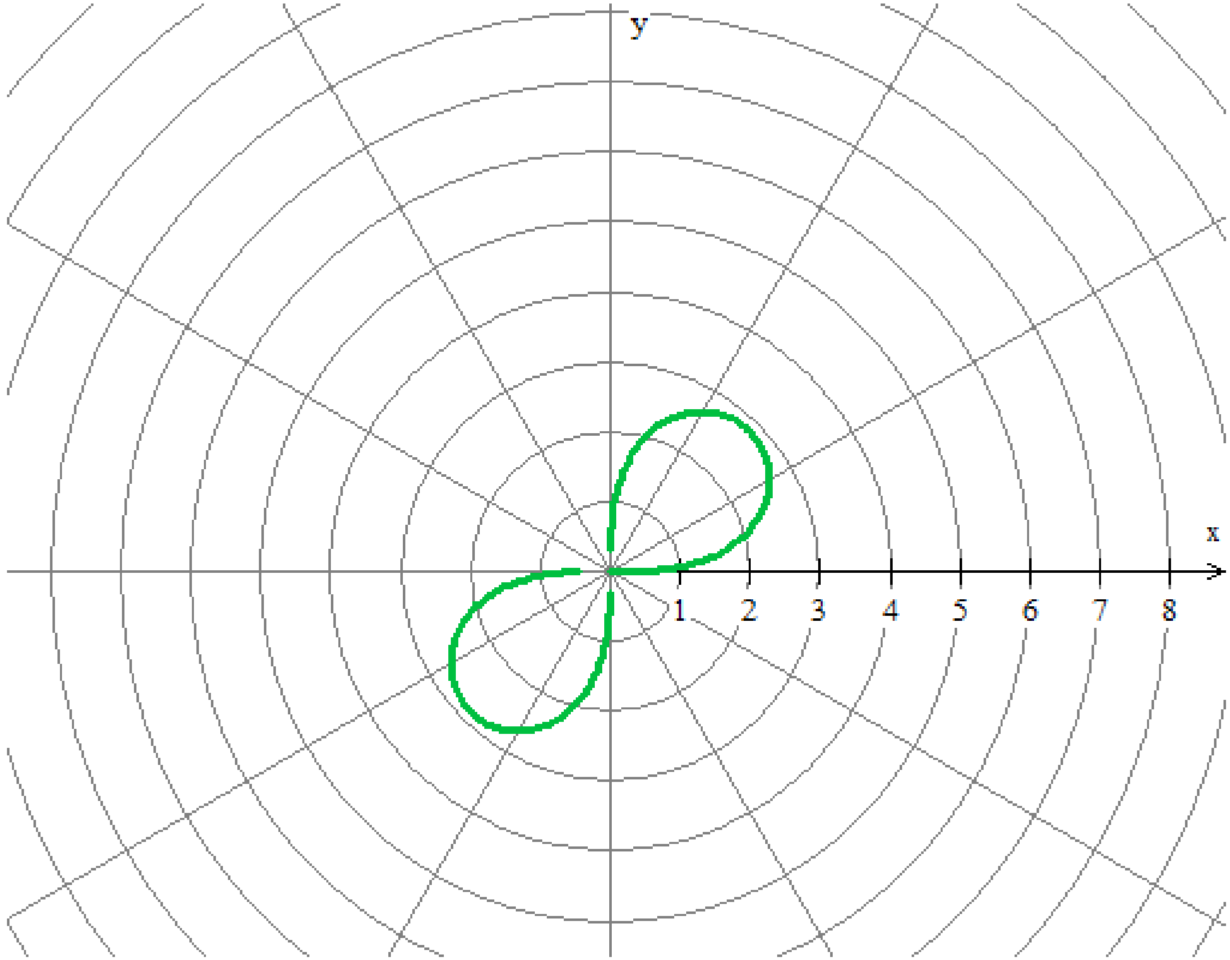
Simetrias:

$r \to -r$, a equação não muda, logo, existe simetria em relação ao pólo.

$\theta \to -\theta$ $sen(-2\theta) = -sen(2\theta)$, $r = -8sen(2\theta)$ a equação muda, logo, não existe simetria em relação ao eixo polar.

$\theta \to \pi - \theta$ $sen(2(\pi - \theta)) = sen(2\pi)\cos(2\theta) - sen(2\theta)\cos(2\pi) = -\boldsymbol{sen(2\theta)}$, a equação muda, logo, não existe simetria em relação ao eixo $\frac{\pi}{2}$.

- Exemplo $r^2 = 8sen(2\theta)$



Simetria em relação ao polo

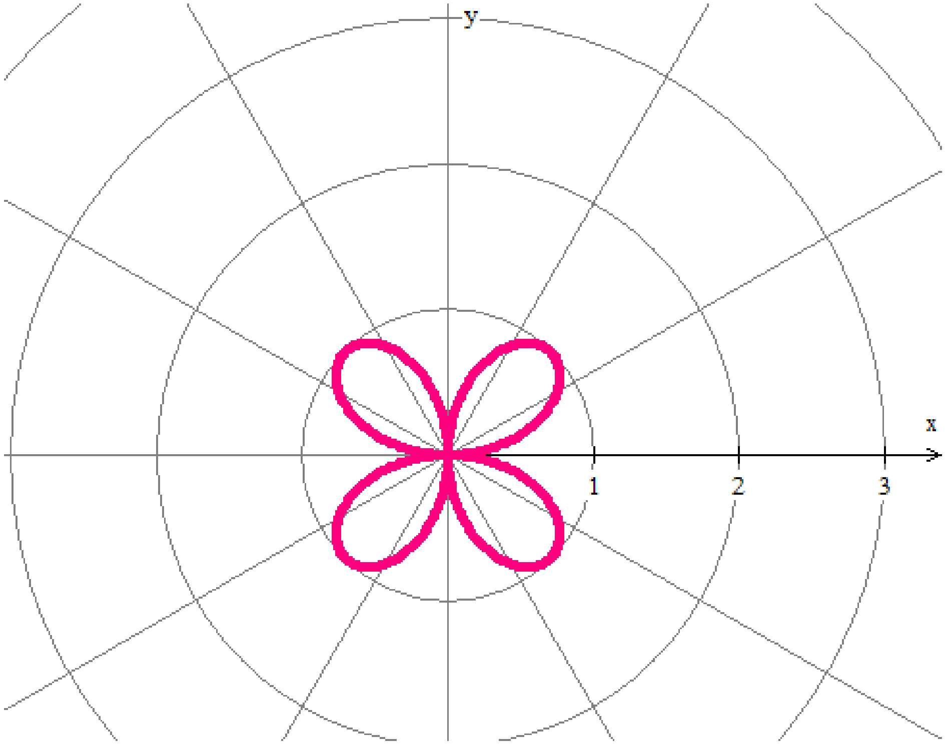
5 Rosáceas

São funções do tipo $r = \cos(a\theta)$ ou $r = sen(a\theta)$.

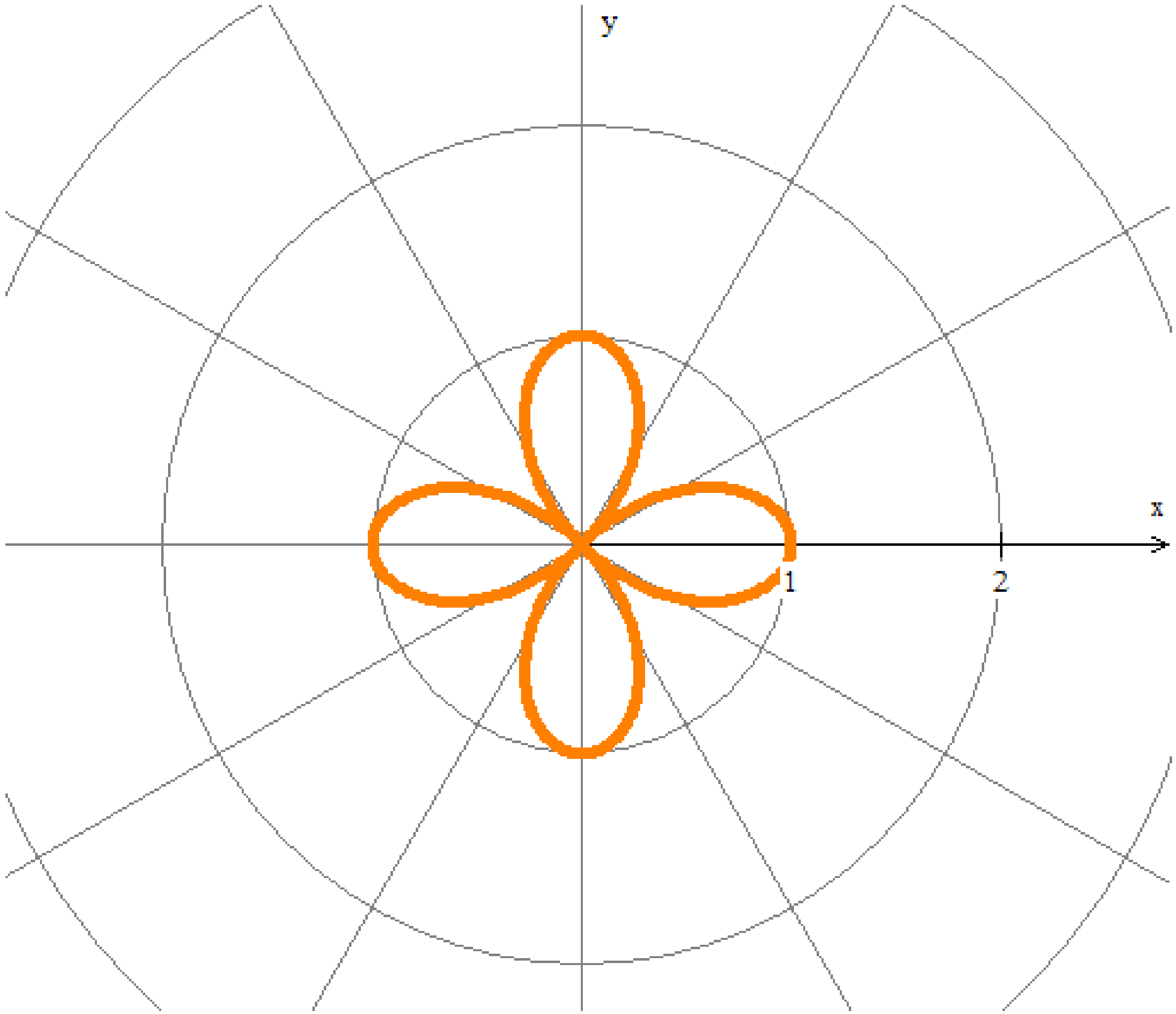
O número de pétalas depende do valor de **a**. Se for **par** o número de pétalas será **2.a**

Se for **impar** o número de pétalas será **a**.

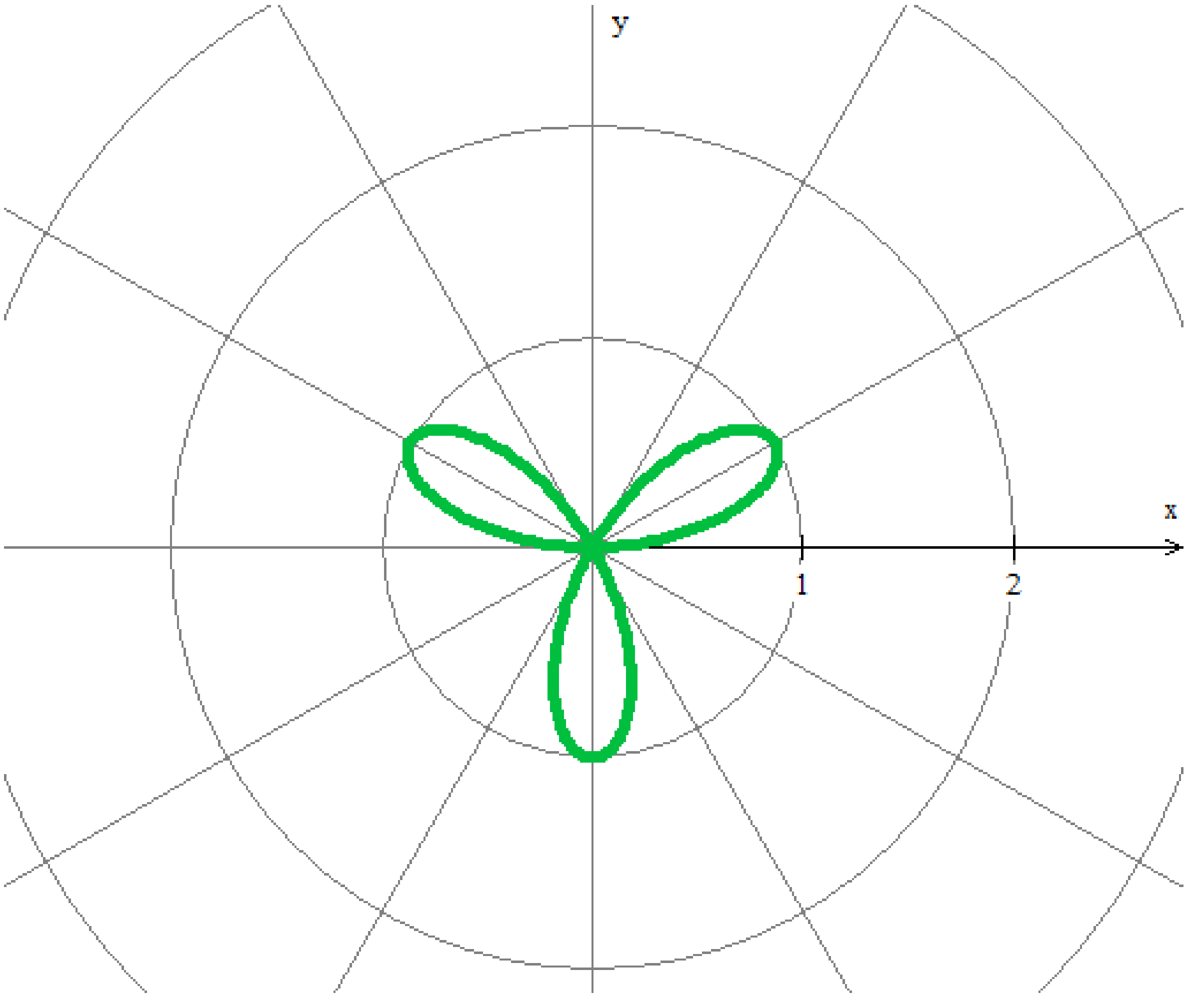
Exemplo 1 $r = sen(2\theta)$



Exemplo 2 $\quad r = \cos(2\theta)$



Exemplo 3 $r = sen(3\theta)$

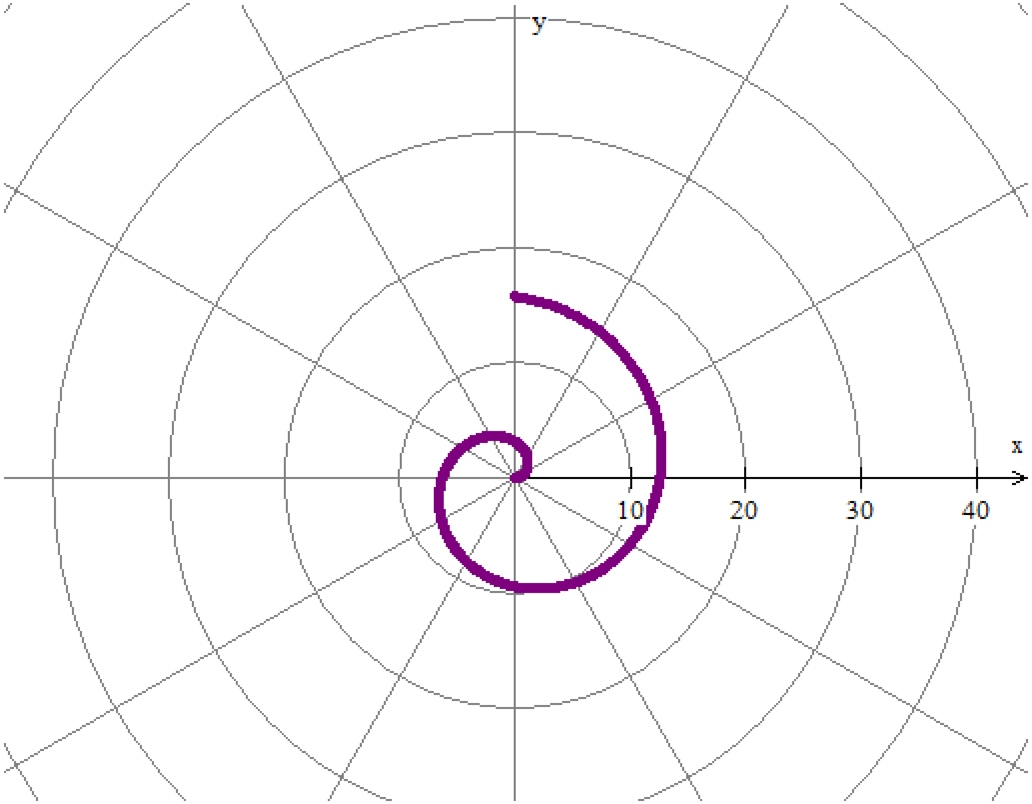


6 Espirais

$r = \theta$ Representa os pontos P(r,r) onde r , ou seja, os pontos P tais que a distância de P ao polo é igual ao ângulo, em radianos, entre o eixo polar e o segmento OP. A equação geral da espiral é dada por r =a considerando

- Este tipo de gráfico também é conhecido como **Espiral de Arquimedes**

Exemplo $r = 2\theta$ com $0 \le \theta \le \dfrac{5\pi}{2}$



Outros tipos de Espirais

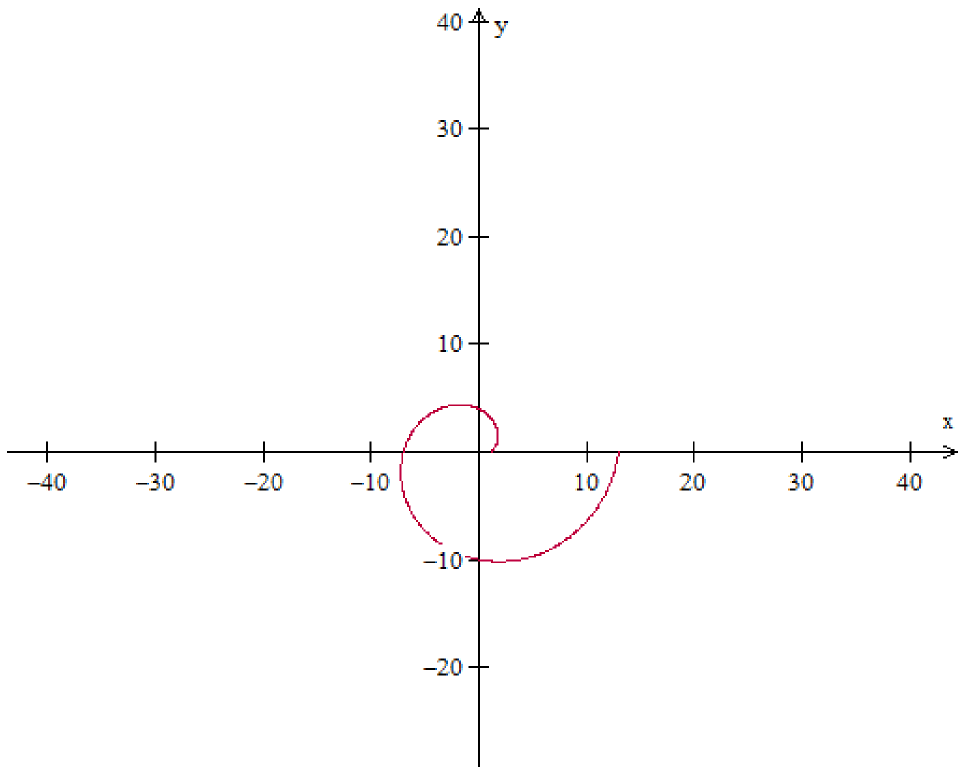
$$r = \frac{a}{\theta}$$ Espiral hiperbólica

$$r = a^{b\theta}, a > 0$$ Espiral Logarítimica

$$r = a\sqrt[n]{\theta}$$ Espiral parabólica quando n=2

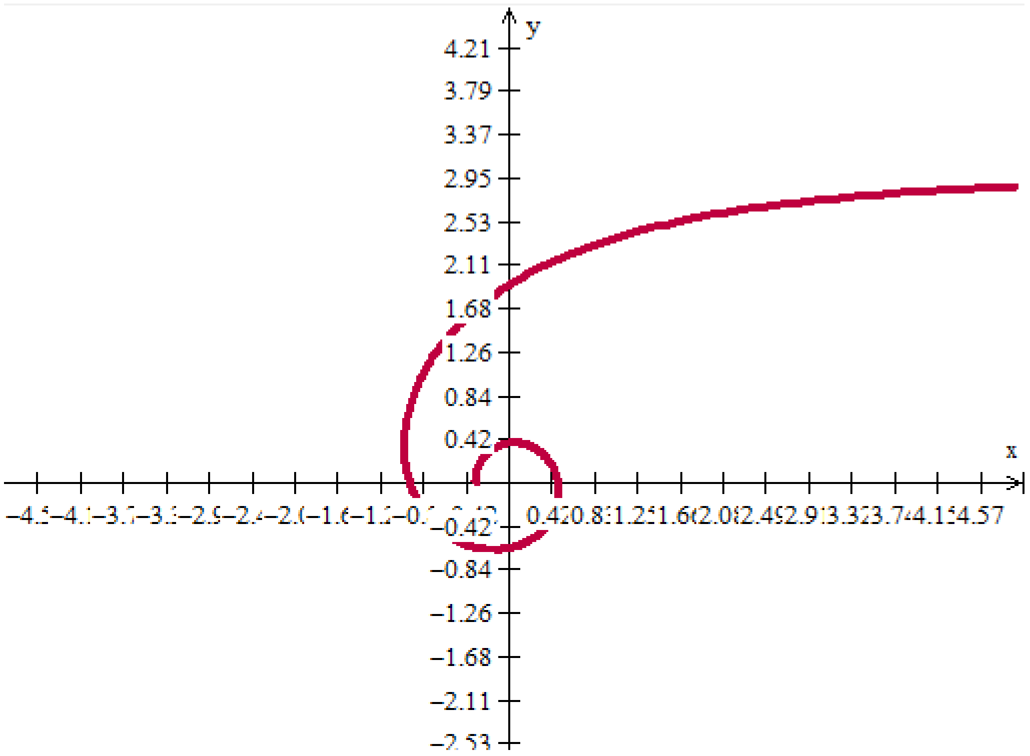
Esboçar o gráfico de $r = 1 + \dfrac{6\theta}{\pi}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$	2π
r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

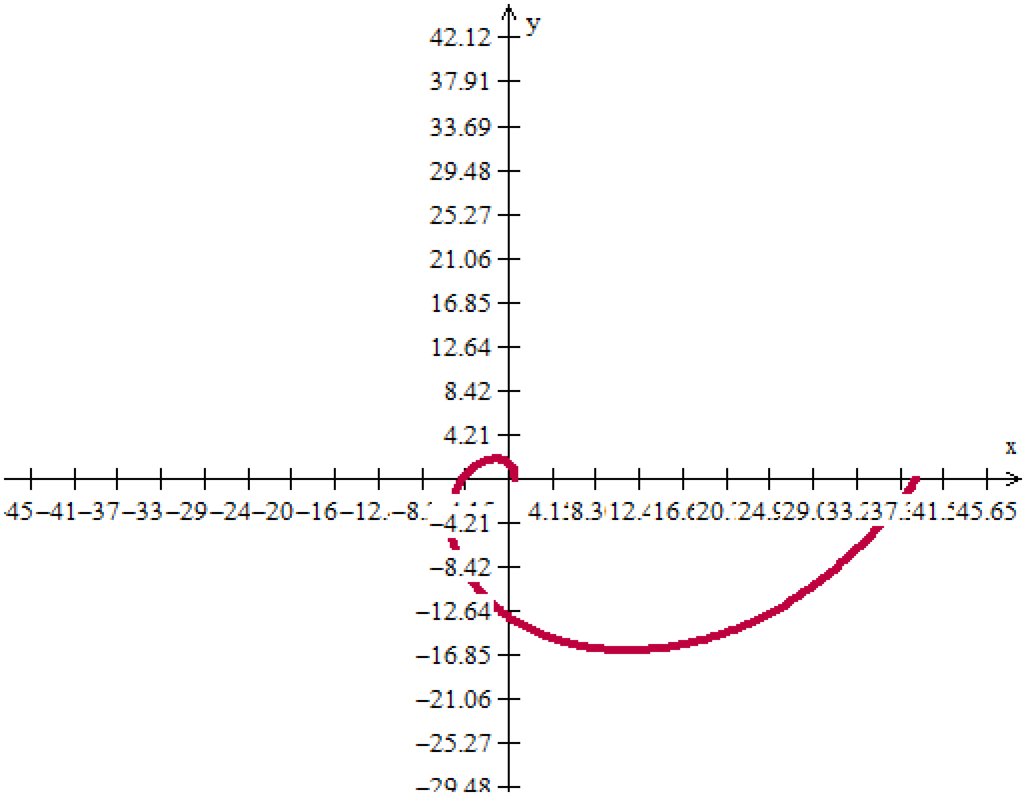


- Faça o esboço dos seguintes gráficos:

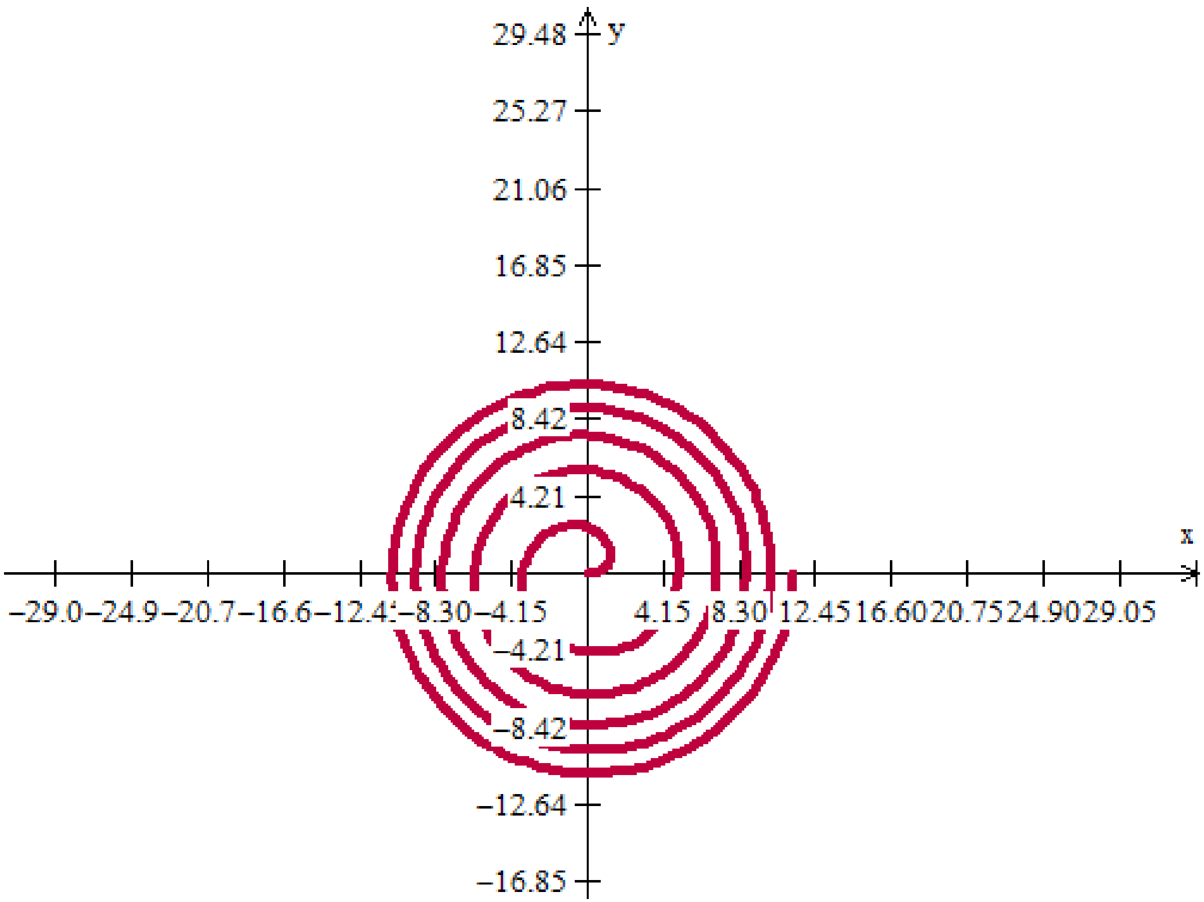
a) $r = \dfrac{3}{\theta} \quad 0 \leq \theta \leq 3\pi$



b) $r = 2^{\frac{\theta}{2}}$ $0 \le \theta \le 2\pi$



c) $r = 2\sqrt{\theta} \qquad 0 \le \theta \le 10\pi$



Sistema Tridimensional

- É aquele que pode ser definido como tendo três dimensões (altura, profundidade e largura) , o que na prática indica relevo.

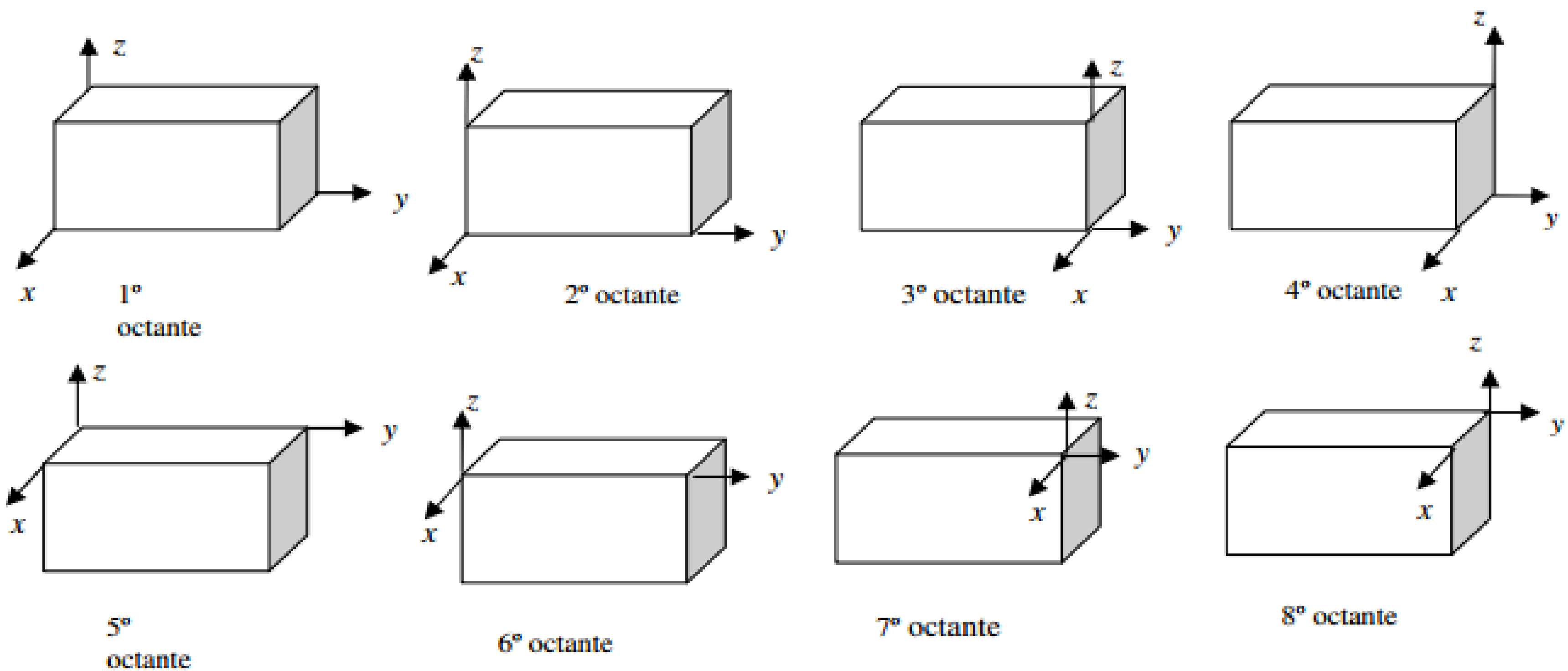
- Os povos da antiguidade trabalhavam com formas volumétricas, mas o estudo metódico do tema pode ser encontrado nos livros de Euclides . Embora a maior parte da geometria euclidiana se dedique aos problemas da geometria plana, que inclui o espaço euclidiano, ela trabalhava com o tridimensional quando realizava estudo dos sólidos.

Conceito:

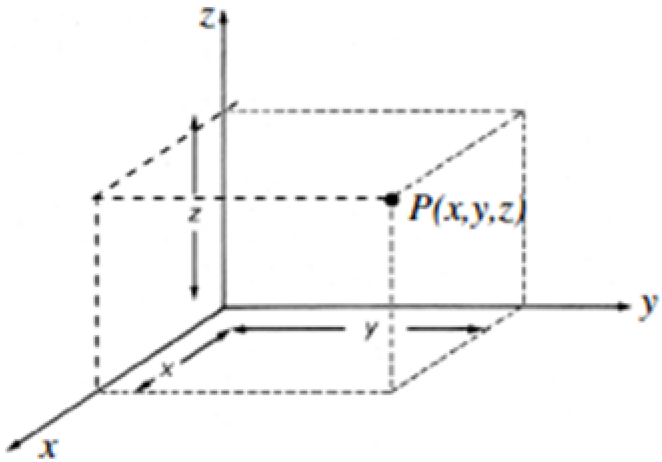
É um sistema no qual um ponto pode se mover livremente para todas as posições no espaço tridimensional. O espaço tridimensional aqui é entendido como o espaço ocupado pelos seres humanos.

Para localizar um ponto no espaço tridimensional, é necessário um sistema de coordenadas. Aqui serão estudados os sistemas de coordenadas retangulares no espaço, de coordenadas cilíndricas e de coordenadas esféricas, embora existam outros (por exemplo, sistema de coordenadas oblíquas no espaço).

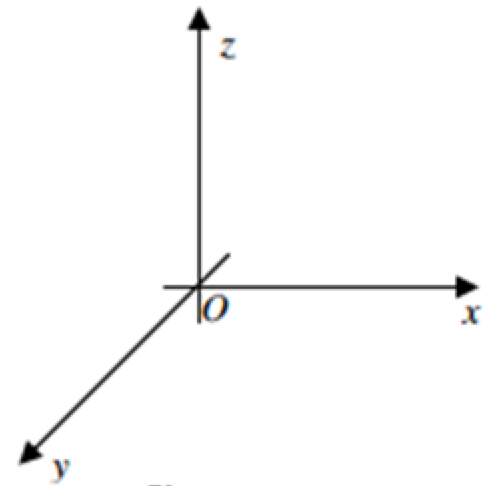
Esse sistema tem como referencial três planos mutuamente perpendiculares que se interceptam em três retas mutuamente perpendiculares e num ponto comum *O*. Os planos mencionados são denominados *planos coordenados*, as retas são denominadas *eixos coordenados* e o ponto *O* é a *origem* do sistema. Os planos coordenados dividem o espaço em oito regiões denominadas *octantes*.



Há duas formas de representar o sistema de coordenadas retangulares no espaço.



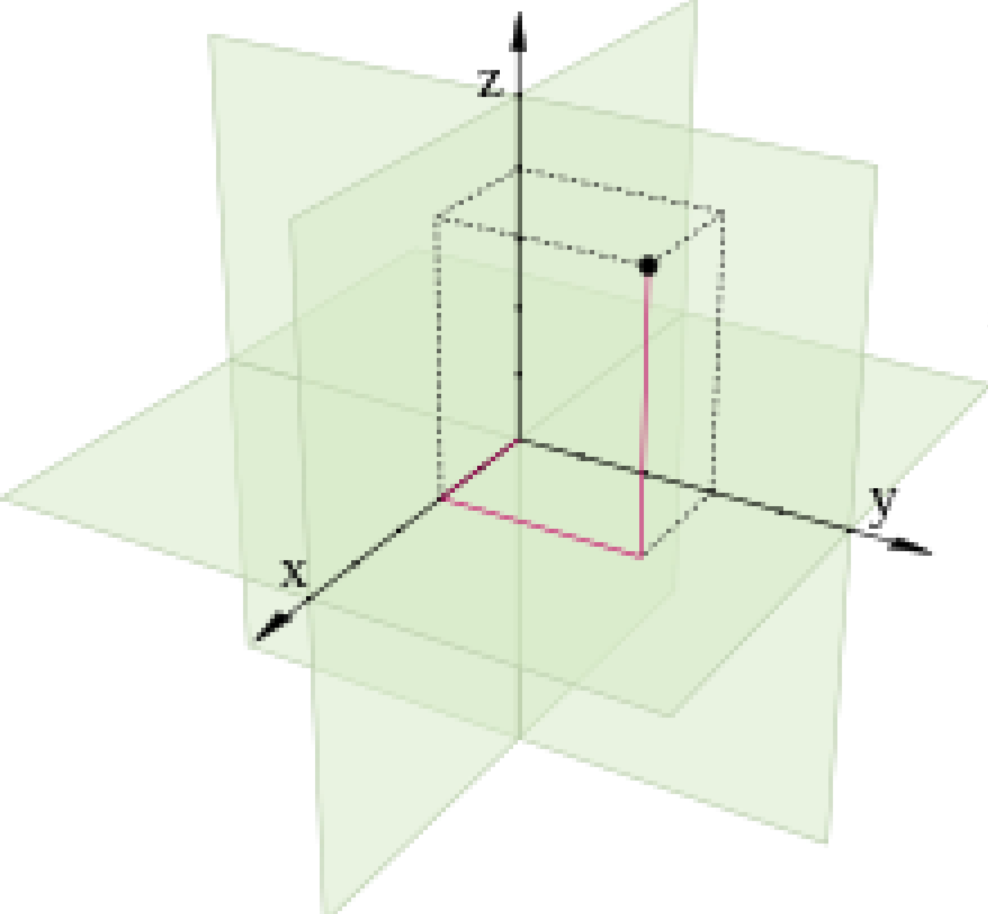
Sistema dextrogiro

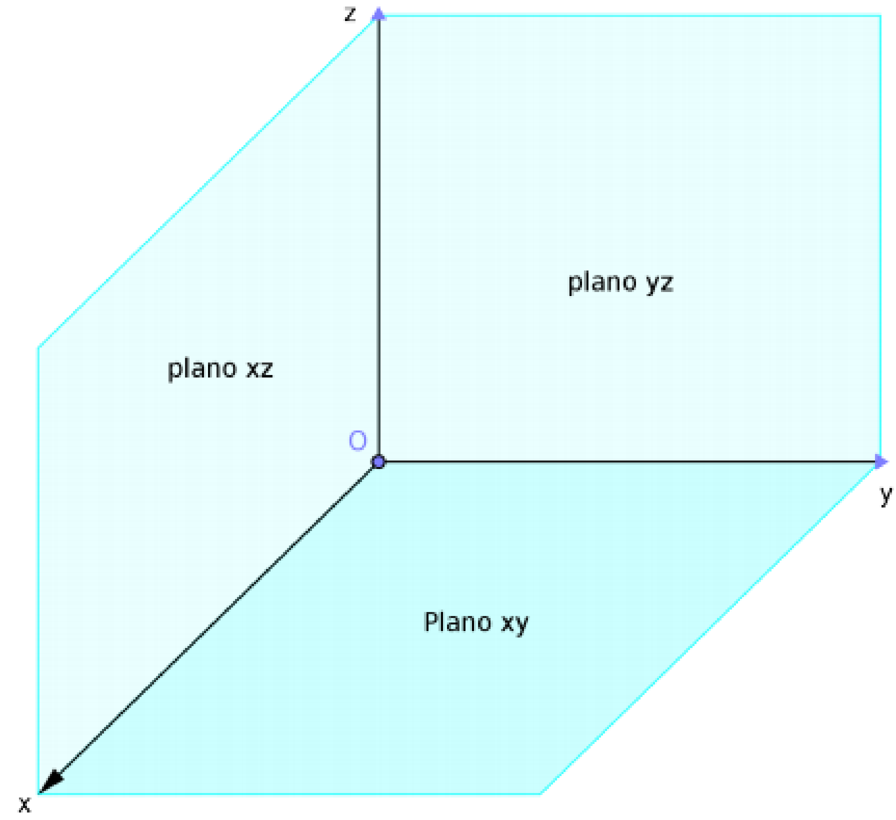


Sistema Levógiro

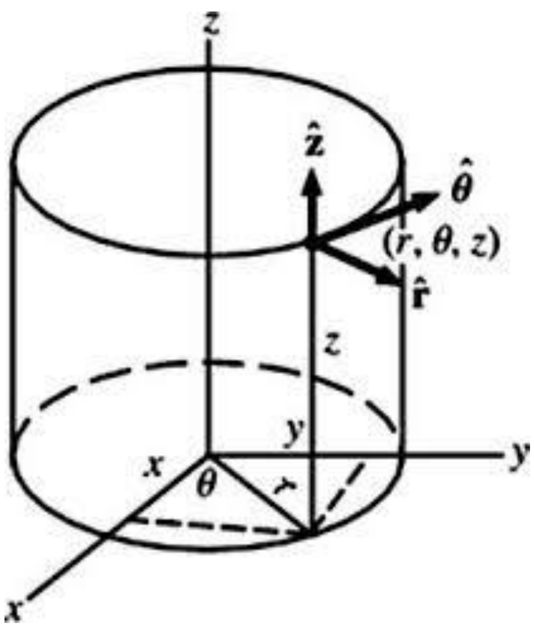
O eixo coordenado $\overrightarrow{Ox}$ ou simplesmente eixo x é denominado *eixo das abscissas*, o eixo y é o *eixo das ordenadas* e o eixo z é *o eixo das cotas*.

Um ponto P de coordenadas (x,y,z) tem abscissa x, ordenada y e cota z. As coordenadas x, y e z são marcadas sobre os respectivos eixos coordenados. O módulo de x indica a distância que P está do plano coordenado yz. O módulo de y indica a distância de P ao plano coordenado xz e o módulo de z representa a distância de P ao plano xy.

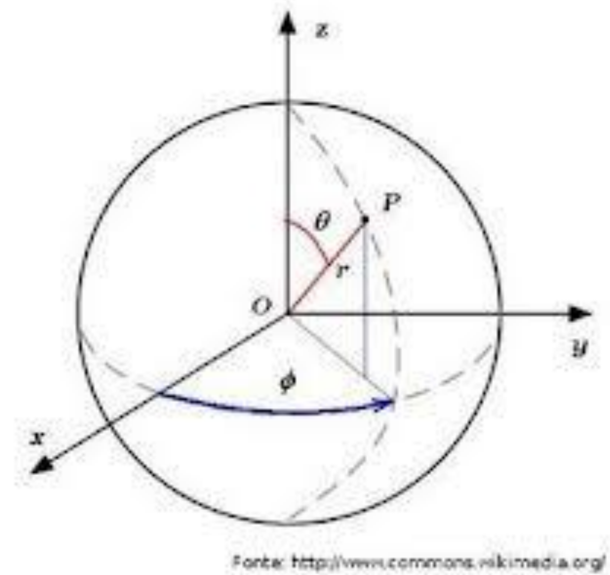

z
y
x


z
plano yz
plano xz
O
y
Plano xy
x

Coordenadas Polares no R^3



Cilíndricas



ESFÉRICAS

Coordenadas Cilíndricas

Esse sistema tem como referencial o plano tridimensional, tal que cada ponto P no sistema de coordenadas cilíndricas fica determinado por duas medidas lineares (r e z) e um ângulo θ , onde r e θ são parâmetros utilizados no sistema plano de coordenadas polares.

Cada terna ordenada (r,θ,z) representa um e único ponto no sistema de coordenadas cilíndricas. É necessário restringir r>0 e $0 \leq \theta \leq 2\pi$ para cada ponto geométrico corresponda também uma única terna ordenada (r,θ,z) havendo assim correspondência biúnivoca entre cada ponto geométrico e uma terna ordenada de números reais.

As coordenadas cilíndricas representam um ponto P no espaço por temas ordenadas (r, θ, z).

1) r e θ são coordenadas polares para projeção vertical de P sobre o plano xy

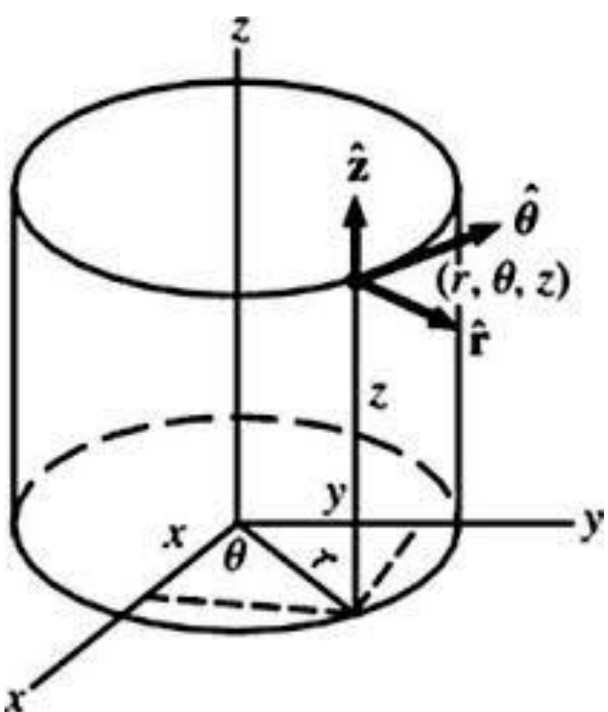
2) z é a coordenada vertical cartesiana.

<u>Relações entre coordenadas retangulares e as coordenadas cilíndricas</u> de um ponto qualquer no espaço.

$$x = r\cos(\theta) \qquad tg(\theta) = \frac{y}{x}$$

$$y = rsen(\theta) \qquad z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$



Coordenadas Esféricas

Esse sistema tem como referencial o plano tridimensional, tal que cada ponto P no sistema de coordenadas esféricas fica determinado por uma medida linear ρ e dois ângulos θ e ϕ onde ρ , θ , ϕ são os parâmetros dos sistema.

Cada terna ordenada (ρ, θ, ϕ) representa um único ponto no sistema de coordenadas esféricas. No entanto é necessário restringir $\rho > 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$, para que cada ponto geométrico corresponda também a uma única terna ordenada (ρ, θ, ϕ) havendo assim correspondência biunivoca entre cada ponto geométrico e uma terna ordenada de números reais.

As coordenadas esféricas correspondem um ponto em que:

ρ é a distância da origem até P

θ é o mesmo ângulo em coordenadas cilíndricas

ϕ é o ângulo entre z positivo e o segmento de reta OP

Relações entre coordenadas retangulares e as coordenadas esféricas de um ponto qualquer do espaço

$$x = \rho sen\phi \cos(\theta) \qquad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$y = \rho sen\phi sen(\theta) \qquad tg\theta = \frac{y}{x}$$

$$z = \rho \cos(\phi) \qquad tg\phi = \frac{r}{z}$$

$$r = \rho sen\phi$$