Lucrarea 1

Sisteme de coordonate. Transformări geometrice

Una dintre necesităţile fundamentale în studiul roboţilor este localizarea obiectelor în spaţiul tridimensional. Aceste obiecte pot fi elemente ce alcătuiesc structura fizică a robotului, părţi şi componente pe care acesta le manipulează, scule sau în general orice corp aflat în mediul de lucru al robotului. (vezi figura 1.1).

Aceste obiecte pot fi descrise fundamental dar grosier prin două atribute: poziţia şi orientarea lor. Un aspect de interes imediat ar fi cum se pot reprezenta şi, mai mult, cum se pot manipula matematic aceste proprietăţi.

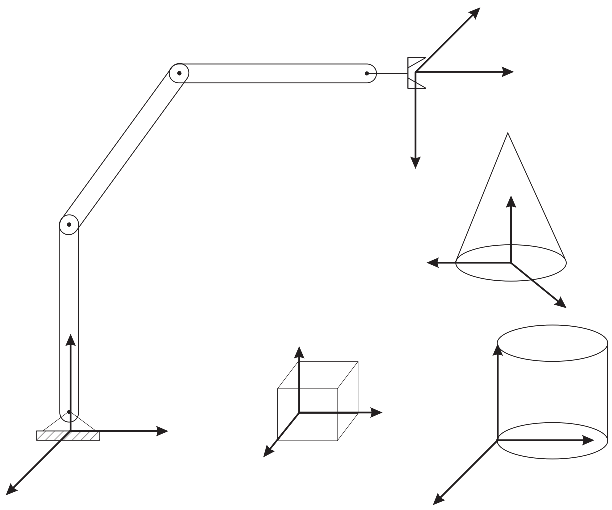


Figura 1.1: Sisteme de coordonate în spaţiul de lucru al robotului

Pentru a descrie poziţia şi orientarea unui solid în spaţiu, îi vom ataşa rigid acestuia un sistem cartezian de coordonate. Din moment ce orice sistem de coordonate poate servi ca un sistem de referinţă în care să se exprime poziţia şi orientarea unui corp, se pune deseori problema schimbării sau transformării acestor atribute ale unui corp dintr-un sistem cartezian în altul. Aceasta lucrare prezintă convenţiile şi metodologia pentru descrierea poziţiei şi orientării, precum şi formalismul matematic folosit la manipularea acestor cantităţi în diverse sisteme de coordonate.

Manipularea folosind roboţi presupune faptul că obiecte şi unelte vor fi deplasate în spaţiu prin folosirea unui mecanism. Acest fapt determină nevoia reprezentării poziţiei şi orientării atât a obiectelor ce vor fi manipulate cât şi a poziţiei mecanismului de manipulare însuşi. Pentru a defini şi a manipula matematic cantităţile ce reprezintă poziţia şi orientarea este necesara definirea unui sistem de coordonate şi a convenţiilor folosite pentru reprezentare.

1.1 Sisteme carteziene de coordonate

În robotica sistemul cartezian *standard* este obţinut prin aplicarea regulii mâinii drepte, şi este prezentat în figura 1.2. Degetul mare de la mana dreapta indica sensul pozitiv pentru axa Z, în timp ce restul degetelor întinse indica sensul pozitiv pentru axa X. Prin flexia degetelor la 90° se obţine sensul pozitiv pentru axa Y. Acesta este şi sensul pozitiv de rotaţie pentru axa Z.

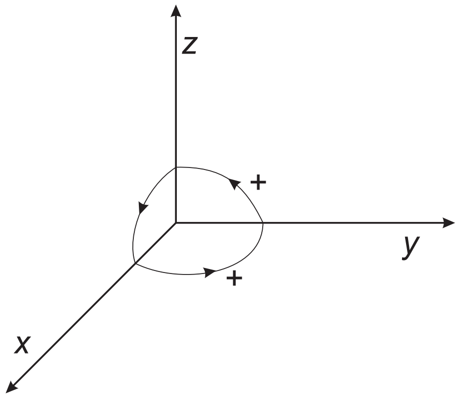
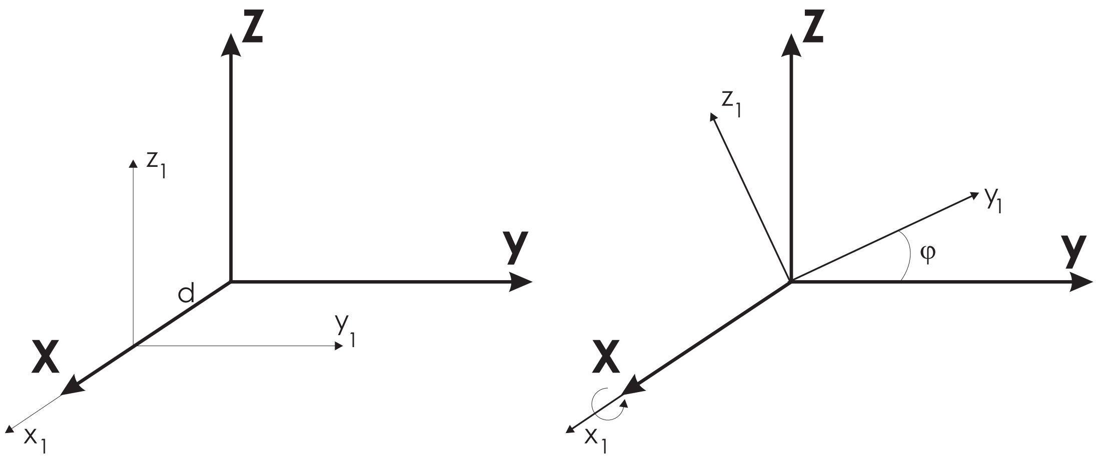


Figura 1.2: Sistemul de coordonate carteziene. Sensul pozitiv pentru fiecare axă

Localizarea unui punct poate fi făcuta folosindu-se coordonatele carteziene ale obiectului exprimate relativ la originea sistemului de coordonate (x_1, y_1, z_1) sau printr-un vector de poziţie p_1. Spre exemplu, poziţia unui paralelipiped intr-un sistem de coordonate poate fi descrisa folosindu-se 8 vectori de poziţie, câte unul pentru fiecare dintre vârfuri. În situaţia în care obiectul se mişca, calculul noii poziţii presupune calcularea unui nou set de 8 vectori de poziţie. Situaţia se poate complica şi mai mult dacă este vorba de obiecte neregulate (caz în care pentru fiecare poziţie a obiectului poate fi necesară calcularea a mai mult de 8 vectori de poziţie) sau în cazul în care avem mai multe obiecte care se mişca independent unele faţă de altele. O metoda alternativa şi mai eficienta consta în ataşarea fiecărui obiect a unui sistem de coordonate propriu, care se deplasează odată cu obiectul. Dacă solidul este rigid (deci nedeformabil), poziţia fiecărui punct aparţinând obiectului se păstrează faţă de sistemul propriu al obiectului indiferent de mişcarea pe care acesta o efectuează. În acest fel, problema calculului mişcării unui obiect se reduce la calculul relaţiei dintre doua sisteme de coordonate (sistemul de referinţă şi sistemul propriu obiectului). Mai mult, aceasta relaţie permite calculul noii poziţii a oricărui punct aparţinând obiectului de interes. Poziţia punctului P este descrisă de coordonatele sale carteziene: $P(x, y, z)$.

1.2 Transformări elementare. Transformări omogene.

Un solid rigid, şi inerent sistemul propriu de coordonate are 6 grade de libertate, sau 6 moduri independente în care obiectul se poate mişca. Aceste transformări elementare sunt sunt:



(a) *Translaţie* (b) *Rotaţie*

Figura 1.3: Transformări elementare

1. Translaţie după axa X. Dacă translaţia are loc cu o distanţă 'd', aceasta se notează: $Trans(X, d)$. (vezi şi figura 1.3(a))
2. Translaţie după axa Y, notată $Trans(Y, d)$.
3. Translaţie după axa Z, notată $Trans(Z, d)$.
4. Rotaţie în jurul axei X, notată $Rot(X, \varphi)$. Sensul rotaţiei pentru valori pozitive ale lui φ este dat de regula mâinii drepte. (vezi şi figura 1.3(b))
5. Rotaţie în jurul axei Y, notată $Rot(Y, \varphi)$.
6. Rotaţie în jurul axei Z, notată $Rot(Z, \varphi)$.

O mişcare a unui solid rigid fata de un sistem de coordonate poate fi descrisă ca o succesiune de rotaţii şi translaţii elementare efectuate de sistemul ataşat solidului fata de sistemul de referinţă. Pentru reprezentarea oricărei translaţii în spaţiul tridimensional ar fi suficienţi 3 parametri, astfel că reprezentarea matriciala a unei translaţii poate fi făcută folosind un vector cu 3 elemente $w = [w_x, w_y, w_z]^T$. O astfel de transformare este afină, dar nu este o transformare liniară.

Exista mai multe metode de reprezentare a unei rotaţii. Una dintre cele mai populare forme este matricea de rotaţie. Există şi alte forme mai concise pentru exprimarea unei rotaţii, cum ar fi unghiurile Euler, despre care se va discuta intr-o lucrare următoare.

Considerând un sistem cartezian căruia i se aplică o rotaţie după o axă arbitrară, prin exprimarea orientării noului set de axe (reprezentat de versorii u, v, w) faţă de sistemul original (reprezentat prin x, z, y) se consideră că rotaţia este complet descrisă. Cei trei versori u,v şi w care formează noul sistem de coordonate sunt reprezentaţi fiecare de trei componente rezultând astfel un total de 9 parametri pentru reprezentarea unei rotaţii.

$$A = \begin{bmatrix} \hat{u}_x & \hat{v}_x & \hat{w}_x \\ \hat{u}_y & \hat{v}_y & \hat{w}_y \\ \hat{u}_z & \hat{v}_z & \hat{w}_z \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Fiecare dintre elementele matricei reprezintă cosinusul unghiului dintre o axa obţinută în una rotaţiei şi una dintre axele de referinţă (x, z sau y) de aceea forma din 1.1 se mai numeşte şi *matricea cosinusului direcţiei*[1]. Matricea de rotaţie este o matrice ortogonală, cu elemente reale şi cu determinantul +1. Valorile proprii ale matricei sunt $\left\{1, e^{\pm i \cdot \theta}\right\}$ unde e este versorul corespunzător dreptei după care se face rotaţia şi θ este unghiul de rotaţie după această dreaptă. În cazul în care rotaţia se face cu un unghi φ după una dintre axele elementare (x, y sau z), matricea cosinusului direcţiei are următoarele forme:

- Rotaţie după axa x: $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$
- Rotaţie după axa y: $A_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$
- Rotaţie după axa z: $A_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Astfel, o matrice de 3×3 poate fi utilizată pentru a descrie o rotaţie, dar nu şi pentru translaţie.

Coordonatele omogene au fost introduse de către Möbius pentru a putea permite transformărilor afine să fie reprezentate sub formă matricială. Mai mult, coordonatele omogene permit lucrul în mod unitar atât cu transformări de rotaţie cât şi cu transformări de translaţie.

În principiu, coordonatele unui punct din spaţiul n-dimensional sunt reprezentate printr-un vector de dimensiune $n+1$ prin adăugarea unui factor de scalare constant nenul. Coordonatele omogene ale unui punct din spaţiul 3D se obţin din coordonatele sale carteziene prin adăugarea unui factor de scalare, care pentru aplicaţiile din robotică este 1, deci $P(x, y, z)$ are coordonatele omogene:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

[1] Direction Cosine Matrix – DCM

Transformările geometrice se reprezintă în acest caz sub formă matriceală (matrici de dimensiune 4×4):

$$T = \left[\begin{array}{c|c} 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ \hline 1 \times 3 & 1 \times 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} & rotatie & & \begin{array}{c} trans- \\ la- \\ tie \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} X & Y & Z & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

unde $X = \begin{bmatrix} X_X \\ X_Y \\ X_Z \end{bmatrix}$ reprezintă direcţia axei X a noului sistem de coordonate,

$Y = \begin{bmatrix} Y_X \\ Y_Y \\ Y_Z \end{bmatrix}$ reprezintă direcţia axei Y a noului sistem de coordonate,

$Z = \begin{bmatrix} Z_X \\ Z_Y \\ Z_Z \end{bmatrix}$ reprezintă direcţia axei Z a noului sistem de coordonate iar

$P = \begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \\ P_Z \end{bmatrix}$ reprezintă poziţia originii noului SC (sistem de coordonate).

Matricea T descrie astfel poziţia (prin vectorul P) şi orientarea (prin vectorii X, Y, Z) noului sistem de coordonate faţă de sistemul de referinţă. Prin compunerea (multiplicarea) matricilor de transformare omogenă se obţine tot o matrice de transformare omogenă.

Transformărilor geometrice elementare le sunt asociate următoarele matrici de transformare omogenă:

$$Trans(X,a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

$$Rot(X,\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

$$Trans(Y,a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

$$Rot(Y,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

$$Trans(Z,a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

$$Rot(Z,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

O matrice a unei tranfsormări poate fi privită în mai multe feluri:

- ca o transformare de la un sistem de coordonate la altul;
- ca o descriere a originii şi orientării noului sistem de coordonate faţă de sistemul de referinţă;
- ca o descriere a deplasării unui obiect dintr-o locaţie (sistemul de referinţă) în alta (noul sistem de coordonate);
- ca o metodă ce permite calculul poziţiei unui punct aparţinând unui obiect, faţă de un sistem de referinţă, cunoscându-se poziţia acestuia faţă de noul sistem de coordonate (teorema lui Charles vezi figura1.4):

$$^{R}q = ^{R}T_{N} \cdot ^{N}q \tag{1.9}$$

unde:

^{R}q este vectorul de poziţie al punctului în sistemul R (de referinţă);

$^{R}T_{N}$ este transformarea noului sistem de coordonate faţă de sistemul de referinţă, numită şi *transformare directă*. Cu alte cuvinte, este transformarea care s-a aplicat sistemului R pentru a se ajunge la sistemul N.

^{N}q este vectorul de poziţie al punctului în sistemul propriu N(noul sistem de coordonate).

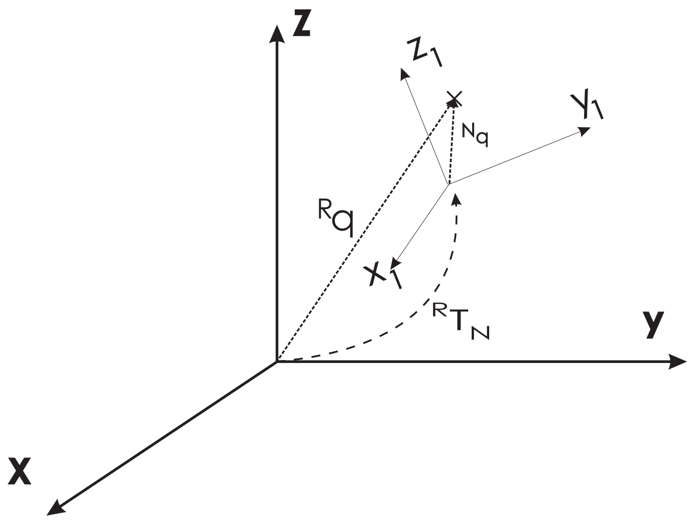


Figura 1.4: Calculul poziţiei unui punct în sistemul de referinţă folosind transformarea directă si coordonatele punctului în sistemul propriu

1.3 Compunerea transformărilor

Aşa cum s-a arătat, o transformare geometrică poate fi descompusă într-o succesiune de rotaţii şi translaţii elementare. Compunerea unei succesiuni de transformări geometrice elementare într-o transformare generală se face astfel:

- Folosind **PREMULTIPLICAREA** matricilor de transformare omogenă dacă transformările se fac raportat la sistemul de axe de referinţă (**transformări absolute**). În aceste condiţii, dacă avem o succesiune de n transformări absolute ($T_i, \quad i = \overline{1 \dots n}$), matricea transformării se poate scrie:

$$T_A = \prod_{i=n}^{1} T_i = T_n \cdot T_{n-1} \cdot \ldots \cdot T_1 \tag{1.10}$$

- Folosind **POSTMULTIPLICAREA** matricilor de transformare omogenă dacă transformările se fac raportat la noul sistem de axe (sistemul obţinut ca urmare a ultimei transformări) (**transformări relative**). În aceste condiţii, dacă avem o succesiune de n transformări relative ($T_i, \quad i = \overline{1 \dots n}$), matricea transformării se poate scrie:

$$T_r = \prod_{i=1}^{n} T_i = T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_n \tag{1.11}$$

Cu ajutorul transformării geometrice directe se poate determina poziţia unui punct în sistemul de axe de referinţă ${}^{R}q$ dacă se cunoaşte poziţia acestuia într-un alt sistem de axe ${}^{N}q$ şi transformarea geometrică directă ${}^{R}T_N$. Dacă se doreşte aflarea ${}^{N}q$ fiind date ${}^{R}q$ şi ${}^{R}T_N$ se procedează astfel:

$${}^{R}q = T \cdot {}^{N}q \rightarrow T^{-1} \cdot {}^{R}q = T^{-1} \cdot T \cdot {}^{N}q \rightarrow {}^{N}q = T^{-1} \cdot {}^{R}q \tag{1.12}$$

Deci transformarea geometrică inversă este descrisă de inversa matricii de transformare directă.

Notând:

$$T = \begin{bmatrix} X_X & Y_X & Z_X & P_X \\ X_Y & Y_Y & Z_Y & P_Y \\ X_Z & Y_Z & Z_Z & P_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

se poate arăta că inversa unei matrici de transformare omogenă în forma 1.13 este:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} X_X & X_Y & X_Z & -P_X \cdot X_X - P_Y \cdot X_Y - P_Z \cdot X_Z \\ Y_X & Y_Y & Y_Z & -P_X \cdot Y_X - P_Y \cdot Y_Y - P_Z \cdot Y_Z \\ Z_X & Z_Y & Z_Z & -P_X \cdot Z_X - P_Y \cdot Z_Y - P_Z \cdot Z_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

1.4 Probleme propuse

1. Se dă punctul de coordonate $P(1,2,3)$. Acesta este supus, în ordine, următoarelor transformări: $Trans(X,4)$, $Trans(Y,-4)$, $Rot(X,90°)$, $Trans(Z,4)$, $Rot(Y,90°)$. Să se determine coordonatele noului punct dacă se consideră:

a) Transformări absolute;

b) Transformări relative;

2. Se consideră amplasarea ansamblului **A** si a blocului **B** din figura 1.5. Se doreste plasarea blocului **B** peste ansablul **A** astfel încât linia ***rs*** coincide cu linia ***pq*** iar sistemele proprii de coordonate sunt complet suprapuse:

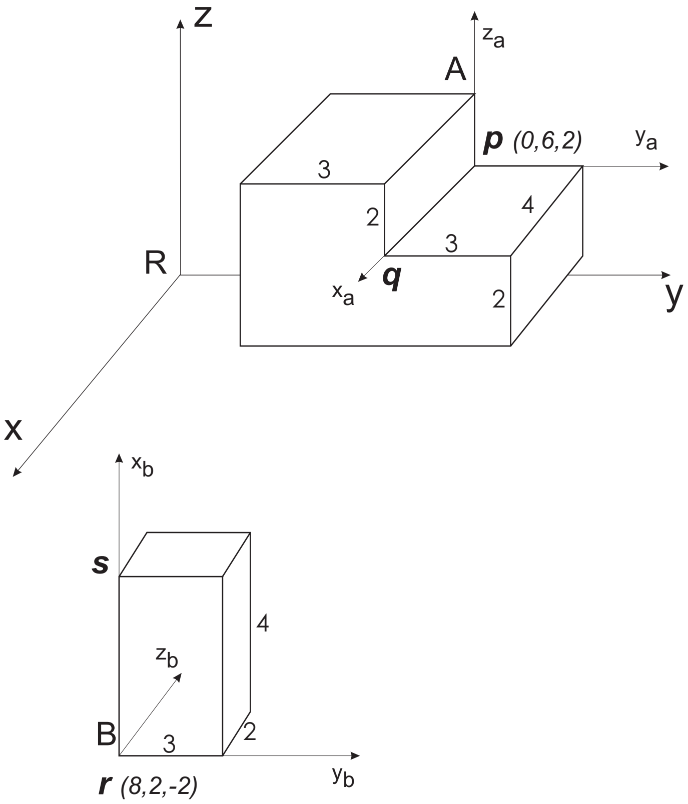


Figura 1.5: Blocul **B** se suprapune peste ansablul **A** astfel încât linia ***rs*** coincide cu linia ***pq***

a) Ce transformare trebuie aplicată blocului **B** pentru a ajunge ñ poziţia de asamblare?

b) Care este poziţia punctului ***s*** în sistemul de referinţă, în sistemul propriu şi în sistemul ansamblului **A**, înainte de asamblare?

c) Care este poziţia punctului ***s*** în sistemul de referinţă după efectuarea asamblării?