2(C)Lista de Exercícios Álgebra Linear

Espaço Vetorial

1) Mostre com as operações usuais que $M_{22}(R)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a,b,c,d \in R\right\}$ é um espaço vetorial.

2) Mostre que os seguintes subconjuntos do R^4, é subespaço vetorial.

a) $W=\{(x,y,z,t)\in R^4 / x-y-3z=0\}$

b) $K=\{(x,y,z,t)\in R^4 / x-y+2z=0 \quad \text{e} \;\; \text{t}=0\}$

3) Verifique se os subconjuntos abaixo são subespaços:

a) $V=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, a,b,c,d \in R, \quad b=c\right\}$ com operações usuais de $M_{22}(R)$

b) $R=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, a,b,c,d \in R, \quad b=c+1\right\}$ com operações usuais de $M_{22}(R)$

c) $V=R^3$ e $W=\{(x,y,z)/z=2x-y\}$ com operações usuais de R^3

d) $S=\{(x,y,z)\in R^3 / x=4y \quad \text{z}=0\}$ com operações usuais de R^3

e) $S=\{(x,y,z)\in R^3 / y\geq 0\}$ com operações usuais de R^3

f) $S=\{A\in M_{22}(R)/A^t=A\}$ com operações usuais de $M_{22}(R)$

4) Qual o subespaço do R^3 gerado por $S=\{(2,10),(0,3,4)\}$?

5) Verifique se o elemento $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pertence ao subespaço S de $M_{22}(R)$ dado por:

$S=\left\{\begin{pmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}; a,b \in R\right\}$

6) Sejam vetores $u = (2, -3, 2)$ e $v = (-1, 2, 4)$ em R^3.

a) Escreva W = (7,-11,2) como combinação linear de u e v.

b) O vetor (2,-5,4) pode ser escrito como combinação linear de u e v? Por quê?

c) Para que valor de k, W = (-8,14,k) é uma combinação linear de u e v?

7) Consideremos no espaço $P_2 = \left\{ a.t^2 + b.t + c \,/\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, os vetores $p_1 = t^2 - 2t + 1$

$p_2 = t + 2$, $p_3 = 2t^2 - t$.

a) Escrever o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1, p_2, p_3

b) Escrever o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1, p_2

c) É possível escrever p_1 como combinação linear de p_2 e p_3

8) Seja o espaço vetorial M(2,2) e os vetores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $v_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Escrever o vetor $v = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ como combinação linear dos vetores v_1, v_2, v_3

9) Expressar o vetor $u = (-1, 4, -4, 6) \in R^4$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (3, -3, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 2)$, $v_3 = (1, -1, 0, 0)$

10) Classificar os seguintes subconjuntos do R^3 em L.I ou L.D

a) $\{(2, -1, 3)\}$

b) $\{(1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$

c) $\{(2, -1, 0), (-1, 3, 0), (3, 5, 0)\}$

d) $\{(2, 1, 3), (0, 0, 0), (1, 5, 2)\}$

e) $\{(1, 2, -1), (2, 4, -2), (1, 3, 0)\}$

11) Considere as seguintes funções $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$. Mostre que o conjunto $S = \{f(x), g(x)\}$ é linearmente independente no espaço vetorial $C([-1,1])$

12) Determinar o valor de k para que seja L.I o conjunto $\{(-1,0,2),(1,1,1),(k,-2,0)\}$

13) Determinar k para que $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{bmatrix}\right\}$ seja L.D

14) Verificar quais dos seguintes conjuntos de vetores formam base do R^2

a) $\{(1,2),(-1,3)\}$

b) $\{(3,-6),(-4,8)\}$

c) $\{(3,-1),(2,3)\}$

15) Para que valores de k o conjunto $\beta = \{(1,k),(k,4)\}$ é base do R^2

16) O conjunto $A = \{t^3, 2t^2 - t + 3, t^3 - 3t^2 + 4t - 1\}$ é base de P_3? Justifique.

17) Considere o espaço vetorial real $P_3(R)$. Determine uma base para o subespaço vetorial de $P_3(R)$ dado por: $S = \{p(x) \in P_3(R) / p(1) = 0 \quad \text{e} \quad p´(1) = 0\}$

18) Determine o conjunto de geradores, a base e a dimensão para cada um dos subespaços dados:

a) $U = \{(x,y,z) \in R^3 / x - y - z = 0\}$

b) $V = \{(x,y,z) \in R^3 / x - 2y = 0\}$

c) $\dim(U \cap V)$

d) $\dim(U + V)$

19) Determine a dimensão e uma base para cada um dos seguintes espaços vetoriais:

a) $S = \{(x, y, z) \in R^3 \,/\, z = 0\}$

b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{22}(R) \,/\, b = a + c \right\}$

c) $S = \{(x, y) \in R^2 \,/\, x + y = 0\}$

20) Determinar o vetor coordenada de v = (6,2) em relação às seguintes bases:

a) $\alpha = \{(3,0), (0,2)\}$

b) $\beta = \{(1,2), (2,1)\}$

21) No espaço vetorial R^3 consideremos a seguinte base $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (1,-1,1)\}$. Determinar o vetor, coordenada de $v \in R^3$ em relação à base B se:

a) v= (2,-3,4)

b) v=(3,5,6)

c) v = (1,-1,1)

22) Seja $A = \{3, 2x, -x^2\}$ uma base de P2. Determinar o vetor, coordenada de $v = 6 - 4x + 3x^2$

23) Sejam $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$ $\beta_1 = \{(-1,1), (1,1)\}$ $\beta_2 = \{(\sqrt{}\ 3\ \sqrt{}, -\ 1\}$ $\beta_3 = \{(2,0), (0,2)\}$ bases ordenadas de R^2

a) Ache as matrizes de mudança de base:

i) $[I]_{\beta}^{\beta_1}$ ii) $[I]_{\beta_1}^{\beta}$ iii) $[I]_{\beta_2}^{\beta}$ iv) $[I]_{\beta_3}^{\beta}$

b) Quais as coordenadas do vetor v = (3,-2) em relação a base:

i) β ii) β_1 iii) β_2 iv) β_3

c) As coordenadas de um vetor v em relação à base β_1 são dadas por $[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

Quais são as coordenadas de v em relação à base:

i) β ii) β_2