# *Lucrarea 3*

# Convenţia DH pentru determinarea modelului geometric direct

*Cinematica* este domeniul care se ocupă cu studiul mişcării fără a lua în considerare forţele care generează această mişcare. Studiul cinematic presupune analiza poziţiilor, vitezelor, acceleraţiilor şi al altor derivate ale poziţiei de ordin superior (derivate faţă de timp sau alte variabile). Studiul cinematic al unui braţ de robot presupune studiul geometric şi temporal al proprietăţilor mişcării.

Studiul geometriei complexe a unui braţ de robot implică ataşarea unor sisteme de coordonate diverselor părţi care alcatuiesc braţul şi apoi descrierea relaţiilor dintre aceste sisteme de coordonate. Studiul cinematic al manipulatorului presupune, printre altele, determinarea poziţiei şi orientării acestor sisteme de coordonate odată cu mişcarea braţului. Acestă lucrare prezintă o metodă pentru determinarea poziţiei şi orientării end-effectorului faţă de bază, în functie de variabilele asociate fiecărei cuple. Acest model poartă numele de modelul geometric direct.

## 3.1 Descrierea unei legături. Parametri DH

Un braţ de robot poate fi privit ca o serie de corpuri conectate între ele prin intermediul cuplelor, formând astfel un lanţ cinematic. Corpurile se numesc **legături** iar **cuplele** realizează conectarea a două legături adiacente. Din considerente de design mecanic, majoritatea cuplelor prezintă doar un singur grad de libertate, fie că este vorba de cuple de rotaţie sau cuple de translaţie. În cazul rar în care un mecanism este prevăzut cu o cuplă cu *n grade de libertate*, aceasta poate fi modelată ca o serie de *n cuple cu un grad de libertate conectate de n-1 legături de lungime zero.*

O legătură poate avea multe atribute care pot fi importante din punct de vedere al designului mecanic (formă, material, rigiditate, masă, inerţie etc.). In scopul obţinerii modelului geometric o legătura poate fi considerată ca un solid rigid ce defineşte o relaţie geometrică între două cuple adiacente (distală şi proximală). Axa unei cuple se defineşte ca dreapta din spaţiu faţă de care legătura *i* se roteşte în raport cu legătura *i-1.* Pentru oricare două axe din spaţiu, distanţa dintre ele poate fi măsurată de-a lungul perpendicularei comune. Această perpendiculară comună există întotdeuna şi este unică, exceptând cazul în care cele două axe sunt paralele. În aceasta situaţie există mai multe perpendiculare comune de lungime egală.

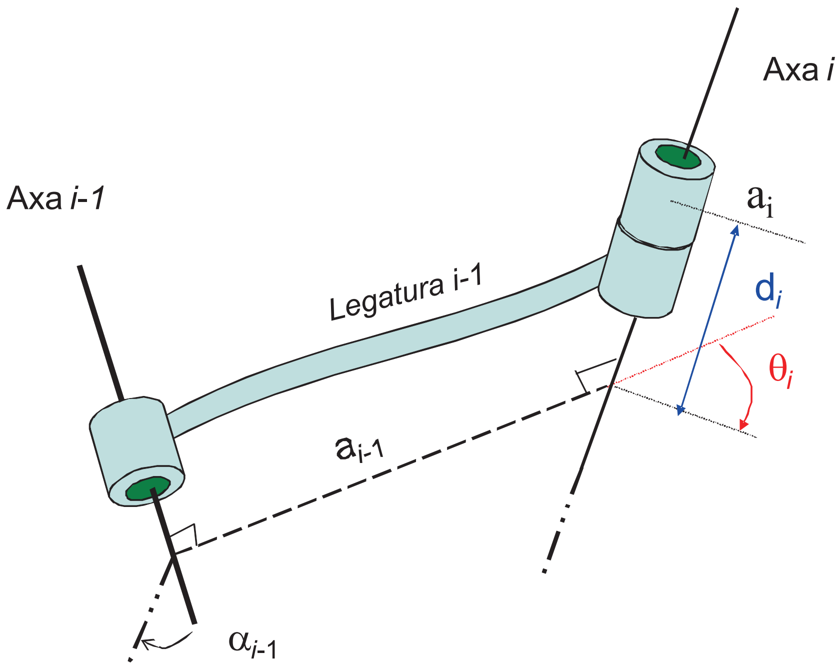


**Figura 3.1:** Definirea parametrilor DH

Figura 3.1 prezintă o legătura *i-1* pentru care s-au identificat axele cuplelor *i-1* şi $i$, respectiv perpendiculara lor comună. Primul parametru care caracterizeazǎ o legatură este **lungimea legăturii**, notat $a_{i-1}$, ce reprezintă lungimea perpendicularei comune dintre axele cuplelor $i-1$ şi $i$.

Cel de-al doilea parametru specific unei legături este unghiul dintre axele cuplelor. Dacă se imagineaza un plan normal pe perpendiculara comună a celor două axe, se proiecteaza cele două axe ale cuplelor pe acest plan şi se obţine unghiul dintre aceste axe. Acest parametru se notează $\alpha_{i-1}$, se numeşte **unghi de încrucişare** şi reprezintă unghiul format de axele celor două cuple, măsurat dinspre proiecţia axei $i-1$ spre cea a axei $i$ .

Legăturile invecinate au o axă a cuplei comună. Cel de-al treilea parametru se referă la distanţa măsurată de-a lungul acestei axe comune dintre legătura $i-1$ şi legătura $i$. Acest parametru se numeşte **offsetul legăturii**, se notează cu $d_i$ si reprezintă distanţa măsurată de-a lungul axei $i$ dintre perpendiculara comună axelor $i-1$ şi $i$ (specifică legăturii *i-1*) respectiv perpendiculara comună axelor $i$ si $i+1$ (specifică legăturii $i$).

Al partulea parametru specifica unghiul de rotaţie dintre direcţia legăturii *i-1* şi direcţia legăturii $i$. Parametrul se numeşte **unghiul cuplei** şi se notează $\theta_i$.

Figura 3.1 prezintă raportul geometric dintre legătura $i-1$ şi legătura $i$. Parametrul $a_{i-1}$ este lungimea perpendicularei dintre axele legăturii $i-1$ (axele $i-1$ şi $i$). În mod similar, parametrul $a_i$ este lungimea perpendicularei dintre axele $i$ şi $i+1$, specific legăturii $i$. Primul dintre parametri care realixează interconectarea dintre legăturile $i-1$ şi $i$ este offsetul $d_i$, care reprezintă lungimea (cu semn) măsurată de-a lungul axei $i$ intre punctul în care segmentul $a_{i-1}$ intersectează axa $i$ şi punctul în care segmentul $a_i$ intersectează axa

$i$. Parametrul $d_i$ este variabil dacă cupla $i$ este o cuplă de translaţie.

Al doilea parametru care realizează interconectarea este unghiul măsurat în jurul axei $i$ între prelungirea segmentului $a_{i-1}$ şi segmentul $a_i$. Acest parametru $\theta_i$ este variabil dacă cupla este o cupă de rotaţie.

Astfel, prin determinarea valorilor acestor patru parametri pentru fiecare legătură se poate determina modelul geometric al oricărui lanţ cinematic. Doi dintre acesti parametri descriu legătura insăşi iar ceilalţi doi descriu conexiunea cu legătura vecină. Definirea unui mecanism prin intermediul acestor patru cantităţi este o convenţie denumită **convenţia Denavit–Hartemberg**, sau simplu **DH**[1]

## 3.2 Asocierea sistemelor de coordonate conform convenției DH

Pentru a descrie poziţia şi orientarea fiecărei legături faţă de legăturile adiacente, se ataşează fiecărei legături câte un sistem de coordonate. Acestea se numerotează corespunzător legăturii căreia îi este ataşate. Astfel, sistemul $i$ îi este ataşat legăturii $i$.

### 3.2.1 Legături intermediare

Se va folosi următoarea convenţie pentru ataşarea sistemelor de coordonate legăturilor: axa $Z$ a sistemului de coordonate $i$ se notează $Z_i$ şi este suprapusă axei cuplei $i$. Originea sistemului $i$, $O_i$, este localizată în punctul în care perpendiculara $a_i$ intersecteaza axa cuplei $i$. Axa $X_i$ are direcţia segmentului $a_i$ şi sensul dinspre cupla $i$ spre cupla $i+1$.

Dacă $a_i = 0$, axa $X_i$ este perpendiculară pe planul format de axele $Z_i$ şi $Z_{i+1}$. Parametru $\alpha_i$ se măsoară conform sensului pozitiv de rotaţie după axa $X_i$. Axa $Y_i$ completează sistemul astfel încât să poată fi aplicată regula mâinii drepte.

### 3.2.2 Prima și ultima legătură

Se ataşează baze robotului (numită şi legătura $\{0\}$) un sistem cartezian $O_0X_0Y_0Z_0$. Acest sistem este static şi din punctul de vedere al determinării modelului geometric direct, acesta poate fi privit ca un sistem de referinţă. Se poate descrie poziţia şi orientarea tuturor celorlalte sisteme faţa de acesta. Din moment ce sistemul $\{0\}$ poate fi arbitrar ales, problema se simplifică dacă sistemul se alege astfel încât să coincidă cu sistemul $\{1\}$ atunci când variabila asociată cuplei 1 este 0. În aceste condiţii vom avea întotdeuna $a_0 = 0$ şi $\alpha_0 = 0$. Mai mult, dacă prima cuplă este de rotaţie, parametrul $d_1$ este 0 sau dacă prima cuplă este de translaţie atunci $\theta_1$ va fi 0.

[1] introdusă de J. Denavit şi R.S. Hartenberg în "A kinematic notation for lower pair mechanisms based on matrices", Journal of Applied Mechanics, No. 22, 1959: pp. 215-221.

Dacă ultima cuplă (cupla "n") este o cuplă de rotaţie, se alege direcţia lui $X_N$ astfel încât să se alinieze cu cea a lui $X_{N-1}$ când $\theta_N = 0$, iar originea sistemului $\{N\}$ se alege astfel încât $d_N$ să fie 0. Dacă ultima cuplă (cupla "n") este o cuplă de translaţie, se alege direcţia lui $X_N$ astfel încât $\theta_N = 0$, iar originea sistemului $\{N\}$ se alege la intersecţia dintre axa $X_{N-1}$ şi axa cuplei $n$ când $d_N$ să este 0.

### 3.2.3 Parametri DH exprimați în funcție de sistemele de coordonate

Dacă fiecare legătură are sistemul de coordonate ataşat conform convenţiei prezentate, atunci următoarea definiţie a parametrilor DH este validă:

$a_{i-1}$ - distanţa dintre axele $Z_{i-1}$ şi $Z_i$, măsurată de-a lungul axei $X_{i-1}$;
$\alpha_{i-1}$ - unghiul dintre axele $Z_{i-1}$ şi $Z_i$, măsurat în jurul axei $X_{i-1}$;
$d_i$ - distanţa dintre axele $X_{i-1}$ şi $X_i$, măsurată de-a lungul axei $Z_i$;
$\theta_i$ - unghiul dintre axele $X_{i-1}$ şi $X_i$, măsurat de-a lungul axei $Z_i$.

De obicei parametri $a_i$ sunt pozitivi, deoarece corespund unor distanţe. Parametri $\alpha_i$, $d_i$ şi $\theta_i$ *corespund unor mărimi cu semn.*

### 3.2.4 Procedură pentru asocierea sistemelor carteziene fiecărei legături

1. Se identifică cuplele mecanismului şi se asociază fiecărei cuple căte o variabilă $q_i$, începând de la 1 până la numărul de grade de libertate.

2. Se trasează axele fiecărei cuple. Pentru paşii următori (de la 3 la 6) se vor considera câte două astfel de axe învecinate (corespunzătoare cuplelor $i$ şi $i+1$):

3. Se indentifică perpendiculara comună dintre axe sau punctul de intersecţie. Dacă axele se intersectează într-un punct sau în punctul în care perpendiculara comună intersectează axa $i$ se alege originea sistemului $\{i\}$, $O_i$;

4. Se ataşează $Z_i$ de-a lungul direcţiei axei cuplei $i$;

5. Se ataşează $X_i$ de-a lungul perpendicularei comune sau dacă axele cuplelor se intersectează, $X_i$ va fi perpendiculară pe planul format de cele două axe;

6. Se ataşează $Y_i$ pentru a completa sistemul cartezian.

7. Sistemul $\{0\}$ se ataşează astfel încât să se suprapună peste $\{1\}$ când prima cuplă este în poziţia 0. Pentru end-effector (sistemul $N$) se alege originea şi axa $X_N$ astfel încât să se anuleze cât mai multi parametri.

## 3.3 Calculul matricii de transformare a legăturii

Se va urmări în continuare determinarea transformării care defineşte sistemul $\{i\}$ relativ la sistemul $\{i-1\}$. În general, o astfel de transformare va fi obţinută pe baza celor patru parametri DH. Mai mult, pentru orice robot, această transformare va avea o singură variabilă (asociată cuplei), restul de trei parametri fiind constanţi, determinaţi de structura mecanică a legăturii.

Pentru rezolvarea problemei modelului geometric direct, acesta a fost descompus in n subprobleme, pentru fiecare legătură, reprezentate de matricile ${}^{n}T_{n-1}$. Pentru rezolvarea acestor subprobleme, acesetea vor fi descompuse la rândul lor intr-un set de patru sub-subprobleme. Fiecare dintre aceste transformări va fi funcţie de o singură variabilă, mai mult, se va putea scrie matricea fiecărei transformări prin simpla inspecţie a structurii robotului.

Se definesc, pentru o legătură între cupla $i-1$ şi $i$, un set de transformări intermediare: $\{P\}$, $\{Q\}$ şi $\{R\}$, asa cum se arată în figură 3.2.

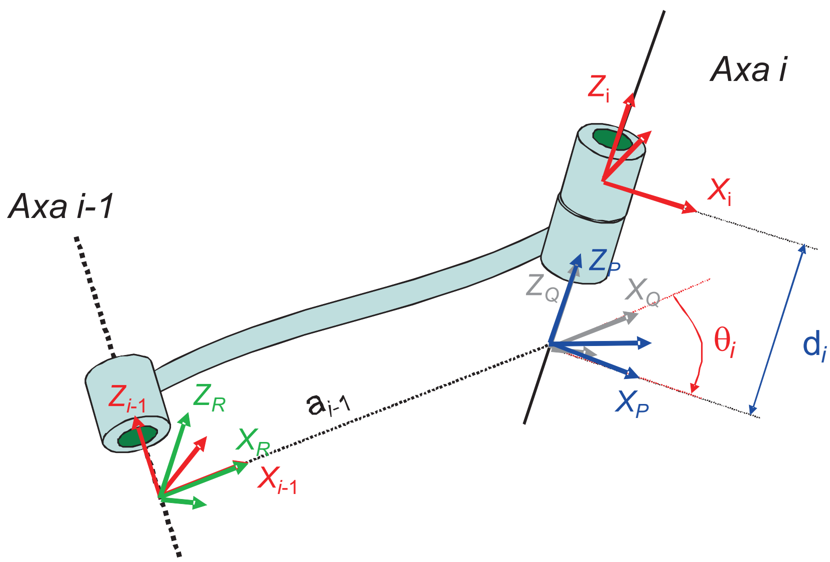


**Figura 3.2:** Transformările elementare în cadrul unei legături

Sistemul $\{R\}$ diferă de sistemul $\{i-1\}$ printr-o rotaţie cu $\alpha_{i-1}$. Sistemul $\{Q\}$ diferă de sistemul $\{R\}$ printr-o translaţie cu $a_{i-1}$. Sistemul $\{P\}$ diferă de $\{Q\}$ printr-o rotaţie cu $\theta_i$, iar sistemul $\{i\}$ diferă de $\{P\}$ printr-o translaţie cu $d_i$. Astfel transformarea care exprimă sistemul $\{i\}$ în $\{i-1\}$ este:

$$ {}^{i-1}T_i = {}^{i-1}T_R \cdot {}^{R}T_Q \cdot {}^{Q}T_P \cdot {}^{P}T_i \tag{3.1} $$

sau

$$T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rezultând:

$$^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

După ce au fost definite sistemele carteziene ataşate legăturilor şi parametri DH corespunzători identificaţi şi notaţi (de obicei sub formă de tabel), se poate trece la determinarea modelului cinematic. Acest lucru presupune particularizarea matricii de transformare $^{n-1}T_n$ cu parametri corespunzători pentru fiecare legătură. Apoi aceste matrici sunt multiplicate (relaţia 3.3) pentru a obţine o singură matrice a transformării care furnizează poziţia şi orientarea sistemului $\{N\}$ faţă de sistemul $\{0\}$:

$$^0T_N = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot \ldots \cdot {}^{N-1}T_N \tag{3.3}$$

Această matrice permite identificarea poziţiei şi orientării end-effectorului în sistemul de coordonate ataşat bazei.

## 3.4 Probleme propuse

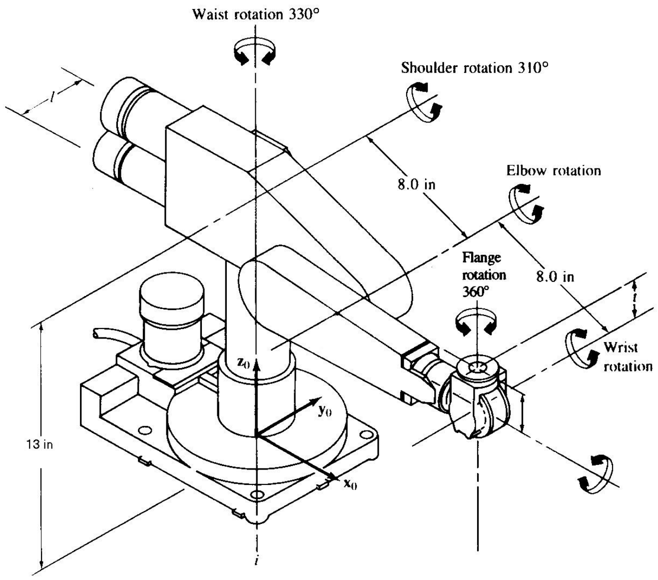


**Figura 3.3:** Robot Puma

**1.** Se consideră robotul Puma din figura 3.3:

*a)* Să se reprezinte schematic structura robotului.

*b)* Să se determine modelul geometric direct folosind convenţia DH.