Determinarea modelului geometric direct

Lucrarea îşi propune prezentarea unui algoritm pentru determinarea modelului geometric direct pentru o structură de manipulare de tip lanţ deschis. Se va urmări:

- Stabilirea matricilor de transformare omogenă pentru cuplele unei structuri de manipulare cu "n" grade de libertate;
- Stabilirea şi calculul vectorului de poziţionare $Z_p = [x \;\; y \;\; z]^T$ pentru o structura de manipulare precizata;

2.1 Anatomia unui robot

Braţul unui robot este alcătuit dintr-o succesiune de solide rigide, numite *legături*, conectate între ele prin intermediul unor articulaţii numite *cuple*, formând un lanţ cinematic. Lanţurile cinematice pot fi închise sau deschise. Fiecare legătură dintr-un lanţ cinematic închis este conectat la cel puţin două cuple. În cazul unui lanţ cinematic deschis, prima legătură (baza) şi ultima (efectorul final) au o singură cuplă cinematică. În construcţia roboţilor sunt folosite cu precădere două tipuri de cuple cinematice: cuple care permit rotaţia (R) şi cuple care permit translaţia (T). Dacă o cuplă cinematică este acţionată de un motor, se numeşte cuplă motoare.

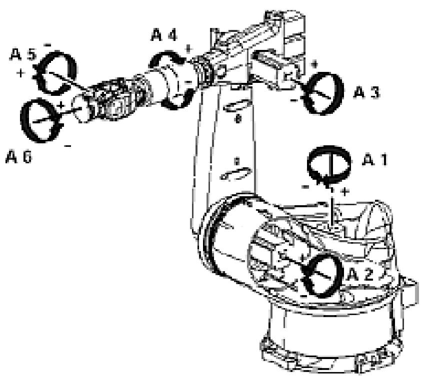

Figura 2.1: Robotul KR 60 P2

În figura 2.1 este prezentat robotul KR 60 P2 al firmei KUKA Roboter GmbH. Toate cuplele acestui braţ sunt cuple de rotaţie (robot RRR/RRR) , notate $A1 - A6$.

Scopul modelului geometric direct este de a furniza o legătură între mişcarea cuplelor (caracterizată pentru fiecare cuplă de câte o variabilă) si mişcarea efectorului final. Cu alte cuvinte, se urmăreşte stabilirea unei legături între coordonatele generalizate asociate fiecărei cuple şi coordonatele carteziene asociate efectorului final.

2.2 Modelul geometric direct al unei structuri de manipulare de tip lanț deschis

Pentru o secvenţă de corpuri **i-j-k**, în cadrul unui lanţ cinematic al unui robot industrial, calculul iterativ al poziţiei foloseşte relaţiile:

$$r_{ik}^{(i)} = r_{ij}^{(i)} + R_{ij} \cdot r_{jk}^{(j)} \tag{2.1}$$

$$R_{ik} = R_{ij} \cdot R_{jk} \tag{2.2}$$

unde (**i**) este notaţia pentru corpul (reperul) faţă de care se raportează poziţia.

Vectorul $r_{ij}^{(i)}$ defineşte poziţia reperului (j) faţă de reperul (i) iar R_{ij} defineşte orientarea reperului (j) faţă de reperul (i) (matricea cosinusului direcţiei, dimensiune 3×3).

Considerând o secvenţă care cuprinde şi reperul de bază (notat "1"): $1 - j - k$, (vezi figura 2.2) se poate scrie:

$$r_{1k}^{(1)} = r_{1j}^{(1)} + R_{1j} \cdot r_{jk}^{(j)} \tag{2.3}$$

$$R_{1k} = R_{1j} \cdot R_{jk} \tag{2.4}$$

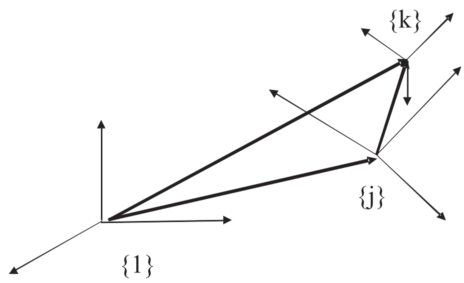

Figura 2.2: Secvenţă de sisteme carteziene şi legaturile dintre acestea

Relaţiile (2.1) şi (2.2) se pot scrie:

$$\begin{bmatrix} r_{ik}^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ij} & r_{ij}^{(i)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{jk}^{(j)} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Matricea

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} R_{ij} & r_{ij}^{(i)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

este matricea transformării omogene, cu R_{ij} matricea orientării ((matricea cosinusului direcţiei, dimensiune 3×3)) şi $r_{ij}^{(i)}$ vectorul de poziţie (dimensiune 3×1).

Ecuaţia (2.3) poate fi scrisă la rândul ei sub forma:

$$\begin{bmatrix} r_{1k}^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1i} & r_{1i}^{(1)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{ik}^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Ecuaţia (2.7) împreună cu relaţia (2.5) duce la:

$$\begin{bmatrix} r_{1k}^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1i} & r_{1i}^{(1)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{ij} & r_{ij}^{(i)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{jk}^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Păstrând semnificaţia notaţiilor din relaţia (2.6) se obţine:

$$\begin{bmatrix} r_{1k}^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} = H_{1i} \cdot H_{ij} \cdot \begin{bmatrix} r_{jk}^{(j)} \\ 1 \end{bmatrix} = H_{1j} \cdot \begin{bmatrix} r_{jk}^{(j)} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

de unde

$$H_{1j} = H_{1i} \cdot H_{ij} \tag{2.10}$$

Pentru o structură cu "n" corpuri, poziţia şi orientarea corpului "n" (end-effector) faţă de corpul de bază 1 (reper inerţial) sunt date de:

$$H_{1n} = H_{12} \cdot H_{23} \cdot .... \cdot H_{n-1,n} \tag{2.11}$$

Matricile de transformare omogenă $H_{i-1,i}$ se referă la cuplele cinematice ale structurii (legătura *i-1,i*) care sunt rotaţii sau translaţii. Particularizarea matricilor pentru aceste situaţii se găsesc în relaţiile (1.3 - 1.8).

Algoritmul pentru determinarea modelului geometric direct ar putea fi următorul:

1. Se ataşează fiecărei cuple motoare câte o variabilă(coordonată generalizată) $q_1 ... q_n$;

2. Se ataşează fiecărei legături câte un sistem de coordonate (reper), începând cu baza (1) până la efectorul final (n).

3. Se calculează iterativ, poziţia şi orientarea fiecărui reper faţă de reperul bază, folosind relaţiile 2.3 şi 2.4. Alternativ se poate folosi exprimarea cu matrici omogene, relaţia 2.11

De exemplu pentru structura de robot tip RTT din figura 2.4 matricile elementare de transformare omogenă sunt:

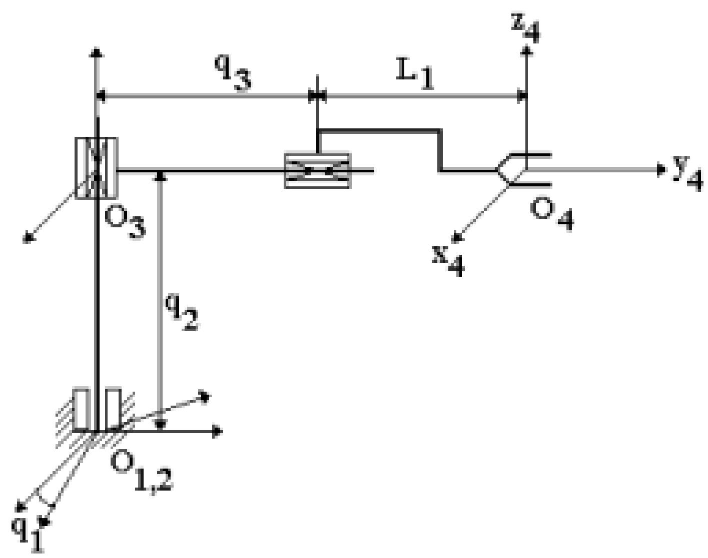

Figura 2.4: Robot RTT

$$T_{12} = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

$$T_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

$$T_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_3 + L_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Din considerente de eficienţă vom face următoarea notaţie[1]:

$$\begin{cases} \cos(q_i) \overset{\text{not}}{=} c_i \\ \\ \sin(q_i) \overset{\text{not}}{=} s_i \end{cases} \quad \textit{pentru orice coordonată generalizată } q_i,\ i = \overline{1..n} \tag{2.15}$$

[1]Fiecarei structuri robot având **n** cuple motoare i se pot ataşa **n** coordonate generalizate (coordonate robot) $q_1,\ q_2,\ \ldots\ q_n$.

în aceste condiţii, matricea T_{12} devine:

$$T_{12} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Modelul geometric direct se determină folosind postmultiplicarea matricilor elementare care caracterizează structura începand de la reperul de bază până la end-effector:

$$T = T_{14} = T_{12} \cdot T_{23} \cdot T_{34} \tag{2.17}$$

$$T_{14} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_3 + L_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

rezultând modelul geometric direct sub forma:

$$T_{14} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & -(q_3 + L_1) \cdot s_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & (q_3 + L_1) \cdot c_1 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Parametrii de poziţionare ai end-effectorului sunt daţi de ultima coloana din matricea T_{14}:

$$Z_P = \begin{cases} x_{ef} &= -(q_3 + L_1) \cdot \sin(q_1) \\ y_{ef} &= (q_3 + L_1) \cdot \cos(q_1) \\ z_{ef} &= q_2 \end{cases} \tag{2.20}$$

2.3 Probleme propuse

1. Se consideră structura de robot din figura 2.5:

a) Să se determine modelul geometric direct folosind relaţiile iterative 2.3 şi 2.4.

b) Să se determine modelul geometric direct folosind metoda matricilor de transformare omogenă.

c) Să se simuleze traiectoria obţinută prin impunerea următoarelor referinţe:

$$\begin{cases} q_1 &= 0 \\ q_2 &= -t \cdot \frac{\pi}{20} \\ q_3 &= t \cdot \frac{\pi}{20} \\ q_4 &= 10 \end{cases}$$

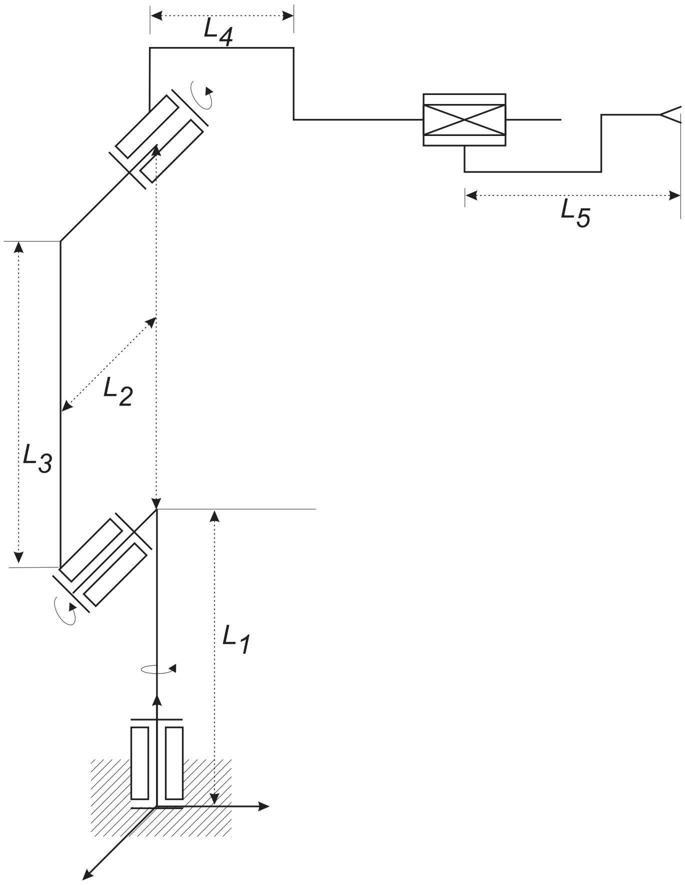

Figura 2.5: Robot RRRT