Espectro para funções com respostas ao impulso truncados

1st Georgenes Caleo Silva Pinheiro Universidade Estadual de Feira de Santana Feira de Santana, Bahia caleosilva75@gmail.com 2nd Guilherme Nobre Universidade Estadual de Feira de Santana Feira de Santana, Bahia gnmds2002@gmail.com

3rd Tássio Carvalho Rodrigues *Universidade Estadual de Feira de Santana* Feira de Santana, Bahia tassiocarvalhor@gmail.com

Abstract—Este relatório apresenta um protótipo de software para projeto de filtros FIR seletivos em frequência, utilizando o método de janelamento. A ferramenta permite configurar parâmetros como tipo de filtro, frequências de corte e atenuação, além de oferecer diferentes funções de janelamento (Retangular, Hamming, Hanning, Blackman e Kaiser). Desenvolvido em Python com bibliotecas como NumPy, SciPy e Tkinter, o software combina cálculos precisos com uma interface gráfica intuitiva. Os resultados demonstram sua eficácia em atender especificações técnicas, além de validar sua aplicação prática em testes com sinais de áudio.

Index Terms-filtros FIR, processamento digital de sinais, pds

I. INTRODUÇÃO

No cenário tecnológico atual, o processamento digital de sinais desempenha um papel fundamental em diversas aplicações, desde comunicações até sistemas biomédicos e audiovisuais, e a capacidade de filtrar componentes indesejados de um sinal é essencial para garantir a qualidade e integridade de suas informações. Nesse contexto, os filtros digitais, especialmente os do tipo FIR (Finite Impulse Response), destacamse por sua estabilidade e possibilidade de resposta em fase linear.

É apresentado um protótipo de software que auxilia no projeto de filtros seletivos em frequência, utilizando o método de janelamento. A ferramenta permite a configuração de parâmetros como tipo de filtro, frequência de corte, largura de transição e atenuação na banda de rejeição, além de oferecer uma variedade de funções de janelamento, como Retangular, Hamming, Hanning, Blackman e Kaiser. A metodologia adotada inclui a implementação em Python, com bibliotecas como *NumPy*, *SciPy* e *Matplotlib* para cálculos e visualizações, e *Tkinter* para a interface gráfica, garantindo uma experiência intuitiva e interativa para o usuário.

Os resultados demonstram que a ferramenta é eficaz na projeção de filtros que atendem a especificações técnicas rigorosas, com validação prática por meio de testes com sinais de áudio, que comprovou a aplicabilidade do protótipo em cenários reais.

II. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Os filtros digitais desempenham um papel fundamental no processamento de sinais, permitindo a seleção ou supressão de componentes espectrais específicas de um sinal. Entre as principais categorias de filtros digitais, os filtros FIR (*Finite Impulse Response*) destacam-se por suas propriedades únicas de estabilidade incondicional e possibilidade de resposta em fase perfeitamente linear

A. Características dos Filtros FIR

Um filtro FIR é caracterizado por uma resposta ao impulso de duração finita, expressa matematicamente pela equação de diferenças:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k] \cdot x[n-k]$$

onde h[k] representa os coeficientes do filtro, M é a ordem do sistema, e (M+1) corresponde ao comprimento da resposta ao impulso. Esta estrutura não recursiva garante estabilidade BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) independentemente dos valores dos coeficientes, uma vantagem significativa em relação aos filtros IIR.

A principal característica que distingue os filtros FIR é a capacidade de implementar resposta em fase linear, fundamental para aplicações onde a preservação da forma de onda do sinal é crítica. Matematicamente, a condição de fase linear é satisfeita quando os coeficientes apresentam simetria ou antissimetria em relação ao centro da resposta ao impulso.

B. Definição Técnica de Filtro FIR

Um filtro FIR (*Finite Impulse Response*) é um sistema linear e invariante no tempo (LIT) cuja resposta ao impulso é finita, ou seja, igual a zero para todo n fora de um intervalo finito. A saída y[n] de um filtro FIR de ordem M é dada pela convolução discreta entre o sinal de entrada x[n] e os coeficientes do filtro h[n]:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k] \cdot x[n-k]$$

onde:

- x[n]: sinal de entrada
- h[k]: resposta ao impulso do filtro (coeficientes FIR)
- M: ordem do polinômio da função de sistema
- (M+1): comprimento da resposta ao impulso
- y[n]: sinal de saída filtrado

Esse tipo de filtro é amplamente utilizado por sua estabilidade inerente (pois não possui realimentação) e possibilidade de projeto com fase linear.

C. Método de Projeto por Janelamento

O método de janelamento constitui a abordagem mais direta para o projeto de filtros FIR, baseando-se no truncamento controlado de respostas ao impulso ideais. O processo inicia-se com a definição de uma resposta em frequência ideal $H_d(e^{j\omega})$, tipicamente caracterizada por transições abruptas entre bandas passantes e de rejeição.

1) Etapa 1: Definir a Resposta em Frequência Ideal: A resposta em frequência desejada ideal pode ser representada como:

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n]e^{-j\omega n}$$

Exemplo de filtro passa-baixa ideal com frequência de corte ω_c :

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

2) Etapa 2: Cálculo da Resposta ao Impulso Ideal: A resposta ao impulso correspondente é obtida através da transformada inversa de Fourier:

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

No caso do passa-baixa ideal, o resultado é uma função do tipo *sinc*:

$$h_d[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

Para filtros ideais, esta operação resulta em sequências infinitas e não causais, impraticáveis para implementação digital.

3) Etapa 3: Aplicação de Janela para Truncamento: O truncamento é realizado através da multiplicação por uma função janela w[n] de duração finita:

$$h[n] = h_d[n] \cdot w[n]$$

Para o truncamento simples, utiliza-se a janela retangular:

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

D. Efeito das Funções de Janelamento

A escolha da função de janelamento determina as características do filtro resultante através de um compromisso fundamental entre largura da banda de transição e atenuação na banda de rejeição. Este fenômeno é explicado pelo teorema da convolução no domínio da frequência:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) \cdot W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

A resposta em frequência final $H(e^{j\omega})$ corresponde à convolução da resposta ideal com a transformada de Fourier da janela.

Para a janela retangular, temos:

$$W(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}$$

- 1) Tipos de Janelas Comuns: Diferentes funções de janelamento oferecem características distintas:
 - Janela Retangular: Proporciona a menor largura de banda de transição, mas apresenta oscilações significativas (fenômeno de Gibbs) devido aos lóbulos secundários elevados
 - Janela Hamming: Boa atenuação em banda de rejeição com transição moderada
 - Janela Hann: Bordas mais suaves que a janela retangular
 - Janela Blackman: Excelente atenuação fora da banda, mas transição mais larga
 - Janela Kaiser: Parametrizável através do fator β, permite ajuste preciso do compromisso entre largura de transição e atenuação de lóbulos secundários

E. Implementação do Filtro Final

Com os coeficientes h[n] determinados, a filtragem de um sinal discreto x[n] é realizada por meio da convolução discreta de tempo:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k] \cdot x[n-k]$$

Esse processo consiste em multiplicar os valores atuais e passados do sinal de entrada pelos respectivos coeficientes do filtro e somá-los. A implementação pode ser feita em tempo real (amostra por amostra) ou em blocos, dependendo da aplicação e da plataforma de processamento.

III. METODOLOGIA

O projeto foi desenvolvido na linguagem de programação Python, utilizando as bibliotecas *NumPy*, *SciPy*, *Matplotlib*, e *Tkinter*.

A. Parâmetros de entrada do filtro

1) Tipo de filtro: O sistema oferece 4 tipos de filtro. Passa-Baixa e Passa-Alta permitem a passagem de frequências abaixo e acima de uma frequência de corte, respectivamente, enquanto Passa-Banda e Rejeita-Banda permitem e rejeitam frequências entre duas frequências de corte, respectivamente. A seleção do filtro é feita através de um objeto *Combobox* do *Tkinter*.

TABLE I Relação de janelas com atenuação de banda

Nome da janela	Atenuação na banda de rejeição (máx.)
Retangular	21
Hanning	44
Hamming	53
Blackman	75
Kaiser ($\beta = 4.54$)	50
Kaiser ($\beta = 6.76$)	70
Kaiser ($\beta = 8.96$)	90

- 2) Frequência de amostragem: Obedece o teorema de Nyquist-Shannon ($Fs \geq 2 * fmax$). Isto restringe a frequência máxima do sinal filtrado para metade da frequência de amostragem. Este valor, assim como todas as entradas númericas, é obtido através de um objeto Entry do Tkinter.
- 3) Largura de transição: Define a região de transição entre as bandas passante e rejeitada do filtro. Valores menores resultam em filtros de ordem mais alta.
- 4) Frequências de corte: Nos filtros passa-alta/baixa, existe 1 frequência de borda passante. Nos filtros passa/rejeita-banda, existem 2 frequências definindo os limites da banda. Todos os valores devem ser positivos e menores que a frequência de amostragem dividida por 2.
- 5) Atenuação de banda: Especifica a atenuação mínima requerida na banda rejeitada, determinando quais funções de janelamento são adequadas para o filtro com base na Tabela I.
- 6) Janelas disponíveis: Depois que o usuário clica no botão de "Verificar Janelas Disponíveis, criado através do objeto Button do Tkinter, o sistema oferece funções de janelamento que estão listadas na Tabela I e obedecem os requisitos do filtro proposto. Além disso, para cada janela disponível, o sistema também informa: atenuação final da banda de rejeição, ondulação da banda passante, as larguras dos lóbulos principal e lateral, e sua função de janelamento.

B. Cálculos do filtro e janelamento

O cálculo de um filtro começa com a determinação da resposta ideal.

- Passa-Baixa: Função sinc.
- Passa-Alta: Diferença entre função delta de dirac e um filtro Passa-Baixa.
- Passa-Banda: Diferença entre dois filtros passa-baixa
- Rejeita-Banda: Diferença entre um filtro passa-tudo e passa-banda

Após isso, a ordem N do filtro é calculada com base na janela selecionada e a largura da banda de transição. A relação entre estes 3 fatores pode ser observada na Tabela II.

As janelas são obtidas através do módulo *signal* da biblioteca *SciPy*. Finalmente, o janelamento ocorre com a multiplicação ponto a ponto do filtro ideal com a função de janelamento.

Para calcular a resposta em frequência do filtro janelado, foi utilizada novamente a biblioteca *SciPy*, especificamente a função *freqz()*.

TABLE II Relação entre banda de transição e ordem de filtro por janela

Nome da janela	Largura de banda de transição (Hz) (normalizada)
Retangular	0.9/N
Hanning	3.1/N
Hamming	3.3/N
Blackman	5.5/N
Kaiser ($\beta = 4.54$)	2.93/N
Kaiser ($\beta = 6.76$)	4.32/N
Kaiser ($\beta = 8.96$)	5.71/N

TABLE III CENÁRIOS DE TESTE: COMBINAÇÃO ENTRE TIPO DE FILTRO E FUNÇÃO DE JANELAMENTO

Tipo de Filtro	Função de Janelamento
Passa-Baixa	Retangular
Passa-Alta	Bartlett
Passa-Banda	Hanning
Rejeita-Banda	Hamming
Passa-Baixa	Blackman
Passa-Alta	Kaiser ($\beta = 6,76$)

C. Interface gráfica

A interface do *software* foi organizada de forma intuitiva: no painel esquerdo, o usuário especifica os parâmetros técnicos necessários para o projeto do filtro, tais como o Tipo de Filtro, a Função de Janelamento, a Frequência de Amostragem, a Largura de Transição e a Atenuação na Banda de Rejeição (em dB). Adicionalmente, é possível definir a(s) Frequência(s) de Borda da Banda Passante, permitindo a configuração de filtros que operam com uma ou duas frequências de corte (como filtros passa-faixa ou rejeita-faixa). O painel direito é dedicado à análise visual dos resultados, que são apresentados em um sistema de abas para os gráficos. Esses painéis são demonstrados na Figura 1.

Para a validação prática, o *software* exporta os coeficientes calculados para um arquivo de texto (.txt). Em seguida, esses coeficientes são utilizados por um script complementar em Octave, que realiza a convolução do filtro com um arquivo de áudio. Este segundo processo possibilita uma verificação empírica do desempenho do filtro, permitindo analisar auditivamente o efeito prático da filtragem aplicada ao sinal de áudio.

IV. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Esta seção apresenta os casos de uso definidos para a validação da ferramenta. Cada cenário combina um tipo específico de filtro digital com uma função de janelamento distinta, permitindo a observação dos efeitos que diferentes janelas causam sobre a resposta em frequência dos filtros. Para cada caso, será projetado e analisado um filtro utilizando os parâmetros definidos, com visualização da resposta em frequência.

Os cenários definidos para teste são apresentados na Tabela III.

Inicia-se a análise com o primeiro cenário de teste: um filtro Passa-Baixa projetado com uma janela Retangular, cujos

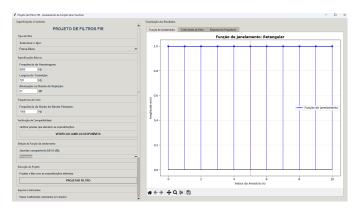


Fig. 1. Interface do Software

TABLE IV Cenário 1: Filtro Passa-Baixa e Janela Retangular

Parâmetro	Valor
Frequência de Amostragem	8 kHz
Largura de Transição	720 Hz
Atenuação na Banda de Rejeição	21 dB
Frequência da Borda da Banda Passante	1 kHz

parâmetros estão definidos na Tabela IV. A resposta em frequência do filtro resultante é ilustrada na Figura 2. Ao analisar a resposta em magnitude, observa-se que o projeto cumpre a especificação de atenuação, atingindo um valor inferior a -21 dB no início da banda de rejeição (1720 Hz). No entanto, é visível a principal desvantagem da janela Retangular: a presença de lóbulos secundários com alta energia, o que resulta em uma baixa atenuação ao longo da banda de rejeição. Em contrapartida, a resposta em fase demonstra um comportamento perfeitamente linear dentro da banda passante (0 a 1 kHz), indicando que o filtro preserva a forma de onda do sinal de interesse, sem introduzir distorção de fase.

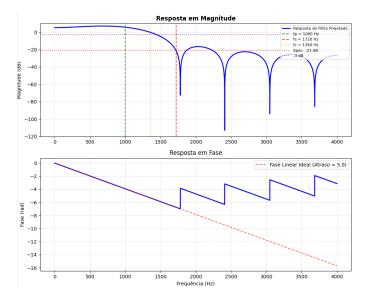


Fig. 2. Resposta em frequência do Passa-Baixa com Janela Retangular

TABLE V Cenário 2: Filtro Passa-Alta e Janela Bartlett

Parâmetro	Valor
Frequência de Amostragem	8 kHz
Largura de Transição	1840 Hz
Atenuação na Banda de Rejeição	25 dB
Frequência da Borda da Banda Passante	3 kHz

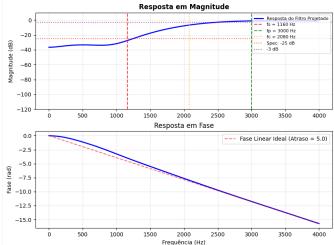


Fig. 3. Resposta em frequência do Passa-Alta com Janela Bartlett

Avançando para o segundo cenário, projeta-se um filtro Passa-Alta com a janela de Bartlett, seguindo os parâmetros da Tabela V. A Figura 3 ilustra a resposta em frequência do filtro. A análise da resposta em magnitude confirma que o projeto atende às especificações, com a atenuação na banda de rejeição (abaixo de 1160 Hz) superando os 25 dB exigidos. Diferente da janela Retangular, a janela de Bartlett proporciona uma transição suave e uma banda de rejeição sem lóbulos secundários (ripples) significativos, o que resulta em umama supressão de ruído mais limpa. A resposta em fase, por sua vez, mantém a linearidade especialmente na banda passante (acima de 3 kHz), o que é crucial para evitar distorções no sinal de áudio filtrado.

No terceiro cenário, avalia-se um filtro Passa-Banda projetado com a janela de Hanning, cujos parâmetros estão na Tabela VI. A Figura 4 exibe a resposta em frequência. A análise da magnitude revela um desempenho notável: o filtro não só cumpre, mas excede com folga a especificação de atenuação de 44 dB tanto na banda de rejeição inferior (abaixo de 1500 Hz) quanto na superior (acima de 3500 Hz). A escolha da janela de Hanning demonstra aqui seu principal benefício: uma excelente supressão dos lóbulos secundários, resultando em um espectro muito limpo nas bandas de rejeição. Adicionalmente, a resposta em fase é perfeitamente linear dentro da banda passante (2 kHz a 3 kHz), garantindo que o sinal transmitido através do filtro não sofra distorção de fase.

Para o quarto cenário, projetou-se um filtro Rejeita-Banda utilizando a janela de Hamming, com os parâmetros definidos na Tabela VII. O objetivo é suprimir seletivamente uma banda

TABLE VI Cenário 3: Filtro Passa-Banda e Janela Hanning

Parâmetro	Valor
Frequência de Amostragem	8 kHz
Largura de Transição	500 Hz
Atenuação na Banda de Rejeição	44 dB
Frequência Inferior da Borda	2 kHz
Frequência Superior da Borda	3 kHz

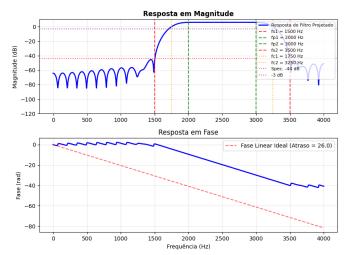


Fig. 4. Resposta em frequência do Passa-Banda com Janela Hanning

de frequências. A resposta em magnitude, ilustrada na Figura 5, mostra que o filtro cumpre este papel, criando um 'entalhe' (notch) profundo que ultrapassa a especificação de -53 dB na banda de rejeição (entre 2 kHz e 3 kHz). A janela de Hamming garante uma atenuação acentuada e lóbulos secundários muito baixos, preservando a integridade das bandas passantes. A análise da fase é particularmente elucidativa: enquanto a fase se distorce na banda de rejeição, ela mantém uma linearidade exemplar nas bandas passantes. Este é o comportamento ideal, pois o filtro remove as frequências indesejadas sem causar distorção de fase no restante do espectro do sinal.

O quinto cenário revisita o projeto do filtro Passa-Baixa, agora com a aplicação da janela de Blackman (Tabela VIII) e uma exigência de atenuação muito mais rigorosa, de 55 dB. A Figura 6 demonstra o resultado. Em nítido contraste com a janela Retangular do Cenário 1, a janela de Blackman não apenas cumpre a especificação, mas a ultrapassa com margem, oferecendo uma atenuação na banda de rejeição que chega a quase -80 dB e é virtualmente isenta de lóbulos secundários

TABLE VII Cenário 4: Filtro Rejeita-Banda e Janela Hamming

Parâmetro	Valor
Frequência de Amostragem	8 kHz
Largura de Transição	500 Hz
Atenuação na Banda de Rejeição	53 dB
Frequência Inferior de Corte	2 kHz
Frequência Superior de Corte	3 kHz

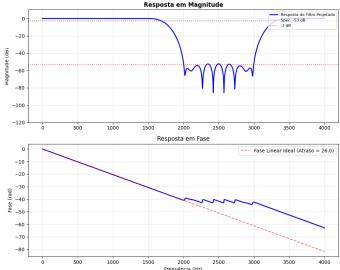


Fig. 5. Resposta em frequência do Rejeita-Banda com Janela Hamming

TABLE VIII Cenário 5: Filtro Passa-Baixa e Janela Blackman

Parâmetro	Valor
Frequência de Amostragem	8 kHz
Largura de Transição	720 Hz
Atenuação na Banda de Rejeição	55 dB
Frequência de Corte	1 kHz

(ripples).

Esta performance superior, no entanto, revela o compromisso (trade-off) do projeto de filtros: para atingir a mesma largura de transição de 720 Hz, a janela de Blackman exige um filtro de ordem muito superior. Isso é evidenciado pelo atraso do filtro, que saltou de 5 amostras (Cenário 1) para 31 amostras neste cenário. Portanto, a comparação direta entre os dois cenários demonstra que, enquanto a janela Retangular é mais eficiente em termos de complexidade (menor ordem), a janela de Blackman é a escolha superior para aplicações que exigem máxima atenuação na banda de rejeição, ao custo de um maior atraso e maior custo computacional.

Encerrando os testes, o sexto cenário foca num filtro Passa-Alta de alto desempenho, utilizando a janela de Kaiser com =6,76 para atender a uma especificação de atenuação rigorosa de 70 dB (Tabela IX). A Figura 7 demonstra o seu sucesso. Ao comparar este filtro com o do Cenário 2 (janela de Bartlett), que possui os mesmos parâmetros de frequência, as vantagens da janela de Kaiser tornam-se evidentes. Enquanto a janela de Bartlett foi adequada para a modesta atenuação de 25 dB, ela seria incapaz de atender ao requisito de 70 dB. A janela de Kaiser, por outro lado, foi especificamente ajustada através do parâmetro para alcançar este nível de supressão, e o gráfico confirma que a especificação foi cumprida.

Este desempenho superior, no entanto, implica um aumento na complexidade do filtro. Para manter a mesma largura de transição do Cenário 2, mas com uma atenuação muito

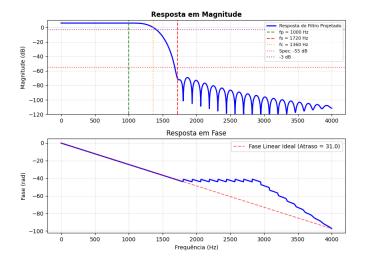


Fig. 6. Resposta em frequência do Passa Baixa com Janela Blackman

 $\label{eq:table_interpolation} \text{TABLE IX}$ Cenário 6: Filtro Passa-Alta e Janela Kaiser ($\beta=6,76)$

Parâmetro	Valor
Frequência de Amostragem	8 kHz
Largura de Transição	1840 Hz
Atenuação na Banda de Rejeição	70 dB
Frequência de Corte	3 kHz

maior, a ordem do filtro precisou ser aumentada, o que é refletido no maior atraso de fase (9,0 amostras, contra 5,0 do filtro com janela de Bartlett). A comparação final ilustra, portanto, o poder da janela de Kaiser como uma ferramenta de projeto flexível, capaz de atender a especificações extremas que janelas fixas não alcançam, com um custo previsível na complexidade computacional.

No cenário final, projetou-se um filtro Passa-Baixa de alto desempenho para um sinal de áudio, com o objetivo de isolar frequências abaixo de 600 Hz e atenuar o restante em pelo

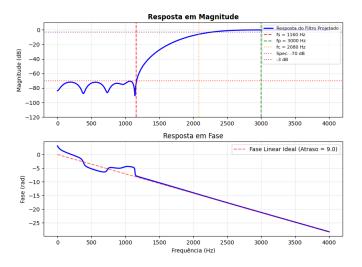


Fig. 7. Resposta em frequência do Passa-Alta com Janela Kaiser

TABLE X Cenário 7: Filtro Passa-Baixa e Janela Hamming

Parâmetro	Valor
Frequência de Amostragem	41.1 kHz
Largura de Transição	500 Hz
Atenuação na Banda de Rejeição	50 dB
Frequência de Corte	600 Hz

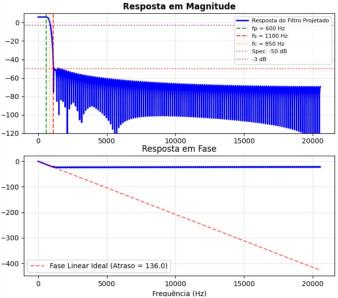


Fig. 8. Resposta em frequência do Passa-Baixa com Janela Hamming

menos 50 dB, conforme detalhado na Tabela X. O filtro, desenhado com uma janela de Hamming, cumpriu as especificações, apresentando uma banda de rejeição limpa e uma fase linear na banda passante, como se pode observar na Figura ??. Para verificar o desempenho do filtro em uma aplicação real, foi realizado um teste prático. Nele, os coeficientes calculados foram usados para processar um arquivo de áudio por meio da operação de convolução.

A análise da Figura 9 mostra que os componentes de frequência acima de 600 Hz, presentes no áudio original, foram atenuados após a filtragem. Este resultado prático é coerente com a resposta em frequência teórica do filtro Passa-Baixa projetado, indicando que o modelo se comportou conforme o esperado.

V. Conclusão

O desenvolvimento do protótipo para a SDKeAPPS S.A. permitiu aplicar na prática os conceitos teóricos de projeto de filtros digitais por janelamento, demonstrando claramente a relação entre atenuação na banda de rejeição e largura da banda de transição. A implementação da ferramenta incorporou cinco tipos de janelas e quatro categorias de filtros, possibilitando a análise comparativa imediata de seus efeitos nas respostas de frequência e nos coeficientes. Essa abordagem prática reforçou o entendimento sobre como as especificações de desempenho influenciam diretamente as características

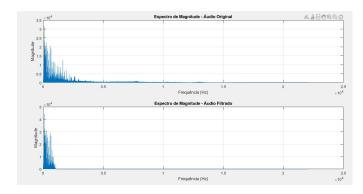


Fig. 9. Resposta em frequência da convolução

da resposta ao impulso. O projeto exigiu decisões técnicas fundamentadas, avaliando sistematicamente as compensações envolvidas em cada configuração para atender aos requisitos de processamento de sinais. A integração entre algoritmos de processamento digital e interface gráfica resultou em uma ferramenta funcional que validou os conceitos teóricos, cumprindo integralmente os objetivos de aprendizagem estabelecidos.

REFERENCES

- [1] S. S. Haykin and B. V. Veen, Signals and Systems. Bookman, 2001.
 [2] A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, Discrete-Time Signal Processing. Prentice Hall, 1997.