Lucrarea 4

Determinarea modelului geometric invers

În lucrările precedente s-a analizat problematica calculului poziţiei şi orientării unui sistem cartezian ataşat efectorului final, în situaţia în care se cunosc valorile coordonatelor robot pentru fiecare cuplă. Lucarea de faţă propune abordarea unei probleme mai dificile: se doreşte poziţionarea efectorului final al manipulatorului la un set de coordonate date. Altfel spus, care este setul de coordonate robot $q_1, ..., q_n$, care asigură poziţionarea efectorului final la o poziţie dată şi cu o anumită orientare. Această problemă este cunoscută sub denumirea de **modelul geometric invers**. Principalul obiectiv al lucrării constă în prezentarea unei metode euristice de determinare a modelului geometric invers al unui braţ de robot şi aplicarea acestei metode în cazul a două structuri cinematice de roboţi.

4.1 Consideraţii teoretice

Problema determinării modelului geometric invers este o problemă neliniară. Astfel, pentru o structură de robot, se dau valorile numerice ale elementelor matricii modelului geometric direct (${}^0T_N$) şi se urmăreşte determinarea setului de coordonate robot $(q_1, q_2, ...q_n)$. Pentru un robot cu 6 grade de libertate (6 cuple motoare), se obţine un sistem cu 12 ecuaţii şi 6 necunoscute. Cu toate acestea, din cele 9 ecuaţii care rezultă din partea corespunzătoare orientării din matricea ${}^0T_6$, doar 3 dintre acestea sunt independente (conducând la posibilitatea determinării a maxim 3 variabile independente), restul de 6 fiind redundante. Dacă la aceste 3 ecuaţii se mai adaugă cele trei ecuaţii corespunzătoare vectorului de poziţie din matricea ${}^0T_6$ se obţine un set de 6 ecuaţii independente care permit determinarea a maximum 6 coordonate robot. Acest sistem de ecuaţii este neliniar şi transcendent, dovedindu-se, de cele mai multe ori, dificil de rezolvat. Asemeni tuturor sistemelor de ecuaţii neliniare, şi în acest caz principalele probleme sunt ridicate de existenţa soluţiilor, soluţiile multiple şi metoda de soluţionare a sistemului.

Considerând un robot pentru care se notează $\overline{q} = [q_1,\ q_2,\ ...\ q_n]^T$ vectorul coordonatelor robot şi $\overline{Z} = [P_X,\ P_Y,\ P_Z,\ \phi,\ \theta,\ \psi]^T$ vectorul coordonatelor carteziene, modelul geometric invers (MGI) este reprezentat de sistemul de ecuaţii care dă dependenţa $\overline{q} = f(\overline{Z})$. Modelul geometric invers trebuie determinat deoarece în general proiectarea traiectoriei roboţilor se face în spaţiul cartezian, în timp ce conducerea efectivă a acestora se face în spaţiul coordonatelor robot. Modelul geometric invers se determină pornind de la modelul geometric direct fie pe baze euristice (de exemplu pentru structuri simple) fie folosind algoritmi iterativi (pentru structuri complexe) fie folosind abordări geometrice. Se pot determina fie soluţii particulare ale modelului fie o soluţie generală (analitică) a acestuia. Aplicarea metodelor euristice este comodă însă nu garantează obţinerea unei soluţii unice. Astfel, două persoane care utilizează această metodă pentru rezolvarea aceleeaşi probleme pot obţine în final soluţii diferite (deşi echivalente).

O altă problemă în determinarea MGI o constituie redundanţa manipulatoarelor. Un manipulator se spune că este redundant atunci când poate atinge o poziţie specificată prin două sau mai multe configuraţii ale lanţului său cinematic. Aceasta se traduce matematic prin două sau mai multe soluţii ale MGI şi este legată de apariţia în cadrul MGI a anumitor funcţii matematice, ca de exemplu funcţia rădăcină pătrată sau funcţia cosinus, având două soluţii: una pozitivă şi una negativă.

De exemplu în figura 4.1 este prezentat un manipulator redundant cu două grade de libertate, cu două configuraţii ale lanţului cinematic generând aceeaşi poziţie a efectorului final.

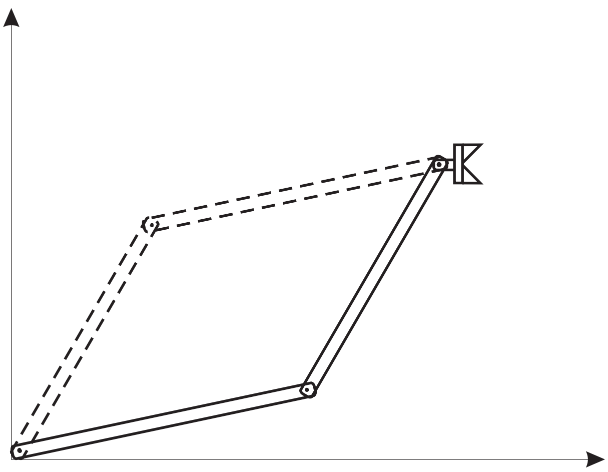

Figura 4.1: Manipulator redundant

Alegerea uneia dintre soluţii depinde de restricţiile impuse de mediul extern şi de elementele constructive ale robotului. Însă, odată ce o soluţie a fost aleasă, aceasta trebuie utilizată cu consecvenţă, în continuare, pentru a evita eventuala deplasare inutilă a robotului între configuraţii.

Metoda euristică de determinare a MGI

I. Se egalează matricea transformării omogene a manipulatorului (modelul geometric direct) cu matricea generală de transformare omogenă (relaţia 4.6). Dacă se doreşte determinarea unei soluţii particulare, matricea transformării omogene a manipulatorului se egalează cu o matrice descriind această poziţie.

II. Se studiază ambele matrici observând dacă:

a. Există elemente ce conţin doar o variabilă;

b. Există perechi de elemente care prin împărţire furnizează expresii cu o singură variabilă. În special se vor urmări împărţirile generând funcţia ***arctangentă***.

c. Există combinaţii de elemente ce pot fi simplificate folosind identităţi trigonometrice.

III. După ce a fost selectat un astfel de element, acesta se egalează cu corespondentul său din cealaltă matrice şi se rezolvă ecuaţia astfel obţinută.

IV. Se repetă pasul **III** până la rezolvarea tuturor ecuaţiilor cu elemente identificate în pasul **II**.

V. Dacă se obţin rezultate redundante sau nesatisfăcător definite acestea se reţin deoparte şi se încearcă obţinerea unor soluţii mai bune. Se preferă obţinerea de soluţii funcţie de vectorul $P = [P_X,\ P_Y,\ P_Z]^T$ şi nu funcţie de vectorii X, Y sau Z deoarece în general se impune poziţia şi nu orientarea.

VI. Dacă nu s-au determinat toate coordonatele robot, se premultiplică ambele părţi ale ecuaţiei matriceale cu inversa matricii transformării primei cuple cinematice obţinându-se un nou set de ecuaţii. Alternativ se poate încerca postmultiplicarea ambelor părţi ale ecuaţiei cu inversa matricii transformării ultimei cuple cinematice.

VII. Se repetă paşii **II** - **VI** până la obţinerea tuturor soluţiilor sau până la epuizarea matricilor de premultiplicat sau postmultiplicat.

VIII. Dacă pentru o variabilă nu s-a obţinut o soluţie corespunzătoare, se poate considera una dintre cele reţinute la pasul **V**.

IX. Dacă nu se poate obţine o soluţie pentru una dintre variabile rezultă că manipulatorul nu poate atinge poziţia respectivă (aceasta este în afara spaţiului de lucru al robotului).

De exemplu pentru manipulatorul cu două grade de libertate din figura 4.2 se poate scrie modelul geometric direct:

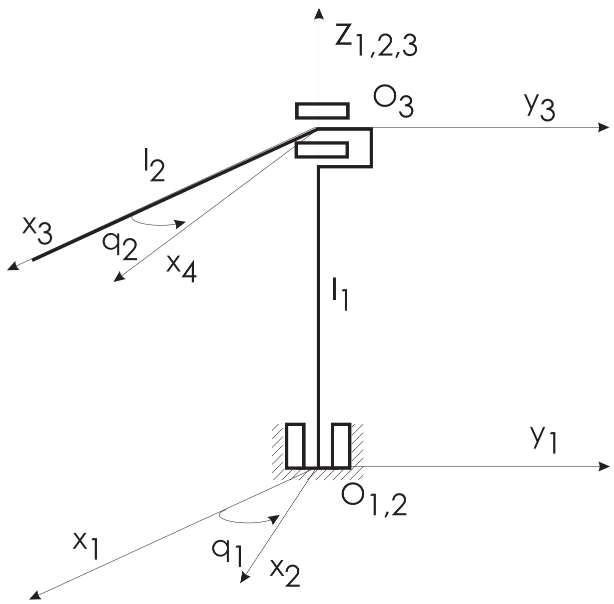

Figura 4.2: Robot RR

$$T_1 = Rot(Z, q_1) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

$$T_2 = Trans(Z, l1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

$$T_3 = Rot(Y, q_2) = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

$$T_4 = Trans(X, l_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

rezultând modelul geometric direct sub forma:

$$T = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 = \begin{bmatrix} c_1 \cdot c_2 & -s_1 & c_1 \cdot s_2 & c_1 \cdot c_2 \cdot l_2 \\ s_1 \cdot c_2 & c_1 & s_1 \cdot s_2 & s_1 \cdot c_2 \cdot l_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & l_1 - l_2 \cdot s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Determinarea modelului geometric invers presupune egalarea matricii de transfer direct (T) cu matricea generală a transformării omogene (T_g) (vezi şi relaţia 1.13):

$$T = T_g \tag{4.6}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \cdot c_2 & -s_1 & c_1 \cdot s_2 & c_1 \cdot c_2 \cdot l_2 \\ s_1 \cdot c_2 & c_1 & s_1 \cdot s_2 & s_1 \cdot c_2 \cdot l_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & l_1 - l_2 \cdot s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_X & Y_X & Z_X & P_X \\ X_Y & Y_Y & Z_Y & P_Y \\ X_Z & Y_Z & Z_Z & P_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Pentru determinarea vectorului coordonatelor robot $q = [q_1,\ q_2]^T$ se construieşte sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} c_1 \cdot c_2 \cdot l_2 &= P_X \\ s_1 \cdot c_2 \cdot l_2 &= P_Y \\ l_1 - l_2 \cdot s_2 &= P_Z \end{cases} \tag{4.8}$$

$$\frac{P_Y}{P_X} = \frac{s_1}{c_1} \implies q_1 = \arctan\left(\frac{P_Y}{P_X}\right) \tag{4.9}$$

Pentru determinarea lui q_2 recurgem la premultiplicarea ambelor părţi ale ecuaţiei matriceale (4.7)cu inversa matricii transformării primei cuple cinematice (pasul **VI**) obţinându-se un nou set de ecuaţii :

$$T_1^{-1} \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 = T_1^{-1} \cdot T_g \tag{4.10}$$

$$\begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & c_2 \cdot l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & l_1 - l_2 \cdot s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} X_X \cdot c_1 + X_Y \cdot s_1 & Y_X \cdot c_1 + Y_Y \cdot s_1 & Z_X \cdot c_1 + Z_Y \cdot s_1 & P_X \cdot c_1 + P_Y \cdot s_1 \\ X_Y \cdot c_1 - X_X \cdot s_1 & Y_Y \cdot c_1 - Y_X \cdot s_1 & Z_Y \cdot c_1 - Z_X \cdot s_1 & P_Y \cdot c_1 - P_X \cdot s_1 \\ X_Z & Y_Z & Z_Z & P_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

rezultând sistemul

$$\begin{cases} c_2 \cdot l_2 &= P_X \cdot c_1 + P_Y \cdot s_1 \\ s_2 \cdot l_2 &= l_1 - P_Z \end{cases} \tag{4.12}$$

$$\frac{l_1 - P_Z}{P_X \cdot c_1 + P_Y \cdot s_1} = \frac{s_2}{c_2} \implies q_2 = \arctan\left(\frac{l_1 - P_Z}{P_X \cdot c_1 + P_Y \cdot s_1}\right) \tag{4.13}$$

4.2 Probleme propuse

1. Se consideră structura de robot cu 3 grade de libertate din figura 4.3 , pentru care $l_1 = 0.5\ m$.

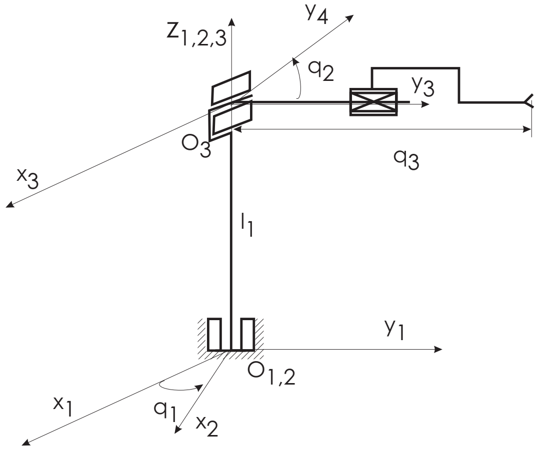

Figura 4.3: Robot RRT

a) Să se determine modelul geometric direct.

b) Să se determine modelul geometric invers.

2. Să se determine modelul geometric direct şi apoi modelul geometric invers pentru structura de manipulare din figura 4.4.

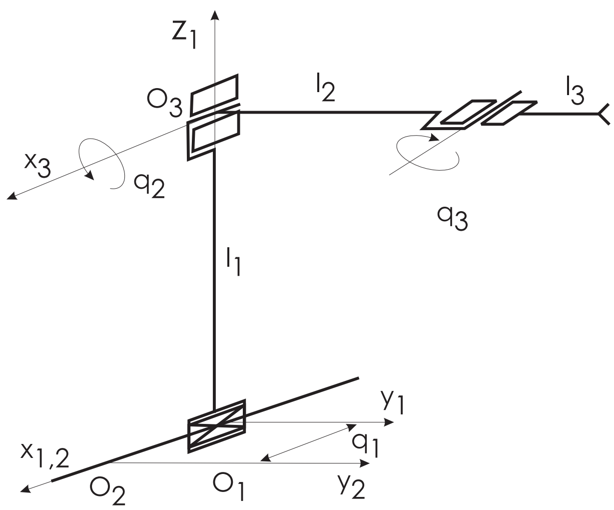

Figura 4.4: Robot TRR